Digitized by Google

BIBLIOTECA
COMPLUTENSE.
E. 4 C. 1 N. 1

1 - 1 - 6

Digitized by Google

DER
N° 15439

Digitized by Google

Digitized by Google

R.P. CL. FR. MILLIET

DECHALES

E SOCIETATE JESU

CURSUS SEU MUNDUS

MATHEMATICUS

UNIVERSAM MATHESIN

QUATUOR TOMIS COMPLECTENS.

BIBLIOTECA

Digitized by Google

INDEX TRACTATUUM

Qui in toto Opere continentur.

IN TOMO PRIMO.

TRACTATUS Procem. de Progreſſu Matheſeos, & de illuſtribus Mathematicis.
TRACT. I. Euclidis, Libri XIV.
II. Theodoſii ſphærica.
III. De ſectionibus Conicis.
IV. Arithmetica.
V. Trigonometria.
VI. Algebra.
Hypotheſeon Carteſianarum refutatio.

IN TOMO SECUNDO.

VII. Geometria practica.
VIII. Mechanices.
IX. Statica.
X. Geographia.
XI. De Magnete.
XII. Architectonica civilis.
XIII. Ars tignaria.
XIV. De lapidum ſectione.

IN TOMO TERTIO.

XV. Architectura militaris.
XVI. Hydroſtatica.
XVII. De Fontibus & Fluviis.
XVIII. De machinis Hydraulicis.
XIX. De Navigatione.
XX. Optica.
XXI. Perſpectiva.
XXII. Catoptrica.
XXIII. Dioptrica.

IN TOMO QUARTO.

XXIV. Muſica.
XXV. Pyrotechnia.
XXVI. Aſtrolabium.
XXVII. Gnomonica.
XXVIII. Aſtronomia.
XXIX. Aſtrologia.
XXX. Appendix ad Aſtronomiam, ſeu Tract. de Meteoris.
XXXI. Kalendarium.

Digitized by Google

51
D 33c

R. P. CLAUDII FRANCISCI MILLIET DECHALES CAMBERIENSIS

E SOCIETATE JESU

CURSUS

SEU

MUNDUS MATHEMATICUS.

TOMUS PRIMUS

COMPLECTENS TRACT. DE PROGRESSU MATHESEOS ET DE Illuſtribus Mathematicis, Euclidis Libros XIV, Theodoſii ſphærica, Sectiones Conicas, Arithmeticam, Trigonometriam, Algebram, & reſutationem Hypotheſeon Carteſianarum.

Editio altera ex Manuſcriptis Authoris aucta & emendata, operâ & ſtudio R.P. AMATI VARCIN ejuſdem Societatis.



LUGDUNI,
Apud ANISSONIOS, JOAN. POSUEL & CLAUD. RIGAUD.

M. DC. LXXXX.

CUM PRIVILEGIO REGIS.

UNIVERSIDAD CENTRAL
BIBLIOTECA
DE LA FACULTAD DE JURISPRUDENCIA

Digitized by Google

Digitized by Google

VICTORI AMEDEO II SABAUDIÆ DUCI MAXIMO,

Subalpinorum Principi Potentiſſimo, Cypriorum Regi Auguſtiſſimo.

QUOD Opus Auguſto parenti tuo CAROLO EMANUELI II. ante quindecim annos ab auctore oblatum, publicum extitit monumentum & obſequii in maximum, & grati animi in beneficentiſſimum Principem, idem ut numeris omnibus abſolutius offerri poſſet, emendatum, & tertia ſui parte minimùm auctius, REGIÆ TUÆ CELSITUDINI Princeps Auguſtiſſime, eadem officiorum ratione repræſento.

Faciunt Principe ſummo dignæ virtutes quæ in te univerſæ confluxerunt, ut tibi qui homini deferri poſſunt, omnes honores debeantur; facit operis jam toto ferè terrarum orbe ſparſa celebritas, & commendatio, ut non indignum videatur, quod tanto Principi offerri poſſit.

Ea in Principatus quod tui eſt juris adminiſtratione ſapientia commendaris, quam cùm Reges pauci, ac Principes moribus ſuis exprimant, meritò tibi omnium laudes, admirationemque conciliat. Et quidem onus imperii quod ardui, durique laboris eſt, tuis unius viribus in adoleſcentiæ flore ſuſtines; ærarii rationes, armorum apparatus, judicia, commerciorum cum exteris pactiones, negotiorum privatorum cum tuis, cum Magnis Regibus, ac Principibus legationes, tua gubernatione tractantur, neque pars ulla eſt Reipublicæ, cui per te ipſum præſideas.

UNIVERSIDAD CENTRAL BIBLIOTECA DERECHO
Digitized by Google

Quo ſe importuno rerum pondere, maximè in prima, & ad otium deliciaſque proclivi ætate, cum ſe privati quorum minus gravia ſunt negotia non raro liberent, Principum autem plerique in Miniſtrorum curam conferant; id tu quod tui muneris proprium eſſe ducas, ita per te gerendum ſuſcipis, ſuſceptum autem aſſidua contentione verſas, ut qui tecum in curarum partem, atque oneris aſſumuntur, nihil niſi per te digeſtum, atque ordinatum adminiſtrent. Quod cum facis tuæ gloriæ primum ſervis, deinde publicæ quoque felicitati.

Et verò aſſiduâ illâ gubernationis contentione, partes tu primum imples quæ Principis ſunt præcipuæ, cùm Reipublicæ corpus regere, officij illius ſit proprium ac ſingulare, qui Rector illius eſt Dei omnia adminiſtrantis providentiâ conſtitutus. Ut enim caput, quod propterea oculis, auribuſque ad proſpicienda, declinandaque corporis mala inſtructum eſt, & à natura comparatum, membra illius dirigit, & ad officia quæ ſingulorum ſunt adhibet; ita Princeps officii ſui, munerisque ratione propria, quibus Præfectus à Deo ſubditos, ad munia quæ ſunt ſingulorum admovet.

Sed perpetuo illo labore ſuo REGIA TUA CELSITUDO *publicæ quoque ſervit felicitati, beata enim ſunt, ac pacata regna quæ Principum ſuorum nutu, miſera verò quæ eorum qui gratia in partem adminiſtrationis Reipublicæ aſciti, gubernatione temperantur. Sive enim id ſuperbiæ tribuendum, ſive invidiæ, Miniſtrorum imperiis populi vel imprimis tractabiles parere dedignantur; quorum cùm juſſa detrectant, & conſilia reprehendunt, exitiales regnis turbæ, ac ſeditiones excitantur. Nimirum quorum dominium eſt, Reges ac Principes, publicam rem ut ſuam, adminiſtri ut alienam tractant; ſed cùm ad res ſuas charitatem adhibeant ſinguli, ad alienas autem cùm tractantur faſtidium adhæreſcat; hinc fit ut quidquid ſupremi Principes per ſeipſos moliuntur, ac cogitant, id populi ſumma facilitate approbent, quidquid agunt ij quos in curarum partem aſſumunt regnorum adminiſtri, in deteriorem partem interpretentur.*

Molliter imperant, gubernationis publicæ, auctoritatiſque Principum queruntur nervos debilitari; obſequium exigunt, paulò ſeverius, ſævitiam, atrocitatemque imperiorum accuſant; geruntur bella, provincias in periculum adduci expoſtulant; pacis fœdera ſanciuntur, gloriæ, utilitatibuſque gentis non ſatis conſuli indignantur; quieſcunt, otium indecorum; turbas inter vicinos excitant, fidem frangi, felicitatemque publicam in periculum trahi, criminantur.

Sed cùm ad ditionum ſuarum gubernationem, manum Principes admovent, ſuſcepta quæcumque tandem illa ſint, à populis conſilia commendantur, cùm divinæ partem mentis illos hauſiſſe intelligant, conſiliorum autem approbationem ac legum, amor, obſequiumque eorumdem conſequuntur. Quid plura pacatè, feliciterque à ſuis, turbulentè, & infeliciter à Miniſtris qui alieni ſunt imperia adminiſtrantur.

Quâ

Digitized by Google

Quâ ſapientiâ tuâ, politiciſque quibus aliis præſtas artibus, incredibili tuorum bono perfectum eſt, ut dum Europæ regna omnia, ac Provinciæ, atrocis belli incendio conflagrant; dum Germaniæ, Belgio, Hungariæ, Illyrico, Græciæ, Hiſpaniæ, ab exercitibus infertur vaſtitas, ditio interim tua, & quidem quà latè patet, ſumma pace, ac tranquillitate perfruuntur.

Quæ cùm dico, incidit dubitatio, an REGIÆ TVÆ CELSITVDINI, *tam ſapienter gubernanti gratulari, an de pace, otio, ſecuritate de litterarum noſtrarum quarum fruimur voluptate, de Religionum cerimoniis, atque honore, quæ fœlici gubernatione tua nobis ſunt parta gratias agere debeamus. Vtrumque certè debemus, & gratulationem ſummo Principi, qui à Provinciis, ditionis ſuæ omnibus mala quibus aliæ confliƈtantur ſapientia ſua depulerit; & gratiarum aƈtionem beneficentiſſimo, cujus gubernatione fœlicitate ſumma perfruimur.*

Jam huic ſummæ ſapientiæ tuæ non diſſimilis quâ præſtas militaris fortitudo, quæ cum duplici bellorum genere contineatur, civilibus quæ ſubditos inter, & Principes, externis, quæ geruntur cum iis quibuſcum nihil nobis commune eſt; utroque tu fortiter geſto, gloriam ſummam adeptus es. Primum id fuit quod cum Montis Regalis incolis ſuſceptum à te, atque perfeƈtum eſt; quod eo periculoſius fuit, quod in eo tuorum hinc atque inde armis certatũm eſt. At illud ita adminiſtratum eſt, ut qui turbas excitaverant, conſiliis tuis, apparatu militari, paratáque jam in regionem illam per te impreſſione, intellexerint, iis qui fortem adeo haberent Principem, ſi exitium ſuum vitare vellent, legibus ſibi per illum poſitis obtemperandum eſſe. Hoc autem cum Calvinianis partim Germanis, partim Gallis, qui in ditionem tuam irruperant, ita eſt geſtum; ut vel fugati fuerint, vel internecione deleti, nullo in illis vallibus qui errorem retinere poſſet relicto, quas quingentis annis incoluerant.

Quod bellum cum à perduellibus illis religionis nomine gereretur, quâ nihil ad commovendos populos accommodatius, patriæ, tibique PRINCEPS FORTISSIME, *ab iis quorum communis eſſet cum ſeditioſis illis rebellibuſque cauſa, à Germanis, ab Anglis, à Batavis; ſed maximè hinc ab Helvetiis, inde à Gallis vicinis, qui in illo ditionis tuæ limite, tot annis, ſub Principibus pluribus, hæreſim ac rebellionem aluerant, timebamus. Quas turbas tota Europa excitaſſent, quàm atrocia bella quo furore geſſiſſent; quàm copioſum ſanguinem ubi fixiſſent ſedes, fudiſſent, recordabamur. Sed ſollicitudinem illam, ac metum, nobis,* REGIÆ TVÆ CELSITVDINIS *alta mens, ac fortitudo paucis diebus abſtulit. Irrupiſti hinc cum tuo, inde cum fœderato milite, cum parato hoſte, & ad rem bene agendam reƈtè inſtruƈto conſeruiſti manus, viciſti; ac demum pulcherrima reportata viƈtoria perfeciſti, ut nullus tibi ſubditus*

ſedes patrias, penates, ac domos retinere poſſet, qui retentâ hæreſi Eccleſiæ eſſet inimicus.

Sperabamus à te ſumma, PRINCEPS SAPIENTISSIME, *quem ſagacitate ingenij, judicij, conſiliorumque maturitate, politicis artibus ad recte rem tuam regendam accommodatis, majores tuos nulli fortitudine, ac ſapientiâ ſecundos vincere videbamus; ſed confecto illo formidoloſo bello, cui neque in ditione tuâ iidem fortiſſimi Principes, neque ſuâ Cæſares in Germaniâ, & Hungariâ, neque Hiſpaniæ Reges in Belgio, finem imponere potuiſſent, longè expectationem noſtram ſuperaſti. Expugnatæ enim ſunt inſuperabiles perduellium illorum arces, quæ cœlum ipſum tangere videbantur; ſolo æquata propugnacula quibus ſe perduellio tutiſſimam arbitrabatur, furioſorum copiæ diſſipatæ; quid plura in illam opinionem ſerò tandem inducti, non poſſe domos ſuas, bona, ac patriam Principis ita comparati ſubditum ullum retinere, qui non eadem cum illo religione cenſeretur.*

Quâ plenâ reportatâ victoriâ perfectum eſt, ut te quem omnes Principes qui tecum fidei Romanæ cultores ſunt, perſpectum habebant eſſe fortiſſimum, religioſiſſimum quoque eſſe intelligerent. Cùm enim religionum, ac cæremoniarum honorem tria contineant, ſacrificium, Catholica dogmata, ſectatorumque ejuſdem fidei charitas, ac conſenſio, ea poſtliminio tandem ſunt diſſipatis erroribus, disjectoque ſchiſmate, REGIÆ TUÆ CELSITUDINIS *operâ, politiciſque curis ac fortitudine ditioni tuæ reſtituta.*

Et primò ſacrificium ſine quo Dei cultus eſt nullus, locis illis unde pluribus jam ſeculis ejectum, atque exturbatum erat, eſt redditum; quo munere ſimul Dei, ſimul gloriæ tuæ conſuluiſti. Nam cùm ij Reges, ac Principes honorem ſummum, ac laudem adepti ſint, qui ditionum ſuarum Provincias commerciorum ratione locupletarunt, qui rudes atque incultos populos mechanicis artibus excoluere, qui gentem ſibi ſubditam magnorum virorum operâ ad humaniores litteras, ſcientiaſque omnes inſtituerunt; eum qui cæremonias, cœleſtem doctrinam, qui Dei cultum, ſacratiſſimaſque religiones in regni ſui, ditioniſque non contemnendam partem induxit, non hominibus quorum munera illa propria eſſe non poſſunt, ſed Deo ſimillimum eſſe judico.

Jam dogmata Theologica in excitatis per te templis, lociſque ſacris, magno populi concurſu, ac frequentiâ, ſummo dicentium honore publice exponuntur, de veris religionibus, ſacriſque doctrinis ſermones, in domibus, in foro, in agris inſtituuntur, ſacri homines quod Apoſtoli, quod ſancti Patres docuerunt ſecuritate maximâ interpretantur; dum interim disjectæ ſunt peſtilentiæ Cathedræ, ſilent errorum, nequitiæque præcones, hæreſis autem ne in latebris quidem ſecura eſt.

Denique idem de fide, religionibuſque ſentientium, diſſipatis no-

varum

varum doctrinarum diſſidiis cor unum eſt, eademque in omnibus animorum conſenſio.

Dignum quoque opus quod REGIÆ TUÆ CELSITUDINI *offeratur. Habent enim ad vitæ cultum, & commoditates, uſum maximum, commendationem habent ſummam, admirabilitatem habent Mathematicæ diſciplinæ; ut hoc doctiſſimo ſeculo parum à litteris, ſcientiiſque inſtructus eſſe videatur, qui non in doctrinis illis ſit verſatiſſimus.*

Et primò uſum habent, & quidem tum belli, tum pacis tempore. Injuſtæ eſſent, & fallaces bonorum hæreditatumque diviſiones niſi illis perſciendis Geometria præſideret; ſervitus hominum in ponderum torquendis molibus in infinitum creſceret, niſi id Mechanicarum machinarum ope minueretur; emptiones, venditiones quibus res diſtrahuntur ad pondus, non ſine vel ementium jacturâ, vel vendentium culpâ fieret, niſi contractibus illis Statica moderaretur. Efficit Geographia ne pars ulla orbis terrarum nobis ignota ſit; ut habitemus non commodè tantum, ſed etiam pulchrè, ac magnificè Architectura civilis; ut quod Provinciarum ſingularum eſt proprium, aliiſque deeſt, omnium commune ſit, Ars Navigandi. Jam deducendis fontibus, derivandis aquis, continendis intra alveos ſuos fluminibus, laborat Hydroſtica. Ac demum Hydrauticæ machinæ, Perſpectiva, Catoptrica, Muſica, deliciis hominum ſerviunt; ut jam non palatia modo Principum, atque optimatum villæ, ſed ne quidem privatorum ædes, ſatis ad uſus vitæ comparatæ eſſe videantur, niſi Mathematicarum artium ornamentis inſtructæ ſint.

Sed non pacis modo, verum etiam bellorum gerendorum rationibus accommodatæ ſunt. Nullæ arces muniri poſſunt commodè, quibus pauci tutò plurium aggreſſiones, atque impetum ſuſtinent, quin earum à Matheſi deſcriptio fuerit ex artis hujus & diſciplinarum ratione inſtituta; nullæ obſidiones urbium informari, quin foſſas, cuniculos, aggeres, doctrinæ iſtæ delinearint.

Jam cùm à certitudine quam ingenerant, à methodo, mirabilique propoſitionum nexu quo res conficiunt commendationem adeptæ ſint, à difficultate quâ ſummâ ſunt circumſcriptæ admirabilitatem habent. Cùm enim in ſcientiis aliis præſtent plurimi, Theologi magno numero cenſeantur; longè plures Philoſophi, nulla urbs Jureconſultos, nulla Medicos artis ſuæ ſcientes non habeat, vix in centum urbibus diſciplinarum Mathematicarum apprimè intelligentem unicum deprehendimus. Nimirum ut de his artibus dictum ſit, quod eſt à Tullio pronunciatum de eloquentia, majus eſt hoc quam homines opinantur, & pluribus ex artibus ſtudiiſque collectum; ut mirari deſinamus in his doctrinis paucitatem, cum illis univerſis conſtent, quibus in ſingulis elaborare permagnum eſt.

Effecit Majorum tuorum profuſus in litteratos favor, ac libera- lium,

litas, ut velut ad ſignum illuſtriſſimum informandum, plura doctorum virorum ſydera in hoc artium, ſcientiarumque Allobrogico cœlo coaluerint. Eluxere in Theologicorum dogmatum, ſacrorumque Canonum interpretatione, in facultatibus illis, ſcientiiſque Principes Oſtienſis, Angelus, Aſtenſis, Sylveſter Prieras, Anaſtaſius Germonius Tarantaſienſis Archiepiſcopus, Javellus, Theophilus Raynaudus, Fichetus, Gonterius. Neque illis in ſcientia juris obſcuriores extitere Aymo Cravetta, Antonius Theſaurus, Octavius Cacheranus, Godefridus à Ravo, Cagnolus, Oſaſcus, Natta, Amedeus à Ponte; ac demum Antonius Faber qui peritorum judicio in hac parte principatum erudito hoc noſtro ſeculo fremente nequicquam invidiâ occupavit. Et quidem cùm illum Lutetiæ Pariſiorum honoris cauſa Chriſtianiſſimo Regi Senatus Civitatis illius Princeps obtuliſſet, pulcherrimâ præfatione eum ſe Majeſtati ſuæ juriſconſultum ſiſtere pronunciavit, qui quotquot viverent ſcientes juris longiſſimo intervallo ſuperaret. Neque eodem in cœlo Grammaticorum, ac Poëtarum, etiam vernaculorum minora ſydera defuerunt. Illos omnes ſingulari ſuâ gratiâ à vulgo Principes ſapientiſſimi honoribus, ac beneficientiâ ſejunctos eſſe voluerunt, ac cæteris ſuis ſubditis officiis eſſe dignitatibuſque honeſtiores, qui ſuis in Rempublicam, privatoſque meritis eoſdem vincerent.

Quamobrem cùm litteratorum genus omne REGIÆ TUÆ CELSITUDINIS *Proavi ſummo honore, benevolentiaque complexi ſint; ei qui quod pauci poſſunt ſumma ſit gloria ſcientiarum difficillimarum, reconditiſſimarumque comprehenſione conſecutus, quam apud te ambit gratiam, patrociniumque non negabis.*

Quod cùm facies, cujus alumnus, atque ornamentum erat in partem ejus, quam à te conſequetur gratia, veniet Collegium Camberienſe; quam precibus ſummis implorat nomine omnium

REGIÆ TUÆ CELSITUDINIS,

Humillimus, obſequentiſſimuſque ſervus
ac ſubditus AMATUS VARCIN,
è Societate JESU.

PRÆFATIO

Digitized by Google

PRÆFATIO
AD LECTOREM,

QUA SCOPUS AUTHORIS EXPONITUR, Operiſque diviſio traditur.

PRODIERANT jam antè aliquot annos, R. Patris Claudii Franciſci Dechales Opera Mathematica tribus voluminibus comprehenſa, multaque ille ab eo tempore vel excogitaverat ſuo marte, vel inventa ab aliis perfecerat: cùm admonitus eſt parari alteram ſuorum operum editionem; ac proindè videret, numquid additum aut immutatum vellet. Erat illi jam tum ex lucubrationibus ſuis quod juſto volumini ſatis eſſe potuiſſet, ſed ille majus aliquid cogitans, opus univerſum de integro recognoſcendum ſuſcepit, & ab elementis exorſus ſtatuit ire per ſingula capita, nihil prætermittens quod à ſe proponi diſtinctiùs, aut explicatiùs dici poſſe ſperaret, aut meliori ordine collocari. Inſtabat operi, vel ut veriùs dicam, rem jam propè totam confecerat; cùm ex continenti meditatione, ex diuturno legendi, ſcribendique labore gravem morbum concepit, quo abſumptus eſt. Conciderat immaturâ authoris morte, omnis rei perficiendæ & facultas & ſpes, niſi beneficio Illuſtriſſimi Viri D. Franciſci Amedei Dechales Tarentaſienſis Archipræſulis, ad quem demortui fratris ſui ſcripta pervenerant, cuncta denuò eſſent reſtituta in integrum. Tradidit vir Clariſſimus ſummâ benignitate ſcripta quæcumque habuit.

Multa in his reperta ſunt nova: In Geometricis, uſus centri gravitatis ad menſuram corporum rotundorum latiùs ab ipſo, quàm à primo inventore Guldino, promotus; Egregium inventum P. Gregorii à ſancto Vincentio de progreſſionibus geometricis faciliori viâ demonſtratum, & à tricis quibus involvebatur expeditum. In Mechanicis motus localis, elateria, vis percuſſionis directæ, reflexæ, determinatio centri gravitatis in variis corporibus. In Aſtronomicis meteora. Multa pluribus in locis quæ ad Phyſicam pertinent, qualis eſt refutatio hypotheſeon Carteſianarum, & alia his ſimilia quæ paſſim in operis decurſu ſparſa reperiuntur. Inter cætera verò inſignis quidam liber quem de progreſſu Matheſeos, illuſtribuſque Mathematicis conſcripſit, & elementis præmitti voluit in ipſa Operis ſui fronte. Recenſentur in eo primi rerum Mathematicarum Auctores, eorumque inventa referuntur; reliquorum verò qui ſubſequentibus ſæculis floruerunt, non ſolùm enumerantur opera & diſtinctè explicantur; ſed adjunctum habent breve & accuratum Authoris judicium, ex quo tyrones dignoſcere facilè poſſint, quos ſequi Authores debeant, & à quibus libris abſtinere ne operam inanem ponant in malè digeſtis operibus evolvendis. Non pertinet ille quidem liber ad ſcientiam, nec ad artis præcepta; ſed eſt tamen ejuſmodi ut dubitari meritò poſſit, inter omnia quæ aliquando ſcripſit, ſitne opus ullum hoc opere utilius. Illud certè extrà controverſiam eſt, nullum exiſtere quod eruditionem in Auctore majorem, majuſve ingenium arguat. Eſt enim viri ſummè eruditi, animo comprehenſa habere, tàm multa, tamque varia opera quæ recenſet & ſingillatim enumerat, veterum, & recentiorum Authorum penè omnium qui alicujus nominis ad noſtra uſque tempora extiterunt: eſt magni ingenii ſpecimen, quid in unoquoque laudis, quid ſit vitii ita diſcernere, ut cùm de omnibus pronuntiet, judiciumque ferat minimè dubium, tàm peritè, támque ad rei veritatem, legitimum cujuſque pretium æſtimet.

Cæterùm fuit is Authoris præcipuus ſcopus, tyronem à primis elementis ad abſtruſa, reconditáque hujus ſcientiæ penetralia veluti manu-ducere. Quàm benè id præſtiterit, aliorum eſto judicium: mihi ſanè non ſolùm id aſſequutus videtur, ut quæcumque demonſtrat in rebus implicatiſſimis facilè à mediocribus ingeniis percipi poſſint: ſed etiam exiſtimo quemvis rerum Mathematicarum ſtudioſum, ſi ſemel ea benè perceperit quæ hîc traduntur, poſſe jam per ſe & ſine viæ duce omnes aliorum Authorum ambages,

omnes

omnes ſalebras inoffenſo pede percurrere. Partem Matheſeos nullam prætermiſit, ſed in his prolixior fuit quæ uſum habent aliquem ad communis vitæ commoda aut neceſſitatem, in illis brevior quæ difficilem tantùmmodo continent, & abſtruſiorem quandam contemplationem; quamquàm & hîc exquiſitum delectum adhibuit, ne quid omitteret, quod turpe ſit perito Mathematico ignorare De ſuo multa ubique addidit; quæ accepit ab aliis; clarâ docendi methodo effecit ſua.

Diviſionem totius operis quadripartitam, quâ priùs uſus fuit, nunc quoque retinet juxtà elementorum quaternarium numerum; ſuos enim terræ, ſuos aquæ, pariterque aëri & igni ſuos tractatus addicit, in ſingulis partibus tamen, alio plerumque ordine quàm anteà progreditur, ut cuivis licet obſervare in eâ, quam hîc ſubjicio totius operis ideâ ex ipſo Authore depromptâ.

Matheſis, inquit, ſicut & cæteræ omnes ſcientiæ, ſuis nititur principiis & ex propriis elementis coaleſcit: quatuorque tractatus ut elementares agnoſcit, quorum primum elementis Euclidis contentum, ſi eximium, ſi aureum nominem, ſi ei primas, exceptis ſacris codicibus deferam; parùm admodùm dixero: quippè qui genuinam ſcientiæ ideam ingeneret: nexuque mirabili à principiis per ſe notis exorſus, mentem ad ſublimia quæque, & abſtruſa ſenſim inducat. A ſimplicioribus igitur figuris initium ducit, triangulorum comparationem primò inſtituit, tùm proprietates linearum, perpendicularium, parallelarum conſiderat: tùm quadrilateras inducit ſecundo libro, circulares tertio, tùm figuras rectilineas circulo inſcribit, & circumſcribit quarto. Quinto novam proponit Logicam, proportionalem ſcilicet argumentandi methodum. Sexto varias proportionalium linearum proprietates enucleat, regulam quam vocant auream demonſtrat, totiuſque Geodeſiæ principia proponit. Septimo, octavo, nono numeros explicat, incommenſurabilium doctrinam decimo, totiuſque Algebræ ſemina jacit. Quia verò non in eodem ſemper plano exactas figuras conſideramus, undecimo ſolidorum principia communia, tùm parallelepidorum, cylindrorum, priſmatum, pyramidum, conorum & ſphæræ proprietates duodecimo & ſequentibus explicat.

Nolim tamen ſine delectu, hæc omnia, initio Matheſeos candidatis proponi, experientiâ etenim comperi, in ſeptimo, octavo, nono, decimo, initio tempus malè collocari: quare ſex prioribus, undecimo & parte duodecimi contenti ſint, cùm exceptâ Algebrâ, pleræque Matheſeos partes ſine reliquis demonſtrentur.

Secundus Tractatus elementaris Sphærica Theodoſii continet cùm enim præcipua quæ ſub Mathematicam conſiderationem occurrunt corpora, ſphærica ſint, ut tellus & cælum; æquum fuit ut peculiaria & iis corporibus accommodata traderentur principia; quod abundè & methodo facillimâ tribus libris præſtat Theodoſius, variaſque in ſphæra lineas, angulos, plana, ſectiones exhibet.

His adjungimus Apollonii Conicorum libros tres, de Parabolâ, Ellypſi, Hyperbolâ, earumque proprietatibus. Quartum de iiſdem ſectionibus in cono ipſo conſideratis; quibus accedet liber quintus de Sectionibus cylindricis.

Tertius Tractatus erit Arithmeticus ſolas elementares regulas complexus; additionem ſcilicet, ſubtractionem, multiplicationem, diviſionem tàm in numeris integris, quàm fractis, regulam proportionum, ſeu trium, ſocietatis, falſi, alligationis, extractiones radicum tàm quadratæ, quàm cubicæ. Arithmeticam claudet ars divinatoria per numeros.

Trigonometriam in numerum elementorum referimus, eamque in libros ſex dividimus; Primus liber Sinus, tangentes & ſecantes inveſtigabit, & Canonis conſtruendi methodum tradet.

Secundus Logarithmorum originem & naturam aperiet.

Tertius triangula rectilinea ſolvet.

Quartus erit Iſagogicus ad triangula ſphærica.

Quintus ſphærica triangula rectangula ſolvet.

Sextus denique obliquangula.

Algebra quia per omnes quantitatis ſpecies excurrit, viaſque mirabiles aperit ad inventionem, referetur inter elementa, & utraque tùm vulgaris, tum ſpecioſa octo libris comprehendetur.

Poſt elementa ſeu ſpinas ad amœniores materias gradum faciamus, atque ex laboribus exanthlatis fructus capiamus uberrimos. Tanta eſt rerum Mathematicarum amplitudo, tanta copia, tanta varietas, ut diu in iis fruſtrà ordinem aliquem & modum deſiderarim. Cùm enim nullus ſit, qui hactenùs de tota Matheſi ſcripſerit: ſed quilibet Author partem tantùm aliquam ſibi ornandam aſſumpſerit, non pauci eo animo, ut volumina & librorum molem augerent; aliundè conquiſitas ad inſtitutum ſuum materias,

extranesa

Digitized by Google

extraneas licèt, & minimè pertinentes retulerint, omnia extricare, & in ordinem digerere, non adeò facilè videbatur. In hoc tandem placito, pervulgato illo quidem, veriſſimo tamen acquievi: mundum hunc in numero, pondere, & menſurâ creatum eſſe, ſingulaſque ejus partes, certis numeris & legibus circumſcriptas. Numerum, pondus & menſuram, ut objectum ſuum peculiare, & proprium contemplatur Matheſis, nec aliam ejus definitionem in medium proferre licet, quàm ſi numeri, ponderis, & menſuræ ſcientiam nominemus. Facilem ergò, & maximè conſentaneum ordinem illi tribuemus; eundem ſcilicet quo partes mundi copulantur. Quatuor igitur elementa & cœlum ipſum intuebimur, & quidquid in ſingulis ad numerum, pondus, & menſuram pertinebit, ut juris noſtri vendicabimus.

Mundum ergo Mathematicum proponimus, dùm integrum Matheſis curſum inſtituimus, nec alium ordinem obſervandum ſtatuimus, quàm eum, quem in ſuo opere ſibi præfixit Deus.

Ab Elementorum infimo ſeu tellure ordiamur. Hæc tribus ſuis dimenſionibus Geodeſiæ, ſeu Geometriæ practicæ materiam ſubminiſtrabit.

Tellus inter Elementa graviſſimum eſt, illius gravitatem ut objectum intuebitur Statica.

Quia verò Mechanica eodem principio cum Statica nititur, ad idem etiam referetur.

Terra magnetica eſt, ut fert communis ſententia; verſoriorum, & pixidum nauticarum acus dirigit: huic ergò tractatum de Magnetiſmo tribuemus.

Tellus ſphærica eſt, ejuſque diverſæ partes variè ad cœli puncta relatæ, varia etiam lucis, & caloris incrementa, multiplicemque dierum, & noctium, annique tempeſtatum viciſſitudinem patiuntur, quæ omnia Geographia univerſalis explicabit.

Terram hominibus incolendam dedit Deus; jure ergo Architecturæ civilis placita explicabimus, eique duos ancillantes tractatus, artem ſcilicet Tignariam, & tractatum de ſectione lapidum adjungemus. Non tantùm ad decorem aliquem & magnificentiam accommodata eſſe debuit hominum ſedes & habitatio; ſed etiam tuta & bene contrà hoſtes munita; Architecturam ergo militarem in ſubſidium vocamus.

Novem igitur tractatus Mathematicos telluri addico, Geodeſiam, ſeu Geometriam practicam, Mechanicam, Staticam, Geographiam, tractatum de Magnete, Architecturam civilem, artem Tignariam, tractatum de Lapidum ſectione, Architecturam militarem. Singulos ſi lubet percurramus. Geometria practica ſeu Geodeſia dimenſiones omnes & menſuras complectitur. Libros undecim comprehendet.

Primus linearum rectarum dimenſiones tradit. Secundus ſuperficierum. Tertius ſolidorum. Quartus totius Geometriæ compendium in circino proportionum inſtituit. Quintus aget de lineis curvis. Sextus de ſuperficiebus curvis. Septimus de corporibus rotundis. Octavus de novâ indiviſibilium methodo. Nonus de ſpirali ſecundùm eandem methodum. Decimus novum P. à Sancto Vincentio inventum faciliori methodo explicabit. Ultimus novum Patris Guldini uſum centri gravitatis ad rotundorum generationem ulteriùs provehet.

Plus habet admirabilitatis haud dubiè Mechanica, cujus ſeptem libri ſunt. Primus Phyſicus eſt de motu, de principio univerſali augmenti potentiæ per machinam. Secundus idem principium vecti applicat. Tertius axi in peritrochio. Quartus Troclearum vim demonſtrat. Quintus Cocleam ſeu ſpiram explicat. Sextus Cuneum & percuſſionem directam. Septimus Elaterium & percuſſionem reflexam.

Amœnior ni fallor, & jucundior erit Statica; conſtituto etenim omnium gravium centro, conceſſaque corporibus gravitate: Primò agit de Elementorum gravitate, omneſque motus qui vulgò metui vacui conceduntur, ut aſcenſus aquæ in Anthliis, Mercurii in arundine ſuſpenſio, variæque attractiones, hos inquam motus gravitati tribuimus. Secundò de Gravium decidentium accelerato caſu. Tertiò, de Eorumdem in planis inclinatis deſcenſu, momentorumq; decremento. Tum funependulorum doctrinam, vibrationumque æqualitatem, earumdem oſcillationum durationes, cum longitudinibus comparamus, eaſque horologiis noſtris automatis fructu non pœnitendo aptamus. Quartò, Æquiponderantium doctrinam tradimus. Quintò, de Linearum centro gravitatis. Sextò, de Superficierum centro. Septimò, de Centro gravitatis ſolidorum. Octavò, de proprietatibus & uſu centri gravitatis. Neque verò minùs jucunda, homineque digna nobis aperiet Geographia. Hæc primò telluris figuram intuetur, locumque conſtituit, tum ejus partium ad cœlos relatarum affectiones determinat, totamque lucis diſtributionem, zonarum numerum, Climatum differentiam, perfectamque totius telluris Ideam efformat, hoc eſt prima univerſalis Geographiæ placita tradit.

Virtus magnetica prorſus mirabilis eſt, cum nempe uniones, margaritas, adamantes, ſaphyros longo ſuperet intervallo hic lapis, ita mentis aciem perſtringit vis illa occulta, qua ferrum ad ſe allicit, & ſtringit: ea tamen qua continuò ad Septentrionem & Auſtrum dirigitur admirabilitati utilitatem adjungit, cùm navigationum omnium evadat cynoſura, viæque ducem ſe præbeat. Ejus proprietates omnem ferè legem detrectant: In hoc enim lapide, & contraria in eodem ſinu, in ſummo ſubjectantur, centrum eſt in circumferentiâ, amicæ partes ſe invicem

fugiunt, inimicæ conjunguntur, quæ uni tertio uniuntur, inter ſe non cohærent, cauſa dat quod non habet, id quod produxit deſtruit. Illius igitur proprietates, declinationem, inclinationem uſuſque varios hic Nonus tractatus aperiet.

Architectura civilis brevibus admodum coarctatur finibus utpote quæ, ultra quinque pervulgatos ordines, Doricum, Jonicum, Corinthiacum, Compoſitum & Tuſcum, & regulas univerſales non excurrat. Hic tractatus demonſtrationibus caret, vixque in Matheſium numerum, cum retuliſſem, niſi utilitas id exegiſſet.

Huic decimo tractatui, duos Ancillantes, ſeu Subalternos adjungimus. Artem Tignariam undecimum tractatum facimus, in quo lignorum ſectiones, & in tectis elegantioribus uſum explicabimus.

De Lapidum Sectione tractatus duodecimus, qui Latomos tantum, & cæmentarios ſpectare videtur, inter omnes Geometricus eſt. Hunc in quatuor libros partior.

Primus circa Arcus, ſeu compluviatas teſtudines, non tantum ſimplices, & orbe pleno ut vocant tornatas, ſed etiam elumbes ſeu depreſſas, faſtigiatas, reptantes, ſeu pedum inæqualium, obliquas, inclinatas, perſtringentes, ſeu deſinentes in aliud compluvium, in turrim rotundam. Secundus conicas teſtudines, pendulóſque ut ita dicam fornices excitat. Tertius decumanas extruit, lunatoſque fornices, ſphæricos, clauſtrales, quadrario lapide decuſſatos componit. Quartus denique, in orbem aut Ellipſin aſcendentes extruit.

Latiùs patebit Architectura militaris, quæ muniendarum arcium, & urbium, artem complectitur; hanc in ſex libros partior. Primus Fundamenta, ſeu Axiomata hujus doctrinæ tradit. Secundus Polygona regularia, ſuis propugnaculis vallo, & foſsâ inſtruit. Tertius circa prætenturas omnes, ſeu externa opera ut vocant, hoc eſt parmulas, lunatas caſſides, opera cornuta, coronata, forcipulas ſuis vallis, loricis, foſſis muniendas occupatur. Quartus irregulares figuras certis regulis & principiis adſtringit. Quintus Obſidionales foſſas, vineas, aggeres, cuniculos ducit, caſtra ſuis munitiunculis tutatur, tormentorum bellicorum ſuggeſta ſeu tribunalia excitat. Sextus Repugnatorius erit, variaſque propugnaculorum reſciſiones, & tumultuario opere excitatas munitiones complectitur. Septimus perſpectivam militarem tradet.

Atque hi ſunt novem tractatus quos tellus ſuppeditat, Geodeſia, Mechanica, Statica, Geographia, Magnetica, Architectura civilis, Ars tignaria, lapidum ſectio, & Architectura militaris.

Pauciores in Aqua tractatus occurrunt, ſi enim gravitatem ejus conſideremus, hydroſtaticam ſeu tractatum de natantibus in humido, cum Archimede inſtituimus. Si ad fluiditatem & curſum attendamus, Secundum de Fluviis & Fontibus habebimus. Tertius Machinas hydraulicas continebit. Quartus denique Navigationem complectetur.

Quod ad primum ſeu Hydroſtaticam pertinet. Primò quantum leviora corpora in aquâ deſcendant definimus; quantum de graviorum gravitate decedat dum aquâ merguntur; oſtendimus nullibi ita exactè, æquilibrii leges obſervari; an figura corporum, an aquæ profunditas, ut corpora ſuſtenentur faciat. Celebre illud Archimedis problema de corona, explicamus, metallorumque probationem in aqua aperimus. Corpora item preſſione aquæ leviora aut graviora reddimus, an mediis in aquis navigari, an in aëre poſſit: quomodo piſces fiant aquâ leviores aliaque in hunc modum explicamus.

In ſecundo tractatu nempe de Fontibus, primò de aquarum æquilibrio agimus, tum methodos fontes, & rivos deducendi tradimus. Exinde fluentem aquam metimur, quâ proportione depleantur vaſa explicamus. De ſalientibus item, fluminibus metiendis, quantum ex immiſſione torrentis in alveum fluminis, ejus altitudo augeatur, ſexcentaque hujuſmodi æque jucunda, ac utilia pertractamus.

Tertius tractatus Fontes omnes artificiales continet, qui vel attractione perficiuntur, vel compreſſione, aut expulſione. Spiritalia Heronis ludicra, machinas omnes ad attollendam aquam idoneas, ut ſunt anthliæ, rotæ, & catenæ ſitulis inſtructæ, roſarium ut vocant, variæ helices, Archimedis ſpira ad exhauriendam navis ſentinam excogitata, in quâ nempe aqua deſcendendo aſcendit. Bremenſis rota quæ ſingulis circumvolutionibus viginti quinque plauſtra aquæ, in urbem immittit; amœna item nonnulla, quales ſunt organa hydraulica, aviculæ canentes. Ad hunc item tractatum revocantur omnes machinæ hydraulicæ ut molæ ad terendum triticum, rotæ ad conterendos carbones, piſtilla ad pulverem pyrium, mallei lignei ad papyrum, ferrei ad omne ferramentorum genus.

Quartus denique tractatus artem navigandi tradit quem in quinque libros partiemur. Primò agam de ſtructura navium & partibus: de Variis navium generibus, de remigatione, velificatione, gubernaculo, anchora, de onere navibus imponendo: agam item de navigatione fluviatili.

Secundus pixidis nauticæ, ſeu Magneticæ compoſitionem, diviſionem, tam uſurpatam in Mediterraneo mari, quàm in Oceano uſitatam, ejuſdem uſus, defectus, obſervandæ declinationis methodum

methodum, tam per amplitudines ortivas, quàm per ſyderum obſervationes aperiet.

Tertius Rhomborum,ſeu loxodromiarum naturam explicabit, hoc eſt illius lineæ quam ductu ejuſdem rhombi pixidis nauticæ, in ſuperficie Globi terraquei deſcribit navis.

Quartus Mappas Hydrographicas examinat, praxeſque varias docet ad determinandum navigii locum, aut ſeligendam loxodromiam navigationi accommodatam.

Quintus æſtimandi itineris rationem, variaſque correctiones ex obſervatione latitudinis, ſolemne item longitudinis inveniendæ problema explicat.

Sextus denique varias praxes nautis perutiles proponit, ut diarii conficiendi; ichnographicum portûs, aut littoris typum exprimendi, horam affluxûs aut refluxûs inveniendi, conjecturas imminentis procellæ, aliaque ſimilia.

Ex aqua Emerſi aërem ſubimus, qui cùm lumen & ſpecies, ad viſionem neceſſarias excipiat, rectè totam in aëre Opticam collocamus. Et quia viſio directis, reflexis, & refractis radiis peragitur, quatuor circa viſionem tractatus inſtituimus. Primus erit Optica in genere, Secundus Perſpectiva ſeu de radio directo. Tertius Catoptrica de reflexo. Quartus Dioptrica de refracto. Quia verò non tantùm lumen, & ſpecies, ſed ſonos etiam aër excipit, quintum addimus tractatum de Muſica.

In primo ſeu Optica; poſt exactam oculi deſcriptionem, organum in quo præciſe exercetur viſio, conſtituimus, quod adeò clare exhibemus, ut in artificiali oculo ea omnia exhibeamus, quæ naturali accidunt. Exinde ſingulas oculorum deceptiones, circa magnitudinem, diſtantiam, numerum, diſtinctionem, explicamus; cur preſbytæ diſtantia meliùs diſtinguant, myopes è contrà viciniora meliùs videant. Ad hunc tractatum referimus ſtriatas imagines, quæ diverſis è locis ſpectatæ variantur, difformes, quæ ex certo reformantur. Totam item luminis propagationem.

Secundus tractatus perſpectivam trâdet, pictoribus quidem perutilem, ſuis tamen Geometricis demonſtrationibus ornatam, quam in ſex libros partiemur. Primus fundamentalis erit. Secundus circa horizontalia plana, ſeu ichnographias perſpectivè deſcribendas occupabitur. Tertius Scenographiam, ſeu Elevationes tradet. Quartus puncta accidentalia explicabit. Quintus in laquearibus, & fornicibus perſpectivam exercebit. Sextus denique perſpectivas pluribus conſtantes partibus ſeparatis, umbrarumque deſcriptiones attinget: parallelogrammum item delineatorium explicabit.

Tertium tractatum Catoptricum ſeu de reflexione in tres libros dividimus, quorum primus reflexionis leges inquirit, tum ſpeculorum planorum proprietates omnes explicat, nempe cur imago tantum intra ſpeculi profunditatem videatur, quanta eſt objecti diſtantia, cur dextra appareant ſiniſtra; in horizontalibus everſa; cur in ſpeculis parallelis diſtantia & objectum multiplicentur, exinde ad multiplices praxes deſcendimus, modumque tradimus in exigua capſa, porticûs efformandæ quæ in immenſam planitiem excurrere videatur; multiplicandorum quantumlibet objectorum, omnium circa regionum nativis coloribus adumbrandarum methodum.

Secundus liber de convexis ſpeculis erit, inquiretque cur in iis objecta propiora, nonnihilque incurva videantur, cur luminis radii in iis diſpergantur, atque myopibus ſint utilia, exinde ad conica, & cylindrica deſcendit, pervulgatumque de imagine difformi, per ſpeculum cylindricum, aut conicum reformanda proponit.

Tertius concava explicat, primoque oſtendet quam vim ad comburendum, ex radiorum unione poſſideant. An verum ſit vel fabuloſum quod de Archimede claſſem Romanorum ſpeculo concavo incendente fertur, examinat. An poſſibilis ſit linea uſtoria infinita. Tum de radiorum paralleliſmo, modicoque luminis decremẽto, ita ut ad ducentos aut trecentos paſſus de nocte legere liceat. Quomodo objecta antrorſum non intra profunditatem everſa videantur. Quomodo Teleſcopia ex ſpeculis concavis, aut concavo, & convexo perficiantur.

Neque verò minùs illuſtris & amœna erit Dioptrica quæ pariter tres libros ſibi vendicabit. Primus poſt explicatam refractionis naturam, & leges, ſpecillorum convexorum, & concavorum proprietates aperit; convexorum quidem ad radiorum unionem, & conſequenter ad comburendum, ad exprimendas rerum imagines, formandoſque luminis penicillos, juvandoſque ſenum, ſeu preſbytarum oculos: concavorum ad radiorum diſperſionem myopum oculis perutilem. Neque vero polygonas lentes ad objectorum multiplicationem, aut diſperſorum unionem miſſas faciet, ſicut neque maxime convexas, ſeu minoris ſphæræ portiones ad microſcopia.

Secundus liber varia ſpecilla ſimul conjungit. Teleſcopia communia ex convexo, & concavo componit, tum ex duobus aut ex quatuor convexis; microſcopia item melioris notæ, magicam item laternam, methodum obſervandarum Eclipſium, aut macularum ſolarium tranſmiſſo per tubum radio. Addet item nonnulla ad praxin ſpectantia.

Tertius liber de refractionibus coloratis aget; primóque de priſmate triangulari, tum de

de Iride ejuſque proprietatibus, rotunditate, diſtantia, motu, tum de coronis, pareliis, virgis, crepuſculo, & aurora.

Sonus quamvis ita tenuis ſit, & ſubtilis, ut neque ſub numerum, pondus, aut menſuram cadere videatur? juris tamen eſt noſtri. Demonſtramus enim facile diapaſon ſeu octavam in ratione dupla poſitam eſſe, diapente in ſeſquialtera, cæteriſque conſonantiis ſuas rationes tribuimus. Varia item circa ſonum inquirimus, cur chorda nullo impellente moveatur, ſibi conſona vibrante? cur in tuba ſive communi, ſive manuali ſaltus ita frequentes accidant. Syſtemata deinde omnia explicamus, diatonicum, chromaticum & Enharmonicum, varias inſtrumentorum ſpecies explicamus, regularumque muſicarum rationem reddimus. Neque vero nuper inventam vocalem tubam omittemus.

Sterilior erit ignis unicumq; tantum tractatum ſuppeditabit, in duos libros dividendum, in quorum primo de ignibus artificialibus tam feſtivis, quàm bellicis. Secundò de machinis, ſeu tormentis bellicis aget. Hoc eſt certas methodos, ea examinãdi, & ad ſcopum certò dirigẽdi; ſive directo jactu, ſeu circulari & parabolico, multas item quæſtiones baliſticas examinabit.

In cœlum tandem conſcendimus, de quo quinque tractatus occurrunt nempe Aſtrolabiorum doctrina, Gnomonica, Aſtronomia, Kalendarium, & Aſtrologia.

Primus tractatus projectionem ſphæræ in planum ſub Aſtrolabiorum nomine indicat quibus primi mobilis problemata mirâ facilitate ſolvimus. Primus liber erit de globo tam Cœleſti quam Terreſtri, & utriuſque uſu. Secundus erit de Analemmate in quo ſcilicet pro tabella Meridianum aſſumimus, oculumque infinitè removemus. Tertius Aſtrolabium univerſale proponit, in quo ſcilicet idem tabellæ planum, oculus punctum veri ortûs aut occaſûs obtinet. Quartus in æquatore aut plano illi parallelo, cœleſtes orbes deſcribit, oculo polum Antarcticum obtinente. Quintus denique ex Nadir hemiſphærium oppoſitum in plano horizontali contemplatur.

Quod ad ſecundum, ſeu Gnomonicam pertinet. Quamvis cœlum ſphæricum ſit; in plano tamen, ita graphicè deſcribitur, ut ſol in cœlo moveri non poſſit, quin eundem in pictura noſtra motum obſervemus, quam picturam horologia ſcioterica exhibent. Nullius quidem momenti videtur horologii delineatio, cùm cæmentarii noſtri eam ſatis exactè perficiant; eorum tamen quæ ad horologiorum demonſtrationem requiruntur ſcientia, homine digna ſemper mihi viſa eſt. Horologia Scioterica varia ſunt, cùm nulla ſit materia in qua fœliciùs luſerit Mathematicorum ingenium. Aſtronomica, Babylonica, Italica deſcribimus, in iis verticales circulos, Almicantarath, circulos domorum cœleſtium; parallelos ſignorum, augmentum, & decrementum dierum, totumque Kalendarium inſcribimus. Solaria, lunaria, ad ſtellas componimus. In omni plano ea delineamus, æquinoctiali, polari, horizontali, verticali, declinante in planis quomodocumque inclinatis. Per radium directum, reflexum, & refractum. Portatilia item in annulis, cylindris, armillis, ſcipionibus. Hunc igitur tractatum in quatuor libros dividimus. Primus agit de Horologiis in quocumque plano deſcribendis. Secundus portatilium variam ſupellectilem ſubminiſtrabit. Tertius horologia reflexa explicabit. Quartus refracta tradet.

Tertius tractatus erit Aſtronomicus, in quo primò varia ſyſtemata explicamus, tum planetarum Theoriam, variaque accidentia ut ſunt Eclypſes, oppoſitiones, conjunctiones, parallaxes, refractiones, retrogradationes, ſtationes, directiones, motus tam in longitudinem, quàm in latitudinem, magnitudines, diſtantias, fixarum item motum, adjectis omnium tabulis & praxibus explicamus.

Quartus vanæ curioſitatis partum, Matheſeos opprobrium, hoc eſt, Aſtrologiam judiciariam ex Matheſeon albo expunget. In quâ ſcilicet nulla demonſtratio, nulla ſcientiæ, aut veritatis umbra, ſed perpetua hallucinatio, & ex ſolis planetarum nominibus, ſibi de futuro blandientis ſtoliditatis ineptia: cui tanquàm appendicem annexuimus tractatũ de Meteoris.

Quintus denique Kalendarium continebit, totamque anni civilis, cum Solis, & Lunæ motibus conjunctionem & comparationem. In hoc variarum nationum annos civiles proponimus, quæſtiones Paſchales agitamus, de Cyclo aureo, Epactis, Cyclo ſolari, indictionibus, diebus Biſſextilibus; periodo Julianâ & Cyclorum combinatione agimus. Et hæc eſt ſeries, nexuſque partium, quem Operi ſuo Author ipſe deſtinaverat.

Habes hîc Lector Opus omnium quæ hactenùs in hoc ſcientiarum genere prodierint, abſolutiſſimum, in quo vix aliquid deeſt, aut redundat, & cui ſimile nullum reperias rerum delectu, docendi ordine, & demonſtrandi perſpicuitate; Opus denique quod unum Matheſeos candidato ſufficere, atque omnium inſtar eſſe poſſit. Quod ad Authorem pertinet: quanto ingenio fuerit, id Lectorum judicio & ſcriptis ipſius æſtimandum relinquo. Erunt, & ut arbitror, permulti erunt qui plura de moribus ejus, genere, ac pietate ſcire cupiant; in quorum gratiam, funebrem ejus laudationem hîc attexuimus habitam in Collegio Taurinenſi à Patre Hyacintho Ferrerio Societatis Jesu.

ORATIO

Digitized by Google

ORATIO
HABITA IN FUNERE
R. P. CLAUDII FRANCISCI MILLIET DECHALES
SOCIETATIS JESU,

A R. Patre HYACINTO FERRERIO in Collegio Taurinenſi ejuſdem Societatis, die 28. Martii 1678.

ILLUSTRISS. ET REVERENDISS. D.
D. FRANCISCO AMEDEO MILLIET DECHALES,

Archiepiſcopo Tarantaſienſi, Regio Conſiliario, & in Camberienſi Rationum Curia Primario Præſidi, &c.

LAUDATIONEM R. P. Claudii Franciſci Dechales, Illuſtriſſime, & Reverendiſſime Archipræſul, ex Authoris manu officiis amicorum extortam, dignam credidi, quæ à Te legeretur, ut ſi fieri poſſet, fratrem redderem fratri. Gratum erit, ut arbitror, furtivum hoc munus, in quo nativam imaginem agnoſcere poteris fraternæ virtutis. Quæ licet acerbam jacturæ memoriam excitet, quem tamen renovabit ſenſum doloris, eundem fortaſſe mulcebit. Cùm enim religionem, & pietatem amaveris in fratre magis quàm ſanguinem, vix illum amiſiſſe credes, cujus optimam partem, quæ ſcilicet mori non poterat, ſenties in animis hominum, ipſiſque in paginis vivere. Itaque Claudii Tui virtutes illæ, quas leges, eandem Tibi voluptatem afferent, quam hauſerat olim Ambroſius, dum pios mores recoleret fratris extincti. Lætandum eſt magis (*aiebat ille, quod Te pariter dicturum puto*) quod talem fratrem habuerim, quàm dolendum, quòd fratrem amiſerim.

SI quis veſtrûm eſt, N. N. qui paucis antè menſibus ſapientiſſimum Virum Patrem Claudium Franciſcum Dechales in hac aula, ex hoc loco dicentem audierit; fieri certe nequit, quin miſerâ rerum viciſſitudine perturbatus diem illum Academiæ Taurinenſi fæliciſſimum, cum hoc conferat triſtiſſimò die, quo eundem audiet à me ab eodem loco funeſtâ laudatione commendari. Hæc igitur erant, quæ ille ſperare juſſerat? hæc erant, quæ nobis de ſeipſo pollicebatur, cum eâ, quâ ſolebat, ingenii fœlicitate cupidis rerum novarum Adoleſcentibus Mathematicum Mundum evolveret? Fuit (ô mortis invidiam! ô labem! ô funus non unius hominis, ſed omnium pæne litterarum, & artium!) fuit quàm magna, tam brevis fœlicitas veſtra, Taurinenſes. Mandavimus Terræ virtutem illam, quam ſcilicet hac lege permiſerant ſuperi, ut ſerò darent, eriperent citò. Amiſimus Lumen, & Decus Academiæ: hunc nobis honorem idem annus attulit, idem ademit. Auget jacturæ gravitatem violenta celeritas fati: mentem auream, animum plane cœleſtem agnoſcere licuit, frui negatum eſt; ut ſcilicet compertâ priùs virtute ſtatim carituri, & certiùs experiri malum, & dolentiùs proſequi cogeremur. Enim vero, niſi pretioſæ eſſent ſapientum exuviæ, niſi religioſum cinerem, & dulces reliquias vel ipſis lacrimis emere præſtitiſſet, parum abfuit, quin dicerem: ſi tanto viro repente orbari debuimus, ſatius fuerat nunquam adipiſci, quod erat incredibili mœrore, & luctu dimittendum; quid enim ab ejus poſſeſſione boni lucrati ſumus præter uſum voluptatis breviſſimæ, & acerba ſemina magni doloris? Sapientis tamen eſt, Auditores, juſto dolori vel modum præſcribere, vel otium dare; ne periculoſo ſilentio ſeipſum regat, fit enim ſæpè, dum taciti dolemus, ut ne dolere quidem videamur. Abeamus itaque ab hoc mœſtæ taciturnitatis officio; erumpat in commendationem virtutis ereptæ mutus dolor; nefas eſt, ſi pares illi laudes invenire non poſſumus, impares recuſare. Nam etſi laus nulla ſufficere poteſt ſummæ virtuti, ſtudio tamen Oratoris ſufficere debet conatus ipſe laudandi; qui ſi parum fœliciter cedat, utrumque fateatur ingennè, & ſe minùs potuiſſe, quàm vellet, atque id ſaltem voluiſſe, quod poſſet. Ego tamen Claudium Franciſcum Dechales ſatis commendatum exiſtimabo, ſi vocibus omnium veſtrûm commendavero; immò ne hoc quidem ſatis eſſe credam, niſi modeſtam hominis verecundiam ad ejus laudes adhibere, & impellere poſſim. Quod ut conſequar, duo mihi potiſſimùm quærenda ſunt; *Prælectionem Mathematicam habuerat P. Dechales quatuor ante mortem menſibus in aula collegii Taurinenſis, in qua oratio habita.*

†† iij Quid

de Iride ejuſque proprietatibus, rotunditate, diſtantia, motu, tum de coronis, pareliis, virgis, crepuſculo, & aurora.

Sonus quamvis ita tenuis ſit, & ſubtilis, ut neque ſub numerum, pondus, aut menſuram cadere videatur? juris tamen eſt noſtri. Demonſtramus enim facile diapaſon ſeu octavam in ratione dupla poſitam eſſe, diapente in ſeſquialtera, cæteriſque conſonantiis ſuas rationes tribuimus. Varia item circa ſonum inquirimus, cur chorda nullo impellente moveatur, ſibi conſona vibrante? cur in tuba ſive communi, ſive manuali ſaltus ita frequentes accidant. Syſtemata deinde omnia explicamus, diatonicum, chromaticum & Enharmonicum, varias inſtrumentorum ſpecies explicamus, regularumque muſicarum rationem reddimus. Neque vero nuper inventam vocalem tubam omittemus.

Sterilior erit ignis unicumq; tantum tractatum ſuppeditabit, in duos libros dividendum, in quorum primo de ignibus artificialibus tam feſtivis, quàm bellicis. Secundò de machinis, ſeu tormentis bellicis aget. Hoc eſt certas methodos, ea examinãdi, & ad ſcopum certò dirigẽdi; ſive directo jactu, ſeu circulari & parabolico, multas item quæſtiones baliſticas examinabit.

In cœlum tandem conſcendimus, de quo quinque tractatus occurrunt nempe Aſtrolabiorum doctrina, Gnomonica, Aſtronomia, Kalendarium, & Aſtrologia.

Primus tractatus projectionem ſphæræ in planum ſub Aſtrolabiorum nomine indicat quibus primi mobilis problemata mirâ facilitate ſolvimus. Primus liber erit de globo tam Cœleſti quam Terreſtri, & utriuſque uſu. Secundus erit de Analemmate in quo ſcilicet pro tabella Meridianum aſſumimus, oculumque infinitè removemus. Tertius Aſtrolabium univerſale proponit, in quo ſcilicet idem tabellæ planum, oculus punctum veri ortûs aut occaſûs obtinet. Quartus in æquatore aut plano illi parallelo, cœleſtes orbes deſcribit, oculo polum Antarcticum obtinente. Quintus denique ex Nadir hemiſphærium oppoſitum in plano horizontali contemplatur.

Quod ad ſecundum, ſeu Gnomonicam pertinet. Quamvis cœlum ſphæricum ſit; in plano tamen, ita graphicè deſcribitur, ut ſol in cœlo moveri non poſſit, quin eundem in pictura noſtra motum obſervemus, quam picturam horologia ſciot erica exhibent. Nullius quidem momenti videtur horologii delineatio, cùm cæmentarii noſtri eam ſatis exactè perficiant; eorum tamen quæ ad horologiorum demonſtrationem requiruntur ſcientia, homine digna ſemper mihi viſa eſt. Horologia Scioterica varia ſunt, cùm nulla ſit materia in qua fœliciùs luſerit Mathematicorum ingenium. Aſtronomica, Babylonica, Italica deſcribimus, in iis verticales circulos, Almicantarath, circulos domorum cœleſtium; parallelos ſignorum, augmentum, & decrementum dierum, totumque Kalendarium inſcribimus. Solaria, lunaria, ad ſtellas componimus. In omni plano ea delineamus, æquinoctiali, polari, horizontali, verticali, declinante in planis quomodocumque inclinatis. Per radium directum, reflexum, & refractum. Portatilia item in annulis, cylindris, armillis, ſcipionibus. Hunc igitur tractatum in quatuor libros dividimus. Primus agit de Horologiis in quocumque plano deſcribendis. Secundus portatilium variam ſupellectilem ſubminiſtrabit. Tertius horologia reflexa explicabit. Quartus refracta tradet.

Tertius tractatus erit Aſtronomicus, in quo primò varia ſyſtemata explicamus, tum planetarum Theoriam, variaque accidentia ut ſunt Eclypſes, oppoſitiones, conjunctiones, parallaxes, refractiones, retrogradationes, ſtationes, directiones, motus tam in longitudinem, quàm in latitudinem, magnitudines, diſtantias, fixarum item motum, adjectis omnium tabulis & praxibus explicamus.

Quartus vanæ curioſitatis partum, Matheſeos opprobrium, hoc eſt, Aſtrologiam judiciariam ex Matheſeon albo expunget. In quâ ſcilicet nulla demonſtratio, nulla ſcientiæ, aut veritatis umbra, ſed perpetua hallucinatio, & ex ſolis planetarum nominibus, ſibi de futuro blandientis ſtoliditatis ineptia: cui tanquàm appendicem annexuimus tractatũ de Meteoris.

Quintus denique Kalendarium continebit, totamque anni civilis, cum Solis, & Lunæ motibus conjunctionem & comparationem. In hoc variarum nationum annos civiles proponimus, quæſtiones Paſchales agitamus, de Cyclo aureo, Epactis, Cyclo ſolari, indictionibus, diebus Biſſextilibus; periodo Julianâ & Cyclorum combinatione agimus. Et hæc eſt ſeries, nexuſque partium, quem Operi ſuo Author ipſe deſtinaverat.

Habes hîc Lector Opus omnium quæ hactenùs in hoc ſcientiarum genere prodierint, abſolutiſſimum, in quo vix aliquid deeſt, aut redundat, & cui ſimile nullum reperias rerum delectu, docendi ordine, & demonſtrandi perſpicuitate; Opus denique quod unum Matheſeos candidato ſufficere, atque omnium inſtar eſſe poſſit. Quod ad Authorem pertinet: quanto ingenio fuerit, id Lectorum judicio & ſcriptis ipſius æſtimandum relinquo. Erunt, & ut arbitror, permulti erunt qui plura de moribus ejus, genere, ac pietate ſcire cupiant; in quorum gratiam, funebrem ejus laudationem hîc attexuimus habitam in Collegio Taurinenſi à Patre Hyacintho Ferrerio Societatis Jesu.

ORATIO

Digitized by Google

ORATIO
HABITA IN FUNERE
R. P. CLAUDII FRANCISCI MILLIET DECHALES SOCIETATIS JESU,

A R. Patre HYACINTO FERRERIO in Collegio Taurinenſi ejuſdem Societatis, die 28. Martii 1678.

ILLUSTRISS. ET REVERENDISS. D.

D. FRANCISCO AMEDEO MILLIET DECHALES,

Archiepiſcopo Tarantaſienſi, Regio Conſiliario, & in Camberienſi Rationum Curia Primario Præſidi, &c.

LAUDATIONEM R. P. Claudii Franciſci Dechales, Illuſtriſſime, & Reverendiſſime Archipræſul, ex Authoris manu officiis amicorum extortam, dignam credidi, quæ à Te legeretur, ut ſi fieri poſſet, fratrem redderem fratri. Gratum erit, ut arbitror, furtivum hoc munus, in quo nativam imaginem agnoſcere poteris fraternæ virtutis. Quæ licet acerbam jacturæ memoriam excitet, quem tamen renovabit ſenſum doloris, eundem fortaſſe mulcebit. Cùm enim religionem, & pietatem amaveris in fratre magis quàm ſanguinem, vix illum amiſiſſe credes, cujus optimam partem, quæ ſcilicet mori non poterat, ſenties in animis hominum, ipſiſque in paginis vivere. Itaque Claudii Tui virtutes illæ, quas leges, eandem Tibi voluptatem afferent, quam hauſerat olim Ambroſius, dum pios mores recoleret fratris extincti. Lætandum eſt magis (*aiebat ille, quod Te pariter dicturum puto*) quod talem fratrem habuerim, quàm dolendum, quòd fratrem amiſerim.

SI quis veſtrûm eſt, N. N. qui paucis antè menſibus ſapientiſſimum Virum Patrem Claudium Franciſcum Dechales in hac aula, ex hoc loco dicentem audierit; fieri certe nequit, quin miſerâ rerum viciſſitudine perturbatus diem illum Academiæ Taurinenſi fælicisſimum, cum hoc conferat triſtiſſimò die, quo eundem audiet à me ab eodem loco funeſtâ laudatione commendari. Hæc igitur erant, quæ ille ſperare juſſerat? hæc erant, quæ nobis de ſeipſo pollicebatur, cum eâ, quâ ſolebat, ingenii fœlicitate cupidis rerum novarum Adoleſcentibus Mathematicum Mundum evolveret? Fuit (ô mortis invidiam! ô labem! ô funus non unius hominis, ſed omnium pæne litterarum, & artium!) fuit quàm magna, tam brevis fœlicitas veſtra, Taurinenſes. Mandavimus Terræ virtutem illam, quam ſcilicet hac lege permiſerant ſuperi, ut ſerò darent, eriperent citò. Amiſimus Lumen, & Decus Academiæ: hunc nobis honorem idem annus attulit, idem ademit. Auget jacturæ gravitatem violenta celeritas fati: mentem auream, animum plane cæleſtem agnoſcere licuit, frui negatum eſt; ut ſcilicet compertâ priùs virtute ſtatim cárituri, & certiùs experiri malum, & dolentiùs proſequi cogeremur. Enim vero, niſi pretioſæ eſſent ſapientum exuviæ, niſi religioſum cinerem, & dulces reliquias vel ipſis lacrimis emere præſtitiſſet, parum abfuit, quin dicerem: ſi tanto viro repente orbari debuimus, ſatius fuerat nunquam adipiſci, quod erat incredibili mœrore, & luctu dimittendum; quid enim ab ejus poſſeſſione boni lucrati ſumus præter uſum voluptatis breviſſimæ, & acerba ſemina magni doloris? Sapientis tamen eſt, Auditores, juſto dolori vel modum præſcribere, vel otium dare; ne periculoſo ſilentio ſeipſum tegat, fit enim ſæpè, dum taciti dolemus, ut ne dolere quidem videamur. Abeamus itaque ab hoc mœſtæ taciturnitatis officio; erumpat in commendationem virtutis ereptæ mutus dolor; nefas eſt, ſi pares illi laudes invenire non poſſumus, impares recuſare. Nam etſi laus nulla ſufficere poteſt ſummæ virtuti, ſtudio tamen Oratoris ſufficere debet conatus ipſe laudandi; qui ſi parum fœliciter cedat, utrunque fateatur ingennè, & ſe minùs potuiſſe, quàm vellet, atque id ſaltem voluiſſe, quod poſſet. Ego tamen Claudium Franciſcum Dechales ſatis commendatum exiſtimabo, ſi vocibus omnium veſtrûm commendavero; immò ne hoc quidem ſatis eſſe credam, niſi modeſtam hominis verecundiam ad ejus laudes adhibere, & impellere poſſim. Quod ut conſequar, duo mihi potiſſimùm quærenda ſunt;

Prælectionem Mathematicam habuerat P. Dechales quatuor ante mortem menſibus in aula collegii Taurinenſis, in qua oratio habita.

Quid cæteri de ipſo, quid de ſe ipſe ſentiret. Divinam quippe virtutem judico, quam mirantur omnes, quæ ſeipſam ſola non miratur.

Primum omnium, ſi fortunæ, naturæque munera delibare placet, haud ſcio, utrum magis ex dignitate futurum ſit; an ſtudioſiùs inquirere, an potiùs negligenter diſſimulare, quid omnes de illius ſanguine, de patria, de opibus, & ſplendore parentum, de antiquitate originis, & nominis claritate judicarent. Quippe in ejuſmodi viro, qui abdicatâ rerum humanarum pompâ fortunæ domeſticæ ſtrepitum ejuraverit, commendare majores, titulos, & ſtemmata ambitiosè deſcribere, quid aliud, quàm ſterilitas laudum videri poteſt? tenuitatis enim, & inopiæ argumentum eſt, aliena invadere, ut creſcant ſua. Quamobrem ineptè laudamus, quod ille latere voluit, ne laudaretur; ineptè miramur in ſene, quod nondum virilis animus, nondum matura virtus infrà dignitatem ſuam eſſe judicavit. Niſi fortè magnanimus ille contemptus, quo rebus humanis altior, quidquid omnes venerantur, animosè dedignatus eſt, tabulas majorum, & ſtemmata, monumenta clariſſimæ ſtirpis, ſacros, militares, aulicos dignitatum gradus, & inſignia velut in triumphi morem explicari depoſcat; ut ex illo rerum apparatu æſtimetur, quantus ille fuerit, qui tanta contempſerit. Quidquid cæteri ſentiant, Auditores, ego certe ita judico: Nobilitatem ex virtute naſci, ſed ab illa quaſi matrem ornari virtutem; ſacros homines moribus quidem magis, quàm titulis cenſendos eſſe, ſed morum ſanctitatem additâ magni nominis luce pulchriùs, nitidiúſque ſplendeſcere; plurimum denique ad Claudii gloriam afferre momenti ſocietatem ipſam, & conſenſum eorum omnium, quæ apud varios hominum ordines in pretio ſunt. Cujus enim gloriæ fuerit, eundem virum nobilitate Aulicos, Doctrinâ ſapientes, religione, pietate, innocentiâ Domeſticos in admirationem ſui, & amorem rapuiſſe? Itaque dignitas illa, quàm à majoribus acceperat Claudius, non quòd parva videatur, negligenda eſt, ſed tanquam nota omnibus leviter potiùs attingenda; pedem hac in re altiùs figere non accurati, ſed otioſi oratoris eſſe videretur.

Neminem quippè veſtrum ignorare arbitror Millietam gentem fœminea, & virili ſtirpe latiſſimè propagatam utriuſque Nobilitatis tum Sabaudæ tum Subalpinæ prima capita arctiſſimo cognationis vinculo attingere, Monmajorios, Provanas, Daviſios, Noverios, Leſcherenios, Coſtas, Iſnardos, Solarios, Oſaſcos, Monchanutios, Fleſcerios, Rotarios, Valliſareos. Quotuſquiſque Procerum eſt, qui neſciat, Claudii fratres, alterum Camberienſis Curiæ Supremum Præſidem, alterum à Senatore Pontificem nuper ab ampliſſimo Centronum Sacerdotio ad Præſidis demortui curas funeſtâ hæreditate fraterni honoris tum Reginæ precibus, tum Pontificis juſſu compulſum; reliquos vero partim experientiâ rei militaris, & bellicâ fortitudine illuſtres, Principi, & gloriæ ſanguinē & vitam conſecraſſe, Provinciarū, & arcium præfecturas ſummâ fide geſſiſſe, partim ſacræ militiæ ſtudio ſub iiſdem ſignis, quibus olim Claudius, etiamnum vivere. Noſtis omnes, neque iſta mihi ex Annalium fide petenda ſunt, hujus dignitatem familiæ non unius ætatis eſſe, ſed omnium retrò temporum, cujus initia, progreſſuſque oblivioſa antiquitas abdidit; jam inde à Caroli Emmanuelis Primi temporibus Magnos Sabaudiæ Cancellarios, & Principis Patres numeraſſe, tum perpetuâ ſerie Præſides, & Senatores, Centuriones, & Tribunos militum, Torquatorum Sabaudiæ Equitum Cancellarios duos, Nobiles Principum Cubicularios, Equites tum Sancti Mauritii, tum Melitenſes, denique infulatos Antiſtites quatuor, & quem Tarantaſiæ Archiepiſcopum dixi ad Sabaudiæ fœlicitatem ſupereſſe, & cæteros pridem extinctos, Philibertum Auguſtæ primùm, mox Eporediæ Epiſcopum, Paulum Maurianenſem, Philibertum alterum Taurinenſem. Vix habet Sabaudia gradum ullum honoris, quem Domus iſta non occupaverit; omnia propemodum Regni ornamenta in unam familiam ſucceſſu temporis congeſta ſunt, quidquid largiri Principes, quidquid virtus ſperare poteſt, impetravit: nihil jam futuris Nepotibus ſupereſt, quod inſoliti, novique ſplendoris acquirant, ſed gloriari poſſunt ab illa ſe Domo prodiiſſe, in qua vincere nequeant Majores ſuos.

Quare huiuſmodi laudes vulgatas omnibus ultrò relinquamus; ad Claudium accedere propiùs, & percontari libet, quod eſſet, de viri doctrina judicium Sapientum. Atque utinam Europæ voces univerſæ imitari poſſem, & plauſus referre, quos dedit; cum grande opus, Mathematicas omnes diſciplinas, velut tantæ mentis hæreditatem exciperet, nec Auctori minùs gratularetur, quàm ſibi; illi, quòd ejus nominis famam perennibus monumentis poſteritatis memoriæ conſecratam nunquam timeret vitio temporum interituram; ſibi, quòd tacitis omnium votis indulgente Claudii modeſtiâ vocaretur in partem, & fructum eruditi laboris! Mirabantur alii mentis vim, & robur ingenii, quòd rerum arduitate non vinceretur; ſublimitatem alii, quòd communia, & trita contemneret, altiſſima quæque perinde, ac obvia, & vulgata prægrederetur. Erant, qui perſpicacis animi ſubtilitatem commendabant, quòd abſtruſa, & longè ab oculis ſemota penitùs, intiméque pervaderet, qui elegantiam, & venuſtatem, quòd ſuo quæque loco collocaret, aptè omnia, ordinatéque digereret; qui fœlicitatem, & copiam, quòd paucis multa colligeret; qui diligentiam, & laborem, tum quòd nihil omitteret, tùm quòd anguſta, & ſcopuloſa non minùs quàm amœna, & jucunda pari ſtudio, & alacritate verſaret. Sed omnes pariter uno vocis, animique conſenſu fatebantur, ſe quidem mirari ſatis non poſſe amplitudinem illam mentis, & vaſtitatem, quâ ſolus tam multa, tam ardua, ſpinoſaque brevi decennio & universè complecti, & fœliciter evolvere, & celeritate ſumma ad exitum deducere potuiſſet. Fuiſſe plurimos, qui Matheſeos partem aliquam illuſtandam ſibi delegerint, alios Opticam, Staticam alios, plures in Elementis vitam omnem, contentionemq; animi occupaſſe non ſine laude, & pretio laboris, ſingulos denique ſingula decerpſiſſe; qui omnia tam plenè, tàm vaſtè aggredi, & comprehendere auderet, ante Claudium fuiſſe neminem. Ne illos quidem antiquitatis magiſtros, & Duces æternitatem nominis, & famam ex univerſa Matheſi, ſed ex ſingulis partibus collegiſſe. Elementa tradidit Euclides, Horoſcopia Anaximander, Geometriam Democritus, Mechanicen Archytas, Arithmeticam Eudoxus, Architecturā Vitruvius, Sphæram, & Cylindrum Archimedes, Aſtrologiam Xenocrates, & Ptolomæus: quid plures enumerare opus eſt? Nemo unquam anguſtos limites, quos ſibi circumſcripſerat, egredi, nemo plures, quam duas, treſve diſciplinas ex infiniti operis mole pertractandas ſuſcipere auſus eſt. Cujus animi? cujus doctrinæ fuit, quod portentoſa illa veterum ingenia deſperaverant, quod antiquitas tota intentatum reliquerat, id non modo fortiter arripere, ſed celeriter exequi? Claudius Franciſcus Dechales, qui primum ætatis florem humanioribus literis, reliquam verò, & optimam vitæ partem Philoſophiæ, & Theologiæ plenè devoverat, qui mentem in pere-

grinas

Digitized by Google

peregrinas diviſerat linguas, Italicè, Latinè, Græcè loquebatur; neque veterum modò delicias noverat, ſed recentium quoque lapſus, & errata Græcorum, cùm ſpiritus illos, nervoſque robuſtioris ætatis priſtinus fregiſſet labor, hoc ſibi tamen onus impoſuit, hoc ſuarum virium eſſe arbitratus eſt: Tractatus, ut cum ipſo loquar, triginta, & amplius, Libros ferme centum typis edidit, quibus Mathematica omnia abdidit, incluſitque. Neque in tanta varietate rerum, & feſtinatione ſcribendi apicem ullum immenſi operis inexploratum abire permiſit, quin ſæpe revocaret ad trutinam, attentéque inſpiceret, num parere ambages, num aciem effugere poſſet tyronis inculti. Neque enim, ut tenebriones aliqui ſolent, qui caliginem, & umbras, quas materia ſecum habet, ſuis quoque tenebris augent, non, inquam, cogitabat, quàm multa, ſed quàm dilucidè ſcriberet; quòd eo conſilio injecerat calamo manum, ut in Mathematicis peregrinũ prorſus, & hoſpitem à primis uſq; rudimentis ad ſupremũ artis faſtigium longâ quidẽ, ſed planâ, & æquabili viâ, ſine tædio, & labore deduceret.

Et ſane tenuit Claudius, quam ſibi deſtinaverat, publicæ utilitatis metam; ſed nobis quantum nocuit, quòd nimis prodeſſe voluerit! Mortem hanc, quam dolemus, beneficus nobis, fatalis ipſi labor properavit: quid enim de illius vitâ expectare poteras, qui quatuor annorum ſpatio, quibus Pariſiis docuit, mille Scriptorum volumina (ut ipſe aliquando familiari ſuo amicè teſtatus eſt) incredibili celeritate perlegerit? Importunum laborem, qui feſtinatæ mortis eſt reus! qui tantum opus ſimul peperit, ſimul operis Authorem, qui opere ſuo pretioſior erat, extinxit. Paginas infœlices! quæ viri ſapientiam, quam continent, ut poſteritati tradere poſſent, ætati ſuæ, & noſtræ inviderunt. Excepimus plauſu eruditum munus; credebamus enim Doctrinæ ſuæ munus illud eſſe, non vitæ: Damnare nunc cogimur funeſtam hominis liberalitatem, & qui futuro dolori gratulabamur incauti; priſtinam fœlicitatem deploramus. Non egebat libris ætas hæc noſtra, ut tantam mentem agnoſceret. Pervaſerat Principum, & Regum Aulas Claudii fama, antequam ſcriberet. Ludovicus XIV. Galliarum Rex, cùm rudes & inexpertos artis ſuæ nautas, ipſoſque navium Præfectos erudiri vellet; ſciretque pinguibus nautarum, & militaribus nobilium ingeniis longè ſubtiliorem requiri induſtriam, & artem Magiſtri, Claudium, cujus Doctrinam celebrari audierat, è Sabaudiâ evocatum inſtitutorem nauticæ Maſſilienſibus dedit. Carolus Emmanuel II. Princeps optimus, qui omnes hujus nominis, & ſanguinis, homines unicè diligebat, cùm illum audiſſet intermiſsâ Matheſi Theologiam Lugduni tradere, Malè, inquit, actum: debuerat cætera prorſus omnia abjicere ex animo, ſeque totum Mathematicis abdere. Nondum ſcilicet illius vaſtiſſimæ mentis vires agnoverat, quæ licet in plurimas artes diviſa, ſufficeret omnibus: Neſciebat eum eſſe Claudium, qui rerum humanarum, divinarumque ſcientiam ita penitùs hauſerat, ut nunquam de Matheſi cogitaſſe videretur. Audivimus ipſi, & ſæpe admirati ſumus cum in publico diſceptantium theatro breviter quidem, & contortè, ſed acutè ſubtiliterque diſſereret, ut hominem crederes non argumenta proferre, ſed ſpicula. Audivimus, cùm in familiari congreſſu de Theologicis incideret ſermo, rem ipſam protinus attingere, neque per ambages, & circuitus accedere ad cauſam; aut in veſtibulo hærere, ſed recto mentis curſu, & primo ſtatim gradu ad controverſiæ caput, nodumque ipſum, ut aiunt, devenire. Quod quidem eò admirabilius eſt, quò longiùs iſta ab hominis inſtituto recedebant, qui pluribus jam annis Philoſophiæ, & Theologiæ cogitationem omnem prorſus abjecerat.

Hæc igitur de Claudii eruditione, & doctrinâ palam, & publicè ferebantur; ſed erant longè majora, quæ nunquam prodierant Domo, & intra noſtros parietes breve quidem, non tamen, ut arbitror, contemnendum ſecretæ admirationis theatrum habuere. Quamvis enim magnum apud exteros locum Claudius obtineret, mihi tamen credite Auditores, nunquam hominem plenè noſtis; nunquam enim totus in publicum venit. Vos ſcilicet in paginis, & libris, nos in moribus animum Claudii legebamus; vos, quæ ſcripſerat, agnoſcere potuiſtis; nos, quid rerum in dies ageret, explorare; vos ſæpe de literis, ſæpius fortaſſe de pietate, & virtute diſſerentem audiebatis, nos, quæ cæteris ſuaderet, reipſa perficere, & exequi videbamus, plura etiam præſtare, quàm quæ cæteris ſuaderet. Atque illa quidem tanta ſunt, ut taceri non debeant; eorum verò recordatio tam acerba, ut cogitari vix poſſint. Hæret adhuc pectori cicatricis aſperæ dolor; ſentio perturbari animum, & recrudeſcere vulnus, dum ea mente repetimus, quæ olim maximè delectabant, dum videremus: adeò ut, quæ pietas ſemper fuit, nunc quædam crudelitas ſit, laudare virtutem. Placet tamen, Auditores, crudelem potius eſſe, quàm invidum videri; non parcam dolori veſtro. Nam etſi ſopitus dolor excitetur commemoratione virtutis, hoc tamen acerbo licèt officio paſcitur animus, & quieſcit. Itaque ut tanti viri virtutes neque ſilere poſſumus ſine invidiâ, neque recordari ſine dolore; ita nec dolere quidem licet ſine aliquo ſenſu voluptatis. Agite, repetamus animo, quæ olim taciti mirabamur. Quantus erat in illo contemptus rerum humanarum, qui nihil jam optare noverat, nec fugere; neque unquam gaudere viſus, nec conqueri. Summa, & infima, ſplendida æque, & abjecta eodem apud illum ordine habebantur; ut neque in illis honorem quæreret, neque in his pudorem, aut obſcuritatem timeret. Pari ſtudio, & alacritate animi Maſſiliæ inter ſolos quandoque Nautas, & Pariſiis inter Equites, Principeſque verſabatur. Nunquam munus muneri, Urbem Urbi prætulit, qui omnia pariter humana contemnebat. Suppellex apud illum nulla: Apum more nihil ſecum habebat præter labores ſuos. Sed quid cætera quæreret, qui ſeipſum alieni juris fecerat? Quippe ut olim Philoſophus ille, cùm multa didiciſſet, ſe nihil ſcire profitebatur; ita Claudius, cum quæ cæteri vellent, ſummo ſtudio, & alacritate ſequeretur, & alieno arbitrio viveret, hoc tandem conſecutus fuerat, nihil velle. Itaque cum Pariſiis in hanc Urbem accerſendus eſſet auctoritate Principis, precibus, & ſtudio Nepotis, occurreretque ægrè hominem fortaſſe ab illo orbis terrarum theatro diſceſſurum, omnia tamen inconſulto Claudio peracta ſunt, quem ſcirent nunquam ſpectare, unde diſcederet, ſed quò vocaretur. Neque enim aut loci dignitas, aut ſplendor ullus, nec cupiditas gloriæ, aut vana celebritas nominis magnanimam Viri mentem acuebat ad laborem; cum ſæpe amico ſuo, cui nihil aut diſſimulare voluit, aut ſimulare potuit, ingenuè profeſſus ſit, nunquam ſe laudis, honoriſque ſtudio adductum, ut libros ederet, ſed ſpe & amore publici boni.

Quæ omnia eò majoris erant apud nos ponderis, quò ille vehementiùs à ſimulatione, & dolo abhorrebat. Sunt enim aliquando, qui mores optimos, quos aſſequi nolunt, imitari tamen ſtudent: Claudius (ô virum, qui nihil tegere noverat, præter virtutem!) gloriam & laudem, quam meritis majorem crederet, dedignabatur; imò quam ſibi debitam negare non poſſet, verecundè, & modeſtè declinabat. Nullus in illo fucus; plena omnia ingenuitatis, plena candoris. Parcè loquebatur, ſed graviter, ſed ſapienter; neque numerus, aut turba, ſed pondus erat in verbis. Plena vox, & conſtans, non levis, non lubrica; gravis inceſſus, non concitatus, non præceps; majeſtatem præferebat aſpectus, quam comitas, quam humanitas temperabat, reverebaris occurſum, non formidabas: idem denique cum omnibus agendi tenor; pares publicis domeſtici mores.

motes. Quid? animus ille quàm integer, quàm incorruptus! quâ pietate, & innocentiâ, cæteroque virtutum comitatu dives, inſtructuſque eminebat! Nunquam efferri viſus, nunquam erumpere; iracundiæ ne primos impetus quidem, nec leve veſtigium perturbatæ mentis agnoſcere licuit. Nam ſi quid controverſum accideret, ubi doctrinâ, & ingenio pugnandum eſſet quàm erat ſine felle ipſa indignatio! quàm decorus ardor! quàm innocens flamma! Hominem ego altiſſimo flumini ſæpe tacitus comparabam, quod placido, quietoque lapſu nunquam extrà ripas redundaret, ſed illimi aquarum puritate profundum alveum, altéque recedentem oſtenderet. Atque hanc facilitatem, & quietem ingenii hauſerat ille quidem ab eodem fonte, à quo cæteri ex ejus ſtirpe, quibus ſuavitas morum videtur commune quoddam eſſe patrimonium ſanguinis è majorum venis acceptum; ſed auxerat beneficium naturæ, & excoluerat arte, ſtudioque virtutis: adeo ut nec repentinis caſibus commoveretur, & in ipſo mortis occurſu eandem animi conſtantiam, & ſerenitatem frontis ſervarit. Erat tamen in illo ſilentio, & tranquillitate mentis ardor quidam indolis, & vegetum robur, quo magna, & ſublimia fortiter moliebatur, pertinacem ſolitudinis, ſtudiorumque laborem conſtantiſſimè tolerabat, nunquam è cubiculo pedem, nunquam à libris, & calamo manum referebat, ut nova in dies meditaretur; & quæ cogitaverat, ſcripto traderet, non ut grandi arcano amicis, & ſibi cuſtodiret, ſed ut publicæ utilitati liberaliter conſecraret. Quid dicam? quibus ſtimulis, quâ flammâ, quo divini cultus promovendi ſtudio incenderetur, cum in ipſo juventutis flore tenuiſſimæ valetudinis adoleſcens precibus quàm potuit diligentiſſimis poſtularit, ut Conſtantinopolim ad Græcos pueros erudiendos mitteretur? Quod quidem aſſiduus flagitator impetravit, & in Principe Turcarum Urbe, inſuliſque circumpoſitis toto quinquennio commoratus eſt inter tædia laboris improbi, & puerilium nugarum. Itaque, Auditores, cum auctoritas Principum, preces, & officia amicorum utili furto Claudium Pariſiis eripuiſſent; cum noſtrum eſſe, inter hos parietes vivere hujuſmodi virum videremus, gratulabamur fœlicitati noſtræ, neque ut alii clamore, & plauſu, ſed velut attoniti, ſuſpenſique intimè geſtiebamus, tantam virtutem alto ſilentio, & tacita veneratione proſequebamur.

Atqui cùm apud Principes, Equiteſque, apud ſapientes, & Domeſticos præclara eſſet, & pervagata Claudii fama, haud abs re fuerit paucis inquirere, quid de ſe Claudius ipſe ſentiret. Breviſſimè dicam. Quod unuſquiſque ex vulgo literatorum, quod mediocris ingenii, & conditionis homo, hoc de ſeipſo Claudius ſentiebat. Hinc ſcilicet oriebatur verecundus ille pudor, & Aulæ fuga; quippe toties expertus fuerat modeſtiam eò ſeveriùs excipi, quò benigniùs exciperetur à Principe. Mirabatur enim, & vix ipſe credebat ſibi, cum apud Equites, apud Reges in pretio eſſe, nomen aliquod, & locum obtinere experiretur. Hinc cùm occurrentem fortè Claudium magni nominis Princeps ſingulari benevolentiæ ſignificatione ſalutaſſet; quærenti deinde, amico, cur nunquam Principem obſequii causâ adiiſſet; quid, inquit, adirem, cui me putabam ignotum?

Plura dicerem, ſi aliquid unquam ille dixiſſet; ſed laudum ſuarum avariſſimus vir, qui aliena tantùm mirari poterat, ſua deſpicere, ſilentio ſuo penè etiam nobis legem impoſuit, & neceſſitatem tacendi. Nunquam tamen hoc impetrabit à me inimica Claudii gloriæ Claudii modeſtia, quæ ſi cæteras laudes ſiluit, ſilentium certè ipſum ſilere non potuit, & maximam hanc laudem Oratori reliquit, quòd cæteras laudes oppreſſerit. Quamquam non tacebat Claudius, dum taceret; virtutes enim parvæ loquuntur, ingentes tacent; ſed taciturnitas ipſa loquax eſt, & magnitudinem mutæ virtutis ſine ſtrepitu, & voce fatetur. Neque tamen eo conſilio de ſeipſo dicebat nihil, ne laudes ſuas ſeipſum laudando minueret, ſed ideò nihil laudabat, quòd nihil in ſe crederet poſſe laudari. Neque idcircò hoc credidit, quòd ſolus non agnoſceret, quæ cæteri omnes in illo mirabantur; ſed vaſtus animus, & majorum capax, cum diviniora adhuc ſupereſſe cerneret, quæ nondum aſſequebatur, quamquàm erant maxima, quæ jam ſtudio, & labore conſecutus fuerat, tanquam infima, & nulla eſſent, contemnebat. Mirentur tamen alii, quòd ſua nunquam laudaverit Claudius; miror ego magis, quòd ſua nunquam loquendo deſpexerit. Plures enim ſunt, qui ſe ipſos voce contemnunt, ſe nullius rei, nullius nominis, nullius ingenii prædicant; ſed interim contemptum, & negligentiam ſui cogunt ſuperbiæ, & ambitioni ſervire. Nihil horum Claudius. Scire vultis, quid ageret? tacebat.

O ſilentium hominis! O taciturnitatem omni voce, & laude majorem! Loquetur tamen poſteritas tota; loquar ego, dum vivam; literæ omnes, Artes omnes, Academiæ, & Gymnaſia, quæ te annis fermè triginta docentem audivere, ſapientiam, pietatem, innocentiam, religionem tuam loquentur. Neque Civitas iſta, cujus beneficio dies vitæ poſtremos impendiſti, de Te unquam Claudi ſilebit. Manet altè impreſſa mentibus, & fideli cogitatione deſcripta imago virtutis tuæ. Vivis, æternumque vives in animis omnium, in quibus jam vivebas, dum viveres: habes hanc morti tuæ ſuperſtitem vitam, quæ mori non poteſt. Ita enim præſentem ſentimus, ut ſæpe obliti doloris noſtri, & funeris tui, quem nuper ſepulcro dedimus vix credamus extinctum, & oculis cernere videamur. Claudium cogitamus, Claudium quærimus, Claudium ſive amoris, ſive doloris inani fraude decepti videmus, audimus, alloquimur. Salve heroum ſanguis, ſalve, & æternum vale. Fruere fœlicitatis faſtigio, quam Tibi virtute peperiſti. Si tuorum, ſi mei, ſi laudum iſtarum, quas vivus contempſeras, curam geris poſt fata: O Pater, accipe poſtremum hoc munus, quod cineri tuo in amoris, & grati animi argumentum non ſine lacrimis dolentes offerimus. Fruemur interim hæreditate luctuoſâ, quam ſolam relinquere potuiſti; habebimus pretioſa ſpolia mortalitatis tuæ: & ne quid juris ſit tempori, ſignabimus fortunatum lapidem, tuaſque laudes & nomen immortalibus notis inſcribemus:

HIC JACET
CLAUDIUS FRANCISCUS MILLIET DE CHALES,
GENERE, SAPIENTIA, VIRTUTE
NOTUS OMNIBUS; IGNOTUS SIBI.

SUMMA PRIVILEGII REGIS CHRISTIANISSIMI.

AUctoritate Regiâ ſancitum eſt, nequis Librum, cui titulus eſt R. P. CLAUDII FRANCISCI MILLIET DECHALES è Societate JESU *Curſus ſeu mundus Mathematicus*, [illegible] intra ſex annos à die Privilegii numerandos, imprimat, aut alibi impreſſum in hoc Regno divendat præter Aniſſon, Bibliopolam Lugdunenſem, aut eos quibus id juris conceſſerit, hocque omnibus penitùs [illegible] notum, indictum habeant, ac ſi Regii diplomatis ſententia operis initio [illegible] poſtponatur. Qui ſecus [illegible] librorum confiſcatione, aliiſque pœnis Regio diplomate declaratis mulctabitur. Datum Pariſiis die 13. Novembris 168[illegible]. De mandato Regis ſignatum JUNQUIERES.

Quod quidem diploma in acta Typographorum Pariſienſium relatum eſt, die 19. Novembris 1685. à CAROLO ANGOT, *Syndico.*

Deſiit hujus editionis prælum die 16. Ianuarii 1690.

INDEX

INDEX
TRACTATUUM, LIBRORUM, & Propoſitionum, quæ in tomo primo continentur.

TRACTATUS PROEMIALIS DE PROGRESSU MATHESEOS, & illuſtribus Mathematicis.

CAP. I. DE *Matheſi in genere.* 1
2. *De Progreſſu Geometriæ.* 6
3. *De Progreſſu Arithmeticæ.* 28
4. *Progreſſus Mechanices.* 37
5. *Progreſſus Geographiæ, Nauticæ, & Magneticæ.* 44
6. *Architectonices progreſſus.* 53
7. *De progreſſu Muſicæ.* 58
8. *Progreſſus Opticæ.* 64
9. *Progreſſus Aſtronomiæ.* 74

Notabit Studioſus Lector, Authorem, præter naturam & progreſſum Matheſeos, quæ in hoc Tractatu nitidè exponit, inſuper paſſim in quolibet capite, grave, verum & cenſorium de cunctis ferè Authoribus qui de Matheſi, tum in genere, tum in particulari, ſcripſere, dare judicium.

TRACTATUS PRIMUS. EUCLIDIS ELEMENTORUM Libros XIII. Complectens.

Elementorum Euclidis Liber primus. 109
Elementorum Euclidis Liber ſecundus. 126
Euclididis elementorum Liber tertius. 132
Euclidis elementorum Liber quartus. 145
Euclidis elementorum Liber quintus. 150
Euclidis elementorum Liber ſextus. 159
Elementorum Euclidis Liber ſeptimus. 169
Euclidis elementorum Liber octavus. 177
Euclidis elementorum Liber nonus. 183
Euclidis elementorum Liber decimus. 190
Euclidis elementorum Liber undecimus. 219
Euclidis elementorum Liber duodecimus. 230
Euclidis elementorum Liber decimus tertius. 239
Elementorum Euclidis aut potiùs Hypſiclis Alexandrini Liber XIV. 249

TRACTATUS II.
THEODOSII ELEMENTA
Sphærica, tribus libris comprehenſa.

Theodoſii Sphæricorum elementorum liber primus. 261
Theodoſii Sphæricorum liber ſecundus. 269
Theodoſii Sphæricorum liber tertius. 278

TRACTATUS III.
DE SECTIONIBUS CONICIS.

Liber primus de Parabola. 285
Liber ſecundus de Ellypſi. 303
Liber tertius de Hyperbolâ. 322
Liber quartus de ſectionibus Conicis. 342
Liber quintus de ſectionibus cylindricis. 353

TRACTATUS IV.
ARITHMETICA.

LIBER I.
De Regulis elementaribus.

Axiomata. 357
PROP. I. *Datum numerum notis arithmeticis deſignatum appellare.* 358
2. *Quemcumque numerum notis arithmeticis deſignare.* ibid.
3. *Additio numerorum integrorum.* 359
4. *Examen additionis.* 360
5. *Si ex numero novenarius detrahatur quantum poteſt, idem numerus relinquetur, qui reſiduus eſſet, detracto novenario, ex numero qui fieret ſi omnes characteres ejuſdem numeri colligerentur in unum quaſi omnes ad unitatem pertinerent.* ibid.
6. *Examen additionis per abjectionem novenarii.* 361
7. *Additio numerorum denominatorum.* ibid.
8. *Subtractio.* ibid.
9. *Subductionis examina* 362
10. *Subtractio numerorum denominatorum.* 363
11. *Quid ſit multiplicatio.* ibid.
12. *Digitum per digitum multiplicare.* 365
13. *Numerum quemcumque per alium quemcumque multiplicare.* 366
14. *Multiplicationem examinare.* 368
15. *Si numerus per multiplicationem mutuam aliorum duorum producatur, idem numerus relinquetur, abjectis novenariis, ex eo qui producetur per multiplicationem reliqui, ex iiſdem numeris, ſubducto prius ex iis novenario quoties poteſt.* 369
16. *Varia multiplicationis exempla.* ibid.
17. *Examen additionis numerorum denominatorum.* 371
18. *Quid ſit diviſio.* ibid.
19. *Numerum quemcumque majorem per minorem dividere.* 372
20. *Alia praxes diviſionis.* 373
21. *Reductio minorum ſpecierum monetæ ad majores.* 374.
22. *Si 4 numeri proportionales fuerint, numerus productus ex multiplicatione primi, & ultimi; æqualis eſt numero producto, ex multiplicatione ſecundi & tertii.* ibid.
23. *Tribus datis numeris quartum proportionalem invenire.* 375
24. *Duobus datis numeris tertium continuè proportionalem invenire.* ibid.
25. *Variæ quæſtiones.* 376
26. *Datis tribus numeris invenire quartum, qui ita ſe habeat ad primum, ut ſecundus ad tertium.* 377.
27. *Uſus varii Regulæ proportionum directæ.* ibid.
28. *Datis diverſæ denominationis numeris, quartum proportionalem invenire.* 378
29. *Regula ſocietatis, ſeu datum numerum ſecare in partes, quæ datam ſervent proportionem.* 379
30. *Notanda pro regula ſocietatis.* ibid.
31. *Regula alligationis.* 330

23. Ex falſo ad arbitrium aſſumpto eruere verum. 382.
LEMMA I. Si tres numeri aliis tribus proportionales fuerint, eorum differentiæ proportionales erunt. ibid.
LEMMA II. Si duobus numeris idem numerus addatur, aut ab illis idem numerus auferatur, differentiæ ſummarum aut reſiduorum eadem erunt, quæ priorum numerorum. ibid.
LEMMA III. Si numeri tres per eumdem multiplicentur, aut per eumdem dividantur, Productorum differentiæ erunt proportionales differentiis numerorum. 383
LEMMA IV. Si quatuor numeri, arithmeticè proportionales fuerint, aggregatum ex primo & ultimo, æquale erit aggregato ex duobus mediis & viciſſim, &c. ibid.
LEMMA V. Si duo numeri eumdem multiplicant, & productus minor à majori ſubtrahatur, relinquitur numerus æqualis producto, multiplicatione ejuſdem numeri, per differentiam multiplicantium. 383.
33. Ex duobus ſuppoſitis falſis verum eruere. ibid.
34. Alius modus regulæ falſi duplicis poſitionis. 385

ARITHMETICÆ
LIBER II.
De Numeris fractis.

PROP. I. Fractiones quarum numeratores eamdem habent rationem ad ſuos denominatores, æquales ſunt. 387
2. Fractiones eamdem habentes denominatorem, eam rationem habent inter ſe, quam numeratores. 388
3. Fractiones eumdem habentes numeratorem ſe habent reciprocè, ut denominatores. ibid.
4. Fractio qualibet eandem rationem habet ad numerum abſolutum æqualem ſuo numeratori; quam unitas ad numerum abſolutum denominatori æqualem. ibid.
5. Si duarum minutiarum numeratores, per denominatores decuſſatim multiplicentur, producti eandem rationem habebunt, quàm ipſæ fractiones. ibid.
6. Minutiam minutiæ, ad ſimplicem minutiam ipſi æqualem revocare. ibid.
7. Expendere, an duo numeri ſint primi inter ſe, & maximam eorum communem menſuram reperire. 389
8. Fractionem ad minimos terminos revocare. 390
9. Minutiam ad integros revocare. ibid.
10. Numerum integrum ad minutiam reducere. ibid.
11. Duas aut plures minutias immò & integros cùm minutiis ad eandem denominationem reducere. 391
12. Aſſignare minutiam cujuſcúmque integri. ibid.
13. Additio fractionum. ibid.
14. Fractionem minorem ex majori ſubtrahere. 392
15. Additio & ſubtractio fractionum, ex fractionibus fractionum. ibid.
16. Minutiam per minutiam multiplicare. ibid.
17. Multiplicatio fractionum fractionum, per fractiones fractionum. 393
18. Minutiam per minutiam dividere. ibid.
19. Alius modus reducendi minutias ad eandem denominationem. ibid.
20. Multiplicatio fractionum. 393
21. Diviſio fractionis per fractionem. 394
22. Varia exempla diviſionis numerorum integrorum per fractiones, vel viciſſim. ibid.
23. Alio modo minutiam per minutiam dividere. ibid.
24. Regula proportionis cum fractionibus. 395
25. De fractionibus decadicis. 396
26. Additio numerorum quibus adhærent partes decimales. 397
27. Subſtractio numerorum quibus adhærent partes decimales. ibid.
28. Multiplicatio numerorum quibus adhærent partes decimales. ibid.
29. Diviſio numerorum quibus adhærent partes decadicæ. 398
30. Minutiam quamcúmque ad minutiam decadicam revocare. ibid.
31. Numeros denominatos ad minutias decadicas revocare. ibid.

ARITHMETICÆ
LIBER III.
De extractione radicum.

PROP. I. Si ad quadratum numerum ejus radix duplicata addatur, ſimul cum unitate, fiet quadratus proximè major. 400
2. Si à numero quadrato duplicatam ejus radicem auferas, minùs tamen unitate; quadratum numerum proximè minorem habebis. 401
3. Numerus quadratus, ex tot imparibus numeris conſtat, ab unitate incipientibus, quot ejus radix unitates continet. ibid.
4. Omnis numerus integer carens radice integrâ, caret & fractâ. ibid.
5. Quadratus numerus conſtans duabus cyphris, radicem habet unicâ conſtantem cyphrâ; qui tribus & quatuor, habet radicem duobus conſtantem, qui quinque & 6 tribus conſtantem. 402
6. Si cubus tres tantùm, aut pauciores figuras continet, radix ejus cubica unicam continebit; ſi quatuor, quinque, ſex, radix duas, ſi ſeptem, octo, novem, radix tres. ibid.
7. Numeri quadrati radicem quadratam invenire. ibid.
8. Numeri non quadrati radicem propinquiorem verâ inveſtigare. 403
9. Si numerus relictus major eſt radice, aut illi æqualis, radix minor verâ exactior eſt, ſi minor ſit radice, major radix verâ exactior erit, quàm minor verâ. 404
10. Quadratus quadratum multiplicans quadratum producit, cujus radix eſt numerus productus ex multiplicatione radicum. 405
11. Si quadratus numerus quadratum metiatur, illum metietur per quadratum numerum; cujus radix habebitur, ſi radix diviſi, per dividentis radicem dividatur. ibid.
12. Fractionis quadratus numerus eſt fractio cujus numerator eſt quadratus numeratoris, & denominator quadratus denominatoris. ibid.
13. Numeri non quadrati radicem exactiorem quantùm libuerit conſtituere. ibid.
14. Fractio poteſt eſſe numerus quadratus, & terminis non quadratis conſtare. 406
15. Expendere an fractio quadrata ſit, licet terminis quadratis non conſtet. ibid.

16. *Quadrata fractionis terminos, ad quadratos revocare.* 406
17. *Radicem quadratam ex fractione quadratâ reducere.* ibid.
18. *Fractionis non quadrata radicem quadratam eruere.* ibid.

DE RADICE CUBICA.

19. *Si numerus in partes ſecetur, cubus totius æqualis eſt cubis partium, & parallelepipedo quod toto numero, & ejus partibus continetur ter ſumpto.* 407
20. *Si numerus in duas partes ſecetur: erit cubus totius, æqualis cubis partium, & ſex parallelepipedis, quorum tria comprehenduntur, ſub prima parte bis, & ſub ſecunda ſemel, tria item alia comprehenduntur ſub ſecunda parte bis, & ſub prima ſemel.* 408
21. *Si alicui cubo addatur ter ipſa radix, & ter quadratum radicis cum unitate, producetur cubus proximè major.* ibid.
22. *Ex dato numero cubo, radicem cubicam extrahere.* ibid.
23. *Radicem cubicam examinare.* 410
24. *Numeri non cubici exactiorem radicem invenire.* ibid.
25. *Fractionis radicem cubicam inveſtigare.* ibid.
26. *Numeri non cubici radicem propiorem verâ in infinitum invenire.* 411
27. *Cubus numerus tot continet numeros Arithmeticæ progreſſionis quot radix ejus continet unitates. Medius autem numerus erit quadratum radicis, ſi cubus impar fuerit. Si verò fuerit par quadratum radicis bis ponatur.* ibid.
28. *Numeri impares progreſſionis Arithmeticæ vulgaris ita concurrunt ad generationem cuborum, ut primo cubo primus aſſignetur, ſecundo ſecundus, & tertio tertius, quartus, quintus, ſextus, & ita conſequenter.* 412

ARITHMETICÆ LIBER IV.

Arithmetica calculatoria, & divinatoria.

PROP. I. *Numeratio calculatoria.* 412
2. *Additio ſimplex.* 413
3. *Subtractio ſimplex.* 414
4. *Multiplicatio.* ibid.
5. *Diviſio.* 415
6. *Additio numerorum denominatorum.* 416
7. *Subtractio numerorum denominatorum.* ibid.
Arithmetica divinatoria. ibid.
PROB. I. *Numerum ab alio cogitatum divinare.* ibid.
2. *Aliter numerum cogitatum invenire.* 417
3. *Varii modi divinandi numerum ab alio cogitatum.* ibid.
4. *Ex duobus numeris pari & impari, divinare quem duo elegerint.* 418
5. *Plures numeros cogitatos denario minores divinare.* ibid.
6. *Si duo accipiant certos numeros calculorum divinare, quot unus habeat.* ibid.
7. *Si duo certos numeros calculorum accipiant, divinare quot quiſque habeat.* 419
8. *Quot ſint puncta in una chartula luſoriâ, divinare.* 419.
9. *Chartularum in plures ordines digeſtarum, divinare quam quis cogitaverit.* ibid.
10. *Divinare chartulam, quam quis cogitaverit.* ibid.
11. *Ex pluribus chartulis in orbem diſpoſitis, divinare quam quis cogitaverit.* ibid.
12. *De diſpoſitione Chriſtianorum & Turcarum ut ſedes novenaria in Turcam ſemper incurrant.* ibid.
13. *Propoſitis tribus rebus, & tribus hominibus, divinare quam quilibet acceperit.* 420

TRACTATUS V.

TRIGONOMETRIA.

TRIGONOMETRIÆ LIBER I.

De ſinubus, tangentibus, & ſecantibus. 421

PROP. I. *In circulis quibuſcúmque eadem eſt ratio, radii ad ſinum rectum, ſinum verſum, ſecantem, tangentem, & ſubtenſam arcuum ſimilium.* 423
2. *Cognitâ ſubtenſa alicujus arcûs, cognoſcere ſubtenſam reliqui arcûs ad ſemicirculum.* 424
3. *Dato ſinu arcûs, invenire ſinum complementi.* ibid.
4. *Dato ſinu alicujus arcûs, invenire ſinum arcûs dupli, & dimidii.* ibid.
5. *Datis ſinubus duorum arcuum invenire ſinum aggregati eorum.* ibid.
6. *Datis ſinubus duorum arcuum, invenire ſinum differentiæ eorum.* 425
7. *Sinus arcuum minimorum ſunt ſenſibiliter in eadem ratione cum arcubus.* ibid.
8. *Si eadem quantitas duplici verſione dividatur, erit numerus partium primæ diviſionis, ad numerum partium ſecundæ, ut una pars ſecundæ diviſionis ad unam partem primæ diviſionis reciprocè.* ibid.
9. *Subtenſa arcûs* 60 *graduum, æqualis eſt ſemidiametro.* ibid.
10. *Quadratum ſubtenſæ graduum* 90 *eſt duplum quadrati ſemidiametri.* ibid.
11. *Canonem ſinuum conſtruere.* ibid.
12. *Differentia ſinuum duorum arcuum, æqualiter à gradu ſexageſimo diſtantium, æqualis eſt ſinui diſtantiæ alterutrius à gradu ſexageſimo.* 426
13. *Si ſint duo arcus æqualiter à gradu trigeſimo diſtantes, quadratum ſinus diſtantiæ eſt tertia pars quadrati differentiæ ſinuum illorum arcuum.* ibid.

14. *Si ſint duo arcus æqualiter ab arcu gradnum 45 diſtantes; erit quadratum ſinus arcus quo ab arcu 45 differunt, media pars quadrati differentiæ ſinuum.* 427

15. *Aggregatum ex quadratis differentiæ ſinuum arcuum, & differentiæ ſinuum complementorum, eſt quadruplum quadrati ſinûs ſemidifferentiæ arcuum.* ibid.

16. *Ut ſinus complementi ad ſinum arcûs, ita ſinus totus ad tangentem ejuſdem arcus.* ibid.

17. *Radius eſt medius proportionalis, inter ſinum complementi, & ſecantem arcûs.* ibid.

18. *Radius eſt medius proportionalis inter tangentes arcus & complementi.* 428

19. *Tangentes arcuum, tangentibus complementorum ſunt reciproce proportionales.* ibid.

20. *Sinus arcuum & ſecantes complementorum reciproce ſunt proportionales.* ibid.

21. *Ut tangens arcûs ad ſecantem ejus; ita radius ad ſecantem complementi.* ibid.

22. *Differentia tangentium arcuum, qui ſimul ſumpti æquales ſunt quadranti, eſt dupla tangentis arcus, quo major minorem ſuperat.* ibid.

23. *Tangens differentiæ arcuum, qui ſimul æquales ſunt quadranti, unà cum tangente arcûs minoris, æqualis eſt ſecanti differentiæ.* 429

24. *Tangens differentiæ arcuum, qui ſimul æquales ſunt quadranti, & ſecans ejuſdem differentiæ ſimul, æquales ſunt tangenti majoris arcûs.* ibid.

TRIGONOMETRIÆ

LIBER II.

De Logarithmis.

PROP. I. *Si quatuor quantitates ſint arithmeticè proportionales: prima & quarta ſimul ſumptæ æquales ſunt, tertia & ſecunda, item ſimul ſumptis.* 431

2. *Si ſint tres quantitates fuerint arithmeticè proportionales, prima & tertia ſimul ſumptæ, duplæ ſunt quantitatis mediæ.* ibid.

3. *Si ſint quotcúmque quantitates arithmeticè continuè proportionales, earum differentiæ erunt intervallis geometricè proportionales.* ibid.

4. *Si ſint quotcúmque quantitates continuè arithmeticè proportionales; exceſſus ultimæ ſupra primam diviſus per numerum intervallorum, dat differentiam, qua ſe excedunt invicem.* ibid.

5. *Si ſint quatuor numeri geometricè proportionales, logarithmi mediorum ſimul ſumpti, æquales ſunt logarithmis extremorum.* 432

6. *Si ſint tres numeri continuè proportionales geometricè logarithmi extremorum ſunt dupli logarithmi medii.* ibid.

7. *Si duo numeri ſe invicem multiplicantes, alium produxerint, erunt multiplicantium logarithmi æquales logarithmo producti, & unitatis.* ibid.

8. *Logarithmus alicujus numeri duplicatus, & imminutus logarithmo unitatis, æqualis eſt logarithmo quadrati ejus.* ibid.

9. *Logarithmus radicis triplicatus, æqualis eſt logarithmo cubi, & duplo logarithmo unitatis.* ibid.

10. *Si fuerint quotcúmque numeri geometricè continuè proportionales, cognito logarithmo primi & ſecundi; reliquorum dare logarithmos.* 433

11. *Si dentur quotcúmque numeri geometricè continuè proportionales cognito logarithmo primi & ultimi & numero intervallorum aſſignare logarithmos reliquorum.* 433

De Logarithmis communibus.

12. *Omnium numerorum in proportione decuplâ procedentium, logarithmos aſſignare.* ibid.

13. *Inter unitatem & denarium, quot volueris media proportionalia invenire.* 434

14. *Primus modus inveniendi logarithmum numero dato reſpondentem.* 435

15. *Si aliquis numerus minor binaris, & major unitate in denominatore ſuæ fractionis 15 cyphras habeat, antequam numerator aliquam habeat, & hujus numeri radix quadrata extrahatur; dico quod numerator fractionis hujus primi numeri, duplus erit numeratoris fractionis radicis ſuæ, demptâ utrinque ſuâ unitate.* 436

16. *Numerorum mediorum proportionalium inter denarium & unitatem logarithmos aſſignare.* ibid.

17. *Cujuſcumque numeri primi logarithmum invenire.* 437.

18. *Numeri primi paulò majoris logarithmum invenire.* ibid.

19. *Inventis numerorum primorum logarithmis: invenire numerorum compoſitorum logarithmos.* ibid.

Uſus logarithmorum. ibid.

20. *Dati numeri abſoluti logarithmum reperire.* ibid.

21. *Dato logarithmo numerum reſpondentem aſſignare.* 438.

22. *Cujuſcumque numeri dati radicem quadratam, cubicam, aut cujuſcumque poteſtatis invenire.* 439

23. *Uſus tabularum logarithmicarum reſpondentium arcubus quadrantis.* ibid.

24. *Uſus logarithmorum.* 440

25. *Datis tribus numeris, quartum proportionalem invenire in ratione inverſa.* ibid.

26. *Datis tribus numeris quartum proportionalem invenire in ratione duplicata illius, quæ eſt primi ad ſecundum.* ibid.

27. *Inter datos numeros quotcúmque medios proportionales invenire.* 441

28. *Uſus ultimæ tabulæ.* ibid.

29. *Numeri integri cum fractione adhærente logarithmum invenire.* ibid.

Facilior conſtructio Canonis logarithmorum, ſinubus, tangentibus, & ſecantibus reſpondentium. 442

30. *Invenire logarithmum fractionis propriè dictæ.* ibid.

31. *Ut dimidium ſinus totius ad ſinum dimidii arcûs, ita ſinus complementi ipſius dimidii ad ſinum totius arcûs.* ibid.

32. *Canonem logarithmicum tangentium conſtruere.* ibid.

33. *Canonem logarithmicum ſecantium conſtruere.* ibid.

Pro ſinubus verſis. *ibid.*

34. *Subtenſa eſt media proportionalis inter diametrum, & ſinum verſum.* 443

De logarithmis à Nepero traditis. *ibid.* ibid.

35. *De linea logarithmica.*

36. *Explicatio logarithmorum propoſitorum à Nepero.* 444

37. *Logarithmus cuiuſcumque ſinus major eſt exceſſu ſinu totius ſuprà illum, & minor eſt exceſſu, quo tertia proportionalis huic ſinui, & ſinui toti, ſuperat ſinum totum.* 445

38. *Cujuſlibet ſinus exhibere terminos logarithmicos,*

nicos, ſeu numeros intra quos poſitus ſit ejus logarithmus. 445

39. Sinus totus ad differentiam logarithmorum ſinuum majorem rationem habet, quam minor ſinus ad differentiam ſinuum, & minorem quàm major ſinus. 446

40. Sinuum majorum quam 999700. logarithmos exhibere. ibid.

41. Continuare 100 numeros in proportione geometricâ, quæ eſt inter ſinum totum, & ſinum eo minorem unitate nempè 9999999. 447

42. Continuare quinquaginta numeros, in proportione, quæ eſt 10000000 ad 9999900. ibid.

43. Continuare numeros 2 in proportione quæ eſt ſinus totius 10000000 ad numerum 9995000. ibid.

44. Conſtruere viginti unam ſeriem in proportione ſinûs totius ad numerum II, in quibus numeri præcedenti propoſitione inventi, primum locum occupent. 448

45. Uſus logarithmorum Neperi. ibid.

46. Uſus nonnulli logarithmorum in Arithmetica. 449

Propoſitis quotcúmque continuè proportionalibus geometricè, inter datos quemlibet ejuſdem ſeriei invenire. ibid.

Canon ſinuum, tangentium, & ſecantium; item logarithmorum ſinuum, & tangentium. 451

TRIGONOMETRIÆ LIBER III.

Reſolutio triangulorum rectilineorum.

Prop. I. In triangulis rectilineis univerſis, latera ſunt proportionalia ſinubus angulorum oppoſitorum. 522

2. In triangulis rectangulis ita eſt unum latus ad aliud, ut ſinus totus ad tangentē anguli adjacentis. Item ita eſt unum latus ad hypothenuſam, ut ſinus totus ad ſecantem ejuſdem. ibid.

3. In triangulis rectangulis unum crus medium proportionale eſt inter aggregatum, & differentiam reliquorum laterum. 523

4. In triangulis rectilineis ut ſumma duorum laterum ad differentiam eorum; ita tangens ſemiſummæ angulorum oppoſitorum ad tangentem ſemidifferentiæ eorum. ibid.

5. Si in triangulo ducatur ad maximum latus perpendicularis ab angulo oppoſito, ita erit majus latus ad ſummam reliquorum, ut differentia eorundem ad differentiam ſegmentorum, ejuſdem maximi lateris. 524

6. Si tangentes duorum arcuum ſinubus aliorum arcuum, aut angulorum proportionales fuerint, ſinus ſummæ & ſinus differentiæ primorum arcuum, tangentibus ſemiſummæ & ſemidifferentiæ ſecundorum proportionales erunt. ibid.

7. Ut ſinus totus ad ſinum complementi alicujus anguli in triangulo, ita duplum rectangulum ſub lateribus talem angulum comprehendentibus, ad differentiam quadratorum eorum laterum, & quadrati lateris oppoſiti. 525

8. In triangulo ita eſt ſinus totus ad ſinum anguli; ut unum latus talem angulum comprehendens ad perpendicularem ductam ab angulo adjacente, ad aliud latus. 525

9. Ut ſinus totus ad tangentem ſemianguli verticalis ità rectangulum, ſub ſemiſummâ laterum, & ſub exceſſu ſemiſummæ ſupra latus oppoſitum ad aream trianguli. ibid.

10. Area trianguli media proportionalis eſt inter rectangulum comprehenſum ſub ſemiſummâ laterum, & ſub differentia unius, & rectangulum comprehenſum ſub differentiis aliorū laterum. 526

11. Datis cruribus trianguli rectanguli angulos invenire. 527

12. Dato crure, & baſi trianguli rectanguli, invenire angulos. ibid.

13. Dato uno crure & angulo obliquo trianguli rectanguli, invenire crus alterum. ibid.

14. Dato angulo obliquo, & hypothenuſa trianguli rectanguli, invenire crus quodlibet. ibid.

15. In triangulo rectangulo, data baſi & uno crure, invenire aliud crus. 528

16. Dato angulo obliquo, & uno crure trianguli; invenire hypothenuſam. ibid.

17. Datis cruribus trianguli rectanguli invenire hypothenuſam. ibid.

De triangulis obliquangulis. 529

18. Datis in triangulo quocumque duobus lateribus, & angulo uni eorum oppoſito, invenire angulum alteri oppoſitum, modo ſciatur utrùm acutus, vel obtuſus ſit. ibid.

19. Cognitis duobus trianguli lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo, reliquos angulos cognoſcere. ibid.

20. Cognitis tribus trianguli lateribus cognoſcere angulos. ibid.

21. In omni triangulo rectilineo, ut rectangulum ſub ſemiſummâ trium laterum & ſub differentia baſis ab ea ad quadratum radii, ita rectangulum ſub differentiis crurum ab eadem ſemiſummâ ad quadratum tangentis ſemianguli verticalis. 531

22. Datis duobus lateribus, & angulo uni eorum oppoſito invenire aliud latus. ibid.

De area trianguli.

23. Datis duobus trianguli lateribus cum angulo ab ipſis comprehenſo, invenire aream trianguli. ibid.

24. Cognitis tribus trianguli lateribus, aream invenire. 532

25. Datis trianguli duobus angulis, & uno latere, ejus aream invenire. ibid.

TRIGONOMETRIÆ LIBER IV.

Iſagogicus ad ſolvenda triangula ſphærica.

Prop. I. Si ex puncto quod circuli polus non ſit (ſive circulus ille ſit maximus, ſive non) plurimi cadant arcus maximorum circulorum in ejus circumferentiam, maximus eſt qui per polum tranſit, & reliquus minimus: maximo viciniores majores ſunt: facientque ex parte maximi cum priori circulo angulum obtuſum. 533

2. Duo qualibet trianguli latera ſphærici, reliquo ſunt majora. 534

3. Tria ſphærici trianguli latera, circulo ſunt minora. ibid.

4. Si duo triangula ſphærica habeant duo latera ſingulatim æqualia, & angulos iis comprehenſos æquales; baſes quoque & reliquos angulos ſingulatim æquales habebunt. ibid.

5. In triangulis ſphæricis Iſoſcelibus, anguli ſuprà & infrà baſin æquales ſunt. ibid.

6. Triangulum

6. *Triangulum ſphæricum, cujus anguli ad baſin æquales ſunt, eſt iſoſceles.* 535

7. *Si duo triangula ſphærica ſingula latera ſingulis æqualia habuerint; angulos quoque æquales habebunt.* ibid.

8. *Ad datum punctum circuli maximi, conſtituere angulum dato æqualem.* ibid.

9. *In triangulo ſphærico major angulus, majori angulo ſubtenditur.* ibid.

10. *Si triangulum duo latera, ſingula ſingulis æqualia habeat lateribus alterius, angulum verò iis contentum majorem: baſin quoque baſi majorem habebit. Et viciſſim ſi baſin baſi majorem habeat, angulum quoque majorem habebit.* ibid.

11. *Si duo latera trianguli ſphærici ſint æqualia ſemicirculo, & baſis producatur, erit angulus externus interno æqualis, & anguli ſuprà baſin æquales duobus rectis; ſi ſint majora, externus interno major erit, & anguli ſuprà baſin minores duobus rectis, ſi ſint minora ſemicirculo, externus interno major erit, & anguli ſuprà baſin majores duobus rectis.*

Et viciſſim ſi angulus externus interno, & oppoſito æqualis fuerit, aut anguli ſuprà baſin æquales duobus rectis, latera duo æqualia erunt ſemicirculo, &c. 536

12. *In triangulis ſphæricis Iſoſcelibus, ſi latera ſint quadrantes, anguli ad baſin recti erunt; ſi majores quadrante, obtuſi: ſi minores, acuti; & viciſſim.* ibid.

13. *Cujuſcunque trianguli ſphærici, omnes anguli duobus rectis ſunt majores, & ſex rectis minores.* 537.

14. *Si duo triangula ſphærica habeant duos angulos ſingillatim æquales cùm angulo adjacente, illa erunt omninò æqualia.* ibid.

TRIGONOMETRIÆ

LIBER V.

De reſolutione triangulorum ſphæricorum rectangulorum.

Prop. I. *In triangulis ſphæricis univerſis, ſinus laterum ſunt ſinubus angulorum oppoſitorum proportionales.* ibid.

2. *In triangulis rectangulis, ita eſt ſinus totus ad ſinum lateris adjacentis angulo recto, ut tangens anguli ad tangentem lateris & oppoſiti.* 538.

3. *Si duo trianguli ſphærici latera continuentur, fiet aliud triangulum eandem baſin, & angulum baſi oppoſitum habens, cæteraſque partes priorum ſupplementa ad ſemicirculum.*

4. *Si producatur crus trianguli rectanguli uſque ad polos alterius cruris; fit aliud triangulum, commune habens latus, & reliquas partes aut æquales partibus præcedentis, aut earum ſupplementa ad ſemicirculum aut complementa ad angulum rectum.* 539 ibid.

5. *In triangulis rectangulis, crura ſunt ejus affectionis ac anguli ipſi oppoſiti.* ibid.

6. *Triangula ſphærica omnes angulos ſingillatim æquales habentia, latera quoque habent æqualia.* 540

7. *Poſſunt duo triangula habere duos angulos ſingillatim æquales, & latus æqualibus angulis oppoſitum æquale, & eſſe inæqualia.* 541

8. *Triangula rectangula habentia angulum obliquum æqualem, ſicut & hypothenuſam, ſunt omni ſenſu æqualia.* ibid.

9. *In triangulis rectangulis cognito angulo obliquo, & crure ipſi adjacente, dare alium angulum.* 542

10. *Dato angulo obliquo, & latere ipſi oppoſito, invenire alium angulum, modo vel ejus ſpecies cognoſcatur, vel ſpecies lateris ipſi oppoſiti, vel an baſis ſit quadrans, aut major, vel minor quadrante.* ibid.

11. *Datâ hypothenuſâ, & uno crure, invenire angulum prædicto cruri oppoſitum.* ibid.

12. *Cognitis cruribus, cognoſcere quemlibet angulum obliquum.* 543

13. *Datâ baſi, & crure, cognoſcere angulum ab ipſis comprehenſum.* ibid.

14. *Datâ baſi, & uno angulo invenire alium angulum.* ibid.

15. *Datâ baſi, & angulo obliquo, latus ipſi oppoſitum invenire.* 544

16. *Datâ baſi, & uno latere aliud latus invenire.* ibid.

17. *Cognitis omnibus angulis, cognoſcere latus, angulum rectum comprehendens.* ibid.

18. *Cognito angulo obliquo, & latere adjacente, dare latus oppoſitum.* ibid.

19. *Cognito crure, & angulo obliquo ipſi oppoſito; cognoſcere aliud crus, modo ſciatur ejus ſpecies, vel ſpecies anguli alterius, vel ſpecies hypothenuſæ.* ibid.

20. *Datâ baſi, & angulo obliquo, invenire latus dato angulo adjacens.* 545

21. *Cognitis angulis, cognoſcere baſin.* ibid.

22. *Datis cruribus, invenire baſin.* ibid.

23. *Dato crure & angulo ipſi oppoſito, habere hypothenuſam, modo ſciatur ſpecies ejus, vel ſpecies alterius lateris, aut anguli.* 546

24. *Dato crure, & angulo obliquo ipſi adjacente, cognoſcere baſin* ibid.

25. *Omne triangulum rectangulum cujus duo latera ſunt quadrante majora, & conſequenter duo anguli obtuſi, reſolvi poteſt per triangulum rectangulum, cujus latera erunt minora quadrante, & anguli acuti.* ibid.

26. *In triangulis quadrantalibus, ex tribus partibus continuis, ut ſinus totus ad tangentem unius extremæ, ità tangens alterius extremæ ad ſinum intermediæ.* 547

27. *In quadrantalibus triangulis ſimplicibus, eſt ut ſinus totus ad ſinum complementi unius oppoſitæ: ita ſinus complementi alterius oppoſitæ ad ſinum intermediæ.* ibid.

TRIGONOMETRIÆ

LIBER VI.

De reſolutione triangulorum ſphæricorum obliquangulorum.

Prop. I. *In quocumque triangulo ſphærico, ſi anguli ad baſin fuerint affectionis ejuſdem, perpendicularis ab angulo oppoſito ducta, intra triangulum cadet; ſi diverſæ, extra.* 548

2. *Si triangulis crura ſint affectionis ejuſdem, arcus quadrans ab angulo ad latus oppoſitum ductus, cadit extra; ſi diverſæ, intra triangulum.* 549

3. *Trianguli ſphærici acutanguli quodlibet latus quadrante minus eſt.* ibid.

4. *Trianguli cujus omnia latera ſunt quadrante majora, vel unum quadrans, alia majora quadrante; omnes anguli obtuſi ſunt.* ibid.

5. *Si duo triangula habeant duos angulos ſingillatim æquales,*

æquales, unumque latus angulo æquali oppoſitum æquale, reliquum alteri angulo æquali oppoſitum ejuſdem affectionis, non tamen quadrans; erunt triangula omni modo æqualia. 550

6. Ea triangula ſunt omnimodo æqualia, quæ unum angulum æqualem habent, una cum lateribus circa alium angulum, modò tertius angulus in utroque ſit affectionis ejuſdem, non tamen recti. ibid.

7. In triangulis obliquangulis demiſſâ perpendiculari, ita erunt reciprocè ſinus ſegmentorum baſis, ut tangentes angulorum baſi adjacentium reciprocè. 551

8. In triangulis obliquangulis demiſſa perpendiculari, tangentes ſegmentorum baſis proportionales ſunt tangentibus partium anguli verticalis. ibid.

9. In obliquangulis demiſſa perpendiculari, ita ſunt ſinus complementorum partium anguli verticalis, ſicut tangentes complementorum laterum. ibid.

10. In obliquangulis demiſſâ perpendiculari, ita ſunt ſinus complementorum laterum; ut ſinus complementorum ſegmentorum baſis. 552

11. In obliquangulis demiſſâ perpendiculari, ita ſunt reciprocè tangentes laterum, ut ſinus complementorum angulorum verticalium. ibid.

12. In obliquangulis demiſſâ perpendiculari, erunt ſinus angulorum verticalium ſinubus complementorum angulorum ad baſin proportionales. ibid.

13. In triangulis ſphæricis, ità eſt rectangulum ſub ſinubus crurum, ad quadratum radii; ut differentia inter ſinum verſum baſis, & ſinum verſum differentiæ crurum, ad ſinum verſum anguli verticalis. ibid.

Lemma I. Ita eſt ſinus totus, ad ſinum ſemiſummæ duorum arcuum; ut ſinus ſemidifferentia eorum, ad ſemiſſem differentiæ ſinuum verſorum. 553

14. In omni triangulo, ita eſt rectangulum ſub ſinubus crurum ad quadratum radii, ut rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ baſis, & differentiæ crurum, & ſub ſinu ſemidifferentia baſis, & differentia crurum, ad quadratum ſinûs dimidii anguli verticalis. 554

15. In omni triangulo, ita eſt rectangulum ſub ſinubus crurum ad quadratum radii; ut rectangulum ſub ſinubus differentiarum crurum à ſemiſumma omnium laterum ad quadratum ſinûs dimidii anguli verticalis. ibid.

Lemma II. Ut quadratum ſinûs alicujus arcûs ad rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ, & ſinu ſemidifferentiæ aliorum duorum arcuum, ita ſinus verſus arcus dupli illius primi ad differentiam ſinuum verſorum poſteriorum arcuum. 555

16. In omni triangulo differentia ſinuum verſorum baſis, & differentiæ crurum, eadem eſt cum differentia ſinuum verſorum baſis, & ſummæ crurum trianguli coalterni. ibid.

17. In omni triangulo ut rectangulum ſub ſinubus crurum ad quadratum radii, ita rectangulum ſub ſinu dimidiæ ſummæ laterum omnium, & ſub ſinu differentia baſis à ſemiſummâ eadem, ad quadratum ſinûs dimidii anguli, qui ſit complementum anguli verticalis ad duos rectos, vel quod idem eſt ad quadratum ſinûs unius arcûs, qui ſit complementum dimidii anguli verticalis. 556

18. Si in triangulo duo crura adæquent quadrantem, ita erit dimidius ſinus aggregati, ex minori crure & complemento majoris, ad differentiam quæ eſt inter ſinum talis aggregati & ſinum complementi baſis, ut ſinus totus ad ſinum verſum anguli verticalis. 557

19. Si duo trianguli crura majora fuerint quadrante, erit dimidia ſumma ſinûs exceſſus eorum ſuprà quadrantem, & ſinus aggregati ex minori crure, & complemento majoris ad differentiam, quæ eſt inter ſinum hujuſmodi aggregati, & ſinum complementi baſis, ut ſinus totus ad ſinum verſum anguli verticalis. ibid.

20. Si trianguli duo crura ſint minora quadrante, ablato ſinu defectûs, à ſinu aggregati ex minori crure, & complemento majoris, erit dimidium reliqui ad differentiam inter ſinum illius aggregati, & ſinum complementi baſis, ut ſinus totus ad ſinum verſum anguli verticalis. 558

21. Propoſito quolibet in ſphærâ triangulo, datur aliud triangulum, cujus ſingula latera prioris angulis æqualia ſunt, & viciſſim, mutato tamen maximo angulo in ſuum ſupplementum ad duos rectos. ibid.

22. Datis duobus trianguli obliquanguli angulis, una cum latere interpoſito, alium angulũ reperire. 559

23. Datis duobus lateribus, & angulo uni eorum oppoſito, angulum ab ipſis comprehenſum invenire. ibid.

24. Datis duobus angulis, & latere uni eorum oppoſito, tertium angulum invenire, modò ſciatur cujus ſit affectionis, vel cujus ſit affectionis latus alteri angulo dato oppoſitum. ibid.

25. Cognitis duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo, alium quemcumque angulũ invenire. 560

26. Cognitis in triangulo duobus lateribus, & angulo uni eorum oppoſito, cognoſcere angulum alteri lateri cognito oppoſitum, cujus ſpecies cognoſcitur. ibid.

27. Cognitis duobus angulis, & latere uni eorum oppoſito, latus alteri angulo cognito oppoſitum, ſpecie tamen præcognitum invenire. ibid.

28. Cognitis tribus trianguli ſphærici lateribus, quemlibet angulum reperire. 561

29. Datis trianguli tribus lateribus, cognoſcere cujus affectionis ſit angulus quilibet. 563

30. Datis omnibus trianguli ſphærici angulis, invenire latera. ibid.

31. Cognitis duobus trianguli ſphærici lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo, invenire baſin. ibid.

32. Cognitis duobus angulis, & latere uni eorum oppoſito, invenire latus adjacens duobus angulis cognitis, modo vel cognoſcatur ejus ſpecies vel ſpecies alterius lateris incogniti. ibid.

33. Cognitis duobus lateribus, & angulo uni eorum oppoſito, cognoſcere tertium latus. 564

34. Cognitis duobus angulis, & latere utrique adjacente, aliud latus invenire. ibid.

35. Multiplicationem & diviſionem evitare: quando primo loco eſt radius, ſecundo & tertio eſt ſinus. ibid.

36. Si ſinus totus ſit in primo, ſecundo & tertio loco, diviſionem evitare. 565

37. Si primo loco ſit ſinus, & nullibi radius, diviſionem in duplicem multiplicationem convertere. ibid.

38. Si primo loco ſit ſinus totus, & ſecundo, & tertio partim ſecantes, partim ſinus, aut tangentes, quartum proportionalem invenire per proſtaphæreſin. ibid.

PRAXIS TRIGONOMETRIÆ.

LIBER VII.

Prop. I. Datis maximâ eclypticæ obliquitate, ſoliſque diſtantiâ à proximo æquinoctio, ejus declinationem reperire. 566

2. Datis declinatione ſolis, & obliquitate eclypticæ, invenire ejus locum in zodiaco, ſeu diſtantiam à

3. Cognitâ inclinatione eclypticæ ad æquatorem &

& diſtantiâ ſolis à proximo æquinoctio, ejus aſcenſionem rectam invenire. 567
4. *Datis maximâ declinatione eclypticæ, & ſolis declinatione, invenire ejus aſcenſionem rectam.* ibid.
5. *Datis maximâ eclypticæ obliquitate, & diſtantia ſolis à proximo æquinoctio, invenire angulum eclypticæ cum meridiano.* ibid.
6. *Datis maxima obliquitate eclyptica, & declinatione ſolis, invenire angulum eclypticæ cum meridiano.* ibid.
7. *Datis declinatione ſolis, elevatione poli, ſolis amplitudinem ortivam aut occiduam invenire.* ibid.
8. *Datis declinatione ſolis, & elevatione poli, invenire differentiam aſcenſionalem.* 568
9. *Datis declinatione ſolis & elevatione poli, invenire horam ortûs, & occaſûs.* ibid.
10. *Datis elevatione poli, & horâ ortûs, aut occaſûs, invenire declinationem & diem, quâ oritur aut occidit tali horâ.* ibid.
11. *Datâ declinatione ſolis, elevatione poli, & horâ diei, ſolis elevationem ſuprà horizontalem reperire.* ibid.
12. *Dato verticali ſolis, ejus declinatione & horâ, invenire altitudinem.* ibid.
13. *Datis declinatione, altitudine, & azimuth ſolis, invenire horam diei.* 569
14. *Datis elevatione poli, declinatione & altitudine ſolis, horam diei invenire.* ibid.
15. *Datis elevatione ſolis, declinatione & altitudine poli, invenire ſolis azimuthum.* ibid.
16. *Datis altitudine, & declinatione ſolis unà cum azimutho, invenire horam.* ibid.
17 *Datis altitudine ſolis aut ſtellæ una cum ejus azimutho, & declinatione, invenire elevationem poli.* ibid.
18. *Datis declinatione ſolis, elevatione poli, & angulo azimuthali, invenire horam.* 570
19. *Datis elevatione poli & horâ, ſeu ſolis diſtantia à meridiano, invenire arcum horizontis comprehenſum inter meridianum, & circulum horarium ſolis.* ibid.
20. *Datâ ſtellæ latitudine & longitudine, invenire ejus aſcenſionem rectam declinationem.* ibid.
21. *Datis longitudinibus, & latitudinibus duarum ſtellarum, invenire earum diſtantiam.* ibid.

TRACTATUS VI.
ALGEBRA.

ALGEBRÆ
LIBER I.

Ad æquationem Algebricam, Iſagogicus

Prop. I. *Si numerus ſeipſum multiplicet, productumque iterum multiplicet & ex eâ multiplicatione ortum multiplicet, & ita conſequenter, orietur ſeries continuè proportionalium in eâ ratione, quæ eſt unitatis ad primum numerum.* 572
2. *Denominatio numerorum coſſicorum.* ibid.
3. *Exponentes numerorum coſſicorum.* 573
4. *Numeratio numerorum coſſicorum.* 574
5. *Numeratio ſpecioſa.* 575
6. *Additio numerorum coſſicorum.* 576
7. *Subtractio numerorum coſſicorum.* 577
8. *Examina additionis & ſubtractionis.* 578
9. *Multiplicatio numerorum coſſicorum.* ibid.
10. *Diviſio numerorum coſſicorum.* 580
11. *De fractionum coſſicarum numeratione.* 582
12. *Abbreviatio fractionum coſſicarum.* ibid.
13. *Reductio minutiarum coſſicarum ad eundem denominatorem.* 583
14. *Additio & ſubtractio fractionum coſſicarum.* 584
15. *Multiplicatio & diviſio minutiarum coſſicarum.* ibid.
16. *Data minutiæ partem, aut partes quaſcumque methodo compendioſâ eidem addere.* 585
17. *Quaſcumque partes à dato numero coſſico compendioſâ methodo ſubtrahere.* ibid.
18. *Artificium Regulæ Algebræ.* ibid.
19. *Antitheſis.* 586
20. *Hipobibaſmus.* 586
21. *Iſomeria.* ibid.
22. *Paraboliſmus.* 588
23. *Analogiſmus.* ibid.
24. *Æquatio poteſtatis cùm numero abſoluto.* 589

ALGEBRÆ
LIBER II.

Præceptorum uſus tàm methodo communi, quàm ſpecioſa.

Prop. I. *Numerum propoſitum 100, dividere in duas partes, quæ inter ſe multiplicatæ producant numerum decuplum quadrati minoris partis.* 590
2. *Duos numeros reperire in proportione ſextuplâ, quorum majori ſi addas 6 & minori 4 fiat primus ſecundi quadruplus.* ibid.
3. *Invenire numerum qui additus ad 90, & ad 20 faciat numeros in proportione ſextuplâ.* ibid.
4. *Propoſitum numerum 140, ita ſecare, ut major pars, ſit minoris quintupla & inſuper contineat 20.* 591
5. *Numeros invenire in proportione ſeptupla, quorum differentia ſit 120.* ibid.
6. *Numerum invenire, à quo ſi auferantur 20, & 80 relinquantur duo numeri, in proportione tripla.* ibid.
7. *Invenire numerum qui additus ad 30, & ſubtractus à 90, faciat ſummam reſidui ſubduplam.* ibid.
8. *Numeros invenire qui multiplicati invicem, numerum producant ſextuplum eorum ſummæ.* 592

9. *Numerum quemcumque ut 100, in duos numeros partiri, ut ſi unus alium dividat, quotiens ſit 10.* ibid.

10. *Numerum quemvis ut 123, ita dividere in quinque partes, ut ſecunda ſit primæ dupla & inſuper contineat 2.*
Tertia ſecunda tripla & inſuper contineat 3.
Quarta ſit dupla — 4.
Quinta ſit dupla quartæ — 13. 592

11. *Duos numeros reperire, quorum differentia ſit 42 & quadratorum differentia 1442, major quàm 16 quadratum numeri 4.* ibid.

12. *Duos numeros reperire in proportione quintupla, quorum major additus ad 15, eandem ſummam efficiat, ac minor additus ad 55.* 593

13. *Numerum quemcúmque ut 78, ita dividere, ut minor pars contineat unam decimam tertiam majoris, & inſuper octo unitates.* ibid.

14. *Duos numeros reperire, qui ità ſe habeant, ut productu ex eorum ducta, per eorumdem differentiam diviſo, quotiens ſit 30.* ibid.

15. *Numerum invenire, cujus quadratum multiplicatum per 20, = efficiat numerum quintuplum cubi, ejuſdem numeri.* ibid.

16. *Numerum 80, ita dividere in duas partes ut productus ex prima in 26, ſuperet productum ex ſecunda in 20, 6 unitatibus.* ibid.

17. *Numerum quemcumque ut 90, ita dividere, ut partes cum ipſo ſint in proportione Arithmeticâ.* ibid.

18. *Invenire numeros, qui inter ſe multiplicati producant numerum decuplum minoris & triplum majoris.* 594

19. *Numerum quemcumque ut 120, dividere, ſi fieri poteſt, in 6. numeros arithmeticè proportionales, qui ſe binario excedant.* 594

20. *Numerum quemcumque ut 120, dividere in decem partes arithmeticè proportionales ſi fieri poteſt, quorum primus ſit 12.* ibid.

21. *Duos numeros invenire in proportione triplâ, quorum majore ducto in 9. fiat productus accedens 140, unitatibus productum ex minore in 5.* ibid.

22. *Duos numeros in quintupla ratione invenire, ut ſumma quadratorum ſit decupla ſumma numerorum.* ibid.

23. *Duos numeros reperire in ratione quintupla, ita ut minore ſubtracto ex 100, reliquum habeat rationem decuplam ad reliquum ſubtracto majore ex 60.* 595

24. *Reperire tres numeros in proportione triplâ continuâ, ita ut productus ex primo in ſecundum, tertio ſit æqualis.* ibid.

25. *Datum numerum 100, in tres numeros partiri, ut primus cum medio ſit triplus reliqui, tertius cum medio ſit quadruplus primi.* ibid.

26. *Tres numeros reperire, qui ita ſe habeant, ut ſumma primi & ſecundi, ſuperet tertium 20 unitatibus; ſecundi & tertii ſumma ſuperet primum 30, unitatibus, ſumma tertii & primi ſuperet ſecundum 40 unitatibus.* ibid.

27. *Tres numeros reperire tales ut ſi primus ſecundo det ſui tertiam partem, & ſecundus tertio quartam ſui partem, & tertius primo quintam ſui partem fiant æquales.* 596

28. *Numerum invenire, qui multiplicans duos numeros ut 200, & 5 efficiat quadratum & radicem ejus.* ibid.

ALGEBRÆ
LIBER III.

PROP. I. *Radix quadrata ſummæ quadrati ſemiſſis radicum, & numeri abſoluti vel reſidui ſubtracto numero abſoluto ex quadrato ſemiſſis radicum, aucta, vel mulctata eâdem ſemiſſe, exhibet radicem quadratam æquationum quadraticarum.* 598

2. *Demonſtratur prima praxis ſolvendæ æquationis quadraticæ.* 599

3. *Demonſtratur ſecunda praxis ſolvendæ æquationis quadraticæ 19 = 6 R. + 72.* ibid.

4. *Demonſtratur tertia praxis æquationis quadraticæ 19 = 18 R. 72.* ibid.

5. *Methodus Diophanti, explicandi æquationes quadrati affecti ſub latere & coëfficiente 59 + 10 R = 175.* 600

6. *Secunda Praxis Diophanti in explicandis æquationibus quadratis 4 — 16 R. = 660.* ibid.

7. *Tertia methodus Diophanti in explicandis æquationibus quadraticis, in quibus quadratum negatur de radicibus 56 R. — 49 = 192, vel 49 = 56 R.* 600

8. *Praxis reducendæ æquationis quadraticæ 19. + 10 R. = 96 ſeu 19 = 96 — 10 R.* 601

9. *Praxis reducendæ æquationis quadraticæ 19. — 8 R = 425. vel 19. = 8 R. + 425.* ibid.

10. *Praxis reducendæ æquationis quadraticæ 19. + 75. = 20 R. vel 19. = 20 R. — 75.* ibid.

11. *Methodus univerſalis Stevini in reducendis æquationibus.* ibid.

12. *Inveſtigatio Geometrica quadrati æqualis numero abſoluto — aliquibus radicibus ex Nonio.* 602

13. *Inveſtigatio Geometrica quadrati æqualis numero abſoluto + aliquibus radicibus.* ibid.

14. *Inveſtigatio Geometrica quadrati æqualis aliquibus radicibus — numero abſoluto ex Nonio.* ibid.

15. *Semiſſis radicis quadratæ, aggregati ex quadruplo numeri abſoluti, & quadrato numeri radicum, vel reſidui ſubtracto quadruplo ejuſdem abſoluti, ex quadrato numeri radicum, aucta, aut mulctata, numero radicum, eſt valor unius radicis in æquationibus quadraticis.* 603

16. *Aliæ omnes æquationes.* ibid.

17. *Reductio æquationis in qua quadratum afficitur adjunctione plani ſub radice, & ſub coëfficiente ad ſimplicem æquationem quadraticam.* 604

18. *Reductio cuborum affectorum ſub quadrato ad cubos affectos ſub latere.* ibid.

19. *Reductio cuborum ſimul affectorum ſub quadrato & ſub latere, ad cubos affectos tantum ſub latere.* 605

20. *De Radicibus ſecundis.* 606

21. *Numeratio irrationalium.* ibid.

22. *Reductio radicum ſimplicium ad eandem denominationem.* 607

23. *Si Radices ejuſdem generis in ſe invicem ductæ numerum producant, hic erit radix producti multiplicatione poteſtatum earum radicum.* 608

24. *Multiplicatio & diviſio radicum ſurdarum.* ibid.

25. *Additio radicum ſimplicium.* 609

26. *Subtractio radicum ſurdarum ſimplicium.* 610

27. *Additio numerorum irrationalium compoſitorũ.* 611

28. *Subtractio numerorum irrationalium compoſitorum.* ibid.

29. *Numerorum irrationalium compoſitorum multiplicatio.* ibid.

30. Numerum

Digitized by Google

30. *Numerorum irrationalium compoſitorum diviſio.* 612.

31. *Ortus, & numeratio radicum univerſalium, ſeu ligatorum.* 613

32. *Multiplicatio radicum univerſalium.* ibid.

33. *Radicum univerſalium diviſio.* 614

34. *De minutiis numerorum irrationalium.* ibid.

35. *De numeris coſſicis irrationalibus.* 615

36. *De æquationibus, quæ numeris irrationalibus implicantur.* ibid.

37. *De binomiis, & apotomis.* 616

38. *Extrahere radicem quadratam ex binomio.* 617

39. *Radix quadrata differentiæ quadratorum binomis æqualis eſt differentiæ quadratorum ſegmentorum radicis.* ibid.

40. *Demonſtratur eductio radicis ex binomio.* 618

41. *Datum numerum ſecare in duas partes, ut productus ex earum multiplicatione, ſit æqualis numero dato non excedenti quartam partem quadrati numeri propoſiti.* ibid.

42. *Alia methodus inveniendi radicem cujuſlibet binomii.* 619

ALGEBRÆ
LIBER IV.
Varia problemata æquationum compoſitarum.

PROP. I. *Invenire duos numeros quorum differentia ſit 6, & cuborum differentia ſit 504.* ibid.

2. *Numerum 10 dividere in duas partes, quarum cubi efficiant, ſummam 370 majorem quarta parte cubi numeri 10.* 620

3. *Numerum invenire qui additus ad 20. efficiat ſummam æqualem ſuo quadrato.* ibid.

4. *Numerum invenire, cujus quadratum additum numero 240, faciat ejuſdem qqtum.* ibid.

5. *Numerum invenire, cujus cubus additus numero 702. efficiat ejuſdem quadrato cubum.* 621

6. *Invenire duos numeros, qui efficiant ſummam 30, & in ſe multiplicati efficiant 100.* ibid.

7. *Numerum invenire cujus qqtum additum numero 125, ſummam efficiat quadrati ejus trigecuplam.* ibid.

8. *Numerum invenire cujus qc. additus ad 169344, ſit cubi ejuſdem millecuplus.* 622

9. *Numeros invenire, quorum exceſſus 6. & productus ex eorum multiplicatione ſit 720.* ibid.

10. *Numerum invenire, cujus cubus junctus quadrato cubo, efficiat ſummam 4160.* ibid.

11. *Numerum invenire, cujus qdtum mulctatum numero 264, ſit illius decuplum.* ibid.

12. *Duos numeros invenire quorum quadrata, ſummam componant 180, duplam & ſeſquialteram producti ex eorum multiplicatione.* ibid.

13. *Invenire numerum, qui alium numerum excedat tribus unitatibus, & à tertio ſuperetur novem unitatibus, qui duo ultimi multiplicati 133. producant* 623

14. *Numerum invenire, quem alii duo ſuperent 7 & 9. unitatibus & productus eorum multiplicatione 73 unitatibus ſuperet triplum quadrati primi numeri.* ibid.

15. *Invenire numerum cujus quadruplus, cum ejuſdem quadrato efficiat ſummam 400.* ibid.

16. *Duos numeros reperire, qui inter ſe multiplicati, generent 78 & ſumma quadratorum faciat 205.* ib.

17. *Datum numerum 283, in tres continuè proportionales partiri, quorum medius ſit 78, debet autem quadratum ejus non eſſe majus quadrato numeri relicti, ſubtrahendo 78 ex 283, ſeu 205, hoc eſt 78. debet eſſe minor mediate numeri 283.* 624

18. *Datum numerum 10, dividere in duas partes, quarum cubi ſint æquales numero 370, majore quarta parte cubi numeri 10.* 624

19. *Numerum 30; ita dividere in duo, ut quadrata totius & partiũ ſint arithmeticè proportionalia.* ib.

20. *Numerum quemcumque ut 100, extremâ & mediâ ratione ſecare.* 625

21. *Datum numerum ut 50, ita dividere ut quadratum majoris ſegmenti rationem habeat triplam, ad quadratum minoris.* ibid.

22. *Numerum datum 30, dividere in duos numeros, quorum radices quadrata ſe excedant quinario.* ib.

23. *Invenire numerum, quem quadratum ejus excedat numero 210.* ibid.

24. *Invenire numerum quo addito ad 12, fiat ſumma quæ multiplicata per eumdem efficiat numerum æqualem numero 189.* ibid.

25. *Numerum datum ut 20, ita in duas partes ſecare, ut multiplicata productum efficiant, qui ductus in quadratum numeri 20, producat 14400.* ibid.

26. *Quærenti ſummam pecuniarum in crumena contentarum, reſpondi ſi pecuniæ quam habeo adderetur dimidium, triens & quadrans & è ſumma detraheretur $\frac{1}{12}$ primi numeri, haberem aureos 600. quæritur numerus aureorum in crumena contentorum.* 626

27. *Viator ſingulis diebus peragrat 10 milliaria, decemque diebus progreditur, alius undecimo die illum ſequitur perficiens in diem milliaria 15, quæritur intra quot dies ſit primum aſſecuturus.* ibid.

28. *Interrogatus de hora, reſpondit dimidia pars horarum à media nocte, addita tribus quadrantibus horarum reſiduarum ad mediam noctem ſequentem, exhibet horam præſentem; quæritur numerus horarum.* ibid.

29. *Duo viatores profecti ſunt ex civitatibus diſſitis ab invicem milliaribus 140, horum unus ſingulis diebus perficit milliaria 8. alter vero 6; quæritur, intra quot dies ſibi occurrant.* ibid.

30. *Erant in dolio 20 menſuræ vini, erat valor cujuſlibet menſuræ Francorum 12, infunditur aqua donec & pretium vini remaneat idem valor menſuræ vini ita mixti, ſit tantum 10 Francorum; quæritur quot ſint in dolio menſuræ vini ita mixti.* 627.

31. *Quidam permutat aureos 568, & recipit eumdem numerum 4. monetarum diverſarum.*
7. *Ex primâ, aureo æquivalent,*
18. *Ex ſecunda, eumdem aureum efficiunt,*
21. *Ex tertia,*
28. *Ex quarta. Quæritur numerus ſingularum monetarum.* ibid.

32. *Mercator emit 100 libras ceræ aureis 17, vult lucrari aureos 18, in 102, quæritur quot libras dare debeat pro uno numero, ſeu aureo.* ibid.

33. *Tres 455, nummos ita inter ſe dividunt, ut quoties primus recipit 2. ſecundus recipiat 3, & quoties ſecundus recipit 4, tertius recipiat 5, quæritur quot nummos unuſquiſque habeat.* ibid.

34. *Herus ita cum ſervo paciſcitur ut ſi laboret, det illi mercedem 7 aſſium; ſi otietur, mulctetur 5 aſſibus, poſt 30 dies, nihil debetur, nec etiam ipſe debet; quæritur quot diebus laboraverit, & quot fuerit otiatus.* ibid.

35. *Quidam dives habet 160 aureos, in duplici moneta ſpecie, quarum omnium ſumma eſt 560, moneta autem una eſt $\frac{1}{3}$ aurei, alia $\frac{1}{4}$, quæritur quantum habeat in unaquaque.* ibid.

36. *Quidam pauperibus erogat ſingulis ſeptenos aſſes, & ſuperſunt ei 24, ſi ſingulis dediſſet 9, deeſſent 32, quæritur numerus tam pauperum, quam aſſium.* 628

37. *Ulnæ 10 panni rubri cùm 4 ulnis panni nigri venduntur 88 aureis, & eodem pretio, 2 ulnæ panni rubri cum 4 ulnis panni nigri veneunt aureis 32, quæritur pretium unius ulnæ tam panni rubri, quàm nigri.* ibid.

38. *Sunt in exercitu Germani 25000, Hungari efficiunt mediam partem tàm Germanorum, quàm Italorum, Itali octavam Germanorum & Hungarorum, quæritur numerus Italorum & Hugarorum.* ibid.

39. *Duo duces quorum unus pauciores habet milites 40, quàm alter, uterque ſuis militibus diſtribuit 120, aureos, accidítque ut prioris ducis milites ſinguli haberent 5 aureos, pluſquàm milites poſterioris, quæritur numerus militum utriuſque ducis.* ib.

40. *Archimedis problema de corona.* ibid.

ALGEBRÆ

LIBER V.

Poteſtatum Analyſis.

PROP. I. *Propoſitis tribus magnitudinibus quartam proportionalem invenire.* 629

2. *Propoſitis duabus magnitudinibus, tertiam, quartam quintam continuè proportionales exhibere.* ibid.

3. *Inter duo quadrata exhibere medium proportionale.* 630

4. *Inter duos propoſitos cubos, duos medios continuè proportionales conſtituere.* ibid.

5. *Inter duas lineas quotcùmque medias proportionales conſtituere.* ibid.

6. *Aggregatum duarum quantitatum additum earumdem differentiæ, æquale eſt duplo majoris.* 631

7. *Si ab aggregato duarum quantitatum, earum differentia ſubtrahatur, reſtabit duplum minoris quantitatis.* ibid.

8. *Cùm idem latus contrahitur inæquali decremento, differentia contractionum æqualis eſt differentiæ contractorum.* ibid.

9. *Si eadem quantitas inæquali cremento protrahitur, differentia protractionum æqualis erit differentiæ protractorum.* ibid.

10. *Si idem latus protrahatur, & contrahatur inæquali cremento, & decremento, differentia contractæ, protractæ, æqualis erit aggregato contractionis, & protractionis.* ibid.

11. *Geneſis quadrati binomii, Quadratum radicis binomiæ, æquale eſt quadratis laterum, —+ duplo-plano ſub lateribus.* ibid.

12. *Planum ſub lateribus binomii, medium proportionale eſt inter quadrata laterum.* 632

13. *Quadratum apotomes æquale eſt quadratis laterum — duplo plano laterum.* ibid.

14. *Quadratum apotomes æquale eſt quadrato majoris lateris, — quadrato minoris, & duplici plano ſub apotome & minori latere.* ibid.

15. *Si ſint tria latera continuè proportionalia, erit quadratum aggregati ex maximo & minimo, æquale quadrato medii duplicati —+ quadrato differentiæ inter maximum & minimum.* ibid.

16. *In binomia radice, quadratum aggregati quadratorum utriuſque lateris, æquale eſt quadrato differentiæ quadratorum —+ quadrato dupli plani ſub lateribus.* ibid.

17. *Extractio radicis quadratæ.* ibid.

18. *Cubus binomiæ radicis, æqualis eſt cubo priori lateris, plus triplo ſolido ex quadrato primi lateris in latus ſecundum, —+ triplo ſolido ex quadrato ſecundi in primum, —+ cubo ſecundi lateris.* 633

19. *Cubus primi lateris, ſolidum ex quadrato primi lateris in ſecundum latus, ſolidum ex quadrato ſecundi in primum latus, & cubus lateris ſecundi, ſunt quantitates continuè proportionales in ratione primi lateris ad ſecundum.* ibid.

20. *Cubus apotomes ſeu differentiæ æqualis eſt cubo primi lateris — triplo ſolido ex quadrato primi lateris in ſecundum —+ triplo ſolido ex quadrato ſecundi lateris in primum latus — cubo ſecundi lateris.* ibid.

21. *Compoſitio cubi.* 634

22. *Extractio radicis cubicæ.* ibid.

23. *Quadrato-quadratum radicis binomiæ totalis, æquale eſt quadrato-quadrato lateris primi.*
 —+ *Quadruplo plano-plano à cubo lateris primi in latus ſecundum.*
 —+ *Sextuplo plano-plano à quadrato lateris primi in quadratum ſecundi.*
 —+ *Quadruplo plano-plano, à latere primo in cubum ſecundi.*
 —+ *Quadrato-quadrato lateris ſecundi.* 635

24. *Quadrato-quadratum lateris primi, productum ex cubo lateris primi in latus ſecundum productum ex quadrato lateris primi in quadratum lateris ſecundi productum ex latere primo in cubum ſecundi, & quadrato-quadratum lateris ſecundi, ſunt continuè proportionalia in ratione lateris primi ad ſecundum.* ibid.

25. *Quadrato-quadratum apotomes, æquale eſt qq. majoris lateris, minus quadruplo plano à cubo majoris lateris in latus minus; —+ ſextuplo plano à quadrato majoris in quadratum minoris, — quadruplo-plano à latere majore in cubum minoris —+ quadrato-quadrato ſecundi lateris.* ibid.

26. *Compoſitio quadrato-quadrati.* ibid.

27. *Extractio radicis quadrato-quadraticæ.* 636

28. *Surdeſolidus binomiæ radicis, æqualis eſt ſurdeſolido lateris primi.*
 —+ *Quintuplo ſolido à quadrato-quadrato lateris primi, in ſecundum latus.*
 —+ *Decuplo ſolido à cubo lateris primi, in quadratum ſecundi.*
 —+ *Decuplo ſolido à cubo lateris ſecundi, in quadratum primi.*
 —+ *Quintuplo ſolido à latere primo in quadrato-quadratum ſecundi.*
 —+ *Surde ſolido lateris ſecundi.* ibid.

29. *Compoſitio ſurdeſolidi.* ibid.

30. *Extractio radicis ſurdeſolidæ.* ibid.

31. *Quadrato cubus radicis binomiæ æqualis eſt quadrato cubo lateris primi.*
 —+ *Sextuplo ſolido à ſuperſolido lateris primi in latus ſecundum.*
 —+ *Decuquintuplo ſolido à qq. lateris primi in quadratum ſecundi.*
 —+ *Vigecuplo ſolido à cubo lateris primi, in cubum ſecundi.*
 —+ *Decuquintuplo ſolido à quadrato lateris primi in qq. ſecundi.*

Digitized by Google

mo in ſuperſolidum 637

laterum -+ qua-
quale eſt duplo ag-
ſingulorum. ibid.
n minùs quadrato
eſt quadruplo plano ibid.
um laterum in eo-
ale eſt differentiæ 638
-+ cubo differen-
duplo cubo majo-
do à latere majori, ibid.
cubum differentiæ,
tere minore in ma-
bo lateris minoris.

-+ quadrato dif-
duplo aggregato
, plus duodecu-
is in quadratum ibid.
— qqto differentiæ
cto à cubo lateris
plo producto à la- ibid.
ſurdeſolido dif-
duplo ſurdeſolido
ducto à cubo ma-
roducto ex late- ibid.
aterum — ſurde-
ualis eſt decuplo
minus.
is, in cubum mi-
s. 639
ctus qcubo diffe-
lo quadrato cubo

ris lateris in q.

n qq.minoris. ib.
n , minus qcubo
duodecuplo pro-
s in minus.
majoris , in cu-

majori , in ſu- ibid.
, in tria plana
o aggregati la-
rum. 639
, in tria plana
m , æquale eſt 640
aterum in qua-
unt cubum ag-
ntiæ quadrato- ibid.
in quatuor ſo-
rentiæ laterum
ntiæ quadrato- ibid.
n in quinque
aggregati ſemel
ſolidorum. ibid.

48. *Productum ex aggregato duorum laterum in quinque quantitates ſemel ſumptas , quibus conſtat qqtum differentiæ cuborum , æquale eſt aggregato ſuperſolidorum laterum.* 641

49. *Productum ex differentia laterum in 6. plano ſolida,quibus conſtat ſuperſolidus aggregati laterum, æquale eſt differẽtiæ quadrato cuborum laterũ.* ib.

50. *Productum ex aggregato laterum in 6 plano ſolida , quibus conſtat ſuperſolidus differentiæ, æquale eſt differentiæ qcuborum laterum.* ibid.

51. *Si fuerit radix binomia -+ longitudine ſublaterali coëfficiente , quadratum lateris primi, -+ duplo plano à latere primo in ſecundum , -+ quadrato lateris ſecundi -+ plano à latere primo in coëfficientem -+ plano à latere ſecundo in coëfficientem , æquatur quadrato aggregati laterum affecto adjunctione plani ſub dicto aggregato ſeu radice binomia in coëfficientem.* 642

52. *Si fuerit radix binomia & coëfficiens ſublaterale planum cubus lateris primi -+ triplo ſolido à q. lateris primi in latus ſecundum -+ triplo ſolido à q. lateris ſecundi in latus primum -+ cubo lateris ſecundi-+ ſolido à latere primo in coëfficiens planum -+ ſolido à latere ſecundo in coëfficiens planum, æqualis eſt cubo aggregati affecto adjunctione ſolidi ſub aggregato laterum in planum coëfficiens.* ibid.

53. *Si cubus binomiæ radicis affectus ſit adjunctione ſolidi ſub quadrato adſcitâ congruenter ſub quadratica longitudine , ille æqualis erit cubo lateris primi -+ triplo ſolido ex quadrato primi lateris in latus ſecundum -+ triplo ſolido à q. ſecundi in latus primum -+ cubo lateris ſecundi -+ ſolido à q. lateris primi in aſſumptam longitudinem -+ ſolido à q. lateris ſecundi in aſſumptam longitudinem , -+ duplo ſolido à plano ſublateribus in eamdem coëfficientem longitudinem.* ibid.

54. *Qq. binomiæ radicis affectum adjunctione plano-plani ſub latere,& adſcito ſub laterali coëfficiente ſolido. Præter ſolida ex quibus ipſe componitur, adjungit duo plano-plana unum ex latere primo in aſſumptum coëfficiens ſolidum ; alterum ex latere ſecundo in idem coëfficiens ſolidum.* 643

55. *Si quadrato-quadratum binomiæ radicis affectum fuerit , ſub cubo affirmatè , illud ex tali affectione præter quantitates , ex quibus ipſum componitur, adjunget totidem plano-plana orta ex multiplicatione ſingularum partium cubi , in adjunctam longitudinem.* ibid.

56. *Si quadrato-quadratum radicis binomiæ affectum fuerit duplici affectione,una ſub latere, altera ſub quadrato , adſcitis ſub laterali coëfficiente ſolido & ſubquadratico coëfficiente plano ; præter quantitates ex quibus quadrato-quadratum componitur , ſequentes adjunget , plano-planum à quadrato lateris primi in coëfficiens planum-+ duplo plano-plano , à plano ſub lateribus in planum coëfficiens -+ plano-plano à quadrato lateris ſecundi in coëfficiens planum -+ plano-plano à latere primo in coëfficiens ſolidum -+ plano-plano à latere ſecundo in coëfficiens ſolidum.* 643

57. *Superſolidus binomiæ radicis , affectus adjunctione plano-plani ſub latere , præter quantitates ex quibus componitur , addit plano ſolidum ſub primo latere, & planoſolidum ſub ſecundo latere.* ib.

58. *Si ſuperſolidus affectus fuerit adjunctione cubi, adſcito ſubcubico coëfficiente plano , ſuperſolidus præter quantitates proprias , ex tali affectione acquirit tot planoſolida , quot ſunt partes in cubo quæ multiplicantur per adjunctum planum.* 644

59. *Quadratocubus affectus adjunctione ſublateralis planiſolidi coëfficientis præter quantitates quibus ipſe conſtat, adjungit duo ſolidoſolida, unum contentum ſub latere primo, & ſub adjuncto planoſolido, alterum contentum ſub latere ſecundo, & eodem planoſolido.* 644

Geneſis poteſtatum affectarum negatè, ex radice binomia. ibid.

60. *Quadratum binomiæ radicis affectum mulctâ plani ſub latere adſcitâ congruenter ſublaterali coëfficiente longitudine, æquale eſt omnibus ſuis partibus — plano ex latere primo in coëfficientem longitudinem — plano ex latere ſecundo in eamdem coëfficientem longitudinem.* ibid.

61. *Geneſis poteſtatum avulſarum.* ibid.

ALGEBRÆ
LIBER VI.

Extractio radicum ex poteſtatibus affectis.

Prop. I. *Eductio radicis ex quadrato affecto ſub latere.* 645

2. *Extractio radicis ex quadrato affecto mulctâ plani ſub radice & coëfficiente.* ibid.

3. *Extractio radicis quadratæ, ex plano ſub radice, & coëfficiente, affecto mulcta quadrati.* 646

De cubicis æquationibus.

4. *Invenire radicem cubicam, cubi affecti adjunctione ſolidi ſub radice & coëfficiente plano.* ibid.

5. *Radicem cubicam educere ex cubo affecto mulctâ plani ſub radice.* 647

6. *Radicem cubicam extrahere propoſito ſolido ſub coëfficiente, & radice affecto mulctâ cubi.* ibid.

7. *Radicem cubicam extrahere ex cubo affecto ſub quadrato.* 648

8. *Radicem cubicam extrahere cubi affecti mulctâ ſolidi ſub quadrato, & coëfficiente.* ibid.

9. *Educere latus cubi ex ſolido, ſub quadrato & coëfficiente, affecto mulctâ cubi.* 649

10. *Radicem quadrato-quadratorum qqti affecti adjunctione plano-plani ſub latere, & coëfficiente invenire.* ibid.

11. *Radicem quadrato-quadratam eruere ex quadrato-quadrato affecto mulctâ plani ſub coëfficiente ſolido, & radice.* 650

12. *Invenire radicem quadrato-quadratam, propoſito plano-plano ſub radice binomiâ, & coëfficiente affecto mulctâ quadrato-quadrati ejuſdem radicis.* ibid.

13. *Invenire radicem quadrato-quadratam quadrato-quadrati affecti adjunctione plano-plani ſub cubo & coëfficiente.* 651

14. *Educere radicem qquadratam qqdti affecti mulctâ plano-plani comprehenſi ſub cubo, & ſub coëfficiente.* ibid.

15. *Extrahere radicem qqdtam, propoſito plano-plano ſub cubo & coëfficiente, mulctato qqdto binomiæ radicis.* 652

16. *Qqtum affectum adjunctione quadrati reducitur ad æquationem quadrati ſub radice & coëfficiente affecti.* ibid.

17. *Solutio omnium aliarum æquationum.* ibid.

ALGEBRÆ
LIBER VII.

Exempla ſecundùm methodum ſpecioſæ Algebræ.

Prop. I. *Datâ differentiâ & aggregato laterum latera invenire.* 653

2. *Datâ differentiâ laterum, & ratione eorumdem, invenire latera.* ibid.

3. *Datâ ſummâ laterum, & eorumdem ratione latera invenire.* ibid.

4. *Datis duobus lateribus deficientibus à juſto unà cum ratione defectuum, invenire latus juſtum; ſeu datis duobus numeris, invenire duos alios in data ratione, qui juncti prioribus eamdem ſummam faciant.* ibid.

5. *Datis duobus lateribus excedentibus juſtum & ratione exceſſuum; invenire latus juſtum, ſeu è datis duobus numeris, duos numeros in datâ ratione ſe habentes ſubtrahere, ita ut eadem ſumma remaneat.* 654

6. *Datis duobus lateribus, uno deficiente à juſto, altero juſtum excedente una cum ratione defectûs ad exceſſum, invenire latus juſtum.* ibid.

7. *Datum latus ita ſecare, ut præfinita unciæ unius ſegmenti, addita ad præfinitas uncias alterius ſegmenti, æquent ſummam præſcriptam.* ibid.

8. *Datum latus ita ſecare, ut præfinita uncia primi ſegmenti, mulctata præfinitis unciis ſecundi efficiant ſummam datam.* ibid.

9. *Invenire duo latera, quorum differentia ſit ea quæ præſcribitur, & præfinita uncia unius, adjecta præfinitis unciis alterius æquent ſummam præſcriptam.* ibid.

10. *Invenire duo latera, ſeu duos numeros quorum differentia ſit data, & præfinita uncia unius mulctata præfinitis unciis alterius, determinatam ſummam efficiant.* 655

11. *Dato rectangulo ſub lateribus, & ratione laterum, invenire latera, ſeu invenire duos numeros in data ratione, qui in ſe ducti efficiant numerum propoſitum.* ibid.

12. *Dato rectangulo ſub lateribus, & aggregato quadratorum laterum invenire latera, ſeu invenire duos numeros, qui multiplicati datum efficiant numerum, & quorum quadrata efficiant alium datum numerum.* ibid.

13. *Dato rectangulo ſub lateribus, & differentiâ laterum invenire latera.* ibid.

14. *Dato rectangulo ſub lateribus, & aggregato laterum invenire latera.* ibid.

15. *Datâ differentiâ laterum & aggregato quadratorum, invenire latera; ſeu invenire duos numeros quorum differentia ſit data, & quorum quadrata datam ſummam efficiant.* ibid.

16. *Dato aggregato laterum, & aggregato quadratorum invenire latera.* 656

17. *Data differentia laterum, & differentiâ quadratorum invenire latera.* ibid.

18. *Datâ ſummâ laterum, & differentiâ quadratorum invenire latera; ſeu invenire duos numeros, quorum ſumma data ſit, & quadratorū differentia.* ib.

19. *Dato rectangulo ſub lateribus, & differentia quadratorum, invenire latera, ſeu invenire numeros, qui multiplicati efficiant datum numerum, ita ut differentia quadratorum ſit data.* ibid.

20. *Dato aggregato ex quadratis laterum, & rectangulo*

lo ſub lateribus, datoque uno latere, invenire reliquum. Seu dato quocunque numero & aggregato illius, & quadrati alterius numeri & rectanguli ſub utroque numero, alium numerum invenire. 656

21. *Dato aggregato ex ſummâ quadratorum, & rectangulo ſub lateribus, datâ item ſummâ laterum invenire latera.* ibid.

Seu datâ ſummâ numerorum, & aggregato ex quadratis eorum, & rectangulo ſub ipſis comprehenſo invenire numeros. ibid.

22. *Datâ ſummâ ex quadratis laterum, & rectangulo ſub lateribus, dato item eo rectangulo invenire latera.* ibid.

23. *Dato aggregato quadratorum, & eorumdem differentiâ invenire latera.* 657

24. *Datâ ſummâ cuborum, & eorumdem differentiâ invenire latera.;* ibid.

25. *Datâ differentiâ cuborum, & rectangulo ſub lateribus, invenire latera.* ibid.

26. *Dato aggregato cuborum, & rectangulo ſub lateribus, invenire latera.* ibid.

27. *Datâ differentiâ laterum, & differentia cuborum invenire latera: ſeu invenire numeros, quorum differentia ſit data cum differentia cuborum.* ibid.

28. *Datâ ſummâ laterum, & ſummâ cuborum diſtinguere latera.* ibid.

29. *Datâ differentiâ laterum, & differentia cuborum, invenire latera.* ibid.

30. *Aliter. Dato aggregato laterum, & aggregato cuborum, invenire latera.* 658

31. *Datis duobus ſolidis, uno ex differentia laterum in differentiam quadratorum, altero quod fit ex aggregato laterum, in aggregatum quadratorum invenire latera, ſeu invenire duos numeros, qui ita ſe habeant, ut multiplicando eorum differentiam per differentiam quadratorum, fiat determinatus numerus, & ducendo ſummam numerorum in ſummam quadratorum, fiat alius numerus.* ibid.

32. *Dato aggregato quadratorum, & ratione rectanguli ſub lateribus ad quadratum differentiæ laterum, invenire latera.* ibid.

33. *Datâ mediâ trium proportionalium, & differentiâ extremarum, invenire extremas.* ibid.

34. *Datâ mediâ trium proportionalium, & aggregato extremarum, illas diſtinguere.* ibid.

35. *Dato perpendiculo trianguli rectanguli, & differentiâ baſis, & hypothenuſæ, invenire baſin & hypothenuſam.* ibid.

36. *Dato perpendiculo, & aggregato baſis, & hypothenuſæ diſtinguere baſin, & hypothenuſam.* 659

37. *Datâ hypothenuſâ trianguli rectanguli, & differentia laterũ circa rectum, invenire latera circa rectũ.* ib.

38. *Datâ hypothenuſâ trianguli rectanguli, & ſummâ laterum circa rectum, invenire latera.* ibid.

39. *Invenire in numeris tres proportionales.* ibid.

40. *Triangulum rectangulum in numeris invenire.* ibid.

41. *Aliter triangulum rectangulum in numeris conſtituere.* ibid.

42. *Dato aggregato quadratorum trium proportionaliũ, & ſummâ extremarũ, extremas diſtinguere.* ib.

43. *Dato aggregato quadratorum trium proportionaliũ, & ſummâ extremarum, extremas diſtinguere.* ibid.

44. *Dato aggregato quadratorum trium proportionalium ac media, diſtinguere extremas.* 660

45. *Datâ differentiâ extremarum, & differentia mediarum, in ſerie quatuor continuè proportionalium, eas invenire.* ibid.

46. *Dato aggregato extremarum, & aggregato mediarũ in ſerie quatuor proportionalium, eas invenire.* ib.

ALGEBRÆ

LIBER VIII.

Diophanti exempla, ex libro primo.

PROP. I. *Propoſitum numerum in duos numeros partiri, quorum data ſit differentia.* 661

2. *Numerum datum in duos partiri, qui ſint in data ratione.* ibid.

3. *Propoſitum numerum dividere in duos, quorum unus ad alium datum habeat rationem, & inſuper certas unitates contineat.* ibid.

4. *Invenire duos numeros in data ratione, quorum differentia ſit data.* ibid.

5. *Propoſitum numerum in duos partiri, ita ut unius tertia pars, & alterius quinta efficiat ſummam datam.* ibid.

6. *Propoſitum numerum in duos dividere, ut unius data pars, alterius datam partem ſuperet determinato numero.* 662

7. *Ab eodem numero auferre duos datos numeros, ut reſidui datam ſervent rationem.* ibid.

8. *Duobus datis, numerum eumdem addere, ita ut eorum ſumma in data ſint ratione.* ibid.

9. *A datis duobus numeris ſubtrahere eumdem numerum, ut reſidui ad invicem datam habeant rationem.* 662

10. *Eumdem numerum quæſitum addere minori numero, & ſubtrahere ex majore, ut ſumma reſidui ſit quadrupla.* ibid.

11. *Ab eodem numero quæſito, unum numerum datum addere, alterum ſubtrahere, ut ſumma ad reſiduum datam habeat rationem.* ibid.

12. *Datum numerum bis in duos numeros dividere, ita ut primus primæ diviſionis, ad primum ſecundæ datam habeat rationem, & ſecundus ſecundæ diviſionis ad ſecundum primæ datam habeat rationem.* ibid.

13. *Datum numerum ter in duos dividere, ita ut unus è prima diviſione ad unum è ſecunda datam habeat rationem, & reliquus è ſecunda ad unum è tertia datam habeat rationem, & reliquus è tertiâ, ad reliquum è prima datam habeat rationem.* 663

14. *Invenire duos numeros ita ut productus ex eorum multiplicatione ad eorum ſummam datam habeat rationem.* ibid.

15. *Duos numeros invenire, ita ut prior ab altero datum numerum accipiens, ad reſiduum datam habeat rationem, & poſterior alium numerum accipiens ad reliquum datam habeat rationem.* ibid.

16. *Invenire tres numeros, ita ut bini quinque imperatos faciant numeros.* ibid.

17. *Invenire quatuor numeros, ita ut terni juncti efficiant imperatos numeros.* ibid.

18. *Invenire tres numeros, ut bini juncti ſuperent reliquum imperato numero.* 664

19. *Invenire 4 numeros, ut terni juncti reliquum ſuperent dato exceſſu.* ibid.

20. *Datum numerum ita partiri in tres numeros, ut ſumma extremi cum medio, ad alium extremum datam habeat rationem.* ibid.

21. *Invenire tres numeros, quorum maximus medium ſuperet minimi parte determinatâ; medius minimum ſuperet maximi parte aſſignatâ, & minimus dato numero ſuperet datam medii partem.* ibid.

22. *Invenire tres numeros, quorum ſi quilibet dederit imperatam ſui partem ſequenti reſtent æquales.* ib.

23. *Invenire quatuor numeros, qui ita ſe habeant, ut ſi quilibet det ſequenti imparatam partem, ſiant æquales.* 665
24. *Invenire tres numeros, ut quilibet à duobus reliquis conjunctis accipiendo imparatam partem remaneant æquales.* ibid.
25. *Duobus datis numeris, invenire tertium numerum, qui in utrumque ductus quadratum, & ejus radicem quadratam producat.* ibid.
26. *Invenire duos numeros, qui ita ſe habeant, ut productus ex eorum multiplicatione, & ſummâ ipſorum datos efficiant numeros.* ibid.
27. *Invenire duos numeros, ut ſumma ipſorum & differentia quadratorum datos efficiant numeros.* 666
28. *Invenire duos numeros, quorum differentia ſit data, & productus eorum multiplicatione ſit etiam datus.* ibid.
29. *Invenire duos numeros in data ratione, ut ſumma quadratorum ad ipſorum ſummam datam habeat rationem.* ibid.
30. *Invenire duos numeros in data ratione, ita ut quadratum minoris ad majorem numerum datam habeat rationem.* ibid.
31. *Duobus datis numeris, alium numerum invenire, ut bini quique conjuncti, & in reliquum multiplicati faciant tres numeros arithmeticè proportionales.* ibid.

EX DIOPHANTI LIBRO II.

Prop. I. *Invenire duos numeros, ut ſumma ipſorum ad ſummam quadratorum datam habeat rationem.* 666
2. *Invenire duos numeros, quorum differentia ad differentiam quadratorum datam habeat rationem.* ibid.
3. *Invenire duos numeros, ut productus ex eorum multiplicatione ad ſummam ipſorum, vel ad differentiam datam habeat rationem.* 667
4. *Invenire duos numeros, ita ut aggregatum quadratorum ad eorum differentiam datam habeat rationem.* ibid.
5. *Invenire duos numeros, quorum differentia ſit data, ita ut differentia quadratorum eam ſuperet dato numero.* ibid.
6. *Invenire duos numeros qui tales ſint, ut differentia quadratorum, ad numerorum differentiam ſit in data ratione, & ſuperaddat aliquot unitates.* ibid.
7. *Numerum quadratum in duos numeros quadratos dividere.* ibid.
8. *Datum numerum ex duobus quadratis compoſitum dividere in duos alios quadratos numeros.* 668.
9. *Invenire duo quadrata, quorum differentia ſit data.* ibid.
10. *Datis duobus numeris, invenire numerum qui ad utrumque additus, efficiat numeros quadratos.* ib.
11. *A datis duobus numeris eumdem auferre, ita ut utrumque reſiduum quadratum ſit.* ibid.
12. *Ab eodem quæſito numero, auferre duos datos numeros, ita ut reſidui ſint quadrati.* 669
13. *Datum numerum in duas partes ita dividere, ut additis eidem quadrato faciant duo quadrata.* ib.
14. *Numerum datum ita dividere in duos, ut uterque à quadrato detractus, relinquat duo quadrata.* ibid.
15. *Invenire numeros in data ratione, qui additi dato numero quadrato faciant quadrata.* ibid.
16. *Invenire tres numeros, qui ita ſe habeant, ut ſi unuſquiſque ſequenti partem imperatam tribuat, & inſuper datum numerum, reſtent æquales.* ibid.
17. *Invenire tria quadrata, ita ſe habentia, ut differentia maximi & medii, ad differentiam minimi & medii datam habeat rationem.* 670
18. *Invenire duos numeros, quorum quilibet adjectus alterius quadrato faciat quadratum.* ibid.
19. *Invenire duos numeros, quorum quilibet ab alterius quadrato ſubtractus, faciat quadratum.* ibid.
20. *Invenire duos numeros, ut utriuſque quadratum additum illorum ſummæ, faciat quadratum.* ibid.
21. *Invenire duos numeros, à quorum quadratis ſubtracta ſumma faciat quadrata.* ibid.
22. *Invenire duos numeros, quorum quilibet additus quadrato ſummæ quadratum efficiat.* ibid.
23. *Invenire duos numeros, quorum quilibet ſubtractus à quadrato ſummæ, relinquat quadratum.* 671.
24. *Invenire duos numeros, ut productus ex eorum multiplicatione, addito quolibet eorum, faciat quadratum, & amborum quadratorum radices faciant datum numerum.* ibid.

HYPOTHESEON CARTESIANARUM

Refutatio.

Prop. I. *Quid ex hac communi notione, Ego cogito, concludatur contra Philoſophiam Carteſianam.* 671
2. *Eſſentiam materiæ in extenſione in latum, longum, & profundum poſitam non eſſe.* 672
3. *Rarefactionem per ſolam materiæ alienæ intromiſſionem malè probat Carteſius.* 673
4. *Errores Carteſii circa ſpatium.* 675
5. *Errores Carteſii circa definitionem motûs.* 676
6. *Omnis motus eſt impoſſibilis ſecundum Carteſium.* 678
7. *Falſæ ſunt regulæ motûs à Carteſio aſſignatæ.* ibid.
8. *Fluiditas in motu non conſiſtit.* 680
9. *Suppoſitio materiæ à Deo creatæ, diviſæ & motæ, apertè ſe deſtruit.* 682
10. *Rejectio rationum quibus nonnulli ſuadere nituntur liquiditatem in motu conſiſtere.* 683
11. *Quæ reprehendi debeant in conſtitutione mundi à Carteſio facta.* 685
De formatione ſolis. 686
12. *De Cometis.* 687
13. *Quæ reprehendi debent in doctrina vorticum Carteſiana.* 688
14. *De maculis ſolaribus.* 689

TRACTA

Digitized by Google

TRACTATUS PROEMIALIS DE PROGRESSU MATHESEOS, ET ILLUSTRIBUS MATHEMATICIS.

CAPUT PRIMUM.

De Matheſi in genere.

MATHESIN ſi vim nominis & Etymologiæ præciſè ſpectemus, ſcientiam omnem indicare, doctrinámque in genere ſignificare fatebimur; peculiari tamen jure communique uſu, illi tribui facultati, quæ circa quantitatem verſetur, aſſeremus: non ideo quòd ſcientiæ, ut voluit Plato, & inter eas mathematicæ, in recordatione poſitæ eſſent, & in illis præcipuè valeret æternarum cogitationum repetita memoria: Sed quod ſolæ primitùs diſcerentur, ob indubitatam firmitatem animos diſcentium ſolidarent, & ad reliquas capeſſendas idoneos redderent. In Matheſi quippe, velut in trunco ſurculi virtute, & energia cæteræ continentur ſcientiæ, aut ſaltem ea obſtetricante in lucem prodeunt. Hinc decantatum illud Platonis edictum, foribus ejus præfixum, ὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. Nullus Geometriæ expers ingrediatur. Hinc tam ſeverè in Xenocratis ſchola dicendæ Matheſeos ſancita lex, ut qui illius præſidio eſſet deſtitutus, lanificio potiùs, aut cuicumque ignobiliori artificio, quàm philoſophiæ cujus anſas non haberet, aptior videretur. Neque verò à magiſtro ſuo diſſentit Ariſtoteles, qui numquam ſeipſo major extitit quàm cùm in organo ſuo, opere illo abſolutiſſimo, tantique ingenij fœtu, non impari, hujus ſcientiæ Methodũ uſurpavit demonſtrationéſque ſuas Mathematicis finibus circumſcripſit, ita exẽpla exemplis reſpondent ut non Philoſophus ſed ſeverus Geometra videatur. Non vacat Antiquorum omnium placita referre, qui communi ſuffragio Matheſin ſcientiarum omnium parentem nominarunt, ſenſerúntque ſine illius præſidio ad alias eniti idem eſſe, ac ſine alis ad volatum accingi. Cùm experientia compertum ſit, etiam qui tardioris ſunt ingenij, ſi ad Arithmeticem & Geometriam animum appellant, ſolertiores evadere, iiſque artibus acui ingenia, & celeritatem percipiendi acquirere, ex quo fit ut Matheſi imbuti, ad omnes diſciplinas, acres, promptíque appareant. Methodus quippè à Geometris communiter uſurpata, progreſſus ille mirabilis, & nexus, quò ex certis, & indubitatis principiis, ad reconditiora, & abſtruſa ſenſim aſcendimus, nullúmque probabilitati, ſed ſoli demonſtrationi locum damus, genuinam ſcientiæ ideam ingenerat, docétque cuncta non ad ſenſus, ſed ad rectæ rationis normam, & amuſſin exigere.

Quis enim verò hodiernæ Philoſophiæ, Phyſicæ præſertim, inanitatem æquo ſatis animo tulerit; in qua ſi communes notiones, & doctorum ut ita dicam idioma, modúmque loquendi à communi, & vulgari paulo alienum excipias, præſertim dum ad particularia deſcenditur, nihil quod ſatisfaciat invenies, nihil quod probabilitatis, & opinionis nomen mereatur nedum demonſtrationem præſeferat. Hanc ex neglecto Matheſis ſtudio, ei labem illatam eſſe, Antiquorum judicio fretus, aſſiduóque edoctus experimento, aſſerere non dubitarim, cùm mathemata teſte Platone mediæ cujuſdam conditionis exiſtant inter ſenſibilia & æterna, ſintque quaſi ſcamna, & gradus quibus ad illa conſcenditur. Quàm autem ab Antiquorum placitis degenerarit & deciſcat, quæ communiter traditur Philoſophia, vel inde conjicias; quòd hæc ſine Matheſi nullo pacto intelligi poſſent, hæc autem inoffenſo quaſi pede, ab omnis Geometriæ expertibus decurratur. Quòd ſi hoc præſertim ſæculo, aſſurgere non nihil videtur Phy-

ſica, fructúſque edidiſſe non pœnitendos, ſi multa ſcitu digna, jucunda, Antiquis etiam incognita detecta ſunt; ideò ſane quia Mathematici philoſophantur, rebúſque phyſicis Mathematices placita admiſcent. Tanta enim inter eas ſcientias cognatio, & ſocietas intercedit, ut jure aſſerere audeam, exceptis nonnullis Metaphyſices ut vocant formalitatibus, quidquid in Phyſica indubitati occurrit, id totum ex Matheſeon fontibus profluxiſſe. Si ſingulas ejus partes percurrerem, ubique Matheſin regnantem, ubique facem præferentem, liceret animadvertere. Atque ut à ſummis ordiamur, quid de figura mundi ſine Matheſi conſtitui potuit unquam, quid de cœleſtium orbium natura, ordine, ſitu, magnitudine, quid de ſiderum motu vario, diſtantia, cognoſci; quid de dierum diverſitate, climatum differentia, tempeſtatum anni nunquam interrupta viciſſitudine, quid de luminis & caloris tam attemperata diffuſione, ſine illa determinari, quid de ſolis, & lunæ cæterorúmque planetarum, aut fixarum proprietatibus, aut in hæc inferiora influxu ſine illius præſidio demonſtrari unquam potuit? Cæcutiret adhuc circa cœleſtes orbes, aut ad tantum ſplendorem hebeſceret Philoſophiæ acies, ni novos recentéſque à Matheſi oculos in teleſcopio mutuata, & in Sole nævos & maculas, enaſcentéſque identidem fuligines, aut accenſas de repente faculas intueri, montes, & valles in Luna notare, falcatam Venerem, gibbum Martem, novo ſtipatum planetarum ſatellitio, duplicique & triplici zona faſciatum Jovem, anſulatum Saturnum obſervare diſceret. Quid de Cometarum natura, aut loco conſtitueret unquam Phyſica, ni accuratis Aſtronomorum circa eorum parallaxin obſervationibus niteretur.

Quòd ſi paulisper ad hæc inferiora deſcendere, & meteora intueri lubeat, hæc ſine Matheſi intelligi ſatis non poſſe deprehendes, quorum ſcilicet cognitio ita catoptricis, & dioptricis legibus continetur; ut qui eas neſcierit, ne greſſum quidem figere audeat, aut iridis, coronæ, pareliorum, virgarum aliorúmque ſimilium naturam ſatis explicare valeat. Quid de reconditioribus naturæ arcanis dicam, de maris æſtu, magneticis attractionibus, & directionibus, de fontium ſcaturigine, & fluxu, de elementorum æquilibrio, gravium ad centrum deſcenſu, motuúmque acceleratione, de percuſſionis, aut gravitationis viribus. Quid humani corporis fabricam recenſeam, quid ſenſuum organa, agendique modos varios, quid viſionis præſertim deceptiones innumeras, vitia, correctiones, adjumenta; quid reflectiones varias, & refractiones, totámque luminis propagationem; quid ſonos commemorem, eorúmque diffuſionem, & in echone reflexiones, quæ omnia ita à Mathematicis placitis pendent, ut jam non tam ad phyſicam, quam ad Matheſin pertinere videantur.

Neque vero ad naturalium effectuum cognitionem tantum, cauſarúmque indagationem, & ſpeculativam, ut ita dicam contemplationem ſummè utilis eſt Matheſis, quæ certam rerum cum ſuis principiis connexionem, ex utriuſque ad invicem comparatione, & proportione deprehendit: Sed ad uſum communem hominum, vitámque civilem ſuam impensè impendit operam. Et ut à minutioribus exordiar, quod reipublicæ membrum ſatis ſuo fungi munere, ſine Arithmetica poteſt An mercator commercium exercere; & ab exteris nationibus totius orbis divitias invehere, tutò & ſine detrimento diſtrahere poterit, niſi debitorum & creditorum, lucri, & damni rationes ad minimum uſque ſcrupulum, exactámque præciſionem ineat? An œconomicam exercebit civis, niſi redituum & expenſarum calculos ſubducat? An Ærarium rectè adminiſtrabit quæſtor qui accepti, & expenſi rationes æqua lance non expendet? An aciem inſtruet imperator, qui numeros neſcierit?

Geometria verò quàm latè pateat in republica nullus eſt qui neſciat, neque enim & operariis pleriſque debitum reddetur ſtipendium, niſi ad Geometriæ placita & leges recurras. Cæmentariis, & latomis quis pactam mercedem tribuet, qui ædificia metiri neſcierit, quis agros vendere, aut emere tutò poterit qui Geodeſiam ignorarit, quis vinum aut aliquem liquorem diſtrahere, qui ad ſtereometriam non recurret: quis pleráſque merces tuto ſibi comparare, qui librarum, & bilancium fraudes totámque ſtaticam non teneat; quibus fraudibus non ſubjacebit, qui menſurarum leges ignorarit, ita in rebus etiam minimis, & vulgaribus ſuam ubique navat operam Matheſis.

Quid ejuſdem utilitatem ad cæteras artes, nobiliores præſertim aut inveniendas, aut perficiendas commemorem. An pictura cognatæque artes, cælatura, ſtatuaria, reliquæque affines ſatis appoſitè ſine Geometria exerceri poſſunt, quæ unum Mathematicum tractatum Perſpectivam ſcilicet integram ſibi vendicant. An Architectura quæ ita tota in menſuris & proportionibus eſt poſita, ut inter Matheſis partes cenſeatur, ejus omnia officia ſubalternæque artes à Geometria non minimum quidem diſcedunt, an latomus lapidibus convenientem unquam figuram tribuet, fornicibuſque conſtruendis aptam, niſi ſua totam ſui operis formam, & ſingulorum lapidum exemplaria, à profundiori Geometria mutuetur; An ingentes excitare ſubſtructiones, magnáſque moles evehere, niſi virtutum motricium machinamenta addiſcat, variíſque poliſpaſtis vectibus, rotis, & tympanis vires in immenſum augeat; id enim vero diſcit à Mechanica.

Quid Architecturam militarem in medium proferam, quæ hoſtium impetus ſuis propugnaculis moratur, tutúmque civibus in ſuis vallis, & foſſis, præbet præſidium. In militia omnia operatur & præſtat Matheſis, caſtrametationem inſtituit, ſi militem tegere velit, aciem inſtruit & dirigit, ſi dimicare libeat, lineas acceſſuum deſignat, ſuíſque firmat reductibus, vineas aggeres, tormentorum ſuggeſta extruit, dum oppugnandam arcem ſuſcipit, parmulas, caſſides, lunulas, cornuta, coronata opponit ſi propugnandam habeat, hæc bombardas diriget, & ad certum librabit hoſtium interitum, bellicis ignibus graſſabitur dum ſæviendum eſt, feſtivis miſſilibus, & Pyrobolis geſtiet, ſi lætandum; ita in omnibus bellicis muneribus ubique operatur.

Neque verò Nauticam tacitus præterire poſſum, quæ quæſtuoſo commercio, exterarum nationum divitias in noſtrum orbem importat: hæc quantæ ſit utilitatis vel ex hoc uno conjicere licet, quòd exigua piſcatorum manus ad tantam

Digitized by Google

opulentiam ſola navigationum & mercimoniorum ope ſit evecta ut ſummis etiam regibus, nequidquam reſiſtere audeant. Nautica tamen ità in mathematicis rationibus poſita eſt, ut ex omnibus ejus partibus coaleſcere videatur. Geographiæ principia requirit, ut navim ad deſtinatum locum dirigat; magneticam advocat in qua cynoſuram ſuam nanciſcitur; Aſtronomiam adhibet, ut in ipſis ſyderibus ſuum iter agnoſcat; Mechanicam non negligit, cujus variam machinarum ſuppellectilem uſurpat; remiſque quaſi vectibus navim promoveat, gubernaculo in omnem partem detorqueat, malò & velis mobilem reddat. Hydroſtaticæ leges advocat ut tantam ponderum molem aquis imponat.

Cæteris autem artibus non minus facem præfert Matheſis, cùm in opificum officinas vix pedem inferas, quin innumera, aut machinarum, aut inſtrumentorum ſupellex ex noſtris orta principiis occurrat; quin ubique mechanices etiam abſtruſiora placita ad uſum revocata reprehendas. Quare mirum non eſt ſi tanto ſemper in honore apud reges, & principes veri Mathematici fuere: ſi tanti apud Siracuſios olim fuit Archimedes, in cujus ſcilicèt unius ſolertia omnium civium ſalus poſita videbatur: ſi tanti apud Romanos quibus tot clades ſolus intulerat.

Ad tantam Matheſis utilitatem accedit certitudo, quæ talis eſt, ut demonſtrationes mathematicæ teſte Ariſtotele primas ſibi certitudinis partes vendicent, nec dubio minimum locum relinquant, mentémque propterea pura cognitæ veritatis ſuavitate perfundant. Percipitur autem præcipuè illa jucunditas dum quis poſt exanthlatos nonnullos labores, aliquid novi, & abſtruſi proprio marte excogitat, ut Thaleti Mileſio contigiſſe ferunt poſt trianguli æquilateri in circulo inſcriptionem inventam, qui propterea bovem Muſis immolavit; Perſeo qui ob helicis deſcriptionem diis ſacrificavit; Pythagoræ qui ob inventam rationem laterum trianguli æquilateri Ecatomben obtulit; Archimedi qui deprehenſo in aurea corona furto, quaſi amens gaudio ſuum illud εὕρηκα ingeminans nudus è balneo urbem domum properavit. Idem Sphæræ dimenſionem à ſe inventam ſepulchro ſuo inſculpi voluit. Eratoſthenes à ſe inventam cubi duplicationem, non præcisè geometricam licèt, loco anathematis in templo ſuſpendi voluit. Dimenſam montis Atho altitudinem Apollini dedicavit.

Cùm autem tantus ſit Matheſeon in Philoſophia perdiſcenda uſus, tantus in artibus, in vita univerſa, cum illis diſciplinis nihil ſit certiùs, nihil etiam jucundius, cum tam multiplici nomine commendentur: tam paucos eſſe, qui in hac nobiliſſima ſcientia, vel mediocriter ſint verſati ſatis mirari non poſſum. Nempè dum Philoſophorum turbam ingentem, dum Theologorum infinitum penè numerum, dum Juriſtarum, & Medicorum examina ut ita dicam miramur; vix in toto aliquò regno Mathematicorum decadem cenſeamus. Id apud me dum recogito ſæpè diligentiùs, multa eſſe quæ à jucundo alioquin ſtudio deterreant, difficiléſque præbeant aditus deprehendi.

Cùm enim tot jam ſæculis exculta fuerit Matheſis, doctiſſimiſque lucubrationibus ornata, in immenſum penè hoc præſertim ſæculo excreverit, ulteriúſque provecta ſit quàm millè retro annis, mole ſua cujúſque animum ut tanto oneri imparem obruit, & ab hoc labore ſuſcipiendo deterret. Tanta eſt librorum mathematicorum copia, ut confuſionem pariat, tanta in minutioribus, etiam nulliúſque momenti materiis, aliquorum Authorum accurata nimis ſolertia, ut qui ſine delectu omnia profundioris præſertim Geometriæ placita addiſcenda ſuſcipiat, in tot Syrtes, & ſcopulos adigatur, & fœdum adeat indecoræ deſertionis periculum.

Id enim verò ex malè intellecto Matheſeon ſcopo eveniſſe ſtatuo, perverſâque multorum ideâ ſcientiam ex ſola difficultate metientium, magnúmque operæ pretium ſe feciſſe exiſtimantium, ſi abſtruſa, & quæ hactenus aliis incognita fuerint, nulla utilitatis habita ratione commententur. Hinc tanta in Matheſi noſtra rerum futilium farrago erupit. Dum enim pleríque materiam aliquam brevibus ſæpiſſimè finibus contentam, tractandam & ut ita dicam exhauriendam ſuſcipiunt, minuta quæque, inutilia licèt nulliúſque momenti ita perſequuntur, ut tædium afferant, ſcientiamque jucundam alioquin tot ſpinis, & difficultatibus obſtruant, ut impoſſibilem reddant.

Quare peſſimè de Mathematicis meritos eſſe primò eos exiſtimo, qui circa geometrica præſertim principia commentationes ita exaggerant, & ſcolia lemmatibus addunt, ut nullus eſſe modus, & finis videatur; hâc enim molè cujuſque mentem fatigant, & obruunt, ut multos ab hoc ſtudio retrahant, & avocent. Quare ſic apud me ſemper ſtatui Mathematicas diſciplinas quas vocant puras, non ſine delectu addiſcendas eſſe, ne mentem cognitione rerum, quas ſcire, aut ignorare non maximopere juverit, non tam adornes, quàm inficias. Geometriam igitur, & Arithmeticem ſic uſurpes velim, in quantum vel ad effectus alicujus phyſici inveſtigandas cauſas, vel ad communem vitæ uſum, artéſque perficiendas, aut promovendas utiles fuerint.

Cùm enim hæ diſciplinæ in quantitate conſideranda occupentur, ſoláſque ejus proprietates, æqualitatem ſcilicet, exceſſum, proportionem, aliáſque intueantur, non magnum eſt in ſe id omne quod docent, nec difficultatem, & laborem in iis perdiſcendis impenſum compenſarent, niſi ad ſecreta naturæ penetralia viam ſternerent, aut vitæ civilis commodis inſervirent. Sunt etiam ſui in Mathematicis nævi, ſunt & tricæ, & quiſquiliæ, quas qui ſcrupuloſius fuerit conſectatus, is ſanè multum temporis & laboris ſatis meo quidem judicio impendet. Inveteratum quidem malum eſt, & jam à priſcis temporibus ad nos uſque derivatum, ut ſcientiam difficultate metiamur, & inanis gloriolæ cupiditate ducti, ad ea mentem applicemus, quæ aliis incognita fuiſſe intelligimus. Quantum temporis, & laboris impenſum eſt in quadrando circulo, quid tamen utilitatis ex hoc problemate ſoluto, cum in Geodeſia oblato quocumque circulo, æquale quadratum exhibeamus, & quamcúmque præciſionem in hoc negotio conſequamur? Quantum in duplando cubo deſudarunt priſci illi Mathematici, quid tamen emolumenti inde conſequeremur, cum in ordine

ad praxin per extractionem radicis cubicæ, ſolida quæcumque, quantum libuerit ſine ullo vel minimi erroris periculo augeamus, & minuamus. Quid de diviſione anguli in tres partes dicam, tanto labore à nonnullis quæſita, eſto enim per attentationem & non geometricè eam diviſionem perficiamus, non tamen multùm ulterius proveheremur ſi id doctius exequi doceremur. Sunt alia alterius generis problemata, in quibus non inutiliter inſudatur, methodus ubique terrarum longitudinis inveniendæ jure mercedem aliquam ſibi vindicat, cum & Geographicas tabulas ſummè perficiat, navigantibus opem ita ſalutarem & certam afferat. Utilitatem haberet non modicam motus perpetui artificium, ſed tot linearum exoticarum proprietates, quæ nec in rebus naturalibus aliquid docent, nec ad communem hominum vitam & utilitatem referuntur proximè nec remotè, vix puto tot vigiliarum tantíque laboris eſſe mercedem congruentem. Innumera ſunt hujus generis exempla quæ ſingula recenſere longum eſſet, quare ut tam pernicioſum errorem depellam, Mathematicáſque diſciplinas ut ita dicam expurgem, hunc tractatum concinnandum cenſui, in quo totum Matheſeon progreſſum ſecundum ordinem temporum oculis ſubjicio.

Matheſin ſecundò potius inficiunt quàm promovent, qui in ſuis ſcriptis obſcuritatem, & tenebras affectant; ſerpit enim virus illud, & apud nonnullas nationes mos ille invaluit, ut neglecto communi ſcribendi modo, Algebræ ſpecioſæ characteres, & compendiariam methodum ita uſurpent, ut ſæpè nullum habeant orationis contextum, multáque reticeant, quæ ad perfectam demonſtrationem requiruntur.

Quamvis autem Algebra ſpecioſa in verſandis in omnem partem æquationum rationibus, privatim adhiberi poſſit, utiliſque ſit ad invenienda multa de novo, publicè tamen & in libris uſurpari non debet; primò eo quod imaginationem non feriat, quæ tamen in rebus mathematicis maximo eſt uſui; ſecundò eo quòd in lineis præcipuè indicandis unico charactere, in figuris præſertim implicatis, confuſionem pariat. Quare quicumque ad aliorum utilitatem ſcribit, nec inanem quandam gloriolam aucupatur, quòd ea invenerit, quæ alij intelligere non poſſunt, à communi loquendi, & ſcribendi uſu ne diſcedat unquam; cùm verò tales libri offeruntur, ne in illis volutandis tempus inaniter impendatur; quia ut plurimum vitia demonſtrationum ſub tali latent involucro, dum ipſius methodi obſcuritati, & brevitati tribuitur error qui in ipſa materia poſitus eſt, eáque ideò ſic proponuntur, quid ſtrictis Geometriæ principiis non innitantur. Tot ſunt alij libri faciliores in quibus volutandis, & addiſcendis melius opera collocabitur; ut quid omni in eo intelligendo authore laborandum eſt, qui intelligi non vult. Error fuit præteriti ſæculi, ut is tantum doctus cenſeretur, qui obſcuritatem aliquam præſeferret; jam verò ita ſtatuendum puto, eum benè rem non concipere, quam aliis explicare non poſſit. Excuſantur quidem authores Græci ſi in iis intelligendis nonnunquam laborandum ſit, phraſis enim & orationis contextus, immò & conceptus ipſe, à noſtro modo cõcipiendi paulò alienior, hanc difficultatem efficit; eum verò qui noſtra lingua mentem ſuam explicare non valeat penitus nihili facio. Tertiò reprehenſione digni ſunt qui ut figuras habeant elegantiores, & in ære inciſas, eas in finem operis omnes ſimul rejiciunt, aut etiam plicatiles ita libris inſerunt, ut explicari poſſint: nam præterquam quòd facilè pereunt, & deteruntur, & iis detritis libri inutiles evadunt, difficultas & moleſtia de novo exurgit, dum in ſingulas propoſitiones ſua invenienda & aptanda figura, quæ tanta eſt in rebus præſertim difficilioribus ut nunquam adhuc in animum inducere potuerim, ut librum ita compoſitum totum evolverem.

In hoc igitur tractatu totum Mathematicarum diſciplinarum ordinem, & progreſſum per ſingulas ætates, & tempora perſequor, ſingulóſque authores profero, elucubrationum omnium argumenta explico, quantum ab unoquóque promota fuerit Matheſis indico, meúmque de ſingulis judicium fero, eorum nempè quorum ſcripta in manus meas venerint. Hic igitur eſto mihi lydius lapis, ad hanc ſtateram ſingulas Matheſeon partes expendo, ut eas legitimas hominéque dignas admittam, quæ vel ad naturæ cognitionem aliquid conferant, vel ad vitæ communis & reipublicæ commodum quomodocúmque referantur; quæ verò ad neutrum utiles fuerint ut illegitimas reſpuam, quæ nempè laborem in iis addiſcendis impenſum nullo compenſent emolumento. Antiquos authores quorum ſcripta injuria temporum perierunt, ſimpliciter ſuo ordine, per ſuas ætates recenſebo, quod ut ordinatè præſtare queam, in certas quaſi claſſes mihi tota Matheſis digerenda eſt.

Matheſeos objectum eſſe quantitatem nemo eſt qui neſciat, cujus nempè proprietates omnes, ſive abſolutas, ſive relativas, & in variis comparationibus poſitas ſi contempletur. Hæc autem quantitas vel ita ſolitariè & quaſi abſtractè conſideratur, & nulli ſubjecto immerſa, aut materiæ affixa cogitetur, ſic puram Matheſin efficit; vel hæc eadem quantitas ut jam ad certum genus determinata, & cum peculiari ſubjecto connexa concipitur, ſic Matheſin mixtam conſtituit. Rurſus cum duplex ſit quantitatis, etiam non immerſæ ſpecies, continua, ſcilicet & diſcreta, duplex etiam exurgit Matheſis pura; Geometria nempè quæ continuam, Arithmetica quæ diſcretam quantitatem intuetur. Utráque quaſi univerſalis dici poteſt, quod per omnes partes vagetur, eiſque facem quaſi præferat. Non tamen quæcúmque Geometrica, aut Arithmetica proptereà elementaria dici debent, ſunt enim nonnulla quæ quia ſatis univerſalia non ſunt, nec reliquis omnino neceſſaria, ab elementorum ordine rejiciuntur. Communiter ergo inter elementares tractatus Geometricos recenſentur, Euclidis Elementa, Sphærica Theodoſij & Trigonometria; quæ verò ſunt nimis particularia ut Geodeſia, Tractatus Archimedis de Sphæra, & Cylindro, de Helicoidibus, ſpiralibus, de conicis ſectionibus, variæ quadraturæ, cubi duplicationes, methodus indiviſibilium, aliáque nonnulla Geometrica licèt, inter elementares tractatus non reponimus.

Idem proportione quadam in Arithmeticis dicendum eſt. Elementares enim regulæ Additio, ſubtractio, multiplicatio, diviſio tam in numeris integris quàm fractis, regula proportionum, ſocie-

tatis,

tatis, falſi, extractiones radicum quadratæ, & cubicæ, progreſſiones item tam Arithmeticæ, quàm Geometricæ inter elementa recenſentur. Algebra ſive numeroſa, ſive ſpecioſa, ſub eodem licèt Arithmetices genere contenta, inter elementa non reponitur, cum reliquæ partes ab ea minimè pendeant. Atque his duabus partibus Geometria ſcilicet, & Arithmetica tota Matheſis pura continetur.

Latius haud dubiè patet Matheſis mixta, nihilque puræ de dignitate concedit. Amœniores quippè materias continet, atque ex elementis ſeu ſpinis, roſas colligit, & ex laboribus exantlatis fructus percipit uberrimos. Nullus ut ait certis continetur limitibus, niſi quibus hic mundus terminatur: cum enim ut ait Plato Deus in omnibus Geometriam exerceat, hoc eſt mundum hunc univerſum ſingulâſque ejus partes in numero, pondere, & menſura conſtituerit in quatuor elementis, & cœlo Matheſin particularem, ſeu mixtam, hoc eſt affixam materiæ intuebimur, & quidquid in ſingulis ad numerum, pondus, & menſuram ſeu ad quantitatem continuam, aut diſcretam pertinebit, ut juris noſtri vendicabimus. Facilem ergo & maximè conſentaneum ordinem Matheſi mixtæ & particulari tribuemus, eundem ſcilicèt quò partes mundi copulantur.

Ab Elementorum infimo ſeu tellure ordiamur: hæc primò tribus ſuis dimenſionibus Geodeſiæ, ſeu Geometricæ practicæ, & ad uſus civiles accommodatæ materiam ſubminiſtrat.

Tellus inter elementa graviſſimum eſt; ejus gravitatem intuebitur Statica, quia verò Mechanica eidem univerſali principio innititur, ad idem etiam revocatur.

Tellus ſphærica eſt ejuſque partes variè, ad cœli puncta relatæ, varia lucis, & caloris; dierum, & noctium incrementa ſortiuntur, hæc Geographia univerſalis explicat.

Terram hominibus incolendam dedit Deus, jure ergò Architecturæ tam civilis, quàm militaris placita advocamus, eíque duos ancillantes tractatus, artem ſcilicet tignariam, & tractatum de lapidum ſectione, ad fornices componendos adjungemus.

Tellus magnetica eſt, cui propterea tractatum de magnetiſmo tribuimus.

Novem igitur tractatus telluri addicimus Geodeſiam, ſtaticam, mechanicam, Geographiam, magnetiſmum, Architecturam civilem, Architecturam militarem artem tignariam, & tractatum de ſectione lapidum.

Pauciores Mathematicos tractatus nobis aqua ſuppeditat. Si enim ejus gravitatem conſideremus hydroſtaticam, ſeu tractatum de natantibus, ſeu inſidentibus humido cum Archimede inſtituimus. Si ad fluiditatem & curſum aquæ attendamus ſecundum de fluviis, & fontibus habebimus. Tertius machinas hydraulicas exhibet. Quartus artem navigandi complectitur. Quatuor igitur tractatus in aqua ſolemus diſtinguere hydroſtaticam, hydragogicam, ſeu de fontibus, hydromechanicam, & artem navigandi.

Cum tam viſio quàm auditio in aëre peragatur, ut in medio, tam luminis quàm ſonorum ſuſceptivo appoſito quidquid ad viſum, & muſicam pertinet in aëre collocamus, & quia viſio directis, reflexis, & refractis radiis peragitur, quatuor circa viſionem tractatus inſtituimus, nempè de viſione quaſi in genere differit optica; de radio directo perſpectiva, de reflexo catoptrica, de refracto dioptrica. Muſica item ſuum peculiarem tractatum jure ſibi vendicat. Quinque igitur in aëre tractatus collocamus opticam, perſpectivam catoptricam dioptricam, & muſicam.

Sterilior erit ignis unico contentus tractatu in duas partes dividendo: in primo de ignibus tam feſtivis, quam ſeriis, & nocivis agit; in ſecundo de tormentis bellicis eorúmque directione, de quæſtionibus item baliſticis diſſerit.

De cœlo quinque tractatus occurrunt nempè Aſtrolabiorum doctrina, ſeu projectio Sphæræ in planum; Gnomonica ſeu de horologiis ſciatericis, Aſtronomia, Aſtrologia divinatrix, & Kalendarium.

Algebra ſibi peculiarem tractatum jure vendicat. Ad methodum indiviſibilium nonnulla profundioris Geometriæ placita, nempè varias quadraturas, cubi duplicationes, aliáque exotica revocamus.

Hæc fuit Mathematicarum diſciplinarum partitio, quam in curſu meo Mathematico uſurpavi, ut nihil intactum relinquerem, aut tacitus præterirem, qua nempè in tractatus triginta & unum hanc ſcientiam diſtribui. Sunt autem iſti. Tract. Proemialis.

1. Euclidis Elementa.
2. Arithmetica.
3. Algebra.
4. Sphærica Theodoſij.
5. Methodus indiviſibilium.
6. ectiones conicæ.
7. Trigonometria.
8. Geodeſia.
9. Mechanica.
10. Statica.
11. Geographia.
12. De Magnete.
13. Architectura Civilis.
14. Ars Tignaria.
15. De ſectione lapidum.
16. Architectura Militaris.
17. Hydroſtatica.
18. De Fontibus.
19. De Machinis Hydraulicis.
20. De Navigatione.
21. Optica.
22. Perſpectiva.
23. Catoptrica.
24. Dioptrica.
25. Muſica.
26. Pyrotechnia.
27. De Aſtrolabiis.
28. Gnomonica.
29. Aſtronomia.
30. Kalendarium.
31. Aſtrologia.

Quia tamen non omnes hi tractatus ab initio ſunt inſtituti, aut inventi, in hoc opere ad pauciora capita revocare placet, ne tot fiant claſſes, & quaſi ordines; qui nempè potius tenebras, & confuſionem parerent, quàm diſtinctionem, præcipuè cum multæ materiæ tantam affinitatem habent, ut in pleríſque authoribus non ſeparatim,

ſed ſimul explicentur. quare primò ſub titulo Geometriæ Euclidis, & Hypſiclis elementa reponemus, Sphærica Theodoſij, Trigonometriam, Geodeſiam, quæ propriè Geometriæ eſt praxis, ſectiones conicas, quadraturas omnes, cubi duplicationes; methodum indiviſibilium; quæ omnia ad puram Matheſin, ſpectant, utpotè quæ circa quantitatem continuam nulli affixam materiæ verſantur.

Secundò loco reponetur Arithmetica unà cum Algebra.

Tertiùm ordinem ſibi vendicat Mechanica, cui Staticam adjungemus utpote ad idem principium pertinentem, cui cum etiam innitatur Hydroſtatica, Hydromechanica, & quidquid de fontibus, aut ſpiritalibus dicitur, quidquid item de ignibus, tormentis bellicis id etiam totum ſub eodem Mechanicarum titulo reponemus.

In quartò Geographiam, & magnetem collocamus, quia autem ars navigandi iiſdem ferè principiis innititur ac Geographia, ab ea non ſejungetur.

In quinto Opticam contemplamur, cujus cùm ſpecies ſint perſpectiva, catoptrica, dioptrica, immò & Aſtrolabia verè ad perſpectivam pertineant, ſicut & Gnomonicam; hæc omnia ſub quinto ordine conjungemus.

Architectura tam civilis, quàm militaris, cum duobus ancillantibus tractatibus arte ſcilicèt tignaria, & ſectione lapidum ſextum ordinem efficiet.

Septimum Muſica obtinebit.

Octavum denique Aſtronomia, cum Aſtrologia divinatrice, & Kalendario ſeu Chronologia.

Quare octo ordines in Matheſi conſtituimus; quorum progreſſum per ſingulas ætates relatis authoribus, qui de illis ſcripſerunt. Nempè Geometriam, Arithmeticam, Mechanicam, Geographiam, Opticam, Architecturam, Muſicam, Aſtronomiam.

CAPUT II.

De progreſſu Geometriæ.

GEometriæ nomen anguſtius eſt, quàm ſint hujus ſcientiæ fines, cum ad omnem quantitatis continuæ conſiderationem ſe extendat, nec in ſola terræ menſuratione, ut indicare videtur hæc appellatio, occupetur. Unde ineptam nonnulli, ridiculam hanc vocem Plato cenſuit, quòd re ſignificata minus latè pateret, & primum tantum ejus uſum, non totam amplitudinem ſignificaret. Geometriam igitur vocamus, eam facultatem quæ in quantitatis continuæ contemplatione conſiſtit, quæ tale ſortitur nomen, quamdiu univerſaliter eam & in abſtracto, conſiderat. Jure ergo ſub hoc nomine Geometriæ, complectimur Euclidis elementa; in quibus nempe prima tradit Matheſeos rudimenta, variáſque demonſtrat figurarum proprietates, ſive abſolutas, ſive reſpectivas: non ineptè ſub eodem titulo Sphærica Theodoſij reponimus, cum tota quam tradit hic author doctrina omnibus omnino ſphæris, & globis adaptari poſſit. Trigonometriam item reponimus: cùm enim ſuperficies omnes, in triangula facilè reſolvi poſſint; appoſitè triangulorum menſuratio ſuperficierum omnium dimenſiones compleɛtetur. Hanc communiter in ſex partes dividimus: Prima rationem indicat ſemidiametri circuli ad lineas circulo inſcriptas, nempe canonem chordatum ſinuum, tangentium, & ſecantium componit, inſtrumentum ſcilicet omnibus menſurationibus peragendis aptiſſimum. Secunda Logarithmorum ſcientiam tradit; opus ſanè aureum, hujúſque ſæculi inventum, ut ſuo loco dicemus, cui nempè jure hæc additur Epigraphe, Anteceſſoribus noſtris ſapientiores ſumus. Hanc doctrinam Nepero nobili Scoto debemus de tota Matheſi propterea benè merito, qui ſubſtitutis loco numerorum ſimplicium, eorum logarithmis, additionem pro multiplicatione, ſubtractionem, pro diviſione aſſumit, pluráque ſolvit intra horæ quadrantem trigonometrica problemata, quàm vulgaris trigonometria intra horam. Tertia pars communiter uſum talium tabularum in triangulis rectilineis docet, eáque tam per ſinus, tangentes & ſecantes, quàm per logarithmos ſolvit. Quarta continet Iſagogen ad triangula Sphærica. Quinta triangula ſphærica rectangula metitur. Sexta obliquangula totámque trigonometriam abſolvit, cujus ſcilicet ope terreſtria corpora, & cœleſtia, ſi opus ſit, ita exactè metimur, oculíſque, ut ita dicam, ſubjicimus; ac ſi ſphærâ uteremur ingenti, cujus nempè ſemidiameter in decies millies millenas partes ſenſibiles diviſus eſſet.

Geodeſiam item ad geometriam revocamus; quamvis enim ſub hoc nomine agrorum menſurationem indicare videamur, tam parum huic materiæ affixa eſt, ut facilè cuilibet quantitati adaptetur. Hæc dimenſiones omnes, & menſuras complectitur; cúmque quantitas continua tribus conſtet ſpeciebus; linea, ſuperficie, & corpore, trifariam communiter dividitur. Primò enim agit de linearum menſuris; diſtantiáſque inacceſſibiles, quales ſunt montium altitudines, fluviorum alvei, valliũ voragines aggreditur, inſtrumẽtorúmque innumerorum uſum aperit; ut ſemicirculi, quadrãtis, quadrati geometrici, Gnomonis ſeu ſquadræ, crucis Geometricæ, pantometri, pantographi, regularum proportionalium, aſſerculi, cæterorúmque omnium principia tradit. Quia verò non tantùm lineæ rectæ, ſed etiam curvæ ſub menſurationem cadunt, circumferentiæ circuli cum diametro rationem inveſtigat. Secundò ſuperficierum, ſeu arearum menſuras explorat; non tantùm triangulorum, parallelogrammorum, aliarúmque figurarum, circulorum item & ellypſium aream contemplatur. Quia verò prima ſuperficierum menſura, utpotè notiſſima, unicáque dimenſione contenta quadrata eſt, circulum ad quadratum revocare conamur; ad quem ſcopum ſpectant helices Archimedis, quadratices, Lunula Hippocratis Chij, aliæque exoticæ lineæ quibus hactenus circuli quadratura tentata eſt. Aliorum item corporum ſuperficies definimus, ut Cylindri, Coni, Sphæræ, Sphæravideon, & aliorum, earumdem item ſuperficierum diviſionem perficimus. Tertiò circa corporum ſoliditatem verſatur, ſic Priſmatum, Pyramidum, Cylindrorum, conorum, Sphæræ, & cum Archimede in ſuo arenario granulorum, intra totius firmamenti concavitatem contentorum, facili calculo numerum inimus. Vaſorum item & doliorum capacitatem exploramus.

Ad hunc Geometricum tractatum facilè revocantur

Digitized by Google

cantur quæcumque Apollonius aliíque ante, & poſt ipſum de ſectionibus conicis nempe de circulo, parabola, ellypſi, & hyperbola eruditè ſcripſerunt quæcúmque ad circuli quadraturam ad cubi duplicationem ſpectant. Methodum item indiviſibilium, & alia hujuſmodi, quæ ad quantitatem indeterminatam adhuc, & non certæ materiæ affixam pertinent.

Hujus ſcientiæ dignitatem oſtendit nexus ille mirabilis, & demonſtrationum certitudo, quæ tanta eſt ut non perſuadeat tantùm, ſed cogat. Unde in exemplum abſolutiſſimæ ſcientiæ ab ipſomet Ariſtotele ſemper proponitur.

Hujus ſcientiæ apud Ægyptios inventor Theut, ſeu Deum aſſerit Plato in Phædro, quaſi tam nobilis inventi gloria ſoli Deo deberetur. Communiter tamen tradunt pleríque ab Ægyptiis neceſſitate eſſe inventam. Cùm enim Nilus exundatione, & limo, agrorum limites operiret, & confunderet; ne limitum confuſio, eſſet perpetuum diſcordiarum, & litium ſeminarium, arte & ſcientia opus fuit; qua rurſus agri dividerentur, & controverſiæ omnes dirimerentur.

Hanc à Thalete Mileſio invectam eſſe aſſerit Laertius; licèt eodem teſte præcedenti ſæculo Euphorbus Phryx contemplationem de lineis compoſuerit, triangulum ſcalenum invenerit, ſeu modum cujuſlibet trianguli ex tribus ſcilicèt lineis componendi, quæ eſt 22 primi elementorum Euclidis; quare primus quod ſciamus geometriam exercuit.

Natus eſt Thales Mileſius anno ab Urbe condita 120, ſeu ante Chriſtum 632. Hic primus nomine Sapientis appellatus eſt. In Geometricis invenit triangulum in circulo orthogonicum; ſeu 31. 3. Elementorum, quæ ita modò effertur. Angulus in ſemicirculo rectus eſt. Item quintam 1. Elementorum. Iſoſcelium triangulorum anguli ad baſin æquales ſunt. Item 15 ejuſdem, Anguli oppoſiti ad verticem æquales ſunt. Item 26 de æqualitate omnimoda triangulorum unum latus, & duos angulos ad invicem æquales habentium. Demonſtravit item circulum bifariam à diametro ſecari, menſus eſt ex umbra, Ægypti pyramides. Invenit modum inſcribendi in circulo triangulum æquilaterum; pro quo invento Muſis bovem immolavit. Alia multa in Aſtronomicis.

Ex hujuſmodi inventis, multo magis ex ſequentibus, quæ tanta cura ut magnum operæ pretium notantur, facile conjicere poſſumus qualem ex Ægypto Geometriam Thales advexerit, quæ probabiliter nonnullas tantum praxes, ad agrorum dimenſionem perficiendam continebat, qualem forſitan etiamnunc Agrimenſores noſtri habent, qui quantum poſſunt omnes figuras ad parallelogramma rectangula reducunt, & multiplicatione unius lateris per aliud aream exhibent. Videntur autem iſti potius regula & circino uſi, & operati geometricè, quàm calculos adhibuiſſe.

Thaleti proximè ſucceſſit Mamertinus inſignis Geometra, quique multa geometrica adinveniſſe dicitur.

Eodem fere tempore vixit Amethiſtus ſummus Geometra, qui dicitur rerum Geometricarum inventor; de quo nihil niſi nomen & elogium retulit Proclus. Frater fuit Steſichori Poetæ.

Eodem ſæculo his ſucceſſit Pythagoras Samius, qui Ægypto, & Perſide perluſtratâ in Mathematicis excelluit. Præcipuè in Arithmetica Aſtronomia & Muſica. Huic nonnulli hanc laudem tribuunt, quòd ex Ægypto in Græciam Geometriam advexerit. In Geometricis autem dicitur inveniſſe 32 primi Elementorum, nempe Trianguli cujuſcúmque tres angulos ſimul ſumptos duobus rectis æquales eſſe. Demonſtrationem 47 primi Elementorum reperit, nempe In triangulo rectangulo quadratum baſis, quadratis laterum æquale eſſe; pro qua in gratiarum actionem Muſis Ecatomben obtulit. Et merito cùm hæc propoſitio ſit univerſaliſſimum trigonometriæ principium, primus Mathematicæ ludum aperuit.

Poſt Pythagoram tertio ſcilicet Urbis conditæ ſæculo, hoc ſtudium excoluere Anaxagoras Clazomenius; de quo niſi nomen nihil aliud proditum eſt.

Oenopides item Chius inventor duodecimæ primi Elementorum, nempe *Perpendicularem ad datam lineam ex puncto extra eam dato ducere*, & vigeſimæ quartæ ejuſdem, nempe *Ad datum punctum lineæ propoſita, angulo dato æqualem angulum rectilineum conſtituere.* Probabile autem mihi eſt, demonſtrationem tantùm aliquam hujuſmodi Propoſitionum ab eo fuiſſe inventam. Si enim primum tunc temporis ipſæ Propoſitiones ſunt inventæ, admodum imperfecta, & rudis erat Matheſis.

Hujus diſcipulus fuit Zenodorus author tractatus de Iſoperimetris; in quo hanc vulgi hallucinationem depellere conatur, Figuras ejuſdem ambitus, & circumferentiæ eſſe æquales inter ſe. Oſtendit autem Figuras plurium laterum, etiam aliis pauciorum laterum iſoperimetras majores eſſe; adeóque omnium Iſoperimetrarum circulum majorem eſſe: item Quæ latera magis inter ſe æqualia habent, cæteris paribus majores eſſe.

Hic tractatus jam indicat Geometriam ſatis perfectam. Hunc tractatum habet Clavius, ſumpſitque ex Theone, qui Zenodoro eum tribuit. Nos etiam in Geodeſia, ſeu Geometria practica, eum non omiſimus.

Hunc proximè ſecutus eſt Hippocrates Chius, qui dum circulum quadrare nititur, lunulæ quadraturam dedit. Hæc habetur apud multos, hícque tetragoniſmus per tranſpoſitionem aliquarum partium peragitur, proponitúrque ab Ariſtotele ſæpe in exemplum paralogiſmi. Hic primus ſcripſit elementa geometrica, quæ non extant. Notavit item. Si inter duas lineas propoſitas, aliæ duæ mediæ proportionales inveniantur cubum duplicari poſſe.

Theodorus Cyreneus ejus ſodalis Geometriam auctiorem reddidit.

Timæus Locrus Pythagoricus ſcripſit hoc tempore Mathemata. Huic Plato ſuum Timæum inſcripſit. Nonnulli ab eo Platonem accepiſſe dicunt.

Quarto Urbis conditæ ſæculo floruit Democritus Mileſius ſcripſit de contactu circuli, & ſphæræ, de lineis irrationalibus & ſolidis quæ non extant.

Eodem tempore Protagoras nonnulla Mathematica ſcripſit quæ pariter periere.

His ſucceſſit Plato Matheſeos ſtudioſiſſimus: ſingulis enim diebus geometricum problema diſcipulis explicabat. Geometriæ expertes à ſua ſchola arcebat. Primus ſectiones conicas, & cylindricas

lyndricas inſpexit. Modúmque demonſtrandi analyticum invenit, nempè ſupponendo quod quæritur factum eſſe, & dari, quæ methodus dici poteſt Algebra quædam naturalis, & Algebræ artificialis ſeminarium fuit. Hunc Delij circa duplicationem cubi conſuluerunt, licèt autem eos ad Euclidem remiſerit, Problema tamen tentavit, extátque ejus methodus inveniendi duas medias proportionales apud Eutocium. Nihil Geometricum ab eo reliquum habemus, niſi hanc duplicandi cubi rationem quæ etiam ſuo nævo non caret. Habemus item nonnulla ejus loca in ſuis ſcriptis ſparſa, quæ Geometriam ſapiunt. Hæc explicuit Theon Smirneus, ſed hæc ſunt levis momenti, nec Geometriam multum promovent. Fuit Athenienſis, dictúſque eſt divinus.

Amiclas Heracleotes, Laodamas Thaſius, & Neoclides, Platonis aut auditores, aut familiares, Geometriam auxerunt, Leon item Elementa Geometrica multo auctiora quam Hippocrates compoſuit quæ non extant. Eudoxius Gnidius Platonis in Ægyptum comes quintum elementum de proportionibus ſcilicet, inveniſſe dicitur, in quo ſcilicet nova ut ita dicam logica, ſeu argumentandi methodus traditur, qua nihil potuit commodius & ingenioſius excogitari.

Thæetetus Athenienſis de quinque ſolidis corporibus ſcripſit, ſed non extat ejus elucubratio. Dicitur primus demonſtraſſe decimam decimi Elementorum, nempe, Si quatuor lineæ fuerint proportionales, & prima ſecundæ fuerit commenſurabilis: erit & tertia quartæ.

Bryſo, & Antiphon circuli quadraturam inutiliter his temporibus tentarunt.

Philoſophus Platonis auditor ſcripſit de circularibus & medietatibus, quæ non extant.

Quinto Urbis ſæculo nempe trecentis ſexaginta circiter ante Chriſtum annis, Theudius Magnes Tertius Elementa geometrica conſcripſit. Hermotimus Colophonius uberiora reddidit, quæ non extant.

Cyzicinus Athenienſis item Geometrica ſcripſit, quæ periere.

Ariſtæus Senior ante Euclidem multa de conicis ſcripſit. Hunc Euclides in iiſdem ſecutus eſt. Scripſit item de reſolutione, & locis ſolidis, quæ omnia non extant. Ita Pappus lib. 5.

Philippus Metæus Platonis magiſtri diſcipulus multa in Mathematicis edidit.

Menechmus Eudoxij diſcipulus dicitur ſectiones conicas inveniſſe. Neſcitur quid circa eas invenerit. Invenitur apud Eutocium ejus methodus conſtituendarum duarum mediarum proportionalium ad duplicationem cubi.

Geminus demonſtravit Tres tantum lineas ſimilares eſſe, nempe rectam, circularem, & ſpiralem cylindricam. Lineas item ſpiricas, conchoeides & ciſſoeides invenit. Quintam primi Elementorum univerſaliorem fecit, nempe eam demonſtrat Quando baſis eſt circularis, aut ſpiralis cylindrica.

De lineis Spiralibus, Conchoeidibus, & Ciſſoeidibus egit poſt Geminum, Perſeus Citticus.

Ariſtoteles ſcripſit librum de unitate, & de lineis inſecabilibus. Hunc latinum fecit Julius Martianus Rota; eſtque exigui momenti.

Ad Euclidem tandem Geometram pervenimus, quem pleríque eundem putant eſſe cum Euclide Megarenſi, ex Megaris urbe in Iſthmo, cujus nomine Secta Megarica dicta fuit, cujus nempe author fuit, quam Dialecticam, & Eriſticam contentioſam vocavit. Fuit Socratis auditor, & huic ſucceſſit Ichtias. Diogenes Laertius ait Platonem ſe contuliſſe Megara ad Euclidem. Conſtat item eundem Platonem Delios ad Euclidem remiſiſſe. Proclus Diadochus in Præfatione ad Euclidem, ſuprà recenſitos authores ante Euclidem recenſet. Euclides Geometra ſive idem ſit cum Megarenſi ſive non, longo tempore Alexandriæ Geometriam docuit, dicitúrque de illo quòd nunquam in paralogiſmum inciderit.

Quintus igitur Elementa geometrica miro ordine contexuit. Quem librum ſi aureum nominem, eíque primas inter libros qui hactenus editi ſunt, exceptis tamen ſacris codicibus, parum admodum dixero, cùm veram ſcientiæ ideam ingeneret, nihil dubij aſſumat, ſed à principiis per ſe notis exorſus, ad abſtruſa hujus ſcientiæ arcana ſenſim gradum faciat. In libros 15 ſua Elementa partitur.

In primo agit de angulis & lineis perpendicularibus, quarum proprietates cum ſine triangulis demonſtrare non poſſit, multa de triangulis dicit, tum de lineis parallelis, & parallelogrammis figuris loquitur.

In ſecundo libro rectangula præcipuè conſiderat, totiúſque Algebræ & æquationum variarum ſemina jacit. Tertio circulum variáſque in eo lineas contemplatur. Quarto varia polygona circulo inſcribit, & circumſcribit. In quinto novam proponit logicam proportionalem, ſcilicet argumentandi methodum. Sexto varias proportionalium linearum proprietates enucleat, regulam quam vocant auream demonſtrat, totiúſque Geodeſiæ principia proponit. Septimo, octavo, & nono numerorum proprietates explicat, non quidem omnes, ſed eas tantum quæ ad incommenſurabilium doctrinam neceſſariæ videbantur, ideóque hi tres libri ſunt ad decimum Iſagogici. In decimo incommenſurabiles quantitates proponit. Undecimo ſolidorum principia profert; tum parallelipipedorum, priſmatum, Pyramidum, Cylindrorum, conorum, & ſphærarum proprietates explicat duodecimo. In decimo tertio, & ſequentibus quinque ſolida corpora, tam inter ſe, quàm cum ſphæra quoad ſuperficiem quoad ſoliditatem comparat.

Nonnulli quintum Elementorum librum de modo argumentandi per proportionem reprehendunt quoad modum demonſtrationis, nempe per æque multiplicium ambages, rationum ſimilitudinem demonſtret, quæ tamen ejus naturam non ſatis explicare videntur. Nos aliam methodum inivimus, & per partes aliquotas multo brevius & clarius totam hanc doctrinam explicuimus.

Libri ſeptimus, octavus, nonus, decimus, in Elementorum numerum referri non debuerunt; cum hæc incommenſurabilium doctrina plus curioſitatis, quam utilitatis contineat, neque enim ad cæteras Matheſis partes intelligendas aliquid facit, multo minus ad uſum communem aut ad effectum aliquem phyſicum explicandum: niſi forſitan leve aliquod & imbellem pro continui in infinitum diviſibilitate rationem elicias. Ad eam tamen doctrinam ſpectant ſeptimus, octavus, nonus, & totus decimus 117 Propoſitionibus diffi-cillimis

Digitized by Google

cilliinis comprehenſus. Ad numerorum naturam explicandam quintus abundè ſufficiebat, cum ſit univerſaliſſimus & tam numeris, quam continuæ quantitati poſſit applicari. Poterat tota hæc incommenſurabilium doctrina ſeparatim tradi, & poſt ſextum immediatè poni undecimus, qui à ſeptimo, octavo, nono, decimo eſt omnino independens. Experientia enim compertum eſt in quatuor libris recenſitis initio tempus malè collocari. Non plus utilitatis continet liber decimusrertius de comparatione quinque corporum regularium vel inter ſe, vel cum ſphæra. Cum enim vix inveniatur ullum corpus naturale, aut artefactum, quod hoc modo figuratum ſit, ea omnia vix ullum uſum habent. Idem judicium ferimus de duobus ſequentibus, qui non Euclidis; ſed Hypticlis Alexandrini eſſe dicuntur; in quibus hæc quinque corpora tam ſecundum latera, quàm ſecundum ſuperficies, & ſoliditates inter ſe & cum ſphæra comparantur. Adjectus item decimus ſextus à Franciſco Fluſſate Candalla ſimili vitio laborat. Quare tyrones ſex prioribus, undecimo, & duodecimo ſint contenti. Cæteros ne attingant quidem, niſi tempus inutiliter impenſum velint.

Scripſit & Euclides librum Datorum. In quo nempe expendit, quænam ex aliquibus datis ſeu cognitis, ſequuntur ſeu data ſint, & cognoſcantur. Opus continet prop. 94. Utile eſt Geometris. Zambertus hunc latinum fecit.

Dicitur Euclides ſcripſiſſe Conica libris quatuor comprehenſa. Item de Reſolutione, & fallacus, de locis ad ſuperficiem libris duobus; Priſmatum libros tres. Sed hæc omnia perierunt. Scripſit de optica, & de ſphæra ut dicetur ſuo loco.

Ex his fit manifeſtus Geometriæ ad Euclidem uſque progreſſus; videtur enim ſolis Elementis, & conicis comprehendi. Certum eſt autem Euclidem non eſſe authorem omnium Propoſitionum & Demonſtrationum, ſed ordinem iis adhibuit, multáque adjecit, ut nexum illum mirabilem obtinerent. Dubitatur à nonnullis, an Euclides demonſtrationes reliquerit: dedit autem dubitandi occaſionem, quod in nonnullis codicibus Græcis ſoli tradantur Propoſitionum tituli, cum figuris ſine ulla demonſtratione. Certum tamen eſt Euclidem demonſtrationes reliquiſſe, cum Pappus ſæpe comparet Euclidis demonſtrationem cum aliorum demonſtrationibus.

Circa hæc tempora Theophraſtus Eriſſius, Ariſtotelis diſcipulus, & ſucceſſor, inter alia multa Hiſtoriarum geometricarum libros quatuor edidit.

Heraclides item Ponticus de Geometriâ ſcripſit.

Dicearchus Siculus ejuſdem Ariſtotelis auditor primus montium altitudinem perpendicularem dimenſus eſt, invenitque Pelion altum eſſe paſſus 1250. Quæ omnia non extant.

Sexto Urbis conditæ ſæculo ante Chriſtum 252, Eratoſthenes Cyreneus ſub Ptolemæo Evergete ab obitu Alexandri annis 90, & totidem ante Hipparchum, præter Aſtronomica, terræ ambitum dimenſus eſt. Duplicationem cubi aliquam compoſuit quæ extat apud Pappum, & Eutocium.

Eodem circiter tempore nempe 250 ante Chriſtum annis, floruit Archimedes Siracuſanus Mathematicorum facilè princeps. Scripſit primò de ſphæra & cylindro, ſeu de illorum corporum dimenſionibus, tam ſecundum ſuperficiem, quàm ſecundum ſoliditatem, quod præſtitit methodò ingenioſiſſimâ, per inſcriptionem conorum in ſphæra. Primus invenit proportionem cylindri ad ſphæram ſibi inſcriptam, eſſe ſeſquialteram; tam ſecundum ſoliditatem, quàm ſecundum ſuperficiem, ſi pro Cylindri ſuperficie numerentur ambæ baſes. In quo problemate ita acquievit ut ſuo ſepulchro inſculpi voluerit.

Secundò egit de dimenſione circuli, pariter per inſcriptionem polygonorum, methodumque docuit determinandæ rationis diametri ad circumferentiam cum quanta voluerimus præciſione; quæ in ordine ad praxin virtualem continent circuli quadraturam, idémque præſtent emolumentum; ac ſi revera ſolutum eſſet illud problema; unde quæ reſtat invenienda quadratura plus contineat curioſitatis, quàm utilitatis.

Egit item de conoidibus, & ſphæroidibus; in quibus proprietates conicarum ſectionum attingit; ſed nón ita clarè, nec ita univerſaliter, ac poſtea Apollonius Pergæus. Quare poſt Apollonium Pergæum hi duo tractatus redduntur ſatis inutiles.

Quartò egit de lineis ſpiralibus; quibus quadraturam circuli tentavit ſed infœliciter, cum harum linearum deſcriptio geometrica non ſit.

Quintò perfecit quadraturam parabolæ ingenioſiſſimè.

Sextò in ſuo Arenario init calculum arenæ quæ toto cœli ambitu contineri poſſet, ut nempe eam aliquorum depelleret opinionem qui numerum arenæ quæ eſt in littore maris eſſe infinitum autumabant. Totus ferè liber impenditur in ſuppoſitionibus Aſtronomicis.

Scripſit idem de æquiponderantibus, & natantibus in humido. Nihilque præterea de ſcriptis ejus ſupereſt.

Dicitur à Pappo quadraginta fuiſſe ejus inventa mechanica; inter alia Problema illud quo terram loco ſe dimoturum ſpondebat ſi daretur extra illam ad conſiſtendum locus. Problema de furto in corona aurea deprehendit, ſphæram mobilem, ſpecula uſtoria. Cochleam aquaticam compoſuit. Navim bellicam ſolus traxit. Siracuſas contra Marcellum per tres annos defendit. De quibus dicam in Mechanicis.

Vias init mirabiles hic author, magnóque homine dignas. Videtur paulò difficilior, ſive phraſis Græca hanc difficultatem invehat, ſive aliunde id oriatur. Totam ejus doctrinam de ſphæra, & cylindro in Geometria practica faciliorem reddidimus; ſicut & de circuli dimenſione, & Arenario; de lineis ſpiralibus in methodo indiviſibilium. Doctrinam ejus de Conoidibus & ſphæroidibus, & de quadratura parabolæ in ſectionibus conicis explicuimus.

Sexto Urbis conditæ ſæculo 150 circiter ante Chriſtum annis, floruit Apollonius Pergæus, natus ſcilicet Pergæ civitate Pamphyliæ, inſignis Geometra, & cognomento Magnus, eo quòd conicarum ſectionum doctrinam univerſaliſſimam reddiderit. Antiqui enim ut ex Archimede patet in ſolo cono acutangulo Ellypſin, parabolâ in rectangulo, hyperbolem in obtuſangulo conſiderabant.

volebant nempe ſectiones eſſe ad unum latus perpendiculares: Apollonius autem univerſalius agens ſingulas ſectiones in omni Cono intuetur, & explicat. Hactenus quatuor ejus extabant libri, alios tres periiſſe dolebamus, qui tamen nuper recuperati, & ex Arabico in latinum verſi, Florentiæ Typis mandati ſunt.

Hujus materiæ utilitas licet non uſque adeo latè pateat, prætermitti tamen non debuit, cum Aſtrolabiorum doctrina, minorum circulorum deſcriptio in Gnomonica, multa item in perſpectiva, captotrica, & dioptrica ab ea pendeant. Baliſtica item ab ea nonnulla mutuatur, Aſtronomia denique hodierna ſuas Hypotheſes ellypticas faciat.

Apollonij Pergæi opus de ſectionibus conicis doctiſſimum eſt, magnóque Geometra dignum, utpote circa materiam difficillimam, expurgatum tamen non eſt ſatis, minutias enim quaſlibet ita perſequitur ut materiem quærere videatur, quod in re alioquin difficili, & pœnè ex ſe infinita præſtandum non fuit. In quem lapidem non ſolum identidem impingit, ſed libros nonnunquam integros hâc labe inficit. Libri verò nuper recuperati exigui ſunt momenti; præcipuè cum ultra Apollonij fines hoc ſæculo ſimus provecti. Caſtigatius, & melius qui totam Apollonij doctrinam paucis propoſitionibus complexus, multa de ſuo adjecit. De hac item materia uberius egit P. à Sancto Vincentio plus mille Propoſitionibus.

Nihil tamen de Apollonij laude detractum velim, quòd primus ſit qui hanc materiam univerſaliſſimam reddiderit, ita ut antiquorum veſtigiis inhæſerit, ſed eos poſt ſe longo reliquerit intervallo. Quamvis enim nonnulli quatuor primos Apollonij libros ad Euclidem pertinere ſuſpicentur, quos commentario Apollonius illuſtrarit, quatuorque ſuos addiderit, hæc tamen ſuſpicio ſine fundamento profertur. Si enim Archimedes qui Euclidem legerat, & citat, doctrinam conicam quatuor primis libris Conicorum contentam, notam habuiſſet, in hunc lapidem non impegiſſet, ut Ellypſin in ſolo acutangulo cono, parabolen in rectangulo, hyperbolen in obtuſangulo conſideraret, ſed univerſalius proceſſiſſet.

Quatuor primos Apollonij libros latinos fecit Joannes Baptiſta Memmius, ſed malè; meliùs Commandinus.

Scripſit & alia multa Apollonius quæ non extant, ut de ſectione proportionis, de locis planis Libros duos; de perturbatis rationibus, de tactionibus, de inclinationibus, de Cochlea. Extat apud Eutocium in Archimedem ejus Methodus inveniendi duas medias proportionales ſuâ labe non carens. Videtur etiam ſcripſiſſe de comparatione Icoſaedri, & dodecaedri eidem ſphæræ inſcriptorum, ut ex proœmio Hypſiclis patet.

Nos in tractatu peculiari parabolam, hyperbolam, & Ellypſin independenter à cono conſideravimus, eáſque deinde in cono, & Cylindro intuemur, Propoſitioneſque Apollonij præcipuas faciliori methodo demonſtravimus.

Hypſicles Alexandrinus paulò poſt Apollonium fuit, & occaſione ſcriptæ ab Apollonio Icoſaedri, & dodecaedri eidem ſphæræ inſcriptorum proportionis Proportionis decimum quartum, & librum Elementorum & decimum quintum adjecit. Librum decimum quartum quatuor Propoſitionibus abſolverat Hypſicles, decimum quintum quinque problematibus; Franciſcus tamen Pluſſates Candalla & Campanus multa de ſuo addiderunt. Ut decimus quartus non tantum contineret comparationem Icoſaedri, & dodecaedri eidem ſpheræ inſcriptorum, ſecundum ſuperficiem, & ſoliditatem; ſed etiam tria reliqua corpora regularia, nempe tetraedrum, ſeu Pyramidem æquilateram, exaedrum ſeu cubum, & octaedrum inter ſe, tam ſecundum ſuperficies, quam ſecundum ſoliditatem compararet. Decimus quintus varias inſcriptiones unius corporis intra aliud continet. Additus eſt decimus ſextus à Candalla.

Hæc materia licet ſit ingenioſa, eſt tamen ſi quæ alia inutilis ut jam dixi. Ipſe Hypſicles fateri videtur ſe eos libros à ſuo Præceptore Iſidoro accepiſſe.

Floruit eodem tempore Philo Bizantius cujus Proclus meminit in octavam primi Elementorum; affert enim aliquam ejus demonſtrationem. Extat item apud Eutocium in Archimedem, ejuſdem Methodus inveniendi duas medias proportionales ad duplicationem cubi.

Serenus Antinſenſis Philoſophus videtur his temporibus floruiſſe duos libros edidit. In primo agit de ſectione Cylindri ellyptica, oſtenditque eamdem eſſe quæ per ſectionem coni generatur: contra communem vulgi ſenſum, qui conicam cenſet ad verticem acutiorem eſſe.

In ſecundo libro agit de ſectione coni quæ fit per axem, exhibétque diverſas triangulorum ſpecies quæ ex hac ſectione oriuntur. Comparat item conos inter ſe. Opus quidem bonum & breve.

Hero Alexandrinus nonnulla Geometrica ſcripſit quæ perierunt Extat apud Eutocium ejus Methodus inveniendi duas medias proportionales. Scripſit Geometrumenon ſeu Geometriam practicam, quæ non extat. Ejus meminit Proclus ad ſecundam, & 25 primi Elementorum. De eo loquitur Pappus, & Vitruvius. Fuit Cteſibij diſcipulus, multáque Mechanica edidit.

Octavo Urbis conditæ ſæculo ſeu 50 circiter ante Chriſtum annis, Sphæricorum libros tres edidit Theodoſius Tripolita, in quibus nempe Elementa quibus proprietates planorum, & circulorum variorum in ſphæra demonſtrantur.

Hi libri extant integri, ſúntque optimi, & clariſſimi, ex quibus facilè omnia principia Geographiæ demonſtrari poſſunt; Additis tamen nonnullis de monſtrationibus, quæ ex iſtis facilè elici poſſent. Hunc tractatum multi quaſi utiliſſimum aut verterunt ex Græco in latinum, aut etiam commentario illuſtrarunt, nec nos eum in curſu noſtro Mathematico omiſimus. Scripſit & alia multa quæ non extant. Scripſit de habitationibus, de diebus & noctibus, quæ Græce in bibliotheca Regia Lutetiæ aſſervantur. Sed hæc potius ſunt Aſtronomica, aut Geographica.

Dionyſiodori qui fuit his temporibus, extat fragmentum apud Eutocium, nempe demonſtratio ſubtiliſſima, qua docet modum ſecandi ſphæram in datam rationem.

Primo Chriſti ſæculo nempe poſt Hipparchum 224 annis ante Ptolemæum 41, Floruit Menelaus

Digitized by Google

laus qui & Mileſius dictus eſt, libros 6 de ſubtenſis ſeu chordis, ſcripſit, nempe methodum conſtruendi canonis ſubtenſarum, quem nos quatuor aut quinque Propoſitionibus abſolvimus, Scripſit item tres libros de ſphæricis triangulis qui extant. Stellas Romæ, & Rhodi obſervavit, ut refert Ptolemæus. Scripſit ſphærica poſt Theodoſium. Ejus opus magis directè ſpectat trigonometriam, videtúrque Ptolomæus ex tertio Menelai ea ſumpſiſſe quæ de trigonometria ſcripſit in ſuo Almageſto; loquitur autem de ſinubus, habetque plurimas propoſitiones de proportionibus ſinuum, & laterum trianguli ſphærici, niſi forſitan multa ſuppleverit Maurolycus, qui ea Sphærica interpretatus eſt.

Secundo ſæculo à Nativitate Chriſti, floruit Ptolemæus Aſtronomus inſignis, nempe obſervabat anno 130. Hic præter Aſtronomica habet multa de canone ſubtenſarum, in ordine ad trigonometriam. Quo deinde in decurſu utitur ſolvítque triangula. Ejus tamen canon non eſt commodus, eo quod fractiones adjunctas habeat. Opus hoc eſt valde exiguum, nec continet omnia, quæ ſunt neceſſaria ad ſolutionem plerorúmque triangulorum demonſtrandam. Dicam rurſus de illo in *Aſtronomica*. Imperfecta igitur erat eo tempore Trigonometria.

Tertio Chriſti ſæculo vixit Porphyrius Philoſophus. Nonnulla ſcripſit Geometrica quæ non extant. Ejus enim meminit Proclus ad 14, 18 & 20 Propoſitiones primi Elementorum, ejuſque demonſtrationes. Idem eſt qui Iſagogen ſcripſit de quinque univerſalibus.

Quarto Chriſti ſæculo, fuit Nicomedes qui ſcripſit de lineis conchoidibus, quibus nempe duas medias proportionales inveniret, & cubum duplicaret, angulum datum trifariam ſecaret; ſed cum hæ lineæ conchoides non deſcribantur geometricè, ſed inſtrumento egeant à ſtrictâ Geometriâ alieno, ejus conatus irritus cenſetur. Illius meminit Eutocius, Pappus. Clavius item in Geometria practica ejus doctrinam refert.

Eudemus itẽ dicitur à Proclo hoc tẽpore ſcripſiſſe Geometricas enarrationes, & libellũ de angulo.

Menelai Alexandrini demonſtrationem affert Proclus ad 25 primi Elementorum.

Geminus Rhodius Procli Diadochi præceptor, Græce ſcripſit de ortu linearum Spiralium, Conchoidarum, Ciſſoidarum, & de Mathematic. quæ dicuntur aſſervari in Bibliotheca Vaticana Græco-latina interprete Edonę Stildaria. Hæc tamen non ſunt magni momenti, eò quòd talium linearum deſcriptio, non ſit Geometrica. Circa hæc tempora fiunt irruptiones Barbarorum in Romanum Imperium, ceſſátque litterarum ſtudiũ.

Quinto Chriſti ſæculo Diocles modum aliquem excogitavit duas medias proportionales inveniendi, & ſecandi ſphæram in datam rationem. Utrumque refert Eutocius deſumptum libro illius de Pyriis, ſeu igniariis.

Sporus pariter Nicenus problema duarum mediarum proportionalium tentavit. Ejus pariter methodum refert Eutocius in Archimedem.

Hoc eodem quinto Chriſti ſæculo Proclus Diadochus qui Athenis Platonicæ ſcholæ præfuit, ſcripſit commentarium in primum Euclidis. Zonaras fabulatur eum Valentis naves ſpeculis uſtoriis combuſſiſſe.

Commentarius Procli in primum Euclidis librum eſt exigui momenti: nam ejus media pars eſt de Matheſi in genere, cujus varias tradit diviſiones. In ſecunda parte profert ut plurimùm leves Annotationes in Propoſitiones, & demonſtrationes primi Elementorum, habétque rationes cur ſub his potius terminis quàm ſub aliis concipiantur, varios item caſus proſequitur, aliáſque minutias, quæ cuique advertenti facile in mentem venire poſſunt. Habet tamen aliquas demonſtrationes proprias, ſed paucas, quas retulit Clavius. Hunc Franciſcus Barocius Patricius Venetus magna cura, & diligentia latinum fecit.

S. Auguſtinus de principiis Geometriæ ſcripſit, ſed tantùm in univerſum.

Marinus Philoſophus Neapolitanus Procli diſcipulus protheoriam edidit in data Euclidis, in qua bene explicat uſum hujuſmodi tractatus, & mentem Euclidis.

Demetrius Alexandrinus lineares aggreſſiones compoſuit.

Phylo Tyanæus ſcripſit de lineis per implicationem genitis, & de aliis variis ſuperficiebus, utrumque refert Pappus, ſed hæc nullibi extant.

Pappus Alexandrinus hoc tempore floruit, edidítque mathematicas Collectiones. Videntur duo primi libri periiſſe. Tertio varias profert ſolutiones problematis Deliaci, Eratoſtenis, Nicomedis Heronis, & ſuum tum aliud proponit problema, nempe Tres medietates ſumere, ſeu tres medias proportionales, arithmeticè, geometricè, harmonicè. Tertium intra triangulum ducere duas lineas majores duobus lateribus; exinde in data ſphæra, cubum tetraedrum, octaedrum, icoſaedrum, dodecaedrum deſcribit.

In quarto primò agit de lineis irrationalibus, tum de circulis ſe tangentibus variíſque lineis. Tertio de ſpiralibus. Quarto de Conchoide Nicomedis ad duplicationem cubi. Quinto de Quadratrice Dinoſtrati. Sexto de ſectione anguli in tres partes.

In quinto, initio nonnulla habet ad iſoperimetrorum doctrinam utilia etiam ad circularium, tum de comparatione ſuperficiei ſphæræ, cum ſuperficie Cylindri; & coni, tum de comparatione ſoliditatum ſphæræ, Cylindri, coni & corporum regularium.

In ſeptimo libro 1. demonſtrat aliter nonnullas propoſitiones tertij Theodoſij circa declinationes, & aſcenſiones rectas: habet item nonnulla deſumpta ex Euclidis phænomenis. Totúſque liber ad ſphærica pertinet, & proprietates circulorum ſphæræ.

In ſeptimo libro 1. diſtinguit duplicem methodum, compoſitivam, & reſolutivam; recenſet autem triginta libros antiquorum, quorum pleríque non extant pertinentes ad reſolutivam; Ut data Euclidis. Apollonij rationis diviſio, & ſpatij. Ejuſdem inclinationum. Tum agit de rectangulis, de lineis tangentibus circulum, exinde de aſymptotis hyperboles.

In octavo libro nonnulla initio proponit ad Mechanicam ſpectantia, agit item de virtutibus motricibus. In hoc opere multa continentur ſcitu digna permixta multis inutilibus. Optimum foret ſi expurgaretur. Denuo typis impreſſum eſt Bononiæ 1659.

Theon Alexandrinus Commentarium in tredecim

cim libros Euclidis edidit. Nam 14 & 15 ſunt Hypſiclis Alexandrini. Hoc opus latinum fecit Bartolomæus Zambertus Venetus, cujus optima eſt verſio. Petrus Ramus exiſtimat Euclidem ſolos titulos, & figuras compoſuiſſe, Theonem verò demonſtrationem addidiſſe. Contradicunt Buteo Commandinus & alij, putántque Euclidem demonſtrationes compoſuiſſe, quas poſtea Theon ſuis diſcipulis tradiderit. Quia Pappus comparat aliquam demonſtrationem Euclidis, cum alia Apollonij. Item Proclus, & Boetius nonnullas demonſtrationes Euclidis referunt prout in ipſo jacent. Euclides item ſuo tempore habebatur ut ſummus Geometra, cum Plato conductores aræ Deliacæ ad eum remiſerit. Certum eſt autem inter Euclidis opera vetuſtiſſima eſſe Theonis commentarium. Liber elementorum Euclidis multum debet Theoni à quo eſt in ordinem digeſtus, & etiam auctus.

Hypatia Theonis Alexandrini filia præter alia ſcripſit in Conica Apollonij commentarium qui non extat. Floruit ſub Arcadio, & Honorio.

Eutocius Aſcalonita poſt Pappum & Theonem quos citat, floruit. Edidit Commentaria in Conica Apollonij, & in Archimedis Tractatum de ſphæra, & Cylindro, de circuli dimenſione, & de æquiponderantibus. In hoc Commentario multa de ſuo addidit, locaque horum authorum difficilia clariora reddidit, additis Lemmatibus quibus robur demonſtrationibus addit. Retulit item plurimorum authorum Commentationes circa Problema deliacum. Opus hoc optimum eſt, & ſolidum.

Sextum Chriſti ſæculum primò profert Boetium virum Conſularem, qui primum Euclidis librum latinum fecit, nempe ſolos titulos, & figuras tradidit. Habet nonnulla Geometrica quæ ſunt ita parvi momenti, ut in iis legendis tempus malè impendatur.

Caſſiodorus item vir Clariſſimus ſcripſit nonnulla Geometrica præter Arithmeticam, Muſicam, Aſtronomiam, & de Paſchali computo.

Extat apud Clavium in Geometria practica Joannis Grammatici cognomento Philoponi methodus duas medias proportionales inveniendi.

Heron alius ab Alexandrino inter alia multa Geodeſiam compoſuiſſe dicitur quam dicunt extare. Scripſit & de Machinis bellicis. Alter Heron fuit Alexandrinus & floruit tempore Apollonij.

Septimo Chriſti ſæculo Iſidorus Hiſpalenſis Epiſcopus in ſuis libris de Originibus, omnium Mathematicarum compendia inſerit, ſed quæ ſunt ita compendioſè tradita ut ex his nihil emolumenti percipi poſſit.

Martianus Capella inter alia multa, Geometrica ſcripſit.

Octavum ſæculum nullum Geometram protulit.

Nono Chriſti ſæculo apud Arabas Mathematicæ diſciplinæ floruerunt. Nullus tamen eorum de Geometria ſcripſit excepto Gebro qui in ſuo libro Aſtronomico nonnulla tradit de triangulis ſphæricis, quæ tamen hanc doctrinam non multum promovent.

Circa hæc tempora Michael Pſellus Author Græcus floruit Michaelis Ducæ tempore, qui filiorum Imperatoris præceptor fuit. Hic innumeros pene libros de omni fere materia conſcripſit. Inter alia Quadrivium, nempe de quatuor Mathematicis diſciplinis Geometria, Arithmetica, Muſica, Aſtronomia, ſed per compendium. Quod igitur ad Geometriam ſpectat in hoc opere nonnulla tantum docet circa triangula, parallelas, & parallelogramma, deſumpta ex primo Euclidis, tum de augmento figurarum, etiam ſolidarum. Habet item nonnulla de incommenſurabilibus, ſed ita breviter ut primas tantum notiones tradat. Si in aliis materiis ita egit, facilè fuit multos libros ita edere. Hoc opus Xylander vertit, & annotationibus illuſtravit Baſileæ in octavo 1556.

Extant in Bibliotheca noſtra Pariſienſi Euclidis Elementa Arabicè ſcripta, in quibus habentur multa diverſa ab iis quæ in communibus Euclidis Elementis continentur, ut inter alia ex figuris fit manifeſtum, & inter alia videtur undecimum axioma eſſe demonſtratum, quod aſſeruit Clavius nempe ſe audiviſſe in Codicibus Arabicis axioma illud demonſtrari.

Ex his manifeſtum fieri poteſt quem progreſſum habuerit Geometria uſque ad præcedens ſæculum. Tota enim continetur Elementis Euclidis, & Hypſiclis, Archimedis operibus de ſphæra, & Cylindro, arenario, dimenſione circuli, de ſpiralibus quæ ad quadraturam pertinent, item conicis Apollonij, Theodoſij ſphæricis, nonnullis quæ ad Trigonometriam ſpectant, quæ tamen erant valdè imperfecta, nonnullis item praxibus circa Deliacum Problema. Neque aliud Geometricum ab antiquis accepimus. Ab eo autem tempore trigonometriam perfectiſſimam reddidimus per logarithmos. Geodeſiam perfecimus variis inſtrumentis, ut regulis proportionalibus aliiſque. In Conicis quantum ſimus provecti oſtendit Mygdorgius & P.A ſancto Vincentio. In Geometricis item novum P. Guldini inventum de centro gravitatis ad menſurationem omnium rotundorum nova indiviſibilium methodus, totam Archimedis doctrinam faciliorem reddidimus; de quibus omnibus ſuo loco dicemus.

Decimo Chriſti ſæculo Bagdadinus Arabs ſcripſit librum qui extat de diviſione figurarum, quem nonnulli ſuſpicantur eſſe librum Euclidis Arabico tranſlatum. Certum eſt enim Euclidem de diviſionibus ſcripſiſſe.

Ben Muſa ſcripſit de figuris planis & ſphæricis.

Circa hæc tempora Alchindus Arabs libellum reliquit ſex quantitatum, quo nihil eſt ingenioſius ſi Cardano credimus, qui inter 12 orbis miracula decimum locum Alchindo aſſignat.

Undecimo Chriſti ſæculo Campanus Gallus Euclidem ex Arabico latinum fecit, ſcholiiſque illuſtravit. In pleriſque eandem affert demonſtrationem, ac Theon. Videtur tamen melius explicare, forſitan eo quod ejus phraſis, noſtro modo loquendi ſit accommoda, & Theonis phraſis à noſtra diſſideat. Multa tamen de ſuo addit. Utriúſque commentationes Theonis & Campani, ſimul per ſingulas propoſitiones typis editæ ſunt Pariſiis anno 1516.

Adelardus Anglus Monachus idem præſtitit.

Duodecimo ſæculo Theon Smirneus loca Mathematica Platonis Græcè interpretatus eſt. Liber quidem ad intelligendum Platonem utilis; in quo quæ traduntur Mathematica ſunt vulgaria, ita ut mediocris Mathematicus in eo vix quidquam de novo addiſcat. Hunc Iſmael Bullialdus

lialdus

liaſdus Pariſienſis Mathematicus ex aliis ſcriptis ſatis notus optimè latinum fecit.

Albertus Magnus ſcripſit quatuor libros de Geometria, Arithmetica, Muſica & Aſtrologia.

Decimum tertium ſæculum Aſtronomos quidem, Geometram nullum dedit, ſicut & decimum quartum.

Decimo quinto ſæculo.

Joannes de Monteregio inter multa opus de triangulis edidit tam de rectilineis, quam ſphæricis.

Idem authorum Græcorum fere omnium opera, nempe Archimedis, Apollonij, Sereni,& aliorum in latinum verſa typis edi curavit.

Eodem tempore Frater lucas de Burgo ſancti ſepulchri Minorita de Geometria, & de divina proportione ſcripſit.In ſuo tractatu Geometrico multa bona habet præcipue circa ſuperficierum dimenſiones.

14-8. Nicolaus De Cuſa S. R. Ecl. Cardinalis tituli ſancti Petri ad vincula, Tractatum edidit de mathematicis complementis; in quo Archimedis veſtigiis inſiſtens circa dimenſionem circuli, ejus quadraturam tentat, irrito tamen conatu; quæ profert ſunt bona. Egit de transformatione figurarum, de recti & curvi menſura. Cenſet Faber Stapulenſis Mathematicas diſciplinas profundius eo penetraſſe neminem, cui opinioni non ſubſcriberem niſi cum addito, ſuo forſitan tempore. Habet & alibi multa mathematica exigui momenti.

Circa annum 1480 Joannes Vernerus ſcripſit de Elementis Conicis, de modis duplicandi cubum, de ſectione ſphæræ in data ratione, & quatuor libros de triangulis.

Sub annum 1490 Hermolaus Barbarus Aquileienſis Patriarcha, poſtea Cardinalis inter alia multa quæſtiones Geometricas edidit.

Initio decimi ſexti ſæculi 1500 claruit Albertus Durerus, ac Geometricarum inſtitutionum libros reliquit. Picturam illuſtravit.

Eodem tempore Bartolomæus Venetus in Græcis eruditiſſimus Euclidem ex Græco latinum fecit, eo quod Campani verſionem à Græco longius abire videret; ſed cum Matheſin neſciret, ſæpe hallucinatus eſt. Genius fuit hujus ſæculi ut in vertendis authoribus toti eſſent, fidelitatem potius ſectarentur quam ſcientiam promoverent: Quod in materia ſcientiarum eſt nugari, totum enim Euclidem ſus déque verterem ſi breviori methodo & clariori, eadem demonſtrare poſſem. Neque enim ſenſus authorum tam quærendus eſt, quam res ipſæ; neque tam quod ſignificare voluerunt, quam quod ſignificare debuerunt.

1503 Lucas Gauricus Neapolitanus tetragoniſmum, ſeu circuli quadraturam per Campanum, Archimedem & Boetium edidit, ſed ita malè explicatam ut nullam vim demonſtrandi obtineat. Quare ſatius eſt eadem in propriis authoribus legere, quam in hoc opere.

1507 Carolus Bovillus Veromanduus Geometricum introductorium compoſuit in ſex libros diviſum. In primo agit de magnitudinibus, & earum circumſtantiis. In ſecundo de conſequentibus, contiguis, & continuis. In tertio de punctis. In quarto de lineis.Quinto de ſuperficiebus. Sexto de corporibus.

Opus nullius momenti quod certas definitiones, diviſionéſque continet, prætereáque nihil. Habetur ejuſdem quadratura malè explicata, & falſa. Item introductio ad perſpectivam ejuſdem rationis.

1508 Frater Lucas Patiolus Burgenſis Minorita tractatum edidit geometricum Italicum de menſuratione ſcilicet, & productione corporum ſphæræ inſcriptibilium. In prima parte multa corpora metitur methodo Algebrica; in qua eſſent multa utilia, niſi hæc corpora rarò admodum occurrerent. In ſecunda parte agit præcipuè de linea diviſa ſecundum mediam & extremam rationem, quam vocat divinam proportionem, quaſi natura hujuſmodi proportionem obſervaret, eáque ad ſuos effectus præſtandos uteretur. Eam proportionem, productioni, ſeu formationi, non tantum corporum regularium nempe unica ſpecie polygoni conſtantium, ſed etiam aliorum ſphæræ inſcriptibilium applicat. In hoc tractatu multa ſunt bona, & geometrica, non tamen tanto præconio digna, quanto ſuam divinam proportionem extollit, præcipue cum ut dixi nunquam ea corpora metienda occurrant.

Anno circiter 1516 Fredericus Commandinus quindecim libros Elementorum Euclidis latinos fecit, unà cum ſcholiis antiquis Procli, & aliorum, quibus addidit commentationes proprias. Opus quidem bonum eſt, meo tamen judicio nimis prolixum. Tyronem enim diutius in minutiis detinet dum ſcrupuloſius ea notat, quæ cuíque in mentem venire poſſunt.

Habet & data Euclidis, & fragmentum opuſculi Euclidis de levi, & ponderoſo; ſed ita mutilum, ut ex eo nihil elici poſſit, niſi quod videatur proponere principium univerſaliſſimum Mechanices, quò nempe uſi ſumus, Quod plus movetur majores habet vires.

1520 claruit Petrus Cirvellus. Docuit Matheſin in Academia Complutenſi; fecit notas in Euclidem, & compendium quatuor Mathematicarum diſciplinarum.

1626 Nicolaus Tartalea Breſſianus docuit Venetiis; & Geometrica de numeris, & menſuris pluribus eſt proſecutus Italicè.

In primo libro definitiones primi Elementorum Euclidis affert, multáſque notationes adjungit.

In ſecundo continentur methodi metiendarum arearum, ſecundum uſum variarum regionum.

In tertio ſquadræ fabricam, & uſus in reducendis ſuperficiebus ad rectangulas.

In quarto de ſoliditate, & modis metiendi, fœnum, ligna in variis regionibus.

In quinto metitur omnia ædificia, & foſſas.

Quarta pars ad numeros, & praxin reducit figuras tam ſuperficiales quam ſolidas.

In primo libro poſt aliquas libri quinti Euclidis definitiones triangula metitur etiam ſine perpendicularibus.

In ſecundo poſt definitiones variorum ſolidorum docet methodum metiendorum cuborum, priſmatum, pyramidum.

In tertio profert doctrinam Archimedis de ſphæra, & Cylindro, & qua nonnullas praxes elicit ad menſurationem eorum corporum.

Quinta pars docet methodum perficiendorum problematum regulâ & circino, eorum præcipuè quæ in Euclide continentur.

Primo libro, ſex priorum Euclidis problemata, & alia multa perficit, duas medias proportionales invenit, ovalem figuram deſcribit, methodum tradit expendendi an duæ lineæ ſint proportionales.

Secundo ſolvit problemata librorum Euclidis 11, 12, 13 & 15, & alia multa, nempe unum corpus ab alio ſubtrahit.

Tertio eâdem circini aperturâ multa ſolvit problemata, præcipuè nonnulla à Cardano propoſita circa decimum Euclidis.

Idem author commentarium edidit Italicum in 15 libros Euclidis, in quo præter demonſtrationes clarè explicatas, adjungit aliquas notationes, & explicationes de ſuo multum ad claritatem conferentes.

Omnia Tartaleæ opera optima ſunt, & utilia.

1630 floruit Orontius Finæus Delphinas Regis Chriſtianiſſimi Franciſci Primi Mathematicus. In 6 priores Euclidis libros commentarium edidit, in quo quantum potuit mentem Euclidis explicuit ſatis clarè, nullam de ſuo demonſtrationem adjecit. De Geometria libros duos egit, item de circuli quadratura, de deſcriptione figurarum regularium; quæ quidem bona ſunt. Scripſit & alia in aliis materiis. Hunc Nonius in multis reprehendit. Non videtur multum promoviſſe Geometriam. Dicemus de eo in aliis materiis.

1532 Franciſcus Maurolycus Abbas Meſſanenſis Euclidis libros 13, 14 & 15 in meliorem ordinem redegit. Libro decimotertio, unam Propoſitionem adjecit de ſuo neceſſariam, & duas ex ſequenti libro tránſtulit. Libro decimo quarto Propoſitiones 25 adjecit. Decimum quintum intactum reliquit, totámque hanc doctrinam clariorem reddidit, & geometricè id præſtitit. Quæ omnia ſolida quidem ſunt, ſed meliora forent, ſi in materia utiliori id præſtitiſſet. Typis mandatus eſt Venetiis inquarto.

1537 Joannes Baptiſta Memus Patritius Venetus, & in ea Urbe Matheſeos Profeſſor publicus, Apollonij Conicorum libros quatuor latinos fecit, ſed malè; Ejus enim verſio non eſt latina, ideóque difficilior.

1544 excuſa ſunt Baſileæ Archimedis opera omnia Græcè, & latinè unà cum Eutocij Aſcalonitæ Commentariis in eoſdem libros Archimedis Græcè & latinè.

1550 Joannes Scheubelius in Academia Tubingenſi Euclidis Profeſſor ordinarius commentarium edidit in 6 priores Euclidis. In quo affert titulum Propoſitionis Græcè, quem poſtea explicat, & demonſtrationes adjungit. Nihil habet peculiare, nec eſt ſatis clarus, ſed confuſus; nonnunquam enim Propoſitiones efficit nimis in abſtracto.

1554 prodiere Joannis Buteonis Delphinatis opera Geometrica; De menſura arcæ Noe, de ſublicio ponte Cæſaris, confutatio quadraturæ circuli Orontij Finæi. Habet nonnulla de duplicatione cubi, de fluentis aquæ menſura. De libra & ſtatere.

In hoc opere ſunt multa ab Antiquis eruditè petita: quæ verò ad Matheſin ſpectant ſunt exigui momenti.

1556 Orontius Finæus Delphinas Mathematicus Regius libros 4 edidit, de rebus Mathematicis hactenus deſideratis. In primo agit de duarum mediarum proportionalium inventione, variis modis, novis, ſuo tamen nævo non carentibus, in numeris idem efficit. In ſecundo rationem circumferentiæ ad diametrum, & circuli quadraturam tentat. In tertio latus polygoni circulo inſcripti, & reductionem ad circulum. In quarto, ſolidorum tranſmutationem, & ſphæræ cubicationem explicat, proprietates lineæ ſectæ extremâ ac mediâ ratione; in quibus ad geometricam præciſionem non pervenit, quamvis utilia ſint quæ proponit.

Eodem anno Xylander vertit in latinum Pſelli authoris Græci quadrivium & annotationibus illuſtravit. Baſileæ in octavo 1556.

1557 Jacobus Peletarius Cenomanus Commentarium edidit in ſex priores libros Euclidis, in quo novas demonſtrationes adjecit ad decimam tertiam tertij, oſtendit contactum circulorum non eſſe quantitatem, & paralogiſmos inde ortos ſuſtulit, principia clarè explicuit, quinti libri definitiones geometricè declaravit. Euclidis verba non religiosè reddidit ſed ſententiam. Diu vixit Pariſiis. Opus bonum & ſolidum. De contactu circuli altercatus eſt cum Clavio. Item ſcripſit de duabus lineis in eodem plano non parallelis, & non concurrentibus.

1558 Federicus Commandinus Urbinas, de quo ſupra, aliquot tractatus Archimedis in latinum vertit, nempe circuli dimenſionem, de lineis ſpiralibus, de quadratura parabolæ, de conoidibus, & ſphæroidibus. Ubi opus fuit commentationes addidit: Omnia optimè.

Eodem anno 1558 Gemmafriſius Medicus, & Mathematicus, ſcripſit de radio Aſtronomico, ſeu de cruce geometrica. Habet in hoc opere multa parerga, quæ ad hoc inſtrumentum non pertinent. Plurima tamen ſunt utilia ad menſurationes. Huic operi adjecta eſt brevis tractatio Joannis Spangebergij, & Sebaſtiani Munſteri de ſimpliciori baculo, quem baculum Jacob nominant: In hoc opere ſunt praxes utiles licet communes, Pariſiis in octavo 1558. Item in quarto Antuerpiæ 1584.

Eodem anno 1558 Joannes Pena Regius Mathematicus Pariſiis verſionem Sphæricorum Theodoſij, è Græco in latinum ſermonem edidit. Ratio inſtituendæ hujus verſionis fuit, quod aliæ verſiones quæ tunc temporis habebantur fuerant ex Arabico deſumptæ. Arabes autem Theodoſij Sphærica corruperant, multíſque Propoſitionibus inutilibus auxerant, hoc eſt ferè quarta parte. Demonſtrationes item difficultatibus variis implicuerant. Quare ut argumentum alioquin utiliſſimum ſuo ſplendori reſtitueret, hanc verſionem aggreſſus eſt, quam diligentiſſimè perfecit.

Eodem anno 1558 Maurolycus Abbas Meſſanenſis inſignis Mathematicus de quo jam ſuprà, inter alia, edidit Sphærica Theodoſij; ſed ejus verſio, ſive interpretatio difficilior eſt ea quam poſtea edidit Clavius. Phraſis latina non eſt, paríſque confuſionem. Idem edidit ejuſdem opuſculum de habitationibus 12 Propoſitionibus comprehenſum, in quo agit de proprietatibus habitantium ſub æquatore, polo aliíſque locis.

Edidit item Menelai Sphæricorum libros tres, ex vetuſtiſſimis membranis deſumptos, quos in multis ſe ſuppleviſſe aſſerit.

1561 Joannes Regiomontanus Trigonometriam

triam edidit libris quinque comprehenſam ; in quorum duobus primis agit de ſolutione triangulorum rectilineorum. Tertius eſt ad triangula ſphærica Iſagogicus, multáque habet ex Theodoſio deſumpta. In quarto proprietates triangulorum ſphæricorum, nonnulláſque eorum ſolutiones tradit. Item Methodum conſtruendi canonis ſinuum. Hæc trigonometria bene eſt demonſtrata : in multis tamen eſt difficilior, nec ſatis compendioſa. Poſt ipſum enim inventæ ſunt praxes aliæ faciliores. Opus tamen optimum fuit ſuo tempore.

Anno 1565 Chriſtianus Herlinus verſionem & Commentarium edidit ſex priorum librorum Euclidis ; Conradus Daſypodius reliquorum. Ratio Commentarij hujus in eo conſiſtit, ut notet quot in unaquaque Propoſitione ſint ſyllogiſmi, & quomodo in forma poni poſſint. Quæ notatio eſt exigui momenti, demonſtrationéſque nimis prolixas efficit. In fine oſtenditur nexus earumdem Propoſitionum. Totum opus inutile.

1566 Fredericus Commandinus Urbinas in latinum vertit quatuor Apollonij Pergæi libros de Conicis, unà cum Pappi Alexandrini Lemmatibus, & Eutocij Aſcalonitæ Commentariis in ſingulas Propoſitiones, quibus annotationes ſuas adjecit. Optima eſt verſio, opuſque clarum quantum id materia permittit. Vertit item Sereni Antinſenſis Philoſophi libros duos de ſectione Cylindri, & coni, eâdem claritate, cui commentarium addidit de ſuo.

1567 Conradus Daſypodius Profeſſor Scholæ Argentinenſis, Elementa Geometriæ compoſuit, in quo libro definitiones ſolas tradit Græcè, & latinè. Argentorati, in octavo 1567.

1572 Jacobus Peletarius Medicus, & Mathematicus Pariſiis, opuſculum edidit de uſu Geometriæ triginta problematis comprehenſum. Sunt autem problemata communia ex Euclide ut plurimum deſumpta. In quarto Pariſiis 1572.

1575 Joannes de Merliers Profeſſor Regius Matheſeos Pariſiis, Opuſculum Gallicum edidit, cum titulo *La pratique de Geometrie*. In quo ſcilicet docet methodum metiendi omnia rectilinea per reductionem ad triangula, quæ demiſſa perpendiculari metitur. Nihil habet niſi commune.

1577 Joannes Nicolaus Stupanus Medicus explicuit uſum & compoſitionem inſtrumenti ad omnes menſurationes utiliſſimi, nempe conſtantis tribus regulis in partes æquales diviſis : Hujus dicit inventorem Abelem Fullonio Henrici ſecundi Gallicarum regis Mathematicum. Hujus inſtrumenti uſum dedi in Geometria practica. Huic acceſſit Tractatus Frederici Delphini de æſtu maris, in quo rationem phyſicam vix attingit.

1578 Franciſcus Fluſſates Candalla ex illuſtri Fluſſatum familia ſatis nota apud Gallos, Commentarium in quindecim libros Elementorum Euclidis edidit. In quo veram & germanam Geometriæ intelligentiam reſtituit. Addidit de ſuo decimum ſextum, decimum ſeptimum, & decimum octavum de ſolidorum corporum comparatione,& inſcriptionibus variis. Opus perſpicuum, & optimum ſi materia foret utilior.

1579 Prodiit Vietæ Canon Mathematicus ſeu ad triangula, cum libro ſingulari Vietæ univerſalium inſpectionum ad Canonem Mathematicum ; in quo ita breviter res indicat, ut plus temporis impendendum ſit in conjiciendo quid intendat quam tota doctrina in eo contenta mereatur ; Ideóque flocci facienda, ut alia omnia quæ ſunt obſcura. Videtur autem Joachimus Rheticus ex mente Vietæ ſuum canonem, & trigonometriam concinnaſſe : Cujus methodus inferior eſt communi.

1581 Mauricius Breſſius Gratianopolitanus, Mathematicarum Lutetiæ Profeſſor metrices Aſtronomicæ libros quatuor edidit, ſeu potius Trigonometriam. In primo libro breviter proponit praxes additionis, ſubtractionis, multiplicationis, & diviſionis Aſtronomicæ, hoc eſt methodum has regulas exercendi circa ſexagenas graduum, gradus, minuta, & ſecunda. In ſecundo docet methodum conſtruendorum ſinuum, quos conſtituit cum fractionibus, nempe ſinus ipſos dividit quaſi in gradus, minuta, & ſecunda, quæ ratio commoda non eſt, ſed reddit regulas multiplicationis, & diviſionis nimis difficiles. Docet item methodum conſtituendi canonis adſcriptarum ſeu tangentium,& hypotenuſarum,ſeu ſecantium : per quam canonem exhibet,ſed pariter fractionibus implicatum. In tertio libro dat Trigonometriam rectilineam. In quarto ſphæricam.

Hæc Trigonometria bona eſt, videtúrque benè promoviſſe hanc partem, cùm habeat Propoſitiones optimas, & claras.

1583 Thomas Finkius Flenſpurgenſis edidit Geometriæ rotundi ſeu circuli libros 14 ; in quibus collegit, quæcumque in libris Euclidis ad circulum pertinent.Habet item nonnulla ad Geometriam ſpectantia, quæ paſſim alibi reperiuntur. Unde totum opus eſt exigui momenti.

1584 Joannes Baptiſta Benedictus Patritius Venetus in fine ſui operis multa habet Miſcellanea Geometrica, quorum nonnulla ad ſectiones præſertim pertinentia bona ſunt, ſed inordinata.

Eodem anno 1584 Simon du Chene Dolenſis, edidit Gallicè opuſculum ; *Quadrature du Cercle, ou maniere de trouver un quarré eſgal à un Cercle donné*. Opus male digeſtum,ageometricum, & nullius momenti.

1585 Nicolaus Tartalea Breſſianus Italicè Euclidem interpretatus eſt ; quæ interpretatio nihil habet peculiare, niſi quod Euclidem benè reddit.

1586 Franciſcus Barocius Jacobi filius, Patritius Venetus, opus inſtituit ex conicis deſumptum, in quo Problema geometricum de lineis ad ſeſe invicem ſemper accedentibus, & nunquam concurrentibus, tredecim modis abſolvit. Utitur autem plerúmque aſymptotis hyperbolarum. Opus quidem geometricum, ſed utilitatis modicæ.

1587 Prodiit nova Geometria Italica Franciſci Patricij, in qua cum ordine mirabili, viâque faciliori Matheſes demonſtrare intendit. Opus 15 libris comprehenſum ; primum tamen Euclidis librum non excedens. Ideóque res eſt nullius momenti, in pleriſque enim nihil probat. In quarto Ferrariæ.

Anno 1588 prodiere Pappi Alexandrini Collectiones à Frederico Commandino Urbinate in latinum verſæ, & commentariis illuſtratæ. Quod ad Commandinum ſpectat opus eſt optimum. Impreſſum item eſt Bononiæ anno 1659.

1591 Philippus Lansbergius Triangulorum Geometriæ libros quatuor edidit, in quibus nova methodo

Digitized by Google

methodo triangulorum doctrinam explicat. In primo habet Theoremata neceſſaria ad conſtructionem Canonis ſinuum, & tangentium,quem in ſecundo libro conſtruit. In tertio triangula rectilinea, in quarto ſphærica ſolvit.

Hæc trigonometria clara eſt, facilis, ab eo tamen tempore ulterius provecta eſt hæc doctrina, cui nempe additæ ſunt praxes faciliores quam plurimæ.

1593 Adrianus Romanus Lovanienſis Medicus, & Mathematicus, edidit ideæ Mathematicæ partem primam ſive methodum polygonorum, nempe qua modum tradit metiendorum facile laterum, & arearum unà cum circuli quadratura. Hoc opus demonſtrationes non habet, ſed tantum praxes, ideóque ut plurimum eſt inutile, cum jam ſupponat te ſcire id quod docet.

1594 Joſephus Scaliger Cyclometrica Elementa duo edidit. In primo agit de perimetro circuli, in ſecundo de potentia circuli. Voluit autem in hoc opere ſolvere problema de circuli quadratura ut in appendice apparet. Quàm vero ab ea longe abſit omnibus ſit manifeſtum, cum velit dodecani ambitum majorem eſſe circumferentia circuli cui inſcribitur, quod non probabit unquam cum falſum ſit; ideóque totum hoc opus ſicut & alia multa ſimilia, in nihilum recidit.

1594 prodiit Franciſci Vietæ munimen adverſus novam Cyclometriam ſeu Ἀντίπαθον Scaligeri. Nempe in hoc opere facile demonſtrat Cyclometriam à Scaligero promotam eſſe.

Prodiit ejuſdem opuſculum quo ſolvit Problema ab Adriano Romano Lovanienſi magna pompa omnibus Mathematicis propoſitum. Solvit autem pluribus modis. Eſt autem problema Algebricum.

3 Ejuſdem Pſeudomeſolabum, adverſus Meſolabum Scaligeri. Opus exiguum peſſime explicatum.

1594 Cornelius de Judæis Antuerpianus opuſculum edidit figuris bene ornatum, de uſu quadrantis, & quadrati Geometrici, in quo præter figuras nihil eſt quod commune non ſit, & cuique obvium.

1595 Bartolomæus Romanus Protheum militarem Italicè edidit in tres libros diviſum.

In primo deſcribit fabricam variorum inſtrumentorum Geometricorum. In uno inſtrumento conjungit quadrantem, ſemicirculum, quadratum Geometricum, Radium Græcum ſeu regulas parallacticas, Crucem Geometricam, annulum Cylindrum, Globum cœleſtem in capulo pugionis.

In 2 & 3 uſum iſtius inſtrumenti aperit, quo nempe figuræ omnes geometricæ delineantur, inſtrumenta item Perſpectivæ, Picturæ, Architecturæ; docet item nonnullas praxes ad navigationem, & bellum ſpectantes.

In hoc opere ſunt multæ ingenioſæ praxes, nempe uſus iſtorum inſtrumentorum, quorum demonſtratio per ſe patet. Neapoli in quarto 1595.

1596 prodiit Opus Palatinum de triangulis, à Georgio Joachimo Rhetico cœptum, & à Valentino Othone Principis Palatini Friderici 4 Electoris Mathematico perfectum. Plurimos continet tractatus. Primus tractatus eſt Georgij Joachimi Rhetici, libroſque tres complectitur: In primo præponit lemmata;in ſecundo quærit chordas, & ſinus; in tertio calculum init. Sequitur liber unus de triquetris linearum rectarum. Exinde tractatus de triangulis Globi cum angulo recto, libris duobus comprehenſus. Denique tractatus de triangulis ſphæricis obliquangulis, libris quatuor. Additæ ſunt tabulæ ampliſſimæ. Opus hoc male digeſtum, & male explicatum, licèt fuſiſſime, in quo trigonometriam vix quiſquam addiſcat. Uſus canonis difficillimus, nec comparandus cum canone communi. Videtur hoc opus deſumptum eſſe ex Vieta.

1597 prodiit Gallicus tractatus de graphometro inſtrumento cujûs ope diſtantias metiri poſſumus, cæteraſque operationes Geodeticas perficere. Author eſt Philippus Danfrié. Inſtrumentum optimum eſt plurimarumque praxium capax. Pariſiis in quarto 1597.

1597 Adrianus Romanus Eques auratus Matheſeon Profeſſor in Academia Vurceburgenſi opuſculum edidit, cujus titulus, *In Archimedis circuli dimenſionem analyſis*. In hoc opere defendit Archimedem contra Joſephum Scaligerum qui Archimedem reprehenderat, quòd in ſuâ dimenſione circuli, numeris eſſet uſus. Addidit & exercitationes Cyclicas in eundem Joſephum Scaligerum, Orontium Finæum, & Raymarum Urſum, in quibus optimè demonſtrat Orontium non inveniſſe quadraturam circuli, & alios item in multis deceptos eſſe.

1599 Schonerus Petri Rami Veromandui Geometriam 23 libris comprehenſam edidit. Quatuor primi definitiones,& diviſiones communes continent. Quintus de lineis, perpendicularibus & parallelis. 6 7 & 8 de triangulis. 9, Geodeſiam habet ad menſurationem linearum, & 10, 11 & 12 de parallelogrammis rectangulis, & quadratis. 13 doctrinam Secundi Euclidis continet. 14 menſurationes arearum. 15 16 & 17 de circulo. 18 de inſcriptionibus in circulo. 19 de menſuratione polygonorum,& circuli. 20 de Solidorum elementis, nempe continet doctrinam Undecimi Euclidis. 21 de ſoliditate ſphæræ. 22 de menſuratione pyramidum. 23 de priſmate. 24 de cubo. 25 de polyedris. 26 de ſphæra,& corporibus inſcriptis. 27 de Conis & Cylindris.

Schonerus hoc opus præfert operibus Euclidis, conatúrque oſtendere in Rami libris, & multo plura & utiliora contineri. Quod licet verum ſit non tamen eum Euclidi præfero,quia multa habet nimis breviter dicta, & non demonſtrata. Multa ſunt item Euclydæa, licet item habeat multa propria.

Idem Petrus Ramus opus edidit cui titulus Scholarum Mathematicarum, in 31 libros digeſtum.Tres primi continent proœmium Mathematicum, ſeu adhortationem, duo proximi diſputant de præcipuis partibus Arithmeticæ, alij ordine de ſingulis Euclidis Elementis diſſerunt, ſinguláſque evolvunt, & examinant Propoſitiones: oſtendúntque quid in ſingulis reprehendendum, emendandúmque ſit. Totum opus exigui eſt momenti, in quo pauca diſcas.

1600 Franciſcus Vieta Fontenæenſis aliquos tractatus Geometricos reliquit. Nempe 1. Effectionum Geometricarum Canonicam recenſionem. In quo explicat Geometricas effectiones, quæ quadratum non ſuperant.

2 Supplementum Geometriæ in quo problemata paulò difficiliora ſolvit.

3 Pſeudo

Digitized by Google

2 Pſeudomeſolabum; in quo conſiderat ſegmenta linearum inſcriptarum circulo, eaque cum ſegmentis diametri comparat.

Quartus adjuncta capitula: continet varia problemata de inſcriptione quadrilaterorum in circulo.

5 Ad angulares ſectiones problemata univerſalia; ſeu varia problemata quibus triangula inter ſe comparat.

6 Variorum Reſponſorum liber, in quo reſpondet ad varia quæſita.

7 Apollonius Gallus, ita ſe vocat occaſione problematis de deſcribendo circulo quem tres circuli contingant, quod Adrianus Romanus ſolvere non potuerat. Hujus occaſione problematis, alia multa ſoluit circa tactus circulorum, & linearum.

8 Munimen adverſus novam Cyclometriam Scaligeri, cujus errores detegit.

In his multa ſunt ingenioſa, & abſtruſa, ſed quæ vix uſum aliquem habeant.

1600 Bartholomæus Pitiſcus Granbergenſis Sileſius trigonometriæ libros quinque edidit.

Primus eſt de generibus & affectionibus triangulorum, reperit autem nonnullas eorum proprietates ab Euclide traditas.

2 *De neceſſariis ad dimenſionem triangulorum tabulis, ſinuum, tangentium, & ſecantium.*

3 *De dimenſione triangulorum planorum.*

4 *De dimenſione ſphæricorum.*

5 *De compendiis quibuſdam triangulorum canonis condendi, & uſurpandi.* Exhibet canonem ſinuum, tangentium, & ſecantium.

Addidit quaſi in exemplum tractatum problematum Geodeticorum, Altimetricorum, Aſtronomicorum, Geographicorum, in libros 10 diſtinctum.

Totum opus optimum quidem eſt; deficit tamen nonnunquam quod non habeat demonſtrationes integras, ſed nonnunquam ab aliis demonſtrata aſſumat, ut à Regiomontano. Multa tamen addit de ſuo. Nihil habet de logarithmis, quæ modo eſt pars præcipua Trigonometriæ. Auguſtæ Vindelicorum in octavo 1600.

1603 Marinus Ghetaldus Patricius Raguſinus nonnullas Propoſitiones novas de Parabola edidit.

Idem Archimedem promotum edidit, nempe de variis corporum generibus, gravitate, & magnitudine comparatis, quæ nempe ſpectant ad tractatum de natantibus in humido; in quibus doctrinam communem Archimedis nonnihil promovit. Habet item reſolutionem problematis de corona; Romæ in quarto 1603.

1603 Joannes Hermannus Beyerus reip. Francofurtenſis Medicus, Stereometriæ inanium novam & facilem rationem edidit, demonſtrationibus Geometricis confirmatam, quâ corporum regularium omnium, tam rectilineorum quam curvilineorum capacitates promptiſſimè explorantur.

Hoc opus duas habet partes. Prima pars eſt quaſi compendium, ſolas praxes continens, primóque proponit numeros ſtereometricos, & eorum Algorithmum. Fabulam item regulæ cubimetricæ, & ejus uſum in priſmatibus, polyedris, Cylindris, conis & ſphæra.

Secunda pars primò agit de diviſione integrorum in ſcrupula, & de eorum algorithmo, de extractione radicis cubicæ. De virgæ cubimetricæ fabricâ, & uſu. De trianguli directione Gæodetica. De triangulati Rhomboidis, trapezij, multanguli circuli Geodeſia. Tum de ſtereometria ſphæræ, priſmatis, cylindri, pyramidis coni, curticoni.

Opus bonum & utiliſſimum, videtur in multis demonſtrationes tantum indicaſſe.

1603 Chriſtophorus Dibuadius Doctor Medicus, & Mathematicus Danus, In Geometriam Euclidis libris ſex prioribus comprehenſam demonſtrationem linearum edidit, nempe commentarium, ſed ita breve, ut ſæpe non rectè demonſtret, nec concludat.

Idem in eoſdem ſex priores Euclidis demonſtrationem numeralem, nempe Propoſitiones in numeris exhibet, & demonſtrat, quæ res poteſt aliquid lucis afferre. Supponit autem trigonometriam ſine quâ intelligi non poteſt, ſæpe citat Pitiſcum, & Algebram advocat, & ſurdos numeros adhibet.

Idem in Arithmeticam rationalium, ſeu ſeptimum, octavum, nonum Euclidis eodem modo breviſſimè explicuit. Nihilque peculiare profert.

Idem in Arithmeticam irrationalium ſeu decimum Euclidis demonſtrationem linearem, & numeralem edidit. Supponit Algebram, & multa nimis breviter & obſcurè proponit.

1605 Errard Mathematicus Regius novem primos Euclidis libros Gallicos fecit, & commentario illuſtravit, benè, & exactè.

Idem tres libros edidit Geometriæ practicæ: Unum de menſuratione linearum. Secundum de menſuratione ſuperficierum. Tertium de ſolidis. Habet autem praxes communes ſatis benè, & exactè demonſtratas.

1605 Philippus Horcher Berncaſtellanus, Philoſophiæ, & Medicinæ Doctor libros tres edidit de circino proportionum. Primò tradit ejus conſtructionem. Secundò docet quomodo eodem circino quantitates augeri, & minui, & radices omnes extrahi poſſint, vel viciſſim radicibus datis ſolida inveſtigari. Tertiò exemplis reliquos uſus explicat.

Hic circinus idem non eſt, ac inſtrumentum à Galilæo inventum, habet tamen quam plurima ſimilia. An autem Horcher à Galilæo, an Galilæus ab Horcher acceperit neſcio. Videtur Galilæanus retinuiſſe nomenclaturam ab Horcher traditam quamvis non ſit ſimile circino, cui Horcheri inſtrumentum perſimile eſt. Tempus affine eſt, nam liber Horcheri anno 1605 prodiit, Galilæi opus in latinum verſum eſt anno 1612. Moguntiæ in quarto 1605.

1605 Levinus Hulſius Gandenſis tractatus nonnullos edidit ad Geodeſiam ſpectantes, quos tamen mechanicorum inſcripſit.

Primus continet ocularem demonſtrationem novi Geometrici inſtrumenti planimetri unà cum ſuo inductorio, cujus beneficio, ichnographiæ omnes Geometricè deſcribuntur, habet item rete, ad ſcenographias.

Secundus Tractatus continet nonnulla ad tormentorum bellicorum directionem, & globorum menſurationem ſpectantia.

Tertius continet uſum & deſcriptionem circini proportionum Juſti Burgi, cujus beneficio omnis ſuperficies, & ſolidum augeri, & minui poteſt. Pauciſſimos tamen profert uſus hujuſmodi circini. Si Burgus fuit antiquior Galilæo, & Horchero ipſe invenit circinum proportionis. Francofurti ad Mœnum in quarto 1605.

1607 Galilæus Galilæi Nobilis Florentinus, Profeſſor quondam Mathematices in Univerſitate Paduana,

Digitized by Google

Paduana, & Supraordinarius in Piſana, Primarius Philoſophus, & Mathematicus Ducis Etruriæ, Italicè ſcripſit de regulis proportionalibus ſub hoc titulo : *Le operationi del Compaſſo geometrico, & militare* ; fabricam autem, & uſum illius inſtrumenti latinam poſtea tradit.

Objectum fuit Galilæo à Baltazare Capra Mediolanenſi, quod non eſſet hujus inſtrumenti author, ſed ab eo didiciſſet. Huic objectioni reſpondet teſtimonio artificis, qui jam à 10 annis ipſi talia inſtrumenta conſtruxerat. Quare tractatum Italicum edidit cum titulo ; *Difeſa di Galileo Galilei contro alle calumnie, & impoſture di Baltazar Capra Milaneze, Vſategli ſi nella conſiderazione Aſtronomica ſopra la nuova ſtella del 1604, come nel publicare come ſua invenzione, la fabrica, & gli uſi del compaſſo Geometrico, & Militare.* Atque adeo ſunt quatuor qui de hoc inſtrumento contendere poſſunt. Bononiæ in quarto de novo editum. 1616.

1607 Prodiit authore Leonarto Zublero Opuſculum Geometricum, cui titulus, Novum inſtrumentum Geometricum, quo rerum menſurabilium altitudo, latitudo, profunditas hactenus inaudito compendio etiam ab imperito menſurantur, à Gaſpare Vvaſer Latinitati donatum eſt.

Inſtrumentum conſtat ſemicirculo, & duplici allidada, in partes æquales mille diviſa, inſtructa curſore, cui alia regula aptari poteſt : ita ut tribus his regulis cujuſlibet trianguli typus in ipſo inſtrumento habeatur. Inſtrumentum faciles reddit operationes trigonometricas, quod in Geometria practica non prætериimus. Opus hoc eſt eleganter impreſſum ob 22 figuras æri inciſas. In quarto Baſileæ 1607.

1608 Simon Stevin Principis Auriaci Mathematicus hypomnemata mathematica conſcripſit, ea tribuens Mauritio Naſſovio, Principi Auriaco domino ſuo, quaſi illius eſſent commentationes quas Stevinus tantum conſcripſiſſet. Sub hoc titulo multi continentur tractatus.

Primus Tractatus Hypomnematum Stevini eſt Trigonometricus in quatuor libros diviſus. In primo poſt definitiones 10 Propoſitionibus canonem ſinuum abſolvit, canones item tangentium, & ſecantium, unâ, aut alterâ propoſitione, eoſque tradit cum uſibus.

2 Triangula rectilinea ſolvit 8 Propoſitionibus. Addit in fine nonnulla de multangulis planis ad praxin ſpectantia.

3 Eſt de ſphæricis eumque in tria membra partitur : In primo membro habet 22 Propoſitiones quaſi ad ſequentia Iſagogicas. Tum ſequuntur novem Theoremata, ex quibus in tertio praxes eliciuntur 13 problematis. Addidit in fine nonnulla de multangulis ſphæricis, & appendicem hujus tractatus.

Liber quartus proponit cœleſtia problemata, quæ trigonometrico calculo ſolvuntur. Hic Tractatus poſſet, ſufficere ad triangulorum omnium ſolutionem, non habet tamen vias breviſſimas quæ poſtea inventæ, neque Theoremata iis inſervientia.

Idem author in ſecundo tomo Hypomnematum habet Geometriam practicam in 6 libros diviſam. In primo docet figurarum deſcriptionem linearum perpendicularium, Parallelarum praxes ; deſcriptionem Ellypſis, aliarumque ſectionum conicarum, helices Ichnographiæ cujuſque variis modis, Modum item aptandorum polygonorum, ad formationem corporum regularium. 2 Liber eſt de figurarum dimenſione. Primo igitur agit de linearum etiam inacceſſarum dimenſionibus. In ſecunda parte de ſuperficierum dimenſionibus etiam curvarum. In tertia de ſoliditate.

3 Liber agit de additione, ſubtractione, multiplicatione, diviſione magnitudinum præſertim planarum, & ſolidarum.

4 Liber eſt de magnitudinum proportione, primò linearum, ſecundò ſuperficierum, tertiò ſolidorum.

5 De ſectione proportionali ſimili ordine linearum, ſuperficierum, & ſolidorum.

6 De transformatione figurarum.

In hoc tractatu multa habet utilia, & ad uſum revocabilia, intacta tamen reliquit inſtrumenta, quæ ad ea ſolent adhiberi.

1609 Adrianus Romanus Canonem triangulorum ſphæricorum edidit, in quo totam trigonometriam quam alij 28 caſibus comprehendunt, 6 caſibus abſolvit.

Methodicè non procedit hic author, nec terminis utitur conſuetis, ita ut ejus trigonometria, licet bonam doctrinam contineat, evadat difficillima. Demonſtrationes vix indicat, quare nimis laborandum eſt in ea perdiſcenda.

1610 Joannes Baptiſta Porta Neapolitanus Elementorum curvilineorum libros tres edidit.

In primo circulos auget in data ratione, circulos à circulis ſubtrahit, Sphæroides & Ellypſes ſimiliter auget, habetque Prop. 26.

In ſecundo varias figuras curvilineas conſiderat.

In quarto lunulas, & quadraturam circuli tentat.

In hoc opere ſunt multa optima, & facilia, & quæ viam ſternere poſſunt ad ulteriora. In quarto Romæ 1610.

1611 P. Chriſtophorus Clavius Bambergenſis Societatis Jeſu, Geometriam practicam in tomo ſecundo ſuorum operum edidit in octo libros diviſam. Primus tribus Propoſitionibus omnem dimenſionem abſolvit.

2 Quadrantis Aſtronomici uſum in lineis metiendis explicat.

3 Quadrati Geometrici.

4 Superficierum areas inquirit.

5 Solidas magnitudines metitur.

6 Diviſiones figurarum planarum perficit, agit de augmento ſolidarum, ubi de inventione duarum mediarum proportionalium. Item de extractione radicum.

In ſeptimo de figuris iſoperimetris agit, quem tractatum fuiſſe Zenodori ſupra diximus.

In octavo varia problemata proponit, quorum pleraque ſunt Archimedis. Hic tractatus facillimus eſt, & utiliſſimus.

Idem author Euclidis Elementorum libro 15 commentatus eſt, ſcholiiſque & corollariis auxit. Multa ex antiquis coacervavit, ſæpe non magni momenti, quamvis hic Commentarius bonam doctrinam contineat. Peccat tamen quod nimis multa coacervet, & mole lectorem obruat, nimiùmque in ſpinis detineat. Peccat item quòd nimis longo demonſtrationis circuitu utatur, nec ſtudeat brevitati, quæ ſi ſit perſpicuitati conjuncta plurimi eſt facienda præſertim in hac ſcientia.

Compoſuit item bonum Commentarium in Sphærica Theodoſij.

Item trigonometriam tam rectilineam quàm ſphæricam

Digitized by Google

ſphæricam. In qua demonſtrationes ita longas, & graves habet, ut ſæpe facilius ſit novam demonſtrationem cudere, quam eam in hoc authore addicere. Ejus tamen trigonometria bonam doctrinam continet; habet inter alia ſolutionem triangulorum per proſtaphæreſin. Deeſt in hac trigonometria logarithmorum doctrina quæ nondum inventa fuerat.

1611 Alexander Anderſonius Aberdonenſis Scotus varia Opuſcula edidit. Primò ſupplementum Apollonij redivivi, ſive analyſin problematis deſiderati ad Apollonij doctrinam de inclinationibus, à Marino Ghetaldo Patritio Raguſino reſtitutam. Nempe exhibetur mechanica æqualitatum tertij gradus, ſive ſolidatum, in quibus magnitudo data æquatur homogeneæ ſub altero coefficiente ignoto, quæ ad Algebram ſpectant.

Secundò variorum problematum affectionem habet, quorum pleraque ex Vieta deſumuntur: Ea autem Geometricè ſolvit.

3 Brevem diacriſin animadverſionis in Vietam, à Clemente Cyriaco editam. Nempe Cyriacus Vietam, & Ghetaldum impugnarat, oſtenderátque ſolutionem aliquorum problematum ab ipſis propoſitam non eſſe accuratam: hos defendit Anderſonius opuſculo tria aut quatuor folia non ſuperante.

4 *Vindicias Archimedis*, ſeu Elenchum Geometriæ novæ à Philippo Lansbergio editæ Opuſculo 4 pariter foliorum.

5 Exercitationum Mathematicarum decadem primam continentem enodationem quæſtionum, quæ nobiliſſimorum tum hujus tum veteris ævi Mathematicorum ingenia exercuerunt.

6 Angularium ſectionum analaticorum Theoremata univerſaliora à Franciſco Vieta Fontenæenſi primùm excogitata, & ad Anderſonium tranſmiſſa, quæ ipſe demonſtrat.

In hoc opere ſunt multa optima, ad Algebram ſpectantia, ſed ut plurimùm inutilia.

1612 Prodiit Galilæi de Galilæis Patritij Florentini latinè Tractatus prius Italicè editus de proportionum inſtrumento. Hoc inſtrumentum meritò vocat Compendium Geometriæ: habet enim uſus innumeros quos initio omnes non vulgavit: perfectum enim eſt ab aliis, immo & ulterius perfici poſſet, aliáſque lineas tangentium, & ſecantium, immo & logarithmos excipere.

Hunc ex Italico latinum fecit Mathias Bernegerus. In quarto Argentorati 1613.

Eodem anno Joſephus Langius Cæſare-Montanus Elementale Geometricum edidit, in quo univerſales tantum notiones habentur ſine ullis demonſtrationibus. Friburgi Briſgoiæ in octavo 1612.

1614 Samuel Marolois Gallicè Geometriam practicam edidit ſatis bonam, & demonſtratam, tædioſam tamen, eo quod figuras æri inciſas ſeparatim poſuerit. Opus hoc eſt ſatis bonum, commune tamen, & malè explicatum.

1615 David Rivultus à Flurantia Cenomanus, è regia turma ſacri cubiculi Regis Chriſtianiſſimi Archimedem latinum fecit, ſcholiíſque illuſtravit nonnulliſque demonſtrationibus. Item fragmenta nonnullorum authorum referentium Archimedis fragmenta ut de corona adulterata, de Cochlio, de triſpaſto ejuſque inventis adverſus Marcelli, & Appij machinas, de Machinis aëreis & aqueis, de confectione ſphæræ materialis.

Hic author Archimedem bene vertit, faciliorémque reddit, & methodicè procedit.

1615 Joannes Kepler Imperatoris Mathematicus edidit novam ſtereometriam doliorum vinariorum, & uſum. Virgæ ſtereometricæ compendioſam, & utilem. Hanc tamen non ſatis expedit, affertque methodos quæ in multis poſſint fallere. Indicat item aliquid circa notitiam illius partis, quæ nonnunquam vacua eſt in dolio, non ſolvit tamen problema in ordine ad praxin.

1619 prodiit in certò authore liber Gallicus inſcriptus *Recreations Mathematiques*, in quo continentur aliquæ praxes faciles, ex omnibus Matheſis partibus excerptæ ſine ullis demonſtrationibus.

Poſtea idem author opus ſuum correxit, & edidit ſub titulo, Examen recreationum Mathematicarum, & ſub nomine Roler Botonné.

1619 Alexander Guybert Conciliarius Aurelianenſis Tractatum ut vocat familiarem Gallicum edidit, ad menſurationem, ſive ſuperficialem ſive ſolidam cujuſlibet ædificij. Opus facile, & utile, ſed imperfectum. Pariſiis in octavo 1619.

1620 Carolus Malapertius Montenſis Societatis Jeſu, Euclidis Elementorum libros ſex priores explicuit, & ad faciliorem captum accommodavit. Opus clarum, & facile; videntur tamen Propoſitiones libri quinti non eſſe demonſtratæ. Duaci in 16. 1620.

1620 Edita ſunt latinè à Nicolao Janſonio Arnh. Geldro Nova reperta Joannis Alphonſi Molinenſis Cani, Hiſpanicè ſcripta; in quibus ſubtiliores Geometricæ quæſtiones de duplicatione cubi, de quadratura circuli, & aliæ expenduntur, Euclidæa Elementa nonnulla corriguntur, alia ut falſa rejiciuntur.

Quæ profert circa duas medias proportionales, & quadraturam circuli eodem vitio laborant à ageometriæ quo aliæ multæ methodi ab antiquis propoſitæ. Quod de Euclide proponit non demonſtrat, & ſæpe hallucinatur, ita ut in hoc legendo opere inſumendum non ſit tempus, præcipue cum methodum affectet non communem, ſine ullo operæ pretio, niſi quod obſcuritatem acceſſat.

1620 Eberhardus Veſper Elementa Geometrica in uſum Geometriæ ſtudioſorum ex variis authoribus collegit.

Opus hoc continet tantum definitiones, & varia problemata, ut plurimum non demonſtrata. Habet item id incommodi quod figuræ non ſint in proprio loco.

1621 Joannes Neperus nobilis Scotus Baro Merchiſtonij Librum logarithmorum edidit, in quo ſubſtitutis loco numerorum vulgarium, eorum logarithmis ſeu numeris procedentibus in proportione Arithmetica, pro numeris Geometricè proportionalibus; multiplicationem in additionem, diviſionem in ſubſtractionem commutat. Quod inventum inter præcipua hujus ſæculi annumerari poteſt, illíque jure hæc addi Epigraphe, *Anteceſſoribus noſtris ſapientiores ſumus.* Nihil enim potuit inveniri in ſupputationibus, tam Geometricis, quã Aſtronomicis, quod majore facilitate præberet. Ejus tamen Opus obſcurum eſt & male explicatum, & ſpecies logarithmorum, quorum tabulam exhibet, eſt multum incommoda. Aliam tamen indicat ſpeciem logarithmorum utiliorem, in qua ſcilicet logarithmus unitatis ſit o & denarij 1000000. Hanc ſecundam logarithmorum ſpeciem, labore improbo ab 10000 abſolvit Henricus

cus Briggius in Academia Oxonienſi Geometriæ Profeſſor, deditque canonem, ſinuum tangentium, & ſecantium, item logarithmorum, ſinuum, & tangentium pro ſingulis minutis ſecundis, ſuppoſito radio 10, 00000, 00000, cum uſibus earumdem tabularum in trigonometria. Quod opus quanti ſit laboris, & uſus nemo non videt. Adrianus Ulac Goudanus ſecundam editionem aliis auctiorem perfecit.

1621 Henrion Mathematicus Pariſiis 4 libros Geometriæ practicæ Gallicè edidit. In primo libro proponit multa Problemata practica partim ex probatis authoribus excerpta, partim à ſe inventa. In ſecundo de menſuratione linearum inacceſſibilium: utitur autem inſtrumento, conſtante duabus regulis, in communi centro aptatis, & alia ad angulos rectos alterutri ita aptatâ, ut ſecundum eam currere poſſit. Ideóque ad triangulum rectangulum ſuas praxes revocat: Quæ ſunt ſimiles uſibus quadrati Geometrici, niſi quod umbra verſa nunquam ſe immiſceat. In tertio habet planimetriam. In quarto ſtereometriam.

Opus hoc bonam, & ſolidam doctrinam continet, ſed communem. Habet item dimenſionem circuli, & partem doctrinæ Archimedis de ſphæra, & Cylindro, In quarto Pariſiis 1621.

Eodem anno 1621 Villebrordus Snellius Batavus Opuſculum edidit Cyclometricum, ſecundum logiſtarum abacos, & ad mechanicen accuratiſſimus. Ejuſdémque uſus in quarumlibet adſcriptarum inventione, longè elegantiſſimus. Opus bonum, & Geometricum, hæc tamen doctrina potuit clarius tradi. Videtur hic author obſcuritatem affectare, & phraſin à communi alienam.

1622 David Sanclarus Matheſeon Profeſſor Regius pro Archimede ſcripſit contra Anonymum, qui aliquam quadraturam circuli promulgarat. In qua nempe diametrum circumferentiæ ſubtriplam faciebat, & conſequenter quadratum diametri, ſeu circumſcriptum ſe habere ad circulum ut 4 ad 3. Oſtendit id falſum eſſe, affertque ambitus polygonum, qui majorem rationem habeant ad diametrum. Opus hâc difficultate caret.

Prodiit eodem anno incerto authore Refutatio quadraturæ à Benedicto Scotto propoſitæ. Pariſiis in quarto 1622.

1622 P. Le Mardelé Profeſſor Matheſeos quindecim libros Euclidis Gallicè vertit ex Græco ſatis bene. Nimiùm multa videtur addidiſſe. Pariſiis in octavo 1622.

1623 Henrion Matheſeos Profeſſor Opuſculum Gallicum compoſuit de fabrica, & uſu circini proportionum, in quo colligit, quæ ab aliis de hoc inſtrumento dicta ſunt, addítque plurimas praxes de ſuo. Opus hoc clarum eſt, & utile aliquando tamen demonſtrationes indicat tantum, & non tradit integras. Pariſiis in 8. 1623.

Eodem anno idem author edi curavit Pitiſci canonem ſinuum, tangentium, & ſecantium, in decimo ſexto, adjecto in fine uſu, tam in triangulis ſphæricis quam planis, ſine demonſtrationibus. Pariſiis in 16.

Idem author eodem anno reſponſionem Apologeticam edidit contra Mardelé qui Euclidis traductionem ediderat, quam contendit eſſe ſuam, quam hic in aliquibus immutarat. Opus contentioſum, & nullius momenti. Pariſiis in octavo 1623.

1625 Zacharias Profeſſor Mathematum Pariſiis tractatum de planimetria, ſeu ſuperficierum menſura edidit, in quo habentur tantum praxes communes & vulgares. Pariſiis in octavo 1625.

1625 Benus Urſinus Mathematicus Electoralis Brandeburgici Trigonometriam cum magno logarithmorum & ſinuum canone edidit per ſingulas decades ſecundorum. Trigonometriam non demonſtrat: ſed in tractatu quem tabulis præponit multas & praxes & problemata ex Euclide præcipuè deſumpta tradit cum demonſtrationibus; ubi verò ad Trigonometriam pervenit ſolas praxes, citat tamen aliorum Demonſtrationes ut Finkij Coloniæ in quarto 1625.

1625 Claudius Hardi in curia Pariſienſi advocatus Euclidis data ex regia Bibliotheca Græcè nunc edidit, Latinè vertit, ſcholiiſque illuſtravit. Addidit ex eadem Bibliotheca Marini Philoſophi Commentarium Græcè, & Latinè, in quo dati natura, datorúmque Euclidæorum utilitates, & ad analyſin præſertim explicantur. Ratio autem inſtituendæ talis verſionis fuit, quod antiqua verſio Bartholomæi Zamberti videretur in multis deficere, eò quod Græcè quidem Zambertus optimè ſciret, non item Geometricè. Hic Marinus Philoſophus videtur fuiſſe Procli diſcipulus. In data Euclidis ſcripſerunt Maurolycus Abbas, Fredericus Commandinus, Joſephus Auria &c.

1626 Henrion Profeſſor Matheſeon edidit Gallicè tractatum de Logarithmis, in quo clariſſimè explicat illorum geneſin, ſaltem vulgarium & eorum uſum: habet item canonem logarithmorum reſpondentium numeris ab unitate ad 2000. Adjecit logocanonem, ſeu conſtructionem aliquarum regularium proportionalium, quibus inſcribit logarithmos, ſinus, & tangentes ex inventione Domini Gunteri, quibus tamen multa de ſuo adjicit. Omnia quæ ab Henrione prodiere ſunt bona. Pariſiis in octavo 1626. Anno 1627 Idem tractatum edidit de triangulis ſphæricis Gallicè in duas partes diviſum. In prima parte habet Theoremata, & totam ſpeculationem. In ſecunda parte praxin tradit, quam applicat exemplis Aſtronomicis. Pariſiis in octavo 1627.

1626 Prodiit opus poſthumũ Villebrorti Snellij à Royen; nempe doctrina canonica triangulorum, in libros 4 diviſa. In primo habet Theoremata, in quibus per appendicem deducit conſtructionem tabulæ ſinuum. In 2 triangula rectilinea ſolvit & per appendicem adjungit problemata Geodætica. In tertio triangula Sphærica ſolvit per reductionem ad rectangula. In quarto eadem triangula ſolvit ſine reductione ad rectangula: habet item canonem ſinuum, tangentium, & ſecantium.

Hoc opus Geometricum eſt habetque quamplurimas Propoſitiones proprias. Ab eo tamen tempore, aliæ ſunt inventæ praxes faciliores. Lugduni Batavorum in octavo 1626.

1626 Edmondus Vingate Nobilis Anglus conſtructionem, & uſum canonis logarithmorum cum canone logarithmorum ab unitate ad 1000 edidit. Item canonem logarithmorum, ſinuum, & tangentium ſingulorum minutorum quadrantis. Pariſiis decimoſexto 1626.

1626 Philippus Lansbergius Edidit Cyclometriæ novæ libros duos. In primo peripheriam circuli metitur: in ſecundo aream. In toto progreſſu iſtius Cyclometriæ procedit per inſcriptiones, quod commune eſt, & Archimedicum; quæ verò adjungit de quadratrice, ſeu de inventione baſis ejus, hic eſt error, nec ipſe ſcopum attigit.

Scripſerunt

Digitized by Google

Scripſerunt de quadratura circuli ex antiquis Bryſo, Antipho, Hippocrates Chius, Dinoſtratus, Euclides, Archimedes, Appollonius Pergæus, Ptolemæus, Nicomedes, Pappus Alexandrinus. Sporus Nicenus, Philo Gadarenus, Eutocius Aſcalonita, Boetius. Ex recentioribus Campanus, Nicolaus Cuſanus Cardinalis, Joannes Regiomontanus, Orontius Finæus, Peletarius, Clavius, P. à S.Vincentio.

1629 prodiit folium Domini Delaleu circa duplicationem cubi, & quadraturam circuli Gallicè, cum figuris implicatiſſimis.

1630 produit Gallicè ejus examen à Domino Hardy.

Conſequentibus annis prodiit alius libellus cui titulus, *Propoſitions Mathematiques de Monſieur Delaleu demonſtrées par I. Puios.*

1638 prodiit illius refutatio à D.Hardy.

Eodem anno Puios librum edidit cujus titulus, *Nullité des Demonſtrations de Monſieur Hardy.* Eodem anno ei reſpondet D. Hardy; & iterum Puios 1643 tres addidit reſponſiones, ex quibus operibus in quibus ſunt nonnulla bona, concludes nec duplicationem cubi, nec quadraturam fuiſſe legitimas.

1630 Henrion Matheſeon Profeſſor edidit opus Gallicum cum titulo, Uſus mecometri. Eſt autem mecometrum ſemicirculus cum Allidada, cui adjungit verſorium magneticum, lineas item chordarum, tangentium, & ſinuum adjungit.

Habet optimas praxes, multas tamen eaſdem, ac circini proportionum, iiſdemque nixas principiis. Pariſiis in octavo 1630.

1631 P.Vincentius Leotaudus Delphinas, Societatis Jeſu, Elementa Geometriæ practicæ compoſuit, nempe problemata varia ad praxin ſpectantia facilia, & utilia.

In parte ſecunda habet Elementa loci ſolidi, ſive conicarum ſectionum, in quibus natura coni, genitæque ex eo conicæ ſectionis origo aperitur. Eſt ergo hic tractatus introductorius ad conicas ſectiones.

Totum opus Geometricum eſt; hunc tamen defectum habet, quòd figuras habeat ſeparatas, ita ut pleraque exemplaria, detritis figuris, utpote plicatilibus, ſint inutilia; quam aleam incurrunt quicumque libri figuras habent ſeparatas. Dolæ in decimoſexto 1631.

1631 prodiit Pariſiis opus Gallicum cujus titulus, *Le Cours Mathematique repreſenté par figures & cartes, & clairement expliqué dans toutes ſes parties.* Habet in Geometria definitiones, & proprietates, parallellogrammorum, circulorum, polygonorum, proportionum &c. praxes item menſurationum, Deſcriptiones aliquarum figurarum, Inſtrumentorum Geometricorum praxes.

Secundus tractatus eſt militaris Architectura quam compendiosè ſatis bene explicat.

Tertius eſt perſpectiva in qua bene deſcribit oculum, De radio directo, reflexo, & refracto agit, & varia affert genera ſpeculorum, & ſpecillorum.

Quartus habet principia coſmographiæ, ſyſtemata explicat, uſum globi; omnia clarè ut habeatur cognitio generalis omnium, demonſtrationes tamen non affert.

1632 Claudius Mygdorgius Patricius Pariſinus de ſectionibus conicis librũ edidit, quaſi Catoptricorum, & Dioptricorũ prodromum, in duos libros diſtinctum. Quorum primus Theoricus eſt, naturam parabolæ, hyperbolæ & Ellypſeos; earumque proprietates conſiderat, & demonſtrat. Secundus practicus eſt earumdemque ſectionum deſcribendarum methodum ex præſuppoſitis fundamentis tradit. Opus perfectiſſimum, & bene compoſitum. Abjectis enim quæ in Appollonio nimis minuta videbantur, præcipuas harum ſectionum proprietates propriis, & ut plurimum à ſe inventis demonſtrationibus claras reddit. Quare niſi antiquitatis prærogativam haberet Apollonius, primas Mygdorgio deferrem. In folio Pariſiis 1632.

1632 Bonaventura Cavalerius Mediolanenſis Ordinis Jeſuatorum, Directorium generale Uranometricum edidit, in quo trigonometriæ logarithmicæ fundamenta & regulæ demonſtrantur, aſtronomicæque ſupputationes ad ſolam ferè additionem revocantur. In tres partes dividitur.

1 Habet progreſſum trigonometriæ, præcipuè vero geneſin logarithmorum explicat, ſed nimis univerſaliter.

In 2 triangulorum rectilineorum ſolutionem ad pauca axiomata revocat.

In 3 ſolutionem ad paucas item regulas, quas bene demonſtrat revocat. In hoc opere paulò majorem ordinem & claritatem deſiderarem. Doctrina ejus bona eſt, & trigometriam facilitat.

Habet in fine canonem ſinuum & logarithmorum pro ſinubus, tangentibus, ſecantibus, & ſinubus verſis ſingulorum minutorum quadrantis.

1634 Albertus Fridericus Gnopius alìàs Blanckenpoth, Medicus & Profeſſor Herbornenſis tractatum Mathematicum edidit, in quo fabricam inſtrumenti univerſalis, & uſum tradit ad Geodeſiam perficiendam, ad dirigenda tormenta bellica, aquas librandas, cuniculos ſubterraneos agendos, & caſtrametationem; eſtque inſtrumentum compoſitum ex quadrato geometrico, quadrante & circino proportionis. Hujus inſtrumenti varios uſus, nonnullos novos profert. Hic tractatus eſt utilis. In quarto Herbornæ 1633.

1634 P. Petit Opuſculum edidit Gallicum, cum titulo Methodus perficiendi unicâ regulâ omnes praxes circini proportionalis; cum ampla conſtructione ejus, & tabula gravitatis & magnitudinis metallorum, & reductione ponderum & menſurarum Europæ, Africæ, & Aſiæ ad menſuras Pariſienſes.

In hoc opere pauca ſunt diverſa ab iis praxibus quæ communiter traduntur de circino proportionis. Pariſiis in octavo 1634.

1634 Petrus Herigone Mathematicus Pariſienſis Curſum Mathematicum compoſuit. In Geometricis quidem Elementorum libros 15 explicuit, & nonnullis appendicibus illuſtravit.

Item Euclidis Data, & Apollonij doctrinam de determinata ſectione, à Villebrord Snellio reſtitutam explicuit, ſicut & ejuſdem inclinationum Geometriam à Ghotaldo reſtitutam, ejuſdem tactionum doctrinam à Vieta reſtitutam. Denique angularium ſectionum doctrinam.

Habet modum conſtruendi canonis ſinuum, non autem logarithmorum quamvis eorum uſum aperiat. Trigonometriam rectilineam tradit, non ſphæricam. Geometriam practicam linearum, & ſuperficierum, ſed non ſolidorum.

Hæc omnia nimis breviter, & modò ſcribendi per characteres inſuetos, quæ duo ejus doctrinam difficilem & inextricabilem reddunt. Pariſiis in octavo 1634.

Digitized by Google

1634 Georgius Ludovicus Frobenius Iphovienſis Francus, tunc civis Hamburgenſis, edidit Clavim univerſi trigonometricam, per quam cœli ac terræ adita recludi, & omnes de motibus, ac dimenſionibus utriuſque per hypotheſes artificum, triangulari forma conceptæ quæſtiones, per certa problemata reſolvi, & in apertum produci poſſunt triplici methodo.

Prima vulgari per ſinus, tangentes, & ſecantes multiplicatione, & diviſione. Secunda proſtaphæretica, compendioſa, quâ termini modò in ſecantes, modò in ſinus permutantur juxta ſeptem regulas. Tertia logarithmica.

Additæ ſunt tabulæ ſinuum, tangentium, ſecantium, & logarithmorum iis reſpondentium, & in inferiori parte paginæ logarithmorum numerorum vulgarium ab unitate ad 18910.

Praxes ſolas habet; demonſtrationes citat ex aliis authoribus. In quarto Hamburgi 1634.

1635 Bonaventura Cavalerius Mediolanenſis ordinis Jeſuatorum ſancti Hieronimi in Bononienſi Gymnaſio Profeſſor Mathematicarum, Geometriam indiviſibilium edidit.

Authoris ſcopus in hoc opere, eſt nova quantitatum reſolutio in ſua elementa, nempe lineæ in puncta, ſuperficiei in lineas, ſoliditatis in ſuperficies. Ut hac Analyſi earum proprietates præcipuæ innoteſcerent, eæque æquales aut inæquales oſtenderentur, quæ totidem numero Elementis conſtarent.

Hanc methodum plurimi ſunt inſectati inter quos Guldinus quaſi in quantitatem vellet indiviſibilia invehere, & Matheſin in quæſtiones de compoſitione continui inducere. Si tamen hæc doctrina bene intelligatur, & explicetur paulo melius, quam ab ipſo authore propoſita fuit, viam ad multas difficultates nullo negotio ſolvendas aperit.

Totam hanc doctrinam in 7 libros partitur. In primo quædá Lemmata & Propoſitiones præmittit circa cylindricorum, & conicorum ſectiones.

In 2 triangula, & parallelogramma, genitáque ab iis ſolida conſiderat.

3 Circulum & Ellypſin, genitáque ab ipſis ſolida.

4 Parabolam genitaque ab eâ ſolida.

5 Hyperbolam & ejus ſolida.

6 Helicen & ejus ſolida.

7 Quæcumque in præcedentibus libris methodo indiviſibilium demonſtrata ſunt, alia ratione demonſtrat.

Hæc indiviſibilium methodus inter pulcherrima hujus ſæculi inventa annumerari poteſt.

1636 A. Ulac tabulas ſinuum tangentium, ſecantium, logarithmorum ſinuum, & tangentium edidit pro ſingulis quadrantis minutis, item logarithmorum pro numeris ab unitate ad 10000 unà cum uſibus tam in triangulis planis, quam ſphæricis, ſine demonſtrationibus. Opus utile. Goudæ 1636, In Octavo.

1638 Prodiit Pariſiis Opuſculum Gallicum, ſub titulo *Propoſitions Mathematiques de Monſieur Delaleu par I. Puiot.* Demonſtrationes ſunt difficillimæ utpote malè explicatæ, quæ eo tendunt, ut inveniat duas medias proportionales, & quæ deficiunt: neque enim omnia demonſtrantur, quæ ad id præſtandum ſunt neceſſaria; quare in caſſum recidit totum opus, cum ejus propoſitiones vix ſint ad aliud utiles.

1640 Adrianus Metius Almarianus Geometriæ libros ſex edidit, nempe Trigonometriam planorum, Geodeſiam, Uſum circini proportionum, Architecturam Militarem, Problemata Aſtronomica, Sciaterica Horologia. Omnia geometricè, & ad praxin accommodatè. Amſtelodami in quarto 1640.

1640 Boulenger Mathematicus Regius, Geometriam practicam Gallicè edidit linearum, ſuperficierum, & corporum demonſtratam; cum nova methodo Geodeſiam exercendi ſine fractionibus, aut reductione ad minores menſuras. Opus facile, utile, & bene demonſtratum; in quo ſunt praxes ingenioſæ. Pariſiis in octavo 1640.

1641 P. Bourdin Societatis Jeſu, centum figuris totam Matheſin exhibuit, generalem quippe illius ideam, uſum item variorum inſtrumentorum præſertim in Geodeſia, in ichnographiis deſcribendis, figuris augendis & minuendis, item in munitionibus extruendis.

Item Tractatum de uſu globi terreſtris, Opticam & dioptricam, omnia breviter & clarè, quantum ſatis iis, qui in profundiori geometria non ſunt verſati.

1643 Chriſtianus Severini Longomontanus Cimber, regiæ Academiæ Haunienſis ſuperior Mathematices Profeſſor, rotundi in plano, ſeu circuli abſolutam menſuram, duobus libris edidit. Prior veram conſtitutionem peripheriæ circuli ſyntheticè perficit, ejuſque ad diametrum rationem exhibet. Poſterior Gæodeſiam circuli in plano abſolvit, & permutationem rectilineorum in lineis, & numeris oſtendit.

Hæc omnia falsæ demonſtrationi innituntur, cujus falſitatem Pellius demonſtravit, aliique multi Mathematici inter quos Robervallius ſubſcripſit.

1643 Bonaventura Cavalerius Mediolanenſis ordinis Jeſuatorum trigonometriam planam, & ſphæricam, linearum & logarithmicam edidit. Doctrinam rectilineorum ad quinque lineares, & quinque logarithmicas revocat. Sphæricorum verò praxes in hoc opere non demonſtrat, ſed ſupponit in ſuo Directorio demonſtratas. Addidit & canonem ſinuum & logarithmorum conſuetum, item logarithmos pro numeris ab unitate ad 1000. Habet demonſtrationes faciles, claras, & ſuas.

1644 Chriſtianus Hugenius Opus edidit de circuli magnitudine in quo multa circa Cyclometriam proponit, non quidem quaſi ad perfectam circuli quadraturam, ſed tantum ſumptis inter circumſcriptum & inſcriptum polygonum duobus mediis proportionalibus, oſtendit circumferentiam circuli mediam eſſe proportionalem inter hujuſmodi mediorum proportionalium ambitus. Quæ propoſitio majorem continet determinationem quam ab aliis traditæ, poteſtque eſſe uſui ad examinandas aliorum quadraturas. Utrum autem id perfectè demonſtrarit non licuit per otium examinare. Notavi tamen in ejus demonſtrationibus multa ſubticeri neceſſaria. Quod fieri non debuit, niſi in rebus facillimis, & in oculos omnium incurrentibus. Id enim ſine cauſa difficultatem affert, multiſque ſuſpicionem facit rei non benè probatæ. Opus hoc 20 Propoſitiones habet.

Acceſſerunt octo illuſtriorum problematum conſtructiones, circa diviſionem ſphæræ, circa duas medias proportionales, circa conchoidem & alia.

1644 prodiit Elenchus Cyclometriæ Chriſtiani

ſtiani Severini Longomontani Mathematicarum ſuperiorum in Hafnienſi Academia Profeſſoris Regij à Claudio Hardy. Demonſtrat autem ſequi ex Longomontani doctrina circumferentiam circuli majorem eſſe ambitu polygoni circumſcripti 192 laterum.

1644 P. Merſennus Ordinis Minimorum, univerſæ Geometriæ mixtæque Matheſeos Synopſin compoſuit, in qua ſcilicet titulos ſingularum Propoſitionum omnium librorum Euclidis.* 2 Geometriæ Petri Rami, tertio Archimedis de ſphæra, & Cylindro, ejuſdem de Conoidibus, & ſphæroidibus, de quadratura parabolæ, de ſpiralibus, æquiponderantibus, & natantibus in humido, Arenarij.

Item titulos Propoſitionum Theodoſij, Menelai, & Maurolyci.

Item Propoſitiones ſupplementi Archimedis à Snellio editi, ſupplementi Kepleri in tractatum de ſphæroidibus. Item Propoſitiones tractatus Lucæ Valerij de quadratura parabolæ.

Item titulos Propoſitionum Apollonij Pergæi de conicis, Mydorgij de conicis, & Sereni.

Datorum Euclidis.

Collectionum Pappi.

Mechanicorum, de centro gravitatis Commandini, *Guidi, Ubaldi*, & Valerij.

1645 P. Marius Bettinus Societatis Jeſu edidit Apiaria univerſæ Philoſophiæ Mathematicæ: in quo opere videtur voluiſſe ornare Euclidem & occaſione Propoſitionum Euclidis excurrit in totam Matheſin. Multa quidem habet optima, ſed ita perturbato ordine, ut impoſſibile ferè ſit in eo aliquem fingere ordinem. Si hoc opus ordinatum foret, eſſet alicujus momenti. In primo volumine habet præcipue geometrica, in ſecundo habet multa ad arithmeticam pertinentia. Bononiæ in folio 1645.

1645 P. Claudius Richardus è Societate Jeſu, ex comitatu Burgundiæ Regius Madriti Matheſeon Profeſſor, Commentarium edidit in Euclidis Elementorum libros 13, & Hypſiclis duos. Addidit Propoſitiones Procli. Circa duas Medias proportionales. In quo Commentario multa addit de ſuo. Opus ingens, nempe volumen integrum in folio, quod cujuſque patientiam fatiget, nimis enim multa exaggerat, & diutius quam par eſt tyronem in ſpinis detinet. Difficultatem augent figuræ ſeparatim ſimul poſitæ. Quæ ratio in materiis difficillimis peſſima eſt. Multos vidi qui libros hujuſmodi cæteroquin bonos ne attingerent quidem.

1645 Carolus Oudart Agendiceus licentiatus, & Collegij Regij Seſanienſis Moderator primarius. Edidit ſuplementum ſupplementi, ſeu quadraturam circuli, continens quadraturam circuli, & anguli in quacumque ratione ſectionum.

In hoc opere multa ſunt non geometrica. Primoque fuſiſſimè explicat in quonam ſit poſita quadratura circuli, tum oſtendere conatur circumferentiam circuli mediam eſſe proportionalem inter ambitus, inſcripti, & circumſcripti ſimilis, quod puto non ſatis geometricè ab illo conſtitui. Habet tamen multa bona. In quarto Pariſiis 1645.

1647 P. Petrus Bobynet Societatis Jeſu tractatum edidit Gallicum Gæodeticum ſub titulo: *Longimetrie induſtrieuſe*, in quo tradit multas praxes ad menſurationem linearum inacceſſibilium. Nullas habet demonſtrationes hoc opus. Pariſiis in octavo 1647.

1647 P. Gregorius à Sancto Vincentio ex Societate Jeſu, Opus grande edidit duobus tomis in folio, cum titulo, Opus Geometricum quadraturæ circuli, & ſectionum coni 10 libris comprehenſum. In primo agit de varia linearum inter ſe proportione, de triangulorum proprietatibus, & de rectangulorum proportione. In 2 progreſſiones non terminatas conſiderat, & terminum progreſſionis infinitæ continuatæ aſſignat, totamque hanc doctrinam planis, ac ſolidis applicat. In tertio lineas in circulo, anguloſque cum arcubus comparat, circulorum interſectionem, linearum in circulo potentiam. Tum aliqua prolegomena ponit ad ſectiones coni. Liber quartus eſt de Ellypſi. Liber quintus de parabola. Liber ſextus de hyperbole. Septimus de ductu plani in planum, in quo ſolidorum varias geneſes, & reductiones habet. In octavo proportionalitates geometricas conſiderat. Libro nono Cylindrum, conum, ſphæram, ſphæroidem parabolicam, & hyperbolicam; ungulas cylindricas. Decimus eſt de ipſa circuli quadratura, quam tentat per ſectiones conicas. Opus hoc eſt mirabile, & ad nova geometrica viam aperit, habetque demonſtrationes facillimas, & breviſſimas, ſed nimis multas, tanta enim multitudine mentem lectoris obruit, cum potuiſſet hanc totam doctrinam in pauciora contrahere. Reprehenditur titulus *quadratura circuli* quam non eſt conſecutus, ut demonſtravit poſtea P. Leotaudus, ea tamen quæ ad quadraturam perficiendam adinvenit, ſunt magno Geometra digna. Sectiones enim conicas multum amplificavit earumque proprietates mirabiles explicuit. Duobus tomis in folio.

1648 Richardus Albius Anglus Hemiſphærium diſſectum edidit, in quo ſcilicet habetur tota Archimedis doctrina de ſphæra, & Cylindro, quam promovit multis propriis Propoſitionibus. In hoc opere etiam agit de maximis inſcriptibilibus, & minimis circumſcribentibus. Ratio etiam diſcutitur quare aliquæ Propoſitiones non admittunt ſolutionem per media plana, vel Elementa Euclidis. Habet item methodum geometricam novam, qua ad æquationem reducitur propoſitio de ſectione hemiſphærij in ratione data. Acceſſit appendix de inſcriptione Coni ſcalni in ſphæra, & de ejus ſuperficie; item cubatio cujuſdam partis Cylindri diſſectæ plano. Hic author geometricè, & clarè procedit, totumque opus geometricum eſt. Romæ in quarto 1647.

1648 Marius Bettinus Bononienſis Societatis Jeſu, Ærarium Philoſophiæ Mathematicæ edidit in quo elementa Philoſophiæ geometricæ, de planis curuis; & ſolidis figuris applicata uſibus eximiis, in omni ſcientiarum, & artium genere novis praxibus, paradoxis, locis Ariſtotelicis illuſtrantur. Videtur ſcopus authoris eſſe uſum Matheſis in reliquis ſcientiis aperire: Quare primo tomo poſt aliqua prolegomena, definitiones communes, axiomata & 48 Propoſitiones Euclidis percurrit, earumque uſum aperit.

In 2 Propoſitionum ſexti Euclidis uſum explicat in variis partibus Matheſeos præcipuè in pictura, horographia, &c.

In tertio aliorum quatuor Elementorum Propoſitiones pariter variis materiis adaptat, præcipuè vero ſexti, ad planimetriam, & ſtereometriam. Opus hoc inordinatiſſimum eſt, & fuſiſſimè explicatum. Hoc tamen conſilium valde probo, nempe ut quis præcipuas Matheſis partes ad Euclidis

Euclidis Elementa revocet. Cum enim plerique qui ad Matheſin animum adjiciunt, deterreantur maxime ab Euclide addiſcendo, quod non videant cui uſui ſint futuræ hujuſmodi Propoſitiones. Quare optimum eſſet conſilium ſi poſt ſingulas Propoſitiones præcipui uſus indicarentur: ſed id præſtandum eſſet brevius, & planius, quam ab hoc authore ſit præſtitum. Multa tamen habet bona & geometrica.

1651 P. Antonius Lalovere Societatis Jeſu quadraturam circuli, & hyperbolæ ſegmentorum, ex dato centro gravitatis edidit unà cum inventione proportionis, & centri gravitatis in portionibus ſphæræ plurimorum periphericorum, nec non tetragoniſmo abſoluto certæ cujuſdam Cylindri partis, & aliorum, demonſtratam & ad calculum reductam adjumento libræ Archimedeæ à materia avulſæ.

Opus quidem bene demonſtratum, ſed tantum ex ſuppoſitione, atque adeo quod perfectam problematis ſolutionem non exhibeat.

1651 Comes De Pagan 6 libros compoſuit Theorematum geometricorum quaſi in ſupplementum Geometriæ.

1 *Libro agit de lineis proportionalibus.*
2 *De Ellypſi, & ſectionibus conicis.*
3 *De Theoria planetarum Ellyptica.*
4 *De triangulorum ſolutione.*
5 *De munitionibus regularibus.*
6 *De navigatione & longitudinibus.*

Hoc totum opus figuris caret redditúrque propterea difficile, & inutile, cum ſit difficile hanc doctrinam aptare figuris. Pariſiis in octavo 1651.

1649 prodiit Geometria Renati Deſcartes anno 1637 Gallicè edita, nunc autem in latinum verſa cum notis Florimundi De Beaune in curia Bleſenſi Conſiliarij Regij, opera ac ſtudio Franciſci à Schooten Leydenſis in Academia Lugduno Batava Matheſeos Profeſſoris.

Hæc Geometria in libros tres dividitur 1. Problemata continet quæ per rectas, & circulos abſolvi poſſunt, nempe primo ad Arithmeticam Geometriam refert, & Geometricè, multiplicationem, diviſionem, & radicum extractiones abſolvit. Tum de æquationibus loquitur, & de problemate plano ſecundum Pappum.

In 2 agit de natura linearum curvarum. Primo in genere diſtinguit loca plana & ſolida, loquitúrque de curvis quæ admitti poſſunt in geometria, de modo inveniendi illorum puncta, tum de parabola, & Ellypſi, præcipue de modo deſcribendi figuras, quæ radios ab eodem puncto prodeuntes colligant per refractionem.

In tertio problemata ſolida proponit, & ea quæ excedunt ſolida, affertque exemplum duarum mediarum proportionalium. Tum loquitur de natura æquationum, de falſis radicibus, aliiſque ad Algebram pertinentibus, cur problemata ſolida ſine ſectionibus conicis conſtrui non poſſint.

Hæc Geometria ſubtilis eſt aperítque viam ad majora. Præter notas breves Florimundi De Beaune Franciſcus à Schooten Commentarium edidit in eamdem Geometriam Renati Deſcartes.

1651 Petrus Montaureus latinè interpretatus eſt decimum Euclidis librum. Interpretatio optima eſt, cui commentarium addit ad majorem claritatem.

1652 Joannes Broſcius S.Thomæ in univerſitate Collegij Majoris Profeſſor, & Canonicus Cracovienſis Apologiam pro Ariſtotele, & Euclide contra Petrum Ramum edidit. Additæ ſunt duæ diſceptationes de numeris perfectis. Occaſio ſcribendi fuit, quod jam olim Petrus Ramus graviter reprehendiſſet Ariſtotelem quòd in exemplum demonſtrationis attuliſſet proprietatem trianguli, quod nempe tres ejus anguli æquivalerent duobus rectis. Oſtendit igitur errorem Petri Rami, & ea occaſione detegit alia errata ejuſdem Petri Rami, præcipue circa angulos figurarum ſolidarum. Sed tam opus illud Petri Rami, quam iſtius apologia, vix excedunt quæſtionem de nomine, parumque promovent Matheſin.

1654 P. Vincentius Leotaud Delphinas Societatis Jeſu, examen quadraturæ circuli à P. Gregorio à S. Vincentio expoſitæ inſtituit tribus libris. Primus in rationum natura explicanda inſumitur, etiam ex mente P. à S. Vincentio, qui de progreſſionibus multa nova habet; Cujus doctrinam planiorem reddit.

In ſecundo primam Patris à S. Vincentio quadraturam ad calculos revocat. In tertio ſecundam, tertiam, & quartam.

Oſtendit autem clariſſimè has quadraturas legitimas non eſſe, quamvis opus P. à S. Vincentio plurimi faciat. Totum hoc examen geometricum eſt.

Huic operi præmiſit amœniorem curvilineorum contemplationem initam ab Illuſtriſſimo, ac Reverendiſſimo Domino Artuſio De Lionne Epiſcopo Vapincenſi. In quarto Lugduni.

1655 P. Claudius Richard Burgundus è Societate Jeſu, & Matheſeon Profeſſor Madriti in libros quatuor Apollonij Pergæi amplum dedit Commentarium, additis Lemmatibus, & Corollariis innumeris. Opus quidem bonum, ita tamen prolixum ut mole ſuâ lectorem obruat ſine magno operæpretio. Minutias enim quaſlibet perſequitur & vitium quod in Apollonio jure reprehendimus ipſe in immenſum auget. Adde difficultatem, quæ ex figuris ſuo loco non repoſitis, ſed in finem ſimul rejectis oritur, quæ eſt major quam à pleriſque exiſtimetur, In folio 1655.

1655 P. Joannes Francois è Societate Jeſu, Opus Gallicum edidit. *De la quantité conſiderée abſolument, & dans ſes nobles ſujets.*

Hic Tractatus conſiderationes tantum generales habet, nec ad particularia deſcendit. Idem Tractatum edidit de Geodeſia in quo ſunt praxes communes ſine demonſtrationibus.

1656 P. Franciſcus Aynſcon Xaverius Antuerpianus è Societate Jeſu compoſuit librum cui titulus, expoſitio, ac deductio Geometrica quadraturarum circuli Patris Gregorij à S. Vincentio. Cui præmittitur liber de rationibus, ac proportionibus geometricis. Occaſio ſcribendi quod nonnulli ſcripſiſſent contra quadraturam P. à S. Vincentio, nempe aliqui contra Tractatum ejus de proportionibus ſeu progreſſionibus Geometricis, alij immediatè contra ipſam quadraturam, authores autem qui ſcripſerunt ſunt, Chriſtianus Eugenius. Adrianus Auzout, Alexius Sylvius, & P. Vincentius Leoutaudus inſignis Geometra è Societate Jeſu. In prima igitur parte agit de progreſſionibus, & proportionibus oſtenditque doctrinam Patris à Sancto Vincentio benè procedere. In ſecunda oſtendit quadraturas Geometricas eſſe contra P. Leoutaudum, ſed non ſatisfacit ſaltem quoad quadraturas. Compoſuit enim P. Leoutaudus aliam reſponſioné in qua Geometricè demonſtrat inſufficientiam quadraturarum, & paralogiſmum.

1657 Villelmus

1657 Villelmus Ouchtred Ætonenſis trigonometriam, ſeu modum computandi triangulorum latera & angulos ex canone mathematico compoſuit. Paucas habet demonſtrationes hoc opus, eſtque ita breve, ut ex eo trigonometriam addiſcere non poſſis, utile tamen poteſt eſſe iis qui jam ſciunt.

1657 prodierunt Franciſci à Schooten Leydenſis in Academia Lugduno-Batava Matheſeos Profeſſoris Exercitationum mathematicarum libri quinque.

Primus continet Propoſitionum Arithmeticarum, & Geometricarum centuriam nempe 60 Arithmeticas, ſuntque regulæ trium varie implicatæ in materiis diſparatis. Geometricæ ſunt de diviſione figurarum, ſimilitudine triangulorum; quorum nonnulla utilia eſſe poſſunt.

Secundus continet conſtructionem problematum quæ ſolis lineis rectis ſolvi poſſunt, quorum pleraque in Euclide continentur, dat tamen alias ſolutiones, ut plurimum difficiliores. In illis nonnulla ſunt utilia ad Geodeſiam.

Libro 3 Apollonij Pergæi loca plana reſtituit, nempe problemata quæ ſunt à Pappo indicata, quæ omnia ferè ſunt inutilia, nihilque habent quod ſit alicujus momenti niſi difficultatem.

Liber 4 Sectiones conicas in plano organico deſcribit. Quæ deſcriptio Geometris, Opticis Gnomonicis, & Mechanicis utilis eſt. Demonſtrat omnes eas deſcriptiones.

Liber 5 Sectiones triginta duas Miſcellaneas continet.

Totum opus habet multa utilia, multa item minuta nulliuſque momenti.

1657 Joannes Bachou Lugdunenſis edidit opuſculum latinum ſub titulo Demonſtratio divini Theorematis quadraturæ circuli, Theologica, Philoſophica, Geometrica, Mechanica unà cum ratione quantitatum incommenſurabilium. Ejus Demonſtratio vitioſa eſt. Pariſiis in octavo 1657.

Idem author eamdem demonſtrationem Gallicè dedit, cum demonſtratione motûs perpetui. Utraque demonſtratio deficit. Pariſiis in octavo 1669.

1657 Iſmael Bullialdus de lineis ſpiralibus demonſtrationes novas edidit. Occaſio ſcribendi fuit, quod doctrinam Archimedis de ſpiralibus præcipue verò quoad illam partem, in quâ oſtendit tangentem helicis æqualem eſſe circumferentiæ circuli, reprehenderat Vieta, aſſerens eam adverſari Euclidi. Totam igitur hanc doctrinam aliis mediis demonſtrat optimè Bullialdus, adhibetque huic doctrinæ, ad ſpecimen, & quaſi auctarium novam indiviſibilium methodum à Cavalerio nuper inventam. Solida eſt doctrina, ut omnia quæ ab hoc authore ſunt elucubrata.

Eodem anno idem tres exercitationes geometricas edidit. Prima verſatur circa demonſtrationes per inſcriptas, & circumſcriptas figuras. Secunda circa conicarum ſectionum quaſdam proprietates. Tertia circa priſmata, quorum naturam explicat.

Addidit & opuſculum in quo Aſtronomiæ Philolaicæ fundamenta breviter & clarius explicat contra Clariſſimi viri Sethi Vardi Oxonienſis Profeſſoris impugnationem.

1658 Prodiit Pariſiis Opuſculum Gallicum cui titulus; *Solution & eſclairciſſement de quelques Propoſitions de Mathematique, entre autres de la duplication du Cube, & de la Quadrature du cercle.* Videtur author eſſe nomine Jovin, utrumque problema ſolvit infœliciter.

1658 Stephanus Angeli Venetus, Ordinis Jeſuatorum Sancti Hieronimi Problemata ſexaginta geometrica edidit circa conos, ſphæras, ſuperficies conicas, & ſphæricas præcipue verſantia. Hoc opus bene & geometricè procedit. Habet tamen quamplurima minuta, & nullius uſus.

1658 Joannes Alphonſus Borellius in Meſſanenſi pridem, tum in Piſana Academia Matheſeos Profeſſor, Opus edidit cui titulum præfixit, Euclides reſtitutus, ſeu priſca Geometriæ Elementa brevius, & facilius contexta, in quibus præcipue proportionum Theoriæ nova, firmiorique methodo promuntur.

In hoc opere author non ſequitur Euclidis ordinem, ejuſque demonſtrationes immutat, ſæpe alias cudit, alias Propoſitiones addit. Quamvis autem opus ſit bonum, & utile, malè tamen ei titulus eſt præfixus, cum vix Euclidem in Euclide reſtituto agnoſcas. Multa habet ex aliis authoribus, ut ex Archimede.

1658 P. Jacobus De Billy è Societate Jeſu, Tractatum edidit de proportione Harmonicâ, in quo quamplurima Problemata hactenus non ſoluta in ſerie trium quantitatum Harmonicè proportionalium, reſolvuntur Algebricè canonicè, & geometricè. Adjicitur appendix in quâ reſolvuntur problemata in ſerie quotcumque quantitatum harmonicè proportionalium. Opus in hâc materiâ perfectum.

1659 Joannes Vallisius Geometriæ Profeſſor Savilianus Oxoniæ duos parvos Tractatus edidit; priorem de Cycloide, & corporibus inde genitis eorumque centro gravitatis aliiſque ſimilibus; poſteriorem epiſtolarem, de Ciſſoide & corporibus inde genitis & de curvarum linearum dimenſione, ſeu cum rectis comparatione, & curvarum ſuperficierum cum planis. Hæc materia plus habet curioſitatis, quam utilitatis. Videtur hic author nimis breviter res perſtringere, loquitur enim de Cycloide non explicatâ ejus naturâ. Figuras item in fine operis ponit, quod eſt peſſimum ut jam ſæpe dixi. Non debuit relinquere methodum communem ſcribendi ut methodum Algebricam ſubſtitueret, eo quod ſine causâ res obſcuras reddit. Oxoniæ in quarto 1659.

1659 Vincentius Viviani Florentinus Tractatum edidit cujus titulus, De maximis, & minimis Geometrica divinatio. Occaſio ſcribendi fuit, quòd cum præter quatuor priores libros Appollonij, nihil haberemus, cum tamen tempore Pappi Alexandrini reliqui extarent, & tempore Eutocij Aſcalonitæ, ſeu anno poſt Chriſti 480. Cum Eutocius qui commentatus erat quatuor priores, promittat commentarium in reliquos. Conſtet item ex Epiſtola Apollonij ad Eudemum argumentum quinti eſſe de maximis, & minimis lineis ad ſectiones conicas pertinentibus, ut explicat Eutocius. Voluit experiri Vicentius Viviani, an poſſet aliquid ſuper eâ re invenire, & quaſi divinare, duoſque libros conſcripſit. Affert autem teſtimonia, quibus aſſeritur libros Apollonij nuper inventos, & ex Arabico in Latinum verſos, non legiſſe prius quam ſuum librum edidiſſe. Quamvis autem non ſit aſſecutus ea omnia quæ traduntur in libro quinto Apollonij nuper reperto, puto tamen Vincentium Viviani plura dixiſſe, & meliora, majoriſque momenti, quam quæ in his Apollonij libris continentur. Nonnulla tamen repetiit ex iis quæ in prioribus libris

dicta fuerant, ſed novis & facilioribus demonſtrationibus probata. Opus bonum eſt, bene compoſitum, & ſatis clarum, mallemque ea addiſcere quæ profert quam quæ in Apollonij libro quinto, & ſequentibus ſcripta ſunt. Multum adjumenti à Mygdorgio, & Patre à ſancto Vincentio habuit.

1660 Antonius Lalovera Gallus Societatis Jeſu, veterum Geometriam promotam edidit, ſeptem de Cycloide libris, & duabus adjectis appendicibus.

In primo libro poſitâ quadraturâ circuli, invenitur quadratura cujuſlibet portionis in Cycloide deſignatæ, & cubatura ſolidi, circa quamlibet baſim parallelam geniti.

In 2 ampliora ſuæ methodi fundamenta ſtatuit, & Cyclocylindricarum figurarum quadratura traditur.

In tertio octo problemata ab Anonymo propoſita demonſtrantur in Cycloide parvâ.

In quarto eadem in Cycloide magna.

In quinto quamlibet curuam in rectam æqualem commutat, methodo generali per ſpiraceas reſpondentes ſpiralibus Archimedis, centrum gravitatis curvarum quærit, ſuperficiem à motu curvarum deſcriptam metitur.

In 6 ſuam methodum accuratius tradit, & Cycloidem magnam examinat diligentius. Habet item appendicula de motu gravium accelerato.

In 7 accuratius examinantur principia Archimedeæ illius libræ quâ in Cycloide tractandâ uſus fuit.

In prima appendice defendit reciprocam libræ legem.

In ſecunda de linearum curvarum, cum curvis comparatione agit.

Opus hoc profundiorem continet Geometriam bene demonſtratam; materia tamen multum habet inutilitatis. In quarto Toloſæ 1660.

1661 Conicorum Apollonij libri quintus, ſextus, & ſeptimus cum Paraphraſe Abalphati Aſpahanenſi Mahometano, ex Arabico in Latinum verſi ſunt ab Abrahamo Ecchellenſi Maronita, additis notis Alphonſi Borelli in Piſana Academia Matheſeos Profeſſoris, qui huic verſioni curam adhibuit. Quintus liber agit de maximis, & minimis, hoc eſt aſſumpto intra ſectionem puncto, à quo in circumferentiam cadant plurimæ lineæ, conſiderat quænam ſint maximæ, quænam minimæ. Sextus comparat ſectiones & eorum ſegmenta. Septimus eſt de tangentibus, & axibus conjugatis. In his tribus libris multa ſunt inutilia, nonnulla bona, multo meliora in Mygdorgio, Patre à ſancto Vincentio, aliiſque. Additum eſt Opuſculum aſſumptorum Archimedis, in quo ſunt nonnullæ proportiones exigui momenti. In folio Florentiæ 1661.

1661 P. Gaſpar Schotus Regis Curianus è Societate Jeſu, in ſuo curſu Mathematico hæc habet Geometrica. Primum librum Iſagogicum, in quo tradit definitiones, & aliquas praxes communes. 6 priores Euclidis libros cum demonſtrationibus. Trigonometriam in qua nec docet methodum conſtruendi canonis ſinuum, tangentium, & ſecantium, nec demonſtrat praxes ſolvendorum triangulorum. Geometriam item practicam in qua demonſtrationes habet.

1663 P. Vincentius Leotaudus Delphinas Societatis Jeſu, inſignis Geometra, Cyclomathiam, ſeu multiplicem circuli contemplationem tribus libris comprehenſam edidit.

In primo quadraturæ examen ab ipſo editum priùs confirmatur, & promovetur. Occaſio ſcribendi fuit, reſponſio Patris Franciſci Xaverij Ainſcon examini quod prius ediderat quadraturarum circuli à P. à ſancto Vincentio propoſitarum. Oſtendit igitur in primo, non fuiſſe ſuis objectionibus ſatisfactum. Examinat item novam quadraturam à Patre Aynſcon propoſitam. Procedit autem ſemper demonſtrativè.

In ſecundo agit de angulo contingentiæ contra eundem Patrem Aynſcon & contra Valliſium. Puto multa in hac materia degenerare in quæſtionem de nomine, & multa ab hoc authore proferri, quæ appoſita diſtinctione ſolvuntur.

In 3 agit de quadratrico Dinoſtrati, cujus alias proprietates demonſtrat. Examinat item Cycloidem lineam à Patre Lalovera propoſitam, quam ad quadratricem videtur revocare. Omnia clarè demonſtrat, fuſius tamen quàm deberet, qui eſt hujus authoris character.

In eodem libro habet in fine nonnulla de centro gravitatis, ſectorum circuli & ſegmentorum, per quadratricem ſcilicet, occaſione nempe libri Patris De la Faille qui de ea materia ſcripſit.

1667 Prodiere Pariſiis nova Elementa Geometriæ Gallica, in quo ordine inſueto Geometria traditur. Multi hoc reprehenderunt quod ordo ita eſſet præpoſterus, ut nullus in his Geometriam addicere poſſet, ita initio ſpinæ, & difficultates occurrunt, ut cujuſque tyronis capacitatem ſuperent. Alij titulum reprehendunt, quòd nec Elementa ſint, quia multa alia ſupponunt, ſunt enim lemmatibus, & ſuppoſitionibus plena; non nova quia pleraque decerpta ſunt ab Euclidis interpretibus. Vidi nonnullos, qui plurimos in iis paralogiſmos notarent. Pariſiis in quarto Gallicè 1667.

1668 Renatus Franciſcus Sluſius ſuum Meſolabum edidit, in quo duas medias proportionales inter extremas datas, per circulum & infinitas hyperbolas, vel Ellypſes exhibet. Item problematum ſolidorum omnium effectionem, per eaſdem curvas exhibet.

Quamvis iſtud opus Geometricum ſit, problema tamen non ſolvit, quia cum circulo adhibetur Ellypſis, aut hyperbola, quæ Geometricè deſcribi non poſſunt.

Acceſſit pars altera de Analyſi, in qua methodum Analyticam non docet, ſed eâ utitur ad eadem demonſtranda. Hæc methodus Analytica optima eſt ut quis apud ſe problematum ſolutionem inveniat, non tamen ut libros componat, quia hæc methodus imaginationi non ſervit.

1669 Prodiit Geometria practica P. Andreæ Tacquet Antuerpienſis è Societate Jeſu libris tribus comprehenſa. In 1. modum ſupputandi canonis & tangentium tradit. 2. Trigonometriam rectilineam, & inſtrumentum menſorium ſeu quadrantem fabricatur, & ſcalam, omnes lineas, etiam inacceſſibiles metitur, ut diſtantiam lunæ, & ſolis à terra.

In ſecundo exercet aliqua problemata, Triangulorum menſurationem perficit, circuli dimenſionem veræ propinquam exhibet, figuras transformat, denique ſectionem circuli per punctum datum perficit: habetque in eo nonnulla à ſe inventa.

In tertio ſoliditatem priſmatum, & cylindrorum, ſphæræ, ſphæroideon conoidis parabolicæ, & hyperbolicæ ſuperficiem, & ſoliditatem metitur.

tur. Item omnia vaſa, corpora mundana, terræ zonas, provincias, regna, ſoliditatem terræ, Lunæ, Solis. Denique ſolida comparat, auget, minuit. Multa item habet de annularibus. Totum opus optimum, & clarum. Addidit in fine appendicem triangulorum ſphæricorum ſine demonſtrationibus.

Idem P. Tacquet prius ediderat Elementorum Euclidis libros 6 priores, undecimum, & duodecimum, multiſque demonſtrationibus ſuis illuſtravit, addidit in fine doctrinam Archimedis de ſphæra, & Cylindro, quam clariorem reddidit.

1671 P. Ignatius Gaſto Pardies è Societate Jeſu, Elementa Geometrica tradidit, in quibus methodo compendioſâ Tyronem docet quæ in Euclide, Archimede, Appollonio ſunt neceſſaria.

Puto tamen hæc Elementa non ſufficere, præſertim cum in iis Euclidis ordo non ſit obſervatus, quem tamen mutare puto fas non eſſe, eo quod ab omnibus fere authoribus, tam veteribus quam recentioribus, ſecundum ſuum ordinem citetur. Pariſiis in octavo 1671.

Anno 1671 P. Guarinus Guarini Mutinenſis Theatinus, edidit Euclidem Adauctum ſeu methodicum, quem etiam Mathematicam univerſalem nominavit Tractatibus 35 Primus eſt de quantitate continua, ſecundus de diſcreta, 3 de Matheſis objecto. 4 in primum Elementorum, quintus in ſecundum, 6 in tertium, ſeptimus in quartum. 8 Arithmeticam ſimplicem continet, nonus in quartum Eucl. 10 in ſextum, undecimus in 7. 12 in decimum, 13 de numeris proportionalibus. 14 de proportionibus continuis, 15 de linearum, & ſegmentorum proportione. 16 de linearum progreſſione geometrica. 17 de proportionalitatibus rationum. 18 de lineis variis ut quadratrice conchili, &c. 19 de angulis. 20 de ſinubus, tangentibus, & ſecantibus. 21 de logarithmis. 22 de interſectionibus planorum. 23 de ſphæræ contactibus. 24 de ſectionibus conicis, ſicut & 25. 26 De Ortographia. 27 Trigonometria. 28 de progreſſione ſuperficierum. 29 Geodeſia rectilineorum, 30 Transformatio curvilineorum, 31 de transformatione ſuperficierum corpora circumdantium. 32 de ſuperficiebus corporum in planum redigendis. 34 de ſolidis planis ſuperficiebus contentis. 35 De corporum comparatione. Auguſtæ Taurinorum in folio 1671 quamvis in hoc opere multa ſint optima, methodus tamen, & ordo non arridet, multa item non ſatis claré explicat. Unde melius ſcripſiſſet, ſi Euclidem in ſuo ordine reliquiſſet, peculiaribuſque tractatibus cæteras materias explicuiſſet. Hic enim ordo confuſionem parit.

Geometriæ ſtatum exhibuimus ſuprà, ad initium præcedentis ſæculi, reſtat ut breviter perſtringamus quæ illi ab eo tempore addita ſunt, & quem progreſſum his duobus ſæculis fecerit. Primo certum eſt quod Trigonometriæ præſertim magna fuerit facta acceſſio, ſi enim comparemus ea quæ ad trigonometriam pertinent, quæ in Ptolemæi Almageſto aliiſque authoribus antiquis pauca inveniuntur, cum iis quæ nunc ubique viſuntur, deprehendemus Antiquos canonem tantum chordarum habuiſſe valde imperfectum, diviſa diametro in 120 partes, atque adeo pleriſque chordis fractiones adhærebant, quod implicatiſſimum reddebat calculum. Nos verò ad majorem præciſionem, & facilitatem ſemidiametro utimur in 1000000 partes diviſa, præterea addidimus canonem tangentium, & ſecantium, innumeras praxes facilitantes invenimus, ut per retractionem radij in primum locum, vitamus diviſionem, per proſtaphæreſin pleraque ſolvimus triangula. Accedit mirabile, & compendioſum logarithmorum inventum, quo nihil potuit excogitari ingenioſius, & commodius, omnia enim problemata per ſolam additionem, & multiplicationem ſolvimus, ex quo fit ut trigonometria ad ſummum apicem evecta videatur. Secundo Geodeſiæ facta eſt magna acceſſio, hanc valde imperfectam, & non ad praxin ordinatam habuerunt Antiqui, his duobus ſæculis innumera inſtrumentorum ſupellectile illuſtrata fuit, inter quæ præcipuum locum obtinet circinus proportionum. Totam Archimedis doctrinam de dimenſione, de ſphæra, & Cylindro aliiſque & ampliorem reddidimus, noviſque & facilioribus demonſtrationibus illuſtravimus. In quo Pater Tacquet egregiè & non inutiliter laboravit. Neque vero omittere poſſum Patris Guldini inventum, in ſuâ centrobaricâ, in quo oſtendit, motum centri gravitatis cujuſcumque figuræ circulariter motæ, determinare magnitudinem rotundi eo motu geniti; eamque revocare ad magnitudinem corporis recti, quod principium viam innumeris menſurationibus aperit, & de facto P. Tacquet his principiis inſiſtens quam plurimorum corporum rotundorum, ut annularium, tam ſuperficiem, quam ſoliditatem dimenſus eſt. Accedit methodus indiviſibilium à Cavalerio introducta, quæ ut eſt ingenioſiſſima, ita facilitatem ſummam omnibus menſurationibus præbet. Quod ſi abſtruſioris Geometriæ placita conſideremus, deprehendemus ingentem conicis ſectionibus factam eſſe acceſſionem, in quo excelluit Mydorgius qui pauciſſimis propoſitionibus non tantum totam Apollonij Pergæi doctrinam complexus eſt, ſed etiam multis ſuis propoſitionibus & demonſtrationibus auxit, & amplificavit. P. item à ſancto Vincentio eamdem materiam novis demonſtrationibus facilioribus illuſtravit, ita ut vix quidquam ulterius requiri videatur. Idem etiam de progreſſionibus optimè egit, quæ materia licet ad Arithmeticam pertinere videatur, viam tamen aperit ad multorum corporum menſurationes peragendas, Petrus item Ramus optimam habet doctrinam menſurationum.

Quamvis autem Geometria progreſſus non pœnitendos his duobus præſertim ſæculis habuerit, hæc duo problemata celebria quadraturæ circuli, & duplicationis cubi inſoluta manent, in ordine tamen ad praxin virtualiter ea ſolvimus, cum ad quamcumque præciſionem perveniamus, ſunt item alia nonnulla, ut diviſio anguli rectilinei in tres partes æquales, quæ meo judicio ſatis inutilia ſunt. Laborandum eſſet in aliis majoris utilitatis, nempe in metiendis aliquibus corporibus occurrentibus, ut in ſuperficie aliquarum fornicum, quam adhuc ſatis expedire nan poſſumus, talis eſt ſuperficies fornicis quatuor Cylindricis concurrentibus conſtantis, pariter dum dolij capacitatem metimur, ſi plenum non ſit, hunc defectum ſatis metiri non poſſumus, quæ quidem licet minuta ſint, quia tamen ad uſum communem pertinent, majoris ſunt facienda, quam quæcumque proprietas conicæ figuræ, quæ nullum uſum habet.

Digitized by Google

CAPUT III.

De progreſſu Arithmeticæ.

Hujus partis Matheſeos naturam ſatis indicat ipſum nomen, quod à voce Græca Ἀριθμὸς numerus derivatur, Arithmeticam enim numerandi artem, aut potius ſcientiam nuncupare poſſumus, quæ circa materiam diſcretam ſeu multitudinem occupetur. Ejus dignitas ex eo ſatis patet, quòd teſte Ariſtotele numerare tam ſit hominis proprium illiuſque à pecudibus diſtinctivum, quàm ratiocinari: nempe primum ſapientiæ opus numeros ſcire, alterum verò ratiocinari, cenſent Pythagoræi, qui æqualiter numerorum cognitione, ac loquelâ mentem rationalem indicari volunt. Ulterius progreſſus eſt Plato qui omnem ex mundo prudentiam eum eliminare aſſeruit qui Arithmeticam ſuſtulerit, cum ſine illa nec res publicæ, nec privatæ tutò ſatis adminiſtrari poſſint. Ejus uſus quàm latè pateat, ſive in aliis Matheſis partibus, ſive in aliis ſcientiis, artibus, omnibuſque negotiis nemo eſt qui neſciat. Neque enim Geometra ullius quantitatis etiam continuæ dimenſiones definiret, niſi ad calculos revocaret, nec Aſtronomus motus cœleſtes, ſyderumque converſiones, & periodos tam indubitatis legibus aſtringeret, ſi numeros ignoraret, nec Architectus tam exquiſitas in operibus menſuras & proportiones ſequeretur, ut muſicas tonorum, & conſonantiarum differentias animadverteret, niſi ab arithmetica ſubſidium advocaret: verbo dicam omnis Matheſis dum practica eſt, in Arithmeticam degenerat. In aliis vero ſcientiis quam latè ſe extendat ejus uſus longum eſſet recenſere, ſufficiat ad hoc Platonis dictum, qui Arithmeticam ſcientiarum veſtibulum vocat, non tantum eò quod ſine Arithmeticâ, vix poſſint conſiſtère, ſed quod numerorum tractatione, rebus difficilioribus aſſueſcit animus, & ad reliquos ſcientiæ ſatus excipiendos præparatur. In vitam civilem latè diffunditur Arithmetica cum nulla poſſit hominum ſocietas iniri nec in ullo contractu tutò ſatis ſine ejus ope conſiſtere. In mutuis enim commerciis conventiſque quibus hæc hominum conjunctio ut plurimum continetur, regnat Arithmetica, cum ea tutò, exerceri non poſſint, niſi rationes dati & accepti, ſortis, & fœnoris rationes ineantur.

A quibus nationibus hanc ſcientiam habeamus non ſatis liquet, communis tamen eſt opinio quod primus è Græcis eam Pythagoras didicerit, qui cum mercaturam exercerent, in ea ut pote ſibi perneceſſaria excelluerunt. Aſſerit enim Porphyrius in vita Pythagoræ, quod Geometriam ab Ægyptiis, à Chaldæis Aſtronomiam, à Phænicibus numeros acceperit, & in Græciam advexerit, cum certum ſit jam à temporibus antiquis Ægyptios Geometriæ, Phœnices mmeris & rationibus, Chaldæos Aſtronomiæ deditos fuiſſe. Uult tamen Flavius Joſephus Pythagoram ab Ægyptiis, hos ab Abrahamo artem numerandi didiciſſe. Profertur à nonnullis, ut confirment ab Ægyptiis numerandi artem profluxiſſe, locus Platonis aſſerentis Ægyptios inveniſſe πεττείαν, ϗ κυβείαν nempe methodum numerandi per calculos, quia tamen harum vocum ſignificatio adhuc incerta eſt, calculiſque tantum per ſuſpicionem tribuitur, nihil ex hoc loco concludi poteſt.

Græci pro Arithmeticis notis Alphabeticis Characteribus utebantur, ut innumeris veterum authorum teſtimoniis probari poteſt, litteras autem à Cadmo in Græciam advectas eſſe, aut ab eo inventas, vix eſt dubitandi locus, id ſignificante fabulâ, quæ ex dentibus draconis à Cadmo diſſeminatis, enatas acies militum aſſerit, nempe ex characteribus in certos ſulcos ſeu lineas ordinatis bellorum hiſtorias indicari, & enarrari. Cum igitur Cadmus eſſet Phœnix numerorum notas unà cum alphabeti Characteribus à Phœnicibus Græcos hauſiſſe dicendum eſt. Potuerunt ergo à tempore Cadmi ab iis, & modum 24 characteribus omnia ſignificandi, numeroſque iiſdem ſignificandi, tum per Pythagoram ab iiſdem perfectiorem numerorum ſcientiam eorumque in omnem partem verſandorum exquiſitiorem artem accipere.

Paulò difficilior erit origo Characterum numeralium à Romanis uſurpatorum. Nonnulli exiſtimarunt eos lineolis ſuam numerationem abſolviſſe, nempe unitatem unica lineola, I; duabus ſed decuſſatis X denarium, tribus ⊏ centenarium quatuor I⊐ quingenta quatuor I⊐ millenarium quinque ⊏⊐ ſignificaſſe. Hos item characteres paulatim degeneraſſe, ita ut pro ⊏ ſit factum C, pro I⊐; IↃ vel etiam D, pro ⊏⊐ ſit factum ∞ vel etiam CIↃ aut M. deinde quia videbatur nimis incommodum, toties repetere unitatem ut numerus octonarius, aut novenarius exprimeretur, interſeruiſſe pro quinario mediam partem denarij, nempe V, & pariter pro quinquaginta mediam partem centenarij ⊏ nempe L, an verè hæc omnia talem progreſſum habuerint non liquet, ſufficiat ad determinandam imaginationem, & ad memoriæ firmitatem CIↃ & M idem eſſe quaſi II ſemicirculi in unum coaleſcant, ∞ pariter D & IↃ idem eſſe.

Notas Arithmeticas vulgares quas Ciphras nominamus, nonnulli eſſe Græcos characteres male formatos ſuſpicati ſunt, quaſi β idem eſſet ac 2, γ idem ac 3. δ idem ac 4. Sed tanta eſt diſſimilitudo, ut probabilitate careat hæc opinio. Quare probabiliùs cenſent plerique Hiſpanos à Mauris, eos ab Arabibus, hos à Perſis, aut etiam Indis hos characteres accepiſſe. Præcipuè cum non à pluribus, quàm à quadringentis annis, iis characteribus utamur. Ex eo quod in pleriſque operationibus Arithmeticis, incipiamus ab ultimo charactere, conjecturam capiunt nonnulli quod ab aliquâ natione quæ in legendo à dextera ad ſiniſtram procedat, ut ſolent omnes quæ ab Hebræis litteras acceperunt, nos eos characteres mutuatos eſſe. Melius tamen & certius procederet conjectura, ſi inveniretur quænam natio iis Cyphris pro litteris alphabeti uteretur.

Variè à variis diſtribuitur Arithmetica nos commodiſſimè tres ejus partes agnoſcemus. Nempe Theoricam, vulgarem, & Algebram. Theorica certas numerorum proprietates conſiderat, quaſi in univerſum, ſive abſolutas, ſive reſpectivas, atque in hâc tantum tradenda, toti ſunt antiqui authores qui extant, ita ut nihil practicum tradant, ſed ſimplices varias numerorum ſpecies, nempe pares, impares, perfectos, imperfectos, primos & compoſitos, tum in numeros planos, ſimiles, diſſimiles quadratos, tum in ſolidos, & cubos exinde proportiones attingunt eaſque dividant & ſubdividunt.

Vulgaris

Digitized by Google

Vulgaris Arithmetica qualis à recentioribus traditur, & à nobis Elementaris vocata eſt aliter hauddubiè dividenda eſt. Primò enim elementares regulas complectitur, additionem, ſubtractionem, multiplicationem, diviſionem tam in numeris integris quam fractis, regulam proportionum, regulas ſocietatis varias, falſi, alligationis, extractiones radicum. Progreſſiones item tam Arithmeticas, quam Geometricas conſiderat earumque proprietates, rationes item, quas item addere, & ſubtrahere, multiplicare, & dividere, docet.

Algebra quæ analytica dici poteſt, eo quod per Analyſin procedat, nempe id quod quæritur jam quaſi cognitum, & datum ſupponat, habet pro fine, & ſcopo quantitatem ſub quæſtionis difficilimæ involucris deliteſcentem, & ex æqualitate, quam cum alia nota habere dicitur, & ſubodorari & in lucem prodere: unde unica eſt Algebræ regula, quam æqualitatem aut potius æquationem dicere poſſumus, quæ tamen tot caſus patiatur ut in varias quaſi ſpecies dividatur. Hujus ſcientiæ authorem Gebrum Græcum authorem ideóque Algebram dictam nonnulli falsò exiſtimarunt, cùm Diophantus Græcus author Gebro antiquior totus ſit in exemplis Algebricis tradendis. Potuerunt quidem à Gebro præcepta Algebræ tradi, quæ in Diophanto tantum indicantur.

Diximus jam ſuprà Platonem methodum analyticam inveniſſe, quæ numeris applicata, Algebræ initium dedit. Algebram communiter his temporibus in duas partimur, in numeroſam ſcilicet, ſeu vulgarem, & antiquam, & in ſpecioſam, utramque iiſdem nixam principiis, progreſſioniſque Geometricæ proprietatibus addictam. Vulgaris circa numeros occupatur, atque adeo propriè dictum algorithmum exercet, nempe additionem, ſubtractionem, multiplicationem, diviſionem, radicum extractionem. Specioſa verò rerum ſpecies & elementares Alphabeti notas uſurpat, ideòque metaphoricum, ſeu ſimilitudinarium algorithmum agnoſcit. Prima Diophantum authorem agnoſcit, Hæc Vietam qui ſub finem præcedentis ſæculi & hujus initium floruit. Quænam ſit præſtantior ſatis definiri non poteſt. Mirabilitatem quidem majorem præſefert ſpecioſa, quod reconditiori, & abſtractiori methodo progrediatur, in hoc tamen deficit, quod imaginationi non ſerviat, unde puto non peius in Matheſin peccari poſſe, quam ſi geometrica problemata, quæ figuris explicari, & oculis ſubjici poſſunt, methodo algebricæ addicantur, & ſub hoc quaſi velamine in publicum prodeant. Vulgaris Algebra in pleriſque melius imaginationi obſecundat, in aliis item melius ſpecioſa. In ſex partes communiter poteſt tota Algebra dividi.

Prima pars eſt quaſi ad æquationem iſagogica, numerorumque coſſicorum tam integrorum, quàm fractorum algorithmum tradit. Secunda æquationem explicat ejuſque reductiones, hypobibaſmum, antitheſin, paraboliſmum, iſomeriam.

Tertia æquationes quadraticas ſecundum antiquam methodum ſolvit, tum poteſtatum omnium generationes explicat.

Quarta affectas poteſtates conſiderat.

Quinta poteſtatum analyſin continet, ad ſpecioſam præcipuè ordinatam. Sexta continet methodum extrahendarum radicum ex poteſtatibus affectis. Quo autem progreſſu hæc Arithmetica fuerit inventa melius recenſitis authoribus qui de ea ſcripſerunt, allatóque operum argumento patebit.

Secundo Urbis conditæ ſæculo, ſexcentis circiter ante Chriſtum annis floruit Pythagoras Samius, qui Ægypto, ac Perſide perluſtrata, in Mathematicis excelluit, primúſque numerorum ſcientiam in Græciam aut invexit, aut ſaltem multum illuſtravit: primus Mathematicæ ludum aperuit. Ita Proclus, & Plinius.

Telauges ejus filius Magiſter Empedoclis dicitur quatuor libros ſcripſiſſe de quaternario.

Tertio Urbis conditæ ſæculo floruit Nicomachus Arithmeticus quem Boethius ſequitur in omnibus: ut autem videas qualem antiqui nobis Arithmeticen reliquerunt, hæc quam à Nicomacho accepiſſe aſſerit idem Boethius, & clariorem, talis fuit. Hæc duobus libris continetur. In primo agit de numeri definitione, diviſione, in parem, & imparem, primum & compoſitum, perfectum, & imperfectum, tum de ſpeciebus inæqualitatis, nempe de numero multiplici, ſuperparticulari, ſuperpartiente, & cæteris.

In ſecundo habentur nonnulla circa compoſitionem rationum aliquarum, ſed ſtrictim. Exinde conſiderat numeros per analogiam ad figuras geometricas, ut de numero lineari, plano, quadrato, pentagono, ſolido, ſphærico. Denique de proportionalitatibus, de arithmeticâ medietate, Geometricâ, Harmonicâ, de maximâ, & perfectâ ſymphoniâ; quæ tribus diſtenditur intervallis. Totum opus optimum eſt ſoletque à plurimis initio ſeptimi libri Euclidis apponi. Hic Nicomachus dicitur à Pappo Pythagoricus. Probabile tamen eſt quod aliam à Phœnicibus Arithmeticam didicit Pythagoras, quæ nempe ad praxin, & ad mercimonia exercenda eſſet utilis.

Plurimi in hanc Nicomachi Arithmeticen ſcripſere, ut Joachimus Camerarius qui ſcripſit explicationem in priorem librum, eamque ſuæ logiſticæ ſubtexuit. Reliquit item Nicomachus Arithmetica Θεολογούμενα, unde excerpta putantur incerti authoris in Theologia Arithmetices. Utrumque opus Nichomachi excudit Vechelus Pariſiis 1538. Eandem Arithmeticam explicuit commentario Aſclepius, & Trallianus Ammonij diſcipulus, & Jamblichus, cujus ultimi ſcripta dicuntur eſſe in Bibliotheca Regia.

Quarto Urbis conditæ ſæculo 400 circiter ante Chriſtum Democritus Mileſius uno anno major natu quàm Socrates, ſcripſit de numeris Geometricis. Ita Laertius.

Eodem ſæculo Plato Socratis auditor modum demonſtrandi analyticum invenit, nempe prima Algebræ fundamenta jecit. Ab eo Leodamas Thaſius Analyſin didicit; Eudoxus Gnidius Platonis comes in Ægyptum quintum Elementum compoſuit de proportionibus, & modo argumentandi per proportionem, quod numeris æquè ac quantitati permanenti accommodari poteſt.

Philoſophus Platonis auditor ſcripſit de Arithmetica, & numeris ſecundis, quæ non extant.

Quinto Urbis conditæ ſæculo, ante Chriſtum trecentis circiter annis Xenocrates Chalcedonius de numeris librum unum ſcripſiſſe dicitur. Fuit Platonis auditor.

Euclides Megarenſis ut volunt plerique in ſuis Geometriæ Elementis multa de numeris habet, non tantum in quinto, ſed præcipue in ſeptimo, octavo, nono, in quo plurimas eorum proprietates aperuit, præcipuè vero in ſeptimo, octavo, nono, in quibus præcipuè agit de numeris primis, & compoſitis, tum de numeris planis. Solidis, pari-

bus, imparibus: non agit autem de numeris niſi in ordine ad doctrinam indiviſibilium, quam libro decimo tradit, ea tamen quæ habet poſſent ferè ſufficere ad demonſtrandam totam Arithmeticam vulgarem.

Paulò poſt Theophraſtus Eriſſius Ariſtotelis diſcipulus, & ſucceſſor inter alia ſcripſit unum librum de numeris, & alium hiſtoriarum Arithmeticarum.

Septimo Urbis conditæ ſæculo circiter 100 ante Chriſtum annis Cleomedes ſcripſit Arithmeticam, quæ dicitur aſſervari in Bibliotheca Vaticana.

Sub initium ſecundi ſæculi à Chriſti Nativitate Diophantes Alexandrinus Algebræ libros 13 compoſuit, ſex quidem latinè vertit Xylander, quos à Durero Cæſareo apud Polonos oratore acceperat. Eoſdem ſex libros Diophanti Nobilis Gaſpar Bachet De Meſeriac nobilis Sebuſianus commentariis eruditiſſimis illuſtravit, ſicut & de multangulis numeris librum unum. Totum autem Diophanti opus continet varia problemata Algebrica, præcepta autem non habet niſi indicata, ſed ea ſupponit.

Quarto Chriſti ſæculo Maximus Epirota ſcripſit de numeris.

Conſtantini temporibus Jamblicus Chalcidenſis ex Cœleſyria ſcripſit Græcè introductionem in Nicomachi Arithmeticam. Habuit præceptorem Alexandrinum, fuitque Anatolij contubernalis. Scripſit librum primum de vita Pythagoræ, ſecundum adhortationem ad philoſophiam Pythagoricam, quos duos Arcerius eſt interpretatus. Tertius eſt de communi Mathematica. Quartus eſt hæc introductio quam Samuel Tennulius latinam fecit, & notis illuſtravit anno 1668. Hoc opus primo habet diviſionem Matheſeon ex duplici quantitate, continua ſcilicèt, & diſcreta; agit autem in hoc opere de diſcreta, & primò de numeris in genere, de numeris planis, & ſolidis, aliiſque in ſecunda parte de numeris longioribus, de medietatibus cæteriſque in Genere. In hoc opere ſunt pauca utilia præter notionem figuratorum numerorum. Scripſit item de fato.

Quinto Chriſti ſæculo pauca ſcripſit S. Auguſtinus de principiis Geometriæ, & Arithmeticæ.

Theon item Alexandrinus ſcripſit de Arithmetica.

Sexto Chriſti ſæculo Anitius Manlius Severinus Boetius vir exconſul, & ordinarius Patricius Arithmeticam compoſuit, quam in præfatione dicit, ſe ex iis quæ à Nicomacho fuſius de numeris diſputata ſunt collegiſſe eamque clarius & brevius in hoc opere tradere. Conſtat autem duobus libris in primo agit de numeri definitione, in parem, & imparem; compoſitum, & primum perfectum, & imperfectum, exinde de ſpeciebus inæqualitatis, de numero, multiplici, ſuperparticulari, ſuperpartiente, & cæteris. In ſecundo habentur nonnulla circa compoſitionem Rationum, ſed ſtrictim. Exinde conſiderat numeros, per analogiam ad figuras Geometricas quas imitari poſſunt, ut de numero lineari, de numero plano, de quadrato, pentagono, ſolido, de ſphærico. Denique de proportionalitatibus, de medietatibus Geometrica, Arithmetica, harmonica; de maxima & perfecta ſymphonia, quæ tribus diſtenditur intervallis. Totum opus optimum continens id totum quod ab antiquis de Arithmetica accepimus. Solet à plurimis præponi libro ſeptimo Euclidis. Extant in hanc Arithmeticam Girardi Rufi, Jodoci Clotovei, Jacobi Fabri Stapulenſis, & Franciſci Maurolyci Commentaria.

Eodem tempore Caſſiodorus vir clariſſimus & Conſularis ſcripſit de Arithmetica.

Joannes item Grammaticus cognomento Philoponus ſcripſit Arithmeticam & Commentarium in Arithmeticam Nicomachi.

Septimo Chriſti ſæculo Martianus Capella ſcripſit de Geometria, & Arithmetica, Aſtronomia, Muſica.

Octavo Chriſti ſæculo Venerabilis Beda ſcripſit de Arithmetica.

Nono Chriſti ſæculo Pſellus author Græcus de quatuor Mathematicis compendioſè ſcripſit, primoque loco de Arithmetica. Habet autem generales tantum notiones numerorum, nempe diviſionem in parem, & imparem, perfectum, imperfectum; compoſitum, & primum. Deinde proportiones explicat, de numeris planis & ſolidis agit. Hoc compendium Guillelmus Xylander Auguſtanus primus vertit, & annotationibus illuſtravit Editum Baſileæ in Octavo 1556.

Eodem ſæculo Geber Arabs floruit à quo volunt nonnulli Algebram dictam quod eam invenerit, ſed refelluntur facile ex ſcriptis Diophanti, quæ exempla Algebrica continent, methodumque Algebricam ita indicant ut nullus relinquatur dubij locus. Forſitan quod ab eo primo præcepta habuerimus, ſed non conſtat, quia non extant ſaltem ſub ejus nomine. Alij Algebram tribuunt Mahometo Moſis filio, pariter Arabi, quem Cardanus inter duodecim ſubtilia totius orbis ingenia reponit.

Duodecimo Chriſti ſæculo Jordanus ſcripſit libros 12 de Arithmetica.

Hoc eodem tempore Theon Smyrnæus expoſitionem edidit, eorum quæ ad Platonis lectionem utilia ſunt. Nempe explicuit loca Platonis ad Matheſin pertinentia. Hujus opus Græcè editum eſt, latinè verſum, & notis illuſtratum ab Iſmaele Bullialdo Juliodunenſi, depromptum ſcilicet ex Thuana Bibliotheca. Quia autem Plato ſæpe in ſuis operibus numeros immiſcet, hic author de numeris agit, nempe eadem fere repetit quæ Pſellus habet in ſuo compendio. In hoc opere multa commemorat ex Philolao, Laſo Hermionenſi, Hippaſo Metapontino, Eudoxo Archita, Empedocle, Eratoſthene, Herophilo, Thimotheo Evandro, Ariſtotele, Ariſtoxeno, Adrato, Poſſidonio, Thraſillo, quæ alibi non inveniuntur.

Decimotertio Chriſti ſæculo circa annum 1240 claruit Alexander de Villa dei Dolenſis qui ſcripſit Arithmeticam, & computum Eccleſiaſticum. Ex his ſatis manifeſtum redditur quam ab Antiquis Arithmeticam acceperimus, quamvis enim mihi dubium non ſit illos habuiſſe aliquas praxes Arithmeticas, quibus elementares operationes additionis, ſubtractionis, multiplicationis, & diviſionis perficerent, ſi tamen præciſe ſpectemus ea quæ in eorum libris inveniuntur, nihil aliud deprehendimus, niſi univerſales illas diviſiones de quibus locuti ſumus, nonnulla de proportionibus, ſeu ſpeciebus inæqualitatis, de progreſſionibus item, de medietatibus Geometricis, Arithmeticis, Harmonicis, aliiſque ſimilibus diviſionibus. Algebram autem licet non ignorarent, præcepta tamen algebræ non extant in antiquis, Diophantus enim exempla Algebrica, quam plurima ſolvit, Algebræ, tamen prima præcepta non tradit.

Digitized by Google

tradit. Quare Arithmetica communis quæ haud dubiè modò perfectiſſima eſt totam fere à recentioribus conditam eſſe, & quaſi inventam, haud potius in ordinem redactam eſſe oportet. Algebram autem à Diophante non accepimus, qui ante Xylandrum latinum non habebamus. Probabile autem mihi eſt præcepta Algebrica ab Arabibus ad nos profluxiſſe, immo & quamplurima Arithmeticæ communis. Videmus enim Tartagliam alioſque Algebriſtas ſuperioris ſæculi, Algebræ nomen Arabicum impoſuiſſe, ſicut & regulæ falſi. Sed ad recentiores authores veniamus.

1 Jacobus Faber Stapulenſis in Arithmeticam Jordanis Commentarium edidit 1480.

Primus liber paſſiones numerorum communes diſcurit.

Secundus de proportionum, & proportionalitatum paſſionibus.

Tertius de numero, primo, compoſito, ad alterum primo, & in aliqua proportione minimo.

Quartus de numeris continuè proportionalibus, commenſuralibus, & incommenſuralibus.

Quintus de additione, ſubtractione, & partitione rationum.

Sextus de numeris quadratis, cubicis, ſuperficialibus, ſimilibus & ſolidis.

Septimus de numero pari, impari, perfectis, abundantibus, & diminutis.

Octavus de formis numerorum trigonis, tetragonis, pentagonis, &c. pyramidalibus, ſerratilibus & teſſeris.

Nonus de æqualitate, inæqualitate, multiplicibus ſuperparticularibus.

Decimus de medietate, Arithmeticâ, Geometricâ, Muſicâ, & aliis.

Opus quidem bonum ſed in quo pleraque ex Boethio deſumpta ſunt.

2 Eodem anno Faber Stapulenſis Epitomen edidit in Arithmeticam Boethij, & Judochus Clitoveus Neoportuenſis in hanc Epitomen Commentarium adjecit. Habet item nonnulla de additione, ſubtractione, multiplicatione, diviſione, extractione radicum, ſed nimis breviter.

3 Prodiit 1521 Gallica Arithmetica compoſita à Magiſtro Stephano de la Roche dicto Villefranche Lugdunenſi, diviſa in duas partes, quarum prima in ſex differentias dividitur. Prima differentia quaſi Iſagogica agit de numero in genere, de ſpeciebus, numeris perfectis, partibus aliquotis de progreſſionibus, & proportionibus.

Secunda differentia agit de numero integro, de quatuor regulis, earumque examinibus.

Tertia differentia habet doctrinam fractorum abſolutam.

Quarta differentia de regula trium, eiuſque ſpeciebus, de regula falſi.

Quinta de radicibus earumque extractionibus, & abbreviationibus.

Sexta habet principia algebræ.

Secunda pars hujus Arithmeticæ eſt practica, ſeu applicativa præceptorum diverſis materiis, eamque dividit in decem differentias.

Prima agit de Monetis.

2 De mercibus quæ menſurationi ſubjacent.

3 De mercibus quæ ponderantur.

4 De mercibus quæ numero ſubjacent.

5 De mercibus quæ menſuris cavis, ſeu vaſibus diſtrahuntur.

6 De Societatibus.

7 De permutationibus.

8 De Cambiis.

9 De ſortibus & lucris.

10 De auro & argento.

Opus optimum ſi demonſtrationes haberet, & idiomate paulo meliori traderetur.

Girardus Ruſus anno 1521. Commentarium edidit in Boethij Arithmeticam in multis non contemnendum, ſed importunè myſticis numerorum applicationibus confarcinatum. 4

Anno 1523. Frater Lucas de Burgo Sancti Sepulchri Ordinis Minorum, Theologiæ Profeſſor ſummam edidit Italicam de Arithmetica, Geometria, proportionibus, & proportionalitatibus, diviſam in plurimos tractatus. 5

Primo agit de numerorum diviſionibus in parem, & imparem, de numeris perfectis, aliiſque quæ aut in Euclide reperiuntur, aut in Boethio.

Secundo tradit Algorithmum, ſeu regulas additionis, ſubtractionis, multiplicationis, diviſionis; cum ſuis probationibus, habet autem plurimos modos multiplicationis, & diviſionis.

Tertio agit de progreſſionibus, habet autem multas praxes peculiares, exemplis illuſtratas, præcipuè ad cognoſcendam ſummam totius progreſſionis, etiam geometricæ.

Quarto de extractione radicum, etiam in fractis, & approximatione, de modo extrahendi radicem quadratam, geometricè ſeu mediam proportionalem, extrahendi radicem cubicam etiam geometricè, ſed praxis deficit.

Quinto de fractis eorumque algorithmo.

Sexto de regula trium etiam in fractis, de quo puncto ſunt exempla & quæſtiones quàm plurimæ.

De modis argumentandi ex proportionalitate, & de algorithmo proportionalitatum.

Septimo de regula helcataim ſeu regula falſi duplicis poſitionis.

Octavo Tractatum de Algebrâ ſed nimis brevem; Nono de regulis Societatis, aliiſque innumeris ad mercaturam pertinentibus.

Totum opus utile eſt & ad particularia deſcendit. 1528.

Joannes Fernelius Ambianenſ. de proportionibus ſcripſit, duos libros: prior liber eſt de proportionibus ſimplicibus, tam magnitudinum, quam numerorum, etiam fractorum rationes edocet; poſterior ipſas proportiones comparat. 6

In hoc opere author nimis univerſaliter loquitur nec ad particularia ſatis deſcendit. 1537.

Cuthebertus Tonſtallus de arte ſupputandi libros quatuor edidit. In primo agit de quatuor regulis fundamentalibus, & extractione radicum, de progreſſione Arithmeticâ. In ſecundo de fractionibus. In tertio de regulis trium, ſocietatis &c. Habet autem quæſtiones 46. In quarto agit de proportionibus, & regula falſi, habet item quæſtiones multas. 7

Opus bonum, non ſatis aliquando explicatum, nec demonſtratum. 1543.

Prodiit Arithmetica integra authore Michaele Stifelio, tribus libris comprehenſa. 8

In primo algorithmum numerorum integrorum tradit, agit de numerorum ſpeciebus, item de progreſſionibus, arithmeticis, geometricis in ordine ad algebram. De extractionibus radicum, proportionibus, de muſicis progreſſionibus, de numeris vulgariter denominatis, de regula falſi & alligationis.

In ſecundo de numeris irrationalibus, de algorithmo

rithmo

rithmo medialium, de propoſitionibus Euclidis pertinentibus ad irrationales & binomiales, de reſolutione linearum irrationalium in rationales, de numeris irrationalibus contractis ad corpora.

In tertio regulam algebræ explicat.

Quamvis hoc totum opus bonam & ſolidam doctrinam contineat, eam tamen ita breviter explicat, & modo non communi, ut ſit perdifficile mentem ejus aſſequi niſi aliunde rem tenueris; unde hic liber ſine præceptore explicante non poteſt octum efficere.

9 Anno 1550 Joannes Baptiſta Ruchetta Genuenſis Italicam Arithmeticam edidit qua reſolvitur facile omne dubium mercatorium, ſupponit autem jam Arithmeticam elementarem circa integros; quare incipit ab Elementis fractionum, tum proponit regulam trium ſimplicem, duplicem, multiplicem, rectam & inverſam, & exinde, regulam falſi, ſimplicis, & duplicis poſitionis regulam alligationis.

In ſecundo tractatu agit de regulis ſocietatis, tam civilibus quam ruſticanis, habetque regulas pro cambiis, legaturis aliiſque hujuſmodi, abundat autem exemplis. Opus bonum & utile.

10 1554 Henricus Glareanus Epitomen compoſuit de ſex Arithmeticæ practicæ ſpeciebus, in quâ regulas communes tam cyphrâ quam calculis perficit. Habet ferè omnia bene quidem, ſed nimis breviter. Pariſiis in octavo 1554. Lugdun. 1554.

11 Jacobus Peletier Cenomanenſis quatuor libros Arithmeticæ compoſuit gallicè, in quibus regulæ communes inveniuntur in numeris integris, & fractis, extractiones radicum, regulæ falſi cæteræque cum Principiis Algebræ.

Habet item fractiones aſtronomicas, quarum algorithmum tradit. Omnia ſunt correcta, & bona, idioma non item. Lugduni in octavo. 1554.

12 Anno 1556. Nicolaus Tartaglia Venetus primam partem Arithmeticæ Italicæ ſeptemdecim libris tradidit, in quâ habet omnes praxes, & regulas non tantum ad negotiationes, ſed etiam ad quemcumque calculum ſpectantes.

In primo ſunt præambula de numeris.

In ſecundo elementares tradit regulas.

In tertio habet numeros denominatos monetarum, & ponderum, unamque ſpeciem monetæ cum alia comparat.

In quarto methodum naturalem docet omnem computum perficiendi.

In quinto, & ſexto alias duas methodos faciliores exhibet.

In ſeptimo agit de fractionibus.

In octavo regulam trium explicat.

In nono de regulis ſocietatis, cambij &c.

In decimo regulam trium inverſam, & regulam ad determinandum pondus panis proponit.

In undecimo de mercede annuâ & lucro annuo, detegitque errores fratris Lucæ aliorumque Practicorum.

In duodecimo de ſocietatibus agit & regulis ad eas ſpectantibus.

In decimo tertio de dolis agit, pariterque fratrem Lucam de Burgo reprehendit.

In decimo quarto agit de variis ſpeciebus cambiorum.

In decimo quinto de alligatione metallorum.

In decimo ſexto de regula helcatain ſeu regula falſi, ſimplicis poſitionis.

In decimo ſeptimo de regula falſi duplicis poſitionis.

Opus hoc eſt abſolutiſſimum & uſquequaque perfectum.

Eodem anno ſecundam partem edidit in undecim libros diviſam.

In primo tradit generales numeri diviſiones, item progreſſiones, & methodum eas colligendi in unam ſummam, aliaque hujuſmodi.

In ſecundo agit de extractione radicum omnium poteſtatum, tam in numeris integris, quam fractis. Plurimæ autem methodi ab eodem authore inventæ ſunt.

In tertio agit de multiplicatione, diviſione, additione, ſubtractione radicum.

In quarto tradit algorithmum proprium algebræ per plus & minus.

In quinto addit, ſubtrahit, multiplicat, dividit, binomia.

In ſexto probat duas primas propoſitiones ſecundi Euclidis.

In ſeptimo de proportionibus diſſerit, eaſque addit, ſubtrahit, multiplicat, dividit.

In octavo conſiderat proportionem geometricam, & arithmeticam.

In nono conſiderat geometricæ progreſſionis proprietates, quod primus poſt radicem ſit quadratus, ſecundus cubus &c.

In decimo continetur inventum authoris quo docet invenire quantitatem quæ per binomiam quodcumque multiplicata, generet quantitatem rationalem, pariter quantitatem quamlibet per binomium dividit.

In undecimo multa pertinentia ad decimum Euclidis explicat melius, & in numeris oſtendit.

Quamvis habeat præcipuas algebræ difficultates, multaque de ſuo addat circa illam; non tamen ſatis methodicè procedit ut quis ex eo ſolo eam poſſit addiſcere. In ſexta parte ejuſdem tractatus de numeris, & menſuris tradit regulam algebræ quam etiam nominat almucabalam ſeu regulam coſæ quam dicit inventam à Mahometo filio Moyſis Arabe. Sed Diophantum non viderat. Unicum autem habet librum agitque de regulâ algebræ. 2. De poteſtatibus. 3. De algorithmo, dignitate binomiorum, trinomiorum, de æquationibus, non tamen omnibus; ulterius enim provecta eſt hoc tempore algebra. Eſt tamen optimus algebriſta.

1567 Conradus Daſypodius logiſticam ſatis 13
bonam, in quâ præcipuè regulas progreſſionum tradit, compoſuit, nimis tamen breviter. Argentorati in octavo 1567.

1568 Joachimus Camerarius Pabempergenſis 14
Opus edidit de Græcis Latiniſque notis, & præterea Saracenicis, cum indicio elementorum ejus nempe logiticè in quo plurima ſunt curioſa.

Acceſſit explicatio Arithmeticæ Nicomachi.

Hoc Opus nec ſatis digeſtum eſt, nec clarum. Baſileæ in octavo 1516.

1574. Magiſter Guillelmus Xilander Auguſta- 15
nus publicus Philoſophiæ Ariſtotelicæ in ſcola Heidelbergenſi Doctor, Diophanti Alexandrini rerum Arithmeticarum libros ſex latinos fecit, & Commentariis illuſtravit. Primis duobus adjecta ſunt Scholia Maximi Planudis. Adjectus item eſt liber de numeris polygonis, ſeu multiangulis.

Opus hoc continet exempla algebræ, præcepta vero ſupponit; Xilander in hoc opere concinnando

Digitized by Google

do multum laboris non inutiliter inſumpſit, quamvis Clariſſimus vir Dominus Bachet in multis oſtendat Xilandrum mentem authoris non eſſe aſſecutum.

1575 D. Franciſcus Maurolycus Abbas Meſſanenſis in primo libro cum vidiſſet Eucliden egiſſe tantum de planis, quadratis, ſolidis, & cubis; de cæteris autem exagonis, triangulis, pentagonis, cæteriſque non egiſſe, pariter Pythagorâ, Jamblicum, Nicomachum & Boetium qui ferè omnia ex Nicomacho ſumpſit; conatur ſcientiam provehere, & aliqua nova de his ſpeciebus de ſuo addere. In ſecundo libro regulas omnes Arithmeticas novo modo demonſtrare conatur, methodo tamen difficili nec ita clarâ; in ſecundâ parte multa habet optima de incommenſuralibus, multa item ad algebram ſpectantia. In quarto Venetiis 1575.

16 1577 Guillelmus Goſſelinus Cadomenſis Bellocaſſius de arte magnâ, ſeu de occultâ parte numerorum, ſeu de Algebrâ libros quatuor edidit in quibus explicantur æquationes Diophanti, regulæ quantitatis ſimplicis, & ſurdæ.

In primo præcipuè agit de proportione arithmeticâ & geometricâ, item de rationibus addendis, ſubtrahendis dividendis, de regulâ duplicis hypotheſis.

Liber ſecundus de additione, & ſubductione nominum, de inventione laterum, ſeu radicum & eorum algorithmo.

In tertio de æquatione tam ſimplici, quam ſecundâ, de revocatione quantitatum ad minorem valorem, de æquatione tertiâ, ſeu cubicâ; de fictitiâ æquatione Diophanti.

Liber quartus de quantitate ſimplici, & ſurdâ.

Opus optimum quidem, ſed tantiſper nimium breve; non attigit quidem algebram ſpecioſam, ſed multa habet optima circa algebram numeroſam. Pariſiis in octavo 1577.

17 1578 Gemmafriſius Medicus, & Mathematicus, Arithmeticam practicam, & brevem & facilem compoſuit, in quatuor partes diviſam.

1. Continet elementares regulas in integris.
2. Numeros fractos.
3. De variis regulis proportionum de regulâ algebræ breviter differit.
4. De proportione.

Huic operi additæ ſunt annotationes de fractionibus, aſtronomicis & radice utraque.

Hoc opus optimum eſt videturque omnia complecti. Peletarius addidit opuſculum de cognoſcendis per memoriam, Kalendis, idibus, feſtis mobilibus, aureo numero, loco Solis, & Lunæ in Zodiaco. Pariſiis in octavo 1578.

18 1579 Raphael Bombelli Bononienſis Algebram edidit in tres libros diviſam.

In primo tradit præcepta communia, ut algorithmum numerorum algebricorum, extractiones item radicum quadratarum & cubicarum, & aliarum, de binomiis, item de reſiduis & radicibus eorum, de radicibus ligatis ſeu univerſalibus.

In ſecundo de æquationibus puris, & impuris earumque algorithmis.

In tertio profert varia problemata.

Videtur in multis terminos inſuetos affectare; & multa non demonſtrare, in genere tamen hoc opus eſt ſatis perfectum. In quarto Bononiæ 1579.

19 Anno 1584, Joannes Baptiſta Benedictus Patricius Venetus poſt ſuam Gnomonicam, appoſuit Opuſculum de Arithmeticâ, in quo variis Arithmeticis quæſitis reſpondet, præcipuéque dat rationem aliquarum praxium Arithmeticarum, quarum præcipuæ in Arithmetica, aut in algebrâ demonſtrantur. Quamvis ea quæ profert ſint ſatis bona, quia tamen ſine ordine proferuntur vix ſunt ſatis clara ut à quolibet percipiantur.

1585 P. Chriſtophorus Clavius Bambergenſis Societatis Jeſu, Epitomen Arithmeticæ practicæ compoſuit, in quo poſt regulas communes, agit de fractis, tum de regulis proportionis, ſocietatis, alligationis falſi, progreſſionibus geometricis extractionibus radicum. Opus ſolidum & bonum. Romæ in octavo 1585. 20

1588 Prodiit Arithmetica compendioſa Martini Fuſtel Gallicè unà cum inſtructione ad ordinandum librum computorum. Bonas & utiles habet aliquas praxes, malè tamen explicatas, & non demonſtratas. 21

1588 Petrus Savonne dictus Talon Avenionenſis, Arithmeticam compoſuit Gallicè, in quâ præter regulas vulgares, plures abbreviationes regularum appoſuit, præcipuè in ordine ad commercium, & circa emptiones rerum particularium communiter uſitatarum. Habet item regulas circa monetas, cambia, reductiones menſurarum. 22

Opus in praxi optimum, non tamen in multis ſatis clarè explicatum. Lugduni in octavo 1588.

1599 Prodiit Petri Rami Arithmetica libris duobus comprehenſa à Lazaro Schonero emendata & aucta. 23

In primo libro habetur Arithmetica ſimplex, comprehendens regulas Elementares tam in numeris integris quàm fractis.

In ſecundo libro habet partem Arithmetices comparativam, primo proponit regulas alligationis, tum de rationibus agit, nempe de additione, ſubductione earum, tum de diviſione in varias partes, tum de regulâ aureâ variè combinata nempe regula ſocietatis, tum agit de progreſſionibus.

Totum hoc opus ſcientificum eſt, videtur tamen deficere quòd importunis diviſionibus & ſubdiviſionibus obſcuret omnia, quod item non demonſtret, ſed tantum demonſtrationem indicet. Affert tamen multa exempla quæ lucem non modicam afferunt. Vix ille qui in Arithmetica non verſatus fuerit, eam in eo authore addiſcet. Habet item parvum tractatum de numeris figuratis.

Ejuſdem Petri Rami Algebra libros ſex habet.
Primus algorihmum continet.
Secundus agit de æquatione.

Hoc opus imperfectum eſt in quo nullus addiſcet algebram. Idem Opus habet de logiſticâ ſexagenaria, quod aliquam poteſt habere utilitatem iis qui Aſtronomicum calculum per ſexagenas inſtituunt.

Anno circa 1600 vel paulò antè floruit Pariſiis Franciſcus Vieta Fontenæenſis Analyſeos ſpecioſæ author primus, ſeu algebræ quam vocant ſpecioſam, hujus autem Analyſcos ſpecioſæ Opus ex pluribus Tractatibus coaleſcit. 24

Primus Tractatus eſt Iſagoge in artem analyticam, in quâ poſt definitionem hujus ſcientiæ affert ſymbola proportionum, & æqualitatum, leges homogeneorum & heterogeneorum, præcepta logiſtices ſeu algorithmum ſpecioſum, exinde expurgationes æqualitatis, nempe anthiteſin, hypobibaſmum, paraboliſmum, quæ omnia ſunt ita breviter dicta, ut ea tantum intelligat qui jam

jam in communi Algebrâ fuerit exercitatus.

Secundus ad logiſticen ſpecioſam notæ priores in quo tractatu praxin affert algorithmi ſpecioſæ in exemplis.

Tertius Zeteticorum libri quinque in quibus affert ſolutionem variorum problematum methodo ſpecioſâ.

Quartus de æquationum cognitione, & emendatione tractatus duo.

Quintus de numeroſâ poteſtatum reſolutione. In hoc tractatu radices extrahit, non tantum ex poteſtatibus puris ſed etiam affectis.

Sextus ad Adrianum Romanum, nempe continet ſolutionem problematis propoſiti ab Adriano Romano omnibus Mathematicis totius Orbis.

Septimum ſupplementum Geometriæ.

Hic author vulgò cenſetur ſubtilis & profundus, graviter tamen peccat quòd vocibus inſuetis utatur, modoque obſcuro res enunciet, ita ut niſi incurriſſet in manus aliquorum qui rebus obſcuris delectantur, jacuiſſet illius Opus, & meritò. Hic tamen excuſari poteſt quod ejus opera non fuerint perfecta, ſunt enim ferè omnia poſthuma.

25 1608 Simon Stevinus Principis Auriaci Mathematicus in fine ſuorum operum habet Miſcellanea, & inter illa rationem diſponendi librum computorum ſive rationum, tam pro mercatoribus, quam pro Præfectis ærariorum publicorum. Opus utile & ad praxin ſpectans.

26 Anno 1610 Petrus Antonius Cattaldus Bononienſis edidit brevem Tractatum de Algebrâ proportionali, in quo accuratè perſequitur proprietates quantitatum proportionalium, & quid ex datis elici poſſit, ſeu algebricè cognoſci, edidit & Tractatum de Arithmeticâ Elementari bonum, communem tamen.

27 1611 P. Chriſtophorus Clavius Bambergenſis Societatis Jeſu, epitomen edidit Arithmeticæ practicæ, in quâ tradit additionem, ſubtractionem, multiplicationem in numeris integris, & fractis, regulas trium, ſocietatis, alligationis, falſi, & extractiones radicum quadratæ & cubicæ, progreſſiones arithmeticas & geometricas. Videtur in hoc opere non omnia exactè demonſtrare.

Idem author tradidit algebram ſeu vulgarem ſatis aptam & perfectam & exemplis bene multis, illuſtratam.

Non attigit ſpecioſam, nec extractiones poteſtatum affectarum, exceptis communibus, ſeu quadraticis quarum demonſtrationes tradit.

28 1612 Joſephus Langius Cæſaremontanus Friburgi Briſgoiæ Mathematices Profeſſor elementale logiſticæ, tam vulgaris quàm aſtronomicæ, edidit. Opus nimis breve, & nihil demonſtrans. Friburgi in octavo 1612.

1614 Prodiit in lucem novum hujus ſæculi inventum mirifica ſcilicet logarithmorum deſcriptio, uſus in omni Logiſtica mathematica, authore ac inventore Joanne Nepero Scoto, Barone Merchiſtonij. In hoc ſcilicet opere ſubſtitutis loco numerorum quorumcumque eorum logarithmis, quidquid per multiplicationem, & diviſionem perficimus, per additionem, & ſubtractionem abſolvit, quæ methodus in numeris majoribus eſt compendioſiſſima, quare huic operi meritò hæc additur Epigraphe, *anteceſſoribus noſtris ſapientiores ſumus.* Hanc doctrinam excoluere alij, huic tamen præcipua laus ut inventori debetur.

29 Prodiit Franciſci Vietæ Fontenæenſis de recognitione æquationum tractatus poſthumus, in quo ſcilicet ſingulas æquationum ſpecies percurrit, methodumque docet quâ ad ſimpliciores reducantur.

Opus non perfectum quidem, & ſatis expolitum profundiorem tamen doctrinam continens.

1617 Ludolphus Aceulen Hildes-Heimenſis 30
in opere ſuo cui titulus eſt Fundamenta arithmetica, & geometrica, cum eorumdem variis problematis geometricis, partim ſolo linearum ductu, partim per numeros irrationales, tabulam ſinuum, & algebram ſolutis. Multa habet arithmetica; primò quidem habet Arithmeticam ſurdorum, tum ſoluit quamplurima geometrica problemata per numeros, ſeu algebram.

Hoc Opus ordinatum non eſt, quamvis bonam doctrinam habeat, ex quo fit ut ſit obſcurum in pleriſque.

1610 Clariſſimus Dominus Bachet de Meze- 31
riac Nobilis Sebuſianus problemata jucunda, quæ numeris abſolvi poſſunt, præcipue ad divinandum edidit: in quo opere multa ſunt ſcitu digna. Lugduni in octavo 1610.

1621 Idem Dominus Gaſpard Bachet de Me- 32
zeriac Nobilis Sebuſianus Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libros ſex, & de numeris, multangulis librum unum, Græcè & Latinè edidit, atque abſolutiſſimis Commentariis illuſtravit.

Opus abſolutiſſimum & uſquequaque perfectum; mentem enim authoris videtur ubique aſſecutus, & clariſſimè explicare ita ut nihil amplius requiri poſſit.

Anno 1624 Joannes Keplerus Imperatoris 33
Ferdinandi Secundi Mathematicus, Chiliadem logarithmorum ad totidem numeros edidit, præmiſſâ demonſtratione ortus logarithmorum, eorumque uſibus in quacumque logiſticâ. Opus hoc non ſatis clarè procedit.

1625 Zacharias Profeſſor Mathematum Pariſiis 34
Tractatum arithmeticum edidit in quo ſunt regulæ communes. Pariſiis in octavo 1625.

1625 Simon Stevin Brugenſis Arithmeticam 35
compoſuit, ſeu potius algebram in ſex libros diviſam.

1. Habet definitiones.

2. Quatuor regulas vulgares habet, & extractiones radicum. Item algebricum algorithmum, & extractiones radicum multinomiorum & alia multa præcepta algebrica; quatuor ſequentibus affert exempla Diophanti.

Opus hoc Gallicum eſt, videtúrque inordinatum eſſe atque adeo difficile eſſe, in quo multa potes addiſcere ſi jam algebram teneas, non tamen percipere in hoc authore ſi nihil ſcias. Lugduni Batavorum in octavo 1625.

1625 Jacobus Hume Scotus Profeſſor Mathe- 36
ſeos Pariſiis novam Arithmeticam Gallicè edidit, nempe methodum vulgarem omnium operationum ſine fractionibus vulgaribus. Item methodum ſupputandi ſinus poſito ſinu toto.

In hoc opere omnes fractiones reducit ad decadicas, optimaſque praxes habet circa ejuſmodi fractiones, quare hoc opus eſt alicujus momenti. Pariſiis in octavo 1625.

1626 Prodiit Arithmetica logarithmica ſive 37
logarithmi pro omnibus numeris ab unitate ad 100000, unà cum canone artificialium, ſinuum, tangentium, & ſecantium, ad radicem 10, 0000, 00000, ad ſingula prima minuta quadrantis: Hos logarithmos primus invenit Joannes Neperus

Digitized by Google

rius Baro Merchiſtonij, quos tamen in ejuſdem ſententiâ ſub alia formâ tradidit, eorumque ortum, & uſum illuſtravit Henricus Briggius, in celeberrimâ Academiâ Oxonienſi Geometriæ Profeſſor Savilianus. Editionem hanc ſecundam auxit Adrianus Ulac Goudanus.

Additus eſt initio geneſis & uſus horum logarithmorum, quod Opus immenſi laboris, & utilitatis ſummæ, ideóque qui hoc ſuſceperunt de totâ Matheſi bene meriti ſunt.

38 An.1631. prodiit Thomæ Hariotti Philoſophi, ac Mathematici celeberrimi in Angliâ, Tractatus poſthumus ex ſchediaſmatis deſcriptus, cui titulus *artis analyticæ praxis*. In ejus præfatione habetur totus progreſſus artis analyticæ. Totum hoc Opus conſiſtit in algebricarum operationum exhibitione in exemplo, quare qui algebram aliunde neſcit, vix in hoc opere addiſcet, poteſt tamen eſſe utile iis qui jam ſciunt.

39 1631 Franciſci Vietæ Fontenæenſis in artem arithmeticam Iſagoge. Ejuſdem ad logiſticem ſpecioſam notæ priores, typis mandatæ ſunt in 24 Pariſiis.

Opus quidem optimum ſed ita compendioſè traditum, ut in eo opere ſatis intelligi non poſſit.

40 1634 Petrus Herigone Mathematicus Pariſienſis Arithmeticam communem, & algebram conſcripſit, in quibus tractatibus quamvis doctrina in pleriſque optima ſit, attamen propter modum ſcribendi per characteres inſuetos, ita fit difficilis ut ſæpe contextus orationis nullus inveniri poſſit.

41 1636 Jacobus Humius Theagrius Scotus Vietæ algebram faciliorem reddidit, & gallicam dedit ſex libris.

Liber primus communes Algebræ operationes continet, ſeu algorithmum.

2 Abbreviationem operationum.

3 Reſolutionem poteſtatum ſimplicium.

4 Reſolutionem poteſtatum affectarum, per ſubtractionem.

5 Reſolutionem poteſtatum affectarum per additionem.

6 Reſolutionem poteſtatum avulſarum.

7 Correctionem æquationum.

Additus eſt Tractatus algebricus ejuſdem authoris duobus libris comprehenſus, quorum primus eſt de numeris coſſicis ſimplicibus, ſecundus de ſurdis.

Opus quod ad intelligentiam Vietæ multum conducere poteſt. Pariſiis in octavo 1636.

2 1637 Pater Jacobus de Billy Societatis Jeſu, Compendium præceptorum Algebræ vulgaris edidit, quinque capitibus comprehenſum. Primo tradit algorithmum algebricum; Secundo regulam algebræ explicat, ejuſque inventionem & reductionem; Tertio algorithmum, & uſum ſecundarum radicum tradit; Quarto algorithmum & extractiones radicum de numeris ſurdis. Item radices univerſales, & binomia; Quinto uſum algebræ.

Si hoc opus poſt ſingula præcepta, haberet exempla, multò facilius eſſet, & utilius, clarè tamen & nitidè procedit.

1640 Adrianus Metius Almarianus Arithmeticam edidit duobus libris comprehenſam. In primo tradit regulas communes tam in numeris integris, quam fractis, diviſiones item in varias numerorum ſpecies.

In ſecundo regulam proportionalem, extractiones radicum tradit ſatis clarè, brevius tamen.

In fine ejuſdem operis adjecta ſunt Epigrammata Joannis Laurembergij Profeſſoris Mathematicæ in Sorana Academia. Hæc Epigrammata continent varia problemata ad numeros ſpectantia, & ex authoribus græcis deprompta, quæ ad illuſtrandam Arithmeticam & Algebram utilia ſunt. Hafniæ in quarto 1640.

Scheubelius in Academiâ Tubingenſi Euclidis 44 Profeſſor, Tractatum Algebræ ſuo Euclidi præmiſit, ſed nimis brevem quàm nemo in eo diſcere poſſit, ſi interprete aut magiſtro careat.

1640 Prodiit Pariſiis liber Gallicus incerto 45 authore cui titulus, *Traitté des quantitez incommenſurables*. Primo hoc opus habet tractatum quaſi introductorium in quo proferuntur nonnulla de numeris, ut plurimum ex ſeptimo, octavo, & nono Euclidis excerpta, continet autem 24 Propoſitiones. In hoc tractatu refellit nonnullos Stevini errores, circa quantitates incommenſurabiles; In ſecunda parte introductorii agit de origine quantitatum incommenſurabilium.

Tertia pars introductorij, continet Arithmeticam incommenſurabilium.

Exinde habet geometriam incommenſurabilium, ſeu decimum Euclidis librum aliter explicatum, & ad 62 Propoſitiones reductum.

Opus hoc bonum eſt & bene explicat materiam alioquin in Euclide intricatam.

Anno 1643 Pater Jacobus de Billy Compen- 46 dienſis Societatis Jeſu, novam Clavim Geometriæ edidit, in quâ algebram geometriæ applicat, ſolvitque quamplurima problemata geometrica, quæ ſine illa inſolubilia viderentur. Opus optimum iis qui talibus delectantur. Adjecit in fine epitomen præceptorum Algebræ, nimis brevem, & ſine exemplis, ideóque ferè inutilem, cum in eâ epitome nullus poſſit eam addiſcere. Scripſerunt de Algebrâ Cardanus, Stifelius, Bombellius Nuget, Xilander, Stevinus, Albertus Cluvius, Ludolphus, Peletarius, Vieta.

Pater Jacobus de Billy Compendienſis, Socie- 47 tatis Jeſu, novam Geometriæ Clavim, Algebram ſcilicet edidit, cujus beneficio aperitur immenſus Matheſeos theſaurus, & reſolvuntur plurima problemata hactenus non ſoluta in ſerie multarum quantitatum continuè proportionalium; ſimulque traditur methodus univerſalis quâ quilibet marte proprio invenire poterit innumera alia ejuſmodi.

In hoc opere non docet Algebram ſed ſupponit, ejuſque uſum aperit, in fine tamen epitomen habet præceptionum algebricarum, ſine exemplis, quæ ſi exempla addita haberet clariſſima evaderet. Opus hoc ſpecimen continet profundioris Algebræ. Pariſiis in quarto 1643.

1646 Joannes Luneſclos è montium Salinga 48 edidit theſaurum mathematum, reſeratum per Algebram novam, tam numeris, quam ſpeciebus declaratam, in duos libros diviſam. In primo ſyntheticam Algebram, nempe agit de algorithmis, tam in quantitatibus rationalibus quam irrationalibus, in ſecundo Analyticam conſiderat in eáque de æquatione tractat.

Hic author nimiis diviſionibus, & ſubdiviſionibus materias confundit, licet autem habeat multa bona præcipuè vero applicationes Algebræ, ad diverſas materias, puto tamen impoſſibile in hoc ſolo libro Algebram addiſcere: habet initio

initio Synopſin Philoſophiæ nempe diviſiones & ſubdiviſiones materiarum.

49 1657 Pater Joannes François ex Societate Jeſu, Arithmeticam brevem admodum gallicè dedit, in quâ ſunt tantum regulæ elementares perficiendæ vel characteribus vel calculis. Demonſtrationes non habet.

50 1657 Joannes Maſlard Arithmeticæ Profeſſor Turonis Opuſculum edidit, *le treſor parfait d'Arithmetique*, in quo ope alicujus tabulæ vult ut qui Arithmeticam neſciunt, omnes tamen operationes perficiant, nempe multiplicationem, diviſionem, regulam proportionum, partes aliquotas aſſis, libræ Turonenſis, ponderum, cambiorum, &c.

Hæc tabula ingenioſa eſt & perficit multa facillime aut potius jam perfecta, & ſupputata continet. Turonis in octavo 1657.

51 1660 Franciſcus Barocius Patritius Venetus Opuſculum edidit in quo una oratio, & duæ quæſtiones; altera de certitudine, altera de medietate Mathematicarum quæ omnia potius oratoria quam mathematica ſunt.

1661 P. Gaſpar Schottus Regiſcurianus è Societate Jeſu, profeſſus Matheſin Panormi & Herbipoli curſum mathematicum, ſed in pleriſque Tractatibus demonſtrationes non affert. In eo curſu Arithmeticam elementarem tradidit ſine demonſtrationibus. Habet item rabdologicam Neperi, & divinatoriam; militarem habet in polemica; habet item Algebram ſed nimis breviter, ita ut ex eo Tractatu perfectam ejus cognitionem habere non poſſis; Habet tamen multa ænigmata ſelecta; breviter item explicat naturam logarithmorum.

52 1665 Prodiit Caroli Renaldini Sereniſſimi Principis Etruriæ Philoſophi ac Mathematici & in Piſanâ Accademiâ Philoſophiæ Profeſſoris Ars analytica Mathematum, ſeu Algebra in tres partes diviſa.

In prima veterum analiſtarum; in ſecunda recentiorum doctrinam tradit.

In tertiâ problemata reſoluta exhibet, duobus tomis majoribus. In prima hunc ſequitur ordinem; primo de numeris denominatis eorumque algorithmo loquitur, nempe additione, ſubtractione, multiplicatione, diviſione, fractionibus, extractione radicum, de ſecundis radicibus. Et tandem ad æquationem algebricam gradum facit, nempe de ejus inventione, variiſque reductionibus, anthiteſi, paraboliſmo, hypobibaſmo, izomeria. Explicat item æquationes ſimplices tum affectas, præcipuè quadraticas; tertio eas in quibus exponentes terminorum ſunt arithmeticè proportionales, quarto exhibet numeroſam affectarum æquationum Analyſin; praxes tamen non ſine poteſtatum generatione ſpecioſa intelligi poſſunt. Affert autem quamplurima exempla extractionis radicum affectarum; exinde explicat æquationes quæ fractionibus aut numeris irrationalibus implicantur: tum ex binomio radicem præſertim cubicam extrahit, omneſque æquationes cubicas, quomodocūque affectas explicat, exempliſque illuſtrat; denique docet quæ ad ænigmata ſolvenda cōducant.

In ſecunda parte quæ eſt de ſpecioſâ ſeu de methodo introducta à Vieta, explicat ejus naturam, algorithmum proprium, etiam cum fractionibus extractiones radicum, æquationem tam ſimplicem quam affectam, ejuſque reductiones, aut emendationes cum vitio laborat. In fine utriuſque partis innumera profert exempla. Hoc Opus videtur continere quæcumque ad hanc materiam pertinent, utilius tamen contrahi potuiſſet, male enim ſua prolixitate lectorem obruit.

53 1665 P. Gaſpar Schottus Regiſcurianus Societatis Jeſu, Steganographiam edidit, continentur autem in hoc Opere artificia nova ad ſecretò alteri ſcribendum. Vix ad Matheſin ſpectat hic Tractatus. Herbipoli in quarto 1665.

54 1667 Guillelmus Oubhtredus Ætonenſis Collegij regalis in Cantabrigia ſocius Clavim Mathematicam denuò limatam edidit, in quâ multa habet optima. 1. Circa decadicas fractiones & alias.

2. De æquationum affectarum reſolutione, & lothgarithmorum uſu.

3. Decimi Euclidis declarationem breviſſimam.

4. De ſolidis regularibus Tractatum.

5. De Anatociſmo ſeu ratione reducendi fœnoris breviter.

6. Regulam falſi demonſtratam.

7. Theorematum Archimedis de Sphæra, & Cylindro declarationem. Horologiographicam.

Hæc omnia optima forent niſi modum ſcribendi non communem affectaſſet, ejus enim libri vix percipi poſſunt niſi quis ſupputationes ipſas faciat. In quo graviter peccat, & ſine ulla neceſſitate materias alioquin ſatis difficiles, adhuc magis implicat. Oxoniæ in octavo 1667.

55 1668 Idem Carolus ſuperius laudatus Renaldinus libros duos ſcripſit de reſolutione & compoſitione mathematica. In primo veterem reſolutionis mathematicæ methodum explicat, diverſiſque materiis applicat. Primo enim data Euclidis profert & theoremata plana, affert item varia exempla in aliis materiis; nempe in ſectionibus conicis, in quadratrice linea, ſpiralibus, in catoptricâ, baliſticâ, trigonometria. In ſecundo libro methodum analyticam recentiorum explicat.

Hoc opus non videtur ſatis ordinatè nec ſatis methodicè procedens.

56 1669 Pater Vincentius Leotaudus Delphinas Valloyſianus Societatis Jeſu, Inſtitutionum arithmeticarum libros quatuor edidit, in quibus omnia quæ ad numeros ſimplices, fractos, radicales, ac proportionales, pertinent præcepta, clariſſimis demonſtrationibus tum arithmeticis tum geometricis illuſtrata traduntur. In primo libro numerorum integrorum algorithmum tradit, In ſecundo fractorum, In tertio radicum extractionem, Quartus eſt de rationibus & de rationum proportionibus.

In hoc opere nihil deſideratur, niſi major brevitas; habet enim prolixiorem modum explicandi hic author.

57 1670 Pater Jacobus de Billy Compendienſis Diophanti redivivi partem priorem edidit, in qua non caſu, ut putatum eſt, ſed certiſſima methodo & analyſi ſubtiliore innumera enodantur problemata quæ rectangulum triangulum ſpectant. Lugduni in octavo 1670.

58 Prodierunt Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri ſex, & de numeris multangulis liber unus cum Commentariis Domini Claudij Gaſparis Bacheti de Mezeriac & Obſervationibus Domini de Fermat Senatoris Tholoſani, quæ obſervationes paucæ ſunt; indicant tamen in prædicto Fermatio peritiam quæ omnes Analiſtas ſuperavit.

Acceſſit ejuſdem Domini Fermatij Inventum novum

novum collectum ex variis ejuſdem litteris. In primâ parte agit de ſolutionibus infinitis duplicatarum æqualitatum. In ſecunda de triplicata æqualitate & ſolutionibus ejus infinitis. In tertiâ complectitur artem eliciendi radices infinitas ex numeris plures ſpecies habentibus quàm tres.

Pater Jacobus de Billy è Societate Jeſu, hoc Domini Fermatij Inventum ſummè laudat, & authorem Diaphanto, Vietæ, Bacheto, & quotquot hactenus vixerunt Analiſtæ, præferre non dubitat.

CAPUT IV.

Progreſſus Mechanices.

MEchanices Appellationem μῆχος quod artificium ſignificat, & à μῆδος quod meditari, ſeu artificioſè cogitare deduci voluerunt. Hujus videtur officium ſatis appoſitè Ariſtoteles deſcripſiſſe, dum Mechanicem dicit eſſe rerum præter naturam quæ arte fiunt ad utilitatem hominum. Ubi enim naturâ vincimur, arte ſuperamus. Hanc paulò aliter definivit Vitruvius, vel potius ejus effectum, dum machinam dixit eſſe continentem ex materia conjunctionem quæ maximas ad onerum motus vires habet. Melius & ad inſtitutum magis appoſitè Pappus qui libro octavo ejus definitionem, & diviſionem hic verbis complexus eſt. *Mechanica contemplatio eſt illa quæ ſtatum, & corporum lationem motumque ſecundum locum inquirit, horumque quidem quæ naturâ ſunt cauſas reddit: Illa autem à natura ſua decedere cogens, extra propria loca, in contrarios motus transfert quod per ea Theoremata, quæ ex ipſa materia decidunt, excogitat. Mechanicarum vero alteram partem rationalem eſſe, alteram operâ mannum indigere, ſentit Hero Mechanicus; & rationalem quidem partem ex Geometria, & Arithmetica, & Aſtronomia, & ex phyſicu rationibus conſtat; ea vero quæ operâ manuum indiget ex araria, & ædificatoria, & pictura & artibus ſedentariis exercetur.*

Ejus dignitas ex mirandis ejus effectibus colligitur: neque enim quævis artificia ad eam pertinent: ſed ea ſola in quibus ingenij ſolertiâ præter naturam ſuccurritur utilitati humanæ. Idem enim accidit mechanicæ, quod magiæ, quod homines rapiat in admirationem, ut ait Ariſtoteles initio Mecanicorum, nempe dum ea præſtat quorum cauſa à pleriſque ignoratur.

Hanc communiter mixtam eſſe ex Phyſica, & Matheſi aſſerunt benè multi, cujus nempe primum principium phyſicum ſit, hocque ſemel admiſſo & ſtabilito, ulterius progrediatur Mechanices, illudque variis machinis, & inventis ad uſum revocet.

Utilitatem ſi quæras hæc melius innoteſcere non poteſt quàm ſi eam in ſuas partes dividamus, & quid ex ſingulis utilitatis in genus humanum, & vitam civilem proveniat, explicemus. Neque enim facile Platoni ſubſcriberē, qui acerbè in Eudoxum Gnidium, & Architam Tarentinum invehitur, quaſi philoſophiam proſtituiſſent, quod mathematicas diſciplinas ad uſum mechanicum traduxiſſent. Immo verò eo præcipuè nomine Matheſes commendandas quod nulla ſit, quæ hominum commoda magis promoveat, & ad utilitatem publica plura de ſuo conferat.

Quamvis Antiqui præcipuè Heron duas ejus partes agnoſcat rationalem, & manualem, puto tamen rationalem tantum ad Matheſin ſpectare; quæ opera facienda imperet, dirigat, eorumque ideam, & prototypum proponat, manualem vero & practicam artificibus relinquat. Rationalis plurimas ſpecies agnoſcere poſſumus cum antiquis authoribus, primo loco recenſere poſſemus manganariam quæ ingentia pondera adhibitis machinis in altum attollit. Hanc propriè ſub nomine Mechanices intelligimus, hæc nempe univerſaliſſimum motus principium conſtituit, quò ſcilicet in immenſum hominis machinam adhibentis vires augentur, ſolemnemque illam jactabundi Archimedis propoſitionem examinat; exinde ſingulis machinis idem principiis applicat, illudque in triplici vecte, trocleis, axe in peritrochio, in rotis dentatis, in ſpira, & cuneo cæteriſque contemplatur. Alteram partem μηχανοποιητικὴν Antiqui agnoſcebant in anthliis, hanc in machinas hydraulicas rejicimus. Tertiam ὀργανοποιητικὴν faciebant, quæ inſtrumenta bello accommodà excogitat, cui ſucceſſit ævo noſtro pyrotechnia: ex quo enim pulvis pyrius, & tormenta bellica inventa ſunt, ceſſavere omnino, inutileſque ſunt redditæ Antiquorum machinæ bellicæ, & jam pro ludicris habentur. Quarta fuit antiquis αὐτοματοποιητικὴ, quæ varia excogitat automata, ſive quæ adductis elatoriis ſeipſis moveantur, ſive ponderibus animentur, inter quæ celebris eſt Archimedis ſphæra, quæ ſeipsâ movebatur. Multa hujuſmodi jactantur cum majori fama, quàm par ſit; quorum pleraque, ita malè executioni erant mandata, ut riſum potius quàm admirationem moverent. Nulla tamen automata celebriora, & utiliora excogitata quàm machinæ horiſonæ, præcipuè vero pendulis inſtructæ, quæ ipſo ſole, & cœlo exactiores ſunt. Sed ut magis appoſitè totam hanc materiam in ſuas claſſes, & ſpecies dividamus, ſecundam hujus Mechanicæ univerſaliter ſumptæ partem, ſeu ſpeciem ſtaticam nominamus.

Statica igitur conſtituto omnium gravium centro conceſſaque corporibus gravitate, Primò agit de elementorum gravitate, omneſque effectus qui vulgò metu; vacui conceduntur, ut aſcenſûs aquæ in anthliis, mercurij in arundine ſuſpenſio, variæque attractiones, gravitati tribuimus. Secundò gravium decidentium acceleratum caſum conſiderat. Tertiò eorumdem gravium in planis inclinatis deſcenſum, momentorumque decrementum contemplatur, pendulorumque doctrinam, vibrationum æqualitatem, durationes cum longitudinibus comparat, eamque horologiis noſtris fructu non pœnitendo adaptat. Quartò æquiponderantium doctrinam tradit. Quintò de linearum centro gravitatis agit. Sexto de ſuperficierum. Septimò de ſolidorum. Octavo denique centrum gravitatis uſum novumque, præcipuè Guldini, tam latè in rotundis metiendis aperit.

Ad Mechanicam nonnulli magnetem revocant, quia tamen navigationum eſt anima, quæ ad Geographiam ſpectat, cum Geographia componetur.

Hydroſtatica à ſtatica univerſali ſeparari non debet. In qua parte primò quantum corpora leviora in humido deſcendant definimus, quantum de graviorum gravitate decedat, dum aqua merguntur, quàm bene conſtent æquilibrii leges, an figura corporum, an aquæ profunditas, ut corpora minus, aut magis mergantur expendimus;

celebre illud Archimedis problema de corona explicamus. Metallorum probationem in aqua perficimus.

Alia Mechanices noſtræ univerſalis ſpecies circa fontes, & rivos occupatur. Agitque de aquarum æquilibrio, methodoſque tradit fontes, & rivos derivandi. Fluentem item aquam metitur, quâ proportione vaſa vacuentur aperit. De ſalientibus item fluminibuſque metiendis, quantum ex immiſſione torrentis fluvius augeatur, aliaque, tam utilia, quam jucunda explicat.

Quinta Mechanices pars machinas omnes hydraulicas complectitur. Primò fontes omnes artificiales, ſive attractione perficiantur, ſive compreſſione, aut expulſione, rarefactione, condenſatione. Spiritalia Heronis ludicra, machinas omnes ad attollendam aquam idoneas, ut ſunt anthliæ, rotæ, catenæ ſitulis inſtructæ, roſaria, variæ helices, Archimedis cochlea. Amœna item nonnulla ut ſunt organa hydraulica, aviculæ canentes. Ad quam revocantur machinæ omnes utiles, ut molæ ad terendum triticum, rotæ ad conterendos carbones, piſtilla automata ad pulverem pyrium, mallei lignei ad Papyrum, ferrei ad omnis generis ferramenta.

Sexta Mechanices pars erit Pyrotechnia, quæ primò agit de ignibus artificialibus tam feſtivis, quam bellicis. Secundò de machinis, ſeu tormentis bellicis aget, nempe certas methodos ea examinandi, & ad ſcopum dirigendi, ſive directo jactu, ſeu circulari, & parabolico, multas item quæſtiones baliſticas ſolvit. Ad Mechanicam item ſpectant multa quæ in bello inſtruendo, tam in equeſtri ordine quàm pedeſtri.

Ut melius Mechanicæ progreſſus innoteſcat, authores qui de ea ſcripſerunt per ſingulas ætates recenſeamus.

Quarto Urbis ſæculo ante Chriſtum 350 annis Democritus Mileſius uno anno major quàm Socrates inter alia multa, ſcripſit certamē Clepſidræ.

Eudoxus Gnidius Matheſin ad uſus Mechanicos traduxit, ſicut & Architas Tarentinus, qui columbam ligneam volantem exhibuit. Hos Plato reprehendit quaſi læſæ Philoſophicæ majeſtatis, quaſi nempe illam proſtituiſſent.

Quinto Urbis ſæculo Ariſtoteles ſcripſit de Mechanicis librum unum. In quo omnes machinas ad libram revocare videtur. Cardanus librum hunc Ariſtotelis non eſſe exiſtimat, propter mancam, & paulò negligentiorem motuum rotundorum in eo poſitam diviſionem. Franciſcus Patritius in eadem eſt opinione, quamvis rationem non afferat. Cui facile ſubſcribo, & rationem addo, quod primum machinarum principium non attulerit, quod enim affert, apertæ falſitatis arguitur. Hunc tamen librum commentariis auxit Henricus Monantolius Medicus, & Mathematum Profeſſor Regius. Videntur commentaria meliora, quam liber ipſe. Impreſſa Lugduni 1600 in quarto.

Circa hæc tempora Æneas tacticus ſcripſit librum tacticum, & obſidionalem in quo potius obſeſſis, quàm obſidentibus dat præcepta. Hunc Suidas malè vocat de Stratagematis.

Tacticorum Æneæ epitomen fecit Cineas Conſiliarius Pyrrhi Epirotarum Regis. Ælianus item ſcripſit de tacticis, cujus ſcripta ſunt manuſcripta in Bibliotheca Vaticana, ex quo videtur exſcriptus Regis Chriſtianiſſimi codex à Cauſſobono vulgatus ex parte.

Sexto Urbis ſæculo Archimedes multa edidit machinamenta, quæ non extant. Inter ea recenſentur ſphæra vitrea automa celebre motum cœlorum exhibens, Coclea aquatica, quâ etiam nunc utimur, machinæ ad extrahendam navim. Variis machinis Romanam claſſem fatigavit, furtum in corona aurea admiſſum detexit, quæ de ſpeculo uſtorio referuntur fabuloſa ſunt.

Scripſit de æquiponderantibus, in quo tractatu materiam æquiponderantiæ leviter admodum attingit, ſtatimque excurrit ad determinandum centrum gravitatis aliquorum corporum, quæ vix unquam occurrunt. Ex quo fit ut ejus tractatus de æquiponderantibus ſit exigui momenti. Fecit & alium parvum tractatum de natantibus in humido, ſed paucas habet Propoſitiones.

Circa eadem tempora Cteſibius machinator ſubtiliſſimus Pneumatica invenit, id eſt quæ ſpiritu, & vento motus efficerent, hydraulicas item machinas conſtruxit, quarum una ſupereſt quæ ab ipſo inventa dicitur; Ita Vitruvius.

Sexto Urbis ſæculo Philo Biſantius ante Heronem ſcripſit mechanica.

Hero Alexandrinus Cteſibij diſcipulus ſcripſit automata, ſpiritalia, de Baliſtis mechanica de rotulis, de horologiis aquaticis & alia ejuſmodi. Extat ejus ſpiritalium liber, in quo continentur 75 Theoremata, ad ſpiritalia & machinas hydraulicas ſpectantia; nonnulla item mechanica, ex quibus ſimilia multa deduci poſſunt. Hoc Opus latinum fecit Commandinus & figuris elegantibus ornavit. Pariſiis in quarto 1583.

Idem Hero Cteſibius Opuſculum edidit cum titulo βελοποιικα, ſeu Teliſactiva, nempe de aliquibus machinis ad vibranda tela; quem librum Bernardinus Baldus Urbinas Guaſtallæ Abbas, ex Græco in Latinum vertit, & illuſtravit. Auguſtæ Vindelicorum 1616 edidit.

Scripſere item de Arte mechanica Diades, Nimphodorus, Phylo Byſantius, Dyphilus, Carydas, Polyidas, Pyrrhus, Ageſiſtratus, à quibus multa ſumpſit Vitruvius.

Octavo Urbis ſæculo, aliquibus tantum annis ante Chriſtum Athenæus ſcripſit de machinis, extantque duo ejus fragmenta apud Vitruvium. Scripſit item mechanica.

Andronicus Cyreſtes in turri octogona anemoſcopium primus collocavit, nempe ſingulis faciebus inſcripſit nomen unius venti, erat autem Index ſeu pinna à vento mobilis quæ ventum indicabat.

Vitruvius in ſua Architectura multa habet mechanica.

Primo Chriſti ſæculo ſextus Julius Frontinus 4 libros edidit de ſtratagematibus, item de tactica quæ erat in uſu tempore Homeri. Hoc opus Gallicum factum eſt anno 1636.

Secundo Chriſti ſæculo Ptolemæus ſcripſit libros mechanicos tres.

Julius Africanus ſub Eliogabalo ſcripſit de fabricis militaribus.

Tertio Chriſti ſæculo Claudius Ælianus Græcè ſcripſit tactica, ſeu de acie ordinanda, quem explicuere Theodorus Gaza, Franciſcus Robortellus, Sixtus Arcerius. Latinum fecit Theodorus Theſſalonicenſis, dedicavítque Panormitano præceptori regis Alphonſi, Gallicum fecit Polygraphus anno 1536.

Eodem tempore Arrianus Nicomedienſis ſcripſit tactica.

Hero

Digitized by Google

Hero Junior ſcripſit etiam multa mechanica præcipuè bellica.

Inveniuntur in Bibliothecis Daimachi Poliorcetica.

Aſclepiodotus de tacticis in Bibliotheca Regia, & Florentina.

Poſſidonius Rhodius de re militari.

Baſilij Patricij Naumachia.

Diodori cujuſdam liber de ponderibus.

Flavius Vegecius de arte militari libros 4 edidit.

Primus liber agit de inſtituendis Tyronibus.

Secundus de Legionibus, de ducibus, tribunis, vexilliferis, & de acie inſtruenda.

Tertius de exercitu, & caſtrametatione.

Quartus de munitionibus urbium, de vallo, foſſis, cataractis, de machinis oppugnatoriis, de ariete, falce, teſtudine, baliſtis, onagris, cuniculis, claſſibus item, pugniſque navalibus.

Hoc opus continet multa ſcitu digna, quamvis enim de antiquo tantum modo pugnandi loquatur, innumera tamen hodiernæ militiæ poſſunt accommodari.

Sexto Chriſti ſæculo Jordanus Nemorarius ſcripſit de Ponderibus 13 Propoſitionibus. Videtur eſſe fragmentum ex quo ferè nihil poſſit elici.

Anno 886 Leo Imperator Orientis ſcripſit Græcè librum de re militari, ſeu documenta bellica, quibus traditur ars militaris. Tres habet partes hoc Opus: Proœmium in quo Imperator rationes affert propter quas hoc opus compoſuerit.

In ſecunda de omnibus ad bellum pertinentibus loquitur, nempe leges aliquas ſancit à Ducibus obſervandas.

Tertia pars eſt concluſio, ſeu Anacephaleoſis totius operis.

Hunc librum in linguam Italicam vertit, & annotationibus illuſtravit Philippus Pigafetta. In quarto 1602 Venetiis.

1472 Primò typis mandatum eſt Opus Valturij, de re militari in duodecim libros diviſum.

Hoc opus eruditum eſt non mathematicum. In folio.

1500 Achilles Marozzo Bononienſis gladiator eximius, Opus edidit de arte gladiatoria libris quinque diſtinctum, in quo agit de gladio, de ſariſſis, aliiſque armis offenſivis. Videtur hoc Opus ſuo tempore fuiſſe alicujus momenti; illuſtratur figuris. Videtur eſſe typis mandatum Bononiæ circa annum 1500 quamvis id non notetur.

1524 Nicolaus Leonicus Thomæus Ariſtotelis quæſtiones mechanicas notis & figuris illuſtravit.

1 Anno 1531 Leonardus Fortius Romanus ſcripſit de re militari.

2 1533 Georgius Agricola quinque de menſuris, ac ponderibus libros emiſit, hic liber hiſtoricus eſt.

3 Tartaglia vixit hoc tempore; Ejus opera ſunt poſita anno 1606.

4 1544 Alexander Picolomineus Commentarium edidit in quæſtiones mechanicas Ariſtotelis.

5 1555 Guillelmus Du Choul Conſiliarius Regius & judex in montibus Delphinatus librum Gallicum edidit de arte militari, Romanorum præcipue, de caſtrametatione, & diſciplina militari, de balneis item, de religione.

Hoc Opus Matheſin non ſapit ſed eruditionem.

1565 Federicus Commandinus Urbinas Archimedis libros duos de natantibus in humido in priſtinum nitorem reſtituit, & commentariis illuſtravit. Opus optimum ut ſunt omnia Commandini opera. Bononiæ in quarto 1565. 6

1565 Petrus Forcardel Profeſſor Mathematum regius in Univerſitate Pariſienſi librum Archimedis de ponderibus ſeu de in aquam immerſis, Gallicum fecit. 7

Item nonnulla Euclidis fragmenta de corpore gravi, & levi, gallicè vertit & commentario auxit.

Hoc fragmentum eſt valdè mutilum quatuorque Propoſitionum titulos tantum comprehendit: videtur autem in eo Euclides idem ponere mechanices primum principium, quod nos poſuimus, nempe quod plus movetur majores habet vires.

1567 Joſephus Ceredi Parmenſis tres diſcurſus Italicos edidit ad elevandam aquam, nempe ad irrigandos agros, aut ad exhaurienda loca paluſtria, quarum aqua ſufficientem curſum habere non poteſt; item ad immittendam aquam in urbem. Materia quidem utilis, modus autem hanc tractandi oratorius potius eſt, quam demonſtrativus, machinas enim tantum indicat & non deſcribit. Parmæ in quarto 1567. 8

1569 Franciſcus Barocius Patricius Venetus Latinè vertit Heronis mechanica. 9

1569 Jacobus Beſſon Delphinas tractatum edidit Gallicum, de methodo detegendorum fontium latentium ſub terra, in quo multa ſunt utilia ad praxim ſpectantia. Aureliani in quarto 1569. 10

1570 Federicus Commandinus centrobaricam edidit, ſeu de centro gravitatis ſolidorum optimam. Hæc pars ignota fuit Ariſtoteli. 11

Guillelmus de Cavendy nobilis Anglus Dux Marchio & Comes de Xeucathle Præfectus militum in provinciis Septentrionalibus, librum edidit Anglicè de equitatione, in linguam Gallicam converſum ſub hoc titulo, (*Methode nouvelle, & invention extraordinaire de dreſſer les Chevaux & les travailler ſelon la nature*) Videtur author aliquid novi promittere & nullibi uſurpatum, an vero id exequatur cum profeſſionis meæ non ſit, aliis judicandum relinquo. 12

In folio 1572 Vanocius Biringuccius Pyrotechniam edidit, agit autem potius de fuſione metallorum, aliiſque ad hanc materiam ſpectantibus: In fine tamen habet nonnulla ad ignes militares pertinentia. Liber Italicè ſcriptus, in linguam latinam verſus eſt Pariſiis in quarto 1572. 13

1572 Nobilis Aurelius Cicuta diſciplinam militarem Italicè edidit in tres libros diviſam. 14

In primo agit de origine belli, & electione & Officio Imperatoris.

In ſecundo docet quomodo informandi ſint Tyrones; dat item ordinem aciei.

In tertio tradit documenta ad regendum exercitum, nempe caſtrametationem, tranſmiſſionem fluminum &c. Venetiis in quarto 1572.

1572 Hyeronimus Ruſcelli tractatum Italicum edidit, *Precetti della militia moderna tanto per mare, quanto per terra*, in quo artem dirigendi tormenta bellica tradit, in hoc tractatu multa continentur ſcitu digna ad praxin ſpectantia. Venetiis in quarto 1572 ibidem 1568. 15

1576 Franciſcus Ferreti Anconenſis Eques Ordinis ſancti Stephani libros duos Italicos edidit. 16

In

In primo diſſerit de regulis à milite obſervandis.

In ſecundo profert ſuam ſententiam circa varia ab eodem milite obſervanda. Venetiis in quarto 1576.

17 1577 Guidus Ubaldus Marchio de monte pereruditum ſcripſit mechanicorum librum, nempe de libra, vecte, trochlea, axe in peritrochio, cuneo, & cochlea, nimius eſt in reducendis aliis potentiis ad vectem, aut libram. Idem fecit paraphraſin & ſcholia in Archimedis libros.

18 1578 Jacobus Beſſon Delphinas edidit librum machinarum,in quo ſcilicet varias profert machinas ad artes aut perficiendas aut juvandas, quarum pleraque expenſas exigerent immenſas, & non ſuccederent in praxi. Afferuntur autem ſine ulla demonſtratione, aut ratione ſed cum ſimplici partium explicatione.

19 1582 Bernardinus Rocca Placentinus Italicum tractatum edidit de re militari libris quatuor, *Diſcorſi di guerra*, in quo docet modum regendi exercitus, pugnandi & propugnandi civitates, quæ omnia antiquorum exemplis illuſtrat.
20 Venetiis in quarto 1582. 1583.

21 1582 Antonius Lupicini Florentinus Architecturam militarem edidit, in qua peculiare hoc habet quod in collo propugnaculi excitet molem ab ipſo propugnaculo foſsâ ſeparatam, quod methodo Domini de Pagan affine eſt.

Totum ferè Opus diſcurſus aliquos continet circa varios ſitus,in quibus docet modum quo expugnentur munitiones.

Habet in fine Opuſculum de virgarum geometricarum uſu, quæ profert ut plurimum communia ſunt. Florentiæ in quarto 1582.

22 1586 Ludovicus Collado Hiſpanus Beticus Nebricenſis Architectus militaris in exercitu Regis Hiſpaniæ in Longobardia tractatum edidit Italicum de tormentis bellicis cum hoc titulo (*Practica manuale di Artigleria*) in quo tractatu diſſeritur de ejus inventore, fabrica proportionibus, de tranſvectione ſuggeſti uſibus, cuniculis, item de ignibus artificialibus. Opus utile in quo tamen multa deſunt.

23 1588 Bernardinus de Eſcalante Commiſſarius Sancti Officij in Inquiſitione dialogum compoſuit Hiſpanicum de arte militari libris quatuor. Bruxellis in quarto 1588.

24 1590 Prodiit tractatus Hiſpanicus de re militari per modum dialogi inter Dom Gonçalo Fernandez de Cordoua, & Don Pedro Manriquez de Lara, in quo continentur multa ad bellum ſpectantia,præcipuè ad acies inſtruendas. Bruxellis in quarto 1590.

25 1592 Martinus de Eguiluz Diſcurſum Hiſpanicum edidit de diſciplina militari. Madriti in quarto 1592.

26 1592 Eugenius Gentilini Eſtenſis Inſtructionem pro explodendis tormentis bellicis italicè compoſuit,in qua continetur examen Zachariæ Schiavina cum tractatu de munimentis compoſito tam ab ipſo, quam à fratre ſuo Capitana Marino Architecto bellico Reip. Venetæ.

In hoc tractatu docentur omnia quæ ad directionem tormentorum bellicorum pertinent. Omnia ferè ad praxin ſpectant. Venetiis in quarto 1592.

27 1594 Franciſcus Patrizi parallelum militiæ antiquæ, & hodiernæ italicè ſcripſit.

Hic tractatus potius eſt politicus & philologus quam mathematicus.

1600 Bartholomæus Pelliciari Mutinenſis tra- 28
ctatum Italicum edidit de re militari, *Avertimenti militari*, in quo loquitur de ſingulis muniis militaribus à gregario milite ad Imperatorem, item de omnibus actionibus militaribus. Mutinæ in quarto 1600.

1603 Chriſtoüal Lechuga tractatum edidit 29
Hiſpanicè in quo agit de munere ſummi exercitus Imperatoris & de omnibus quæ ad ipſum ſpectant. Mediolani in quarto 1603.

1606 Georgius Baſta Comes d'Huſt generalis 30
pro Imperatore in Tranſilvania, & locum tenens pro ſua Majeſtate tractatum edidit Italicum, in quo ſummum exercitus Imperatorem informat, *Il maſtro de Campo generale*. In quo Opere continentur optima documenta ad Duces ſpectantia. Venetiis in quarto 1606.

1606 Nicolaus Tartaglia aliqua edidit Ope- 31
ra de rebus ad bellum pertinentibus nempe, *queſiti* ſeu varias quæſtiones. *Travagliata inventione nova ſcientia & ragionamenti ſopra Archimede*. In quibus operibus traditur methodus pugnandi tam in pugna navali, quàm terreſtri. Traditur item ars dirigendorum tormentorum bellicorum, item methodus nova componendi ſquadras & pixides, modus extrahendi navigia Inſuper methodus deſcendendi in aquas.

Habet item multa de natantibus in humido.

In hoc opere ſunt multa optima,nonnulla item quæ praxes habent inutiles aut impoſſibiles. Totum Opus Italicum eſt. Venetiis in quarto 1606.

1608 Simon Stevinus Principis Auriaci ma- 32
thematicus in quarto tomo Hypomnematum ſtaticam tradidit in ſex libros diviſam.Primus ſtatices elementa complectitur nempe poſt definitiones tradit 28 Propoſitiones primò de æquiponderantibus, de ſitu recto & obliquo, de planis inclinatis, de ponderibus pendentibus è duplici fune.

Secundus eſt de gravitatis centro, planorum & ſolidorum.

Tertius ſtatices praxin continet libræ & ſtateræ praxes perfectiſſimas, vectium genera, ponderum geſtatorum aut attractorum affectiones, trochlearum formas.

Quartus agit de hydroſtatices elementis: poſt definitiones & axiomata novem primis Propoſitionibus corpora in aquis conſiderat, ſex aliis aquæ contra ſubjectum fundum preſſionem, & alia ſimilia, item proportiones gravitatum.

Quintus habet aliquas praxes hydroſtaticas.

Sextus eſt additamentum ad ſtaticam continens ſpartoſtaticam ſeu de pondere ex pluribus funibus pendente trochleoſtaticam, de trochleis, de fluitantibus aerobaricis, ſeu de ſitu centri gravitatis in fluitantibus, quarto de chalinothlipſi ſeu de frænorum actione in equos. Hic tractatus optimus multáque de ſuo habet.

1610 Lelius Brancacio Eques Melitenſis, 33
Opus Italicum edidit *Icarichi militari* ſeu munia militaria, in quo ſingula percurrit munia à gregario milite ad Imperatorem, modumque docet inſtruendæ aciei, cujus figuram habet. Venetiis in quarto 1610.

1611 Frater Ludovicus Melzo Eques Meliten- 34
ſis & Præfectus Equitum librum Italicum edidit de equeſtri militia ſub hoc titulo (*Regole militari ſopra il governo, e ſervitio particolare della Cavaleria.*)

Hoc Opus in quinque libros dividitur.

In

Digitized by Google

In primo agit de officio cujuſque dignitatis in Equeſtri ordine.

In ſecundo, de centuriis lanceatorum, & loricatorum, quo ordine ſit procedendum in itinere noctu, & interdiu, de caſtrametatione.

In tertio, de ordine vigiliarum & excubiarum, præcipuè dum hoſtis adeſt.

In quarto, de pugnis; inſidiis; quomodo inſtruenda acies.

Quinto denique de ordine obſervando in ſtativis.

Hoc opere nihil potuit melius ſi praxin ſpectes cum ad particularia deſcendat, omniáque ſigillatim explicet prout de facto geri ſolent. In folio.

35 *1613* Vincentius Digrazia italicè conſiderationes conſcripſit, in Galilei tractatum de natantibus in humido. In hoc opere diffuſo more Italico ſunt multa parerga, cum tota hæc materia brevius & melius concludi potuiſſet.

36 Joannes de Billon dominus de la Prugne tractatum Gallicum edidit: principia nempe artis militaris, loquitur de ſingulis muniis militaribus eorumque præeminentiis, item de motionibus militaribus quæ in Hollandia obſervantur à Principe Mauritio, item de legionis unius tum pedeſtris cum equeſtris adminiſtratione, quod Opus in tres libros dividitur.

In primo libro agit de muniis inferioribus, & quomodo ſe gerere debeant qui ea exercent, præcipuè dum ſuſpiciendum quid agant hoſtes.

In ſecundo aciem inſtruit, omneſque militares motiones docet.

In tertio de regimine legionis equeſtris & pedeſtris. Quæ in hoc opere continentur ducibus pariter ac militibus ſunt utiliſſima, cum ad particularia deſcendat. Lugduni in quarto 1612. 1614 Florentiæ in quarto.

37 Joannes Bardius Florentinus eorum quæ in aquis vehuntur experimenta. Ad Archimedis trutinam examinat oratione unica publicè habita. Præcipua quæſtio eſt cur ea quæ ex naturâ ſua aquis immergi deberent ut bracteolæ, innatent tamen; circa quàm materiam gravis fuit diſputatio Florentiæ. Romæ in quarto 1644.

38 *1615* Romæ Lucas Valeſius ſcripſit acutè de centro gravitatis. Ejus liber poſtea eſt typis mandatus 1661.

Marius Savorgnano Comes Belgradenſis artem militarem terreſtrem & maritimam ſecundum modum Imperatorum & Ducum antiquorum & recentiorum Italicè conſcripſit. Videntur ejus præcepta nimis univerſalia, quamvis in recenſendis aliquibus factis ad particularia deſcendat. Venetiis in folio 1614.

39 *1615* Æneas Piccolomini Florentinus edidit reſponſionem objectionibus Ludovici delle Colombe & Vincentij Digrazia contra tractatum Galilæi de natantibus in humido; in quibus omnibus multiplicantur difficultates quæ duobus verbis ſolvi poterant. Florentiæ in quarto 1615.

40 *1615* Salomon de Caux Architectus militaris Electoris Palatini tractatum edidit Gallicum de machinis, præcipuè verò de hydraulicis; in primo libro poſt nonnulla ſtatices principia & Mechanices multas machinas hydraulicas proponit, quæ moveantur impulſu aquæ; in ſecundo multorum fontium deſcriptionem habet, demonſtrationes non profert. Opus facile nec reconditioris theoriæ, utile tamen.

Galilæus Galilæi Nobilis Florentinus tractatum edidit de natantibus in humido Italicè, *delle coſe che ſtanno ſu lacqua, o che in quella ſi muovono.* Contra hunc tractatum Ludovicus delle Colombe & Vincentius Digrazia ſcripſerunt; quare alium tractatum edidit, *Riſpoſta alle oppoſitioni del ſignor Ludovico delle Colombe e del ſignore Vincenzo.* Tota difficultas hujus diſputationis in eo vertebatur; an figura aliquid faceret ad hoc ut corpus aquæ innataret, aut mergeretur, poteratque ſolvi duobus verbis; per accidens figuram aliquid efficere; per ſe nihil. Referuntur in eodem libro adverſariorum objectiones & tractatus. In quarto. Impreſſum eſt denuò Bononiæ 1655.

Idem Galilæus tractatum edidit de mechanica valdè brevem, in quo ſingulas machinas proſequitur. In quarto denuo typis impreſſum Bononiæ 1655.

1615 David Rivultus à Florentia Cenomanus 42 è Regia turma ſacri cubiculi Regis Chriſtianiſſimi, totum Archimedem Gallicum fecit, & inter alia tractatum de æquiponderantibus & inſidentibus humido, addidit fragmenta authorum referentium Archimedis inventa; quæ Rivultus explicat adjectis figuris; ſunt autem de corona adulterata, de Cochlio, de Elice, de triſpaſto, de inventis adverſus Marcelli & Appii machinas in obſidione Syracuſana, de ſpeculis uſtoriis; de machinis aëre & aqua moventibus de ſphæra materiali.

Anno 1616 Jacobus de Malhauſen, Primus in 43 urbe Danzic Centurio librum edidit Gallicum cui titulus, *Art Militaire à Cheval*; nempe inſtructio militiæ equeſtris. Opus utile equitibus, cum pauci admodum hâc de re ſint locuti; videtur ad particularia utiliter deſcendere. An verò omnia procedant ſecundum modum pugnandi hodiernum, ſit aliorum judicium.

1616 Prodiit in lucem tractatus Gallicus de 44 militia equeſtri levis armaturæ authore Georgio Baſta Comite ſancti Imperij & Gubernatore generali in Hungaria & Tranſilvania ſub titulo, *Le gouvernement de la Cavalerie legere.* Multa tamen habet ad equitatum gravis armaturæ ſpectantia. In quatuor libros Opus ſuum digeſſit.

Primus agit de dignitatibus & magiſtratibus totius equitatus.

Secundus de caſtrametatione.

Tertius de itinere faciendo.

Quartus de acie inſtruenda praxin habet, & eruditione & exemplis confirmatam. In folio.

1621 Petrus Sardi tractatum edidit Italicum 45 de tormentis bellicis in tres libros diviſum ſub titulo (*l'Artiglieria di Pietro Sardi Romano.*

Primus liber agit de machinis antiquis; ſecundus explicat quid ſit *Artiglieria*, cur ita appellata, de inventore, progreſſu, ſpeciebus, proportionibus, menſuris, de materia item cæteriſque circunſtantiis. 3 habet uſus talium machinarum, multa tamen in eo deſunt præcipuè ad attingendum ſcopum circa jactus elevatos. Opus tamen utile eſt.

1621 Bernardinus Baldus Urbinas Guaſtallæ Albas in mechanica Ariſtotelis problemata exercitationes edidit, ſequitur ſingula Ariſtotelis capita quæ benè exponit adjectis optimis figuris ubi Opus eſt. Moguntiæ 1621.

Bernardinus Baldus Urbinas Guaſtallæ Abbas 46 exercitationes edidit in mechanica Ariſtotelis Proble

Problemata. Sequitur ſingulas Ariſtotelis quæſtiones, quibus ſatisfacit, non tantum reſponſione Ariſtotelis, ſed etiam de ſuo multa addit, Opus optimum in ſuo genere.

47 Anno 1613 Fauſtus Verantius edidit librum de machinis cum declaratione Latinâ, Italicâ, Hiſpanicâ, Gallicâ, Germanicâ. Opus iſtud maximarum impenſarum fuit, habétque machinas multas communes, nonnullas inutiles; aliquas etiam novas, & numquam ad praxim revocatas, & multas non revocabiles. Sunt autem iſtæ machinæ non bellicæ, ſed civiles, nempe ad uſus communes piſtrinorum, pontium, authliarum. Additus eſt tractatus de menſuratione, qui nihil habet niſi vulgare.

48 · 1618 Joannes de Guevara Cler. Reg. Min. in Ariſtotelis mechanica egregium commentarium edidit, unà cum additionibus quibuſdam ad eamdem materiam pertinentibus.

In prima parte præcipuas proprietates circuli, in qua plura dicit quàm Ariſtoteles.

In ſecunda parte plures quæſtiones mechanicas ſolvit, juxta principia in priori poſita præcipuè, nonnulla habet de reſiſtentia corporum ad fractionem.

Opus hoc multa habet optima & ſcitu digna. Romæ in quarto 1618.

49 16·8 Prodiit in lucem Opus Gallicum compoſitum à Diego Uſino præfecto tormentorum bellicorum in arce Antuerpienſi, in quo agit de officio ſummi præfecti rei tormentariæ ſive in expugnandis ſive in propugnandis arcibus, item de ſuggeſtis tormentorum, pontibus, cuniculis, vineis. Titulus eſt *Artillerie, ou vraye inſtruction de l'Artillerie.* In tres partes dividitur.

In primo de proportionibus tormentorum bellicorum.

In ſecundo de apparatu ad tranſvehenda tormenta, de uſu item.

In tertio de ignibus bellicis.

Opus utile non tamen perfectum.

50 1630 Joannes Jacobus de Vellanſen Præfectus Cuſtodiæ Principis Aurangiæ artem militarem edidit quæ Gallicè prodiit ſub hoc titulo, *l'Art militaire pour l'Infanterie.*

In primo libro docet uſum majoris ſclopeti & ſariſſæ.

Secundo exercitationem unius centuriæ.

Tertio exercitationem unius legionis.

Quarto de diſciplina militari uſitata.

Opus practicum & utile.

51 1630 Hugo Hermannus Societatis Jeſu, ſcripſit Latinè de militia equeſtri antiqua & nova quinque libris.

Primus de equitandi ratione & quomodo perfecta fuerit, & de illis qui in equis militarunt diſſerit.

Secundus equorum equitumque arma & phaleras deſcribit, recentioremque tranſvectionem & probationem.

Tertius equitis inſtitutionem, vexillationes, alas, centurias, decurias, multiplicemque in acie uſum.

Quartus munia equitis in caſtris itineribus & acie complectitur.

Quintus de prærogativis & dignitate equitum Hoc Opus potius eruditionem quam praxin ſpectat.

52 1632 Joannes de la Faille Antuerpienſis è Societate Jeſu, in Academia Matritenſi Societatis Jeſu; Matheſeon Profeſſor edidit 40 theoremata de centro gravitatis, partium circuli & ellipſis; nempe ſectorum omnium tam circuli, quàm Ellipſis centrum gravitatis aſſignat.

Totum hoc Opus geometricum eſt, & optimum. Antuerpiæ in quarto 1632.

Joannes à Porta pneumaticorum libros tres 53
edidit.

Anno 1635 P. Paulus Guldinus Sanctogallen- 54
ſis è Societate Jeſu, tractatum edidit de centro gravitatis. In primo libro agit de centro gravitatis linearum quarumcumque, tum de centro gravitatis planorum, tum de centro gravitatis ſolidorum. Huic primo libro addidit appendicem numerorum quadratorum & cubicorum, eorumque variis uſibus. Secundo libro novum centri gravitatis uſum aperit, tum in metiendis lineis quibuſcumque circularibus conicis, & etiam ſpiralibus, tum in generatione omnium rotundorum. In tertio libro hunc centri gravitatis uſum ſuperficiebus & ſolidis rotundis applicat. In quarto novum hujus doctrinæ ſpecimen edit in plurimis Propoſitionibus de ſphæra & cylindro facilius demonſtrandis, quam ab Archimede probatæ. Idem præſtat in aliquibus libri decimi Euclidis. Denique perpendit novam Cavalerij indiviſibilium methodum.

Novus hic centri gravitatis uſus in dimenſione omnium rotundorum poſitus inter præcipua hujus ſæculi inventa annumerari poteſt, cum viam aptam & facilem ad geometriam amplificanam aperiat.

Anno 1636 Prodiit Opuſculum machinæ 55
Joannis de Beaugrand cui titulus Geoſtartice in quo demonſtrare nititur idem pondus in minori à terræ centro diſtantiâ minus ponderare. Vacillat tamen vis demonſtrationis, & infringitur; fit enim tranſitus à gravitate ponderis abſolutè ſumpti, ad gravitationem reſpectivam, nempe quam habet in ordine ad aliud corpus cum quo connectitur.

1644 Pater Marinus Merſennus ordinis Mini- 56
morum multa habet de mechanicis, & baliſticis, non tamen exactè demonſtrata.

1645 Pater Petrus Caſtræus Societatis Jeſu, 57
edidit Phyſicam demonſtrationem, qua ratio, menſura, modus, atque potentia accelerationis, motus in naturali deſcenſu gravium determinantur, adverſus nuper excogitatam à Galilæo Galilæi Florentino de eodem motu pſeudoſcientiam, ad clariſſimum virum Petrum Gaſſendum Eccleſiæ Dinienſis Præpoſitum.

Intendit autem probare velocitates eſſe in ratione ſpatiorum, cum Galilæus velit velocitates eſſe in ratione ſubduplicata ſpatiorum. Pariſiis in quarto 1646.

Joannes Baptiſta Balianus Patritius Genuen- 58
ſis & Gubernator arcis Savonenſis tractatum edidit de motu naturali gravium, ſolidorum, & liquidorum. In primo agit de pendulorum oſcillationibus, & de deſcenſu gravium tam in perpendiculariter quam in planis inclinatis. In ſecundo libro de impetu. In tertio de motu gravium ſuper pluribus planis inclinatis. In quarto de motu liquidorum. In quinto de canalium ſectionibus. In ſexto de foraminibus vaſis. In hoc opere breviſſimo licet, multa de ſuo ſcitu digna & utilia poſuit. Genuæ in quarto 1646.

1646 Petrus Gaſſendus Eccleſiæ Dinienſis 59
Præpoſitus Epiſtolas tres edidit de proportione

quæ

Digitized by Google

qua gravia decidentia accelerantur, quibus ad totidem epiſtolas P. Caſræi Societatis Jeſu reſpondetur. Meo judicio videtur Gaſſendus objectionibus Patris Caſræi ſatisfeciſſe, doctrinamque Galilæi bene defendiſſe. Pariſiis in quarto 1646.

60 1646 Pater Nicolaus Zuchius Parmenſis Societatis Jeſu, Opuſculum edidit, nempe novam methodum revocandi machinarum omnium vires ad unum atque primum in ſingulis principium.

Opus hoc ſi clarius foret, eſſet optimum. Pariſiis in quarto 1646.

61 1647 Alexander Piccolomineus in mechanicas quæſtiones Ariſtotelis paraphraſin paulò pleniorem edidit, in qua & genuinum Ariſtotelis ſenſum inquirit, & multa ad eamdem rem addit.

Opus ſolidum ſi mentem Ariſtotelis quæras. Romæ in quarto 1647.

62 Idem 1649 edidit alium tractatum, novam de machinis Philoſophiam, in qua paralogiſmis antiquæ detectis, explicantur machinarum vires unico principio ſingulis immediato.

Acceſſit excluſio vacui contra nova experimenta contra vires machinarum, eodem vitio obſcuritatis laborat. Romæ in quarto.

63 1647 Pater Merſennus Ordinis Minimorum edidit reflexiones mathematicas, titulum autem appoſuit volumini continenti nonnullas experientias, Ariſtarchum Samium & reflexiones. Novarum obſervationum Phyſicomathematicarum F. Marini Merſenni Minimi.

In ſuis autem reflectionibus agit de multis Phyſico Mathematicis, ut de menſuris, ponderibus, de aqua per tubos ſaliente, de vacuo, de urinatoriis, de aëre ponderando, de percuſſionibus, centro percuſſionis, de acceleratione gravium, de gravium caſu cum antiſacomate &c. In quo multa ſunt ſcitu digna & facilia: nõ procedit geometricè: Eughenius ſcripſit de pendulis.

64 1650 Prodiit Lovanij diſſertatio Phyſicomathematica de motu circuli & ſpheræ per modum Theſium propugnatarum à Domino Philippo Eugenio Comite de Hernes præſide P. Andrea Tacquet. Opus ingenioſum in quo præcipuè agitur de motu volutationis horum corporũ in Plano.

65 1653 P. Joannes François ſcientiam aquarum Gallicè compoſuit quatuor partibus comprehenſam, nempe aquarum formatione communicatione, motu, & mixtione. In hoc tractatu docet methodum derivandi aquas, libellandi, attollendi, item quamcumque Ichnographiam delineandi, metiendi altitudines aut areas, item Arithmeticam quæ ultima ſunt parerga & ad hanc materiam non pertinent. Rhedonis in quarto 1653.

66 1657 Pater Gaſpar Scottus Regiſcurianus magiæ naturalis partem tertiam mechanicam effecit libris novem comprehenſam.

Liber primus de centro gravitatis agit, multaſque quæſtiones ſcitu jucundas de gravitate & tendentia in centrum continet.

Liber ſecundus potentias motrices conſiderat.

Liber tertius agit de machinis quæ conſtant rotis dentatis, in quo referuntur innumeræ machinæ, ut memnonia, aliæque tam jucundæ, quam utiles.

Liber quartus ſtaticam continet.

Liber quintus hydroſtaticam.

Liber ſextus de libellatione, & machinis hydragogicis & elevationibus aquæ.

Liber ſeptimus de aëre, an gravitet, de vacuo, in quo multa ſunt ſpiritalia.

Liber octavus de progreſſionibus geometricis.

Liber nonus de geometria, & proprietatibus circuli.

In hoc Opere more ſuo potius curioſa, & jucunda, quam demonſtrationes ſectatur. Herbipoli in quarto 1657.

1657 P. Gaſpar Schotus Regiſcurianus So- 67
cietatis Jeſu, Magiæ naturalis partem quartam Thaumatur Phyſicum nominavit, in libros octo diviſum.

Primus liber eſt Cryptologicus in quo docet modos occultos ſcribendi.

Liber ſecundus eſt Pyrothechnicus primo varias naturales illuminationes docet tum de pulvere Pyrio variis que ignibus.

Liber tertius magneticus eſt variáque horologia magnete perficit.

Liber quartus ſympathicus, & anthipaticus eſt.

Liber quintus medicus eſt.

Liber ſextus divinatorius eſt.

Liber ſeptimus phyſiognomicus.

Liber octavus Chytomanticus.

Hæc pars ad Matheſes vix benè revocatur. Herbipoli in quarto 1657.

1658 P. Gaſpar Scottus Regiſcurianus Socie- 68
tatis Jeſu, mechanicam hydraulicopneumathicam edidit in duas partes diviſam.

Prima pars Theorica eſt agitque de vi attractiva, expulſiva, rarefactiva, fluxu naturali aquæ. Item de proprietatibus aquæ ſalientis, de fluxu aquæ per diverſa lumina.

In ſecunda parte variarum machinarum ſecundum prædicta principia deſcriptionem perficit. Ut plurimum demonſtrationes non affert. Herbipoli in quarto 1658.

1661 Lucas Valerius mathematicæ & civilis 69
Philoſophiæ in Gymnaſio Romano Profeſſor tractatum edidit de centro gravitatis ſolidorum libris tribus comprehenſum. Occaſio ſcribendi fuit Commandinus qui de eâdem materia ſcripſit, & aliquorum temporum centra invenire non potuit. In primo libro pyramidum, priſmatum, cylindrorum, conorum, ſphæræ, & ſphæroideon. In ſecundo portionum ſphæræ cylindrorum, conorum, conoideon, hyperbolicorum centra determinat. In tertio eamdem materiam proſequitur.

Tractatus hic geometricè procedit, & optimus eſt multas continens propoſitiones proprias. In quarto Bononiæ 1661.

1664 P. Gaſpar Scotus Regiſcurianus è So- 70
cietate Jeſu, in Panormitano olim tum in Herbipolitano Collegio matheſcon Profeſſor technica curioſa ſive mirabilia artis libris duodecim comprehendit.

Libro primo varia profert experimenta pneumatica in recipiente è quo eductus eſt aër. Vocat Magdeburgica mirabilia.

Secundo experimenta Anglicana Domini Boyle circa eamdem materiam profert.

Tertio experimenta præcipuè circa hydrargirum explicat.

Quarto aliqua deducit corollaria ex præcedentibus.

Quinto machinas hydraulicas circa fontes explicat.

Sexto alias machinas hydraulicas præcipuè circa naves: Habet item mobile perpetuum per aquas in quo loquitur de ſpecula melitenſi ſeu

turri chartacea quæ variis rotulis habet totam doctrinam primi mobilis & aſtrologiæ.

Septimo mirabilia graphica habet.

Octavo profert varia conamina circa tetragoniſmum.

Nono mirabilia chronometrica, præcipuè verò agit de pendulis, habet item deſcriptionem aliorum horometrorum.

Decimo motus perpetuos varios profert omnes profert fallaces.

Undecimo mirabilia varia & catoptria, geodetica thermometra.

Duodecimo cabaliſtica mirabilia.

Methodus geometrica non eſt, nec demonſtrativa. Herbipoli quarto 1664.

71 1664 Famianus Michelini mathematicus Ducis Etruriæ & Profeſſor Mathematum in ſtudio Piſano, tractatum edidit Italicum in quo docet methodos quibus ſine magnis impenſis occurrendum ſit damnis quæ à fluminum curſu importantur. Opus magni momenti & utilitatis. Florentiæ in quarto 1664.

1666 Joannes Alphonſus Borelli Meſſanenſis
72 Piſæ Matheſeos Profeſſor, tractatum edidit de vi percuſſionis phyſicomathematicum. In quo primo agit de virtute projectis impreſſa ejúſque proprietatibus, ubi rejicit medium fluidum, exinde agit de percuſſione corporum, tam ſtabilium quam amovibilium, de reflexione item, tum de debilitatione impreſſionis; item de acceleratione motus, comparat item vim compreſſivam gravitatis, cum impetu acquiſito, denique de tremore.

Opus bonum quamvis non demonſtret omnia, habet tamen multa ſcitu digna quæ ad plura detegenda viam aperiunt. Bononiæ in quarto 1666.

73 Pater Gaſpar Schottus Regiſcurianus in ſuo curſu mathematico, ſtaticam & mechanicam
74 compendioſè tradit.

Dominus Deſcartes tractatum de mechanica edidit, in quo breviter explicat omnes potentias motrices. In hoc opere nihil continetur quod ſit peculiare, doctrinam tamen bonam & communem habet. Prodiit gallicè 1668. Pariſiis.

75 1669 Alexander Marchettus in Piſana Academia Profeſſor Philoſophiæ, de reſiſtentia ſolidorum libros duos edidit, in quibus Galilæi veſtigiis inſiſtens primo oſtendit in aliquibus Galilæum deceptum eſſe circa reſiſtentiam corporum; multas item addit Propoſitiones quibus hanc doctrinam provehit. Opus maximè utile, ex quo multa deduci poſſunt ad praxim ſpectantia; habet autem circiter 150 Propoſitiones, benè explicatas. In quarto Florentiæ 1669.

76 1670 Joannis Uvallis Geometriæ Profeſſor Savillianus Oxonij mechanicam ſeu tractatum geometricum de motu, diviſum in tres partes.

Prima pars habet de motu generalia, de gravium deſcenſu, & motuum declivitate, de libra.

Secunda pars de centro gravitatis, ejuſque calculo agit.

Tertia de vecte, axe in peritrochio, trochlea, motibus compoſitis, acceleratis, retardatis, & projectorum, de percuſſione, cuneo, de elatere, reſilitione, ſeu reflexione, de Hydroſtaticis, & aëris æquipondio, variſque quæſtionibus mechanicis.

Doctrina quidem hujus authoris bona eſt, modus autem ſcribendi per notas Algebricas nimis brevis, & imaginationi non ſatis ſerviens. Accedit quod figuras ſuo loco repoſitas non habet; quæ duo Opus difficile, & obſcurum reddunt, multumque de illius bonitate detrahunt. In materia quidem difficili claritas & perſpicuitas eſt affectanda. Londini in quarto 1670.

1673 Dominus Mariette ex Academia Regia tra- 77
ctatum edidit de percuſſione corporum, in quo nempe regulas ſtatuit omnino contrarias, iis quas Cartheſius & alii recentiores protulerunt.

Videntur nonnullæ demonſtrationes non omnino convincere. Ut dum conſiderat corpus quod omnem motum directum amiſit in percuſſione, quaſi in amovibile, quæ duo valdè differunt. Eſt tamen fundamentalis propoſitio, Opus tamen bonum eſt. Pariſiis in octavo 1673.

CAPUT V.

Progreſſus geographiæ, nauticæ, & magneticæ.

INter Matheſeos mixtæ ſeu peculiari materiæ affixæ, partes (ſi dignitatem ſpectes) non ultimum locum obtinet Geographia, quæ telluris deſcriptionem non nudam, & abſolutam, ſed reſpectivam, & ad diverſa cœli puncta relatam ſuſcipit. Quamvis enim accurata omnium regionum deſcriptio, diligenſque telluris in regna, & provincias partitio, ad Matheſin minimè pertineat, univerſalia tamen geographiæ placita, quibus in ſcientiarum numerum adſcribitur, ita cum Aſtronomicis præſertim principiis connexa ſunt, ut ab iis divelli, & ſeparari non poſſint. Inchoatam motuum cœleſtium ideam ſupponit Geographia, ex quo fit ut à nonnullis cum Aſtronomia ſub nomine Coſmographiæ conjungatur, nos quidem eam ſeparamus, ſolis tamen ſaltem motum annuum in Eclyptica, ab occaſu in ortum, & diurnas ejus circumvolutiones ab ortu in occaſum ſupponimus. Ex quibus motibus primò telluris figuram; locum, & ſitum conſtituimus; locum infimum, ſeu communem omnium gravitationum terminum in ejus centro collocamus, variaſque communes licet, ſcitu tamen dignas concluſiones elicimus. Exinde ejus magnitudinem abſolutam ſeu circuitum geometricè metimur, & alias ejus dimenſiones aſſignamus, reſpectivam item terræ comparativè ad cœlum magnitudinem determinamus, Aſtronomica nonnulla delibamus, ſuppoſito enim duplici ſolari motu, de ſingulis circulis verba facimus, eorumque uſum explicamus. Ab æquatore incipimus, tum illi parallelos, tropicos præſertim & polares intuemur. Horizontem duplicem diſtinguimus, circulum meridianum, ejuſque proprietates explicamus, latitudinem, & elevationem poli diſtinguimus. Zonas quinque definimus proprietateſque locorum ſub æquatore poſitorum conſideramus, tum reliquas Zonæ torridæ regiones, aut ſub tropico poſitas, annique tempeſtatum in iis viciſſitudinem, totamque luminis, & caloris diſtributionem exhibemus. Exinde ad Zonas temperatas accedimus, tum ad ſubjectas circulo polari regiones, quibus aliquando ſol non occidit aut non oritur. Denique Zonam frigidam ſubjectamque polo regionem cui nempe *annus dies eſt* conſideramus. Quam doctrinam, tam in ſphæra armillari, quam in mappis univerſalibus, & globis exhibemus. Aſcios, Amphiſcios, Antœcos,

Digitized by Google

Antœcos, Antipodas cum omnibus Geographis diſtinguimus. Diemque longiſſimam in ſingulis partibus determinantes totam terræ latitudinem in varia climata diſtribuimus.

Hactenus tellurem à Septentrione ad Auſtrum, vel è contra percurrimus, regionumque proprietates ex varia latitudine provenientes conſideravimus, nunc alteram ejus dimenſionem ab occaſu in ortum, explicamus, poſitóque primo aliquo meridiano, ſolemne illud longitudinis inveniendæ ex ſyderum obſervatione problema proponimus: tum horarum differentias in omnibus meridianis explicamus, oſtendimuſque quolibet tempore eſſe omnem horam, & datâ horâ pro qualibet orbis parte, horam pro omni alia regione aſſignamus: ex telluris circumnavigatione diei unius acceſſionem fieri, aut diem unum decedere oſtendimus, quolibet tempore locum cui ſol ſit perpendicularis exhibemus, quibus locis, aut oriatur, aut occidat, quibus quocumque die non oriatur, aut non occidat, totam item telluris illuminationem conſideramus. Præcipuas item telluris notas, & quaſi regionum ſtabiles characteres conſideramus; nempe telluris per maria diſtributionem, inſulaſque, freta, iſthmos recenſemus. De montibus item diſſerimus eorumque altitudines determinamus, exinde montes ſeparatos, ignivomos & juga deſcribimus; Denique oceanum, fluvioſque omnes, & lacus exhibemus; diviſio verò in regna, & provincias, cum arbitraria ſit, & ab hominum voluntate pendeat, conſiderationi ſcientificæ non ſubjacet, quare vulgaribus Geographis relinquendam cenſemus, utpote à Matheſi alienam.

Geographiæ Artem nauticam conjungimus ut iiſdem prorſus nixam principiis, quam hujus ævi ſcientiam nominamus, cujus antiqui in omni licet diſciplinarum genere verſati, ne prima quidem elementa tenuerunt: littora tantum legere didicerant, & in altum longiùs provecti cæcutiebant penitus, & quænam eſſet ineunda via penitus ignorabant. Nos verò faciliùs, & ſecuriùs à terra avehimur, tamque certò curſum navigii dirigimus, ac ſi nota nobis littora videremus. Quod magneti acceptum referimus, aut potiùs providentiæ divinæ, quæ cum diſſitas nationes Evangelicâ luce his temporibus perfundere decreverit, certum in magnete navigationum ducem, terreſtrémque præbuit Cynoſuram. Hujus ſcientiæ neceſſitas, & utilitas, vel ex eò patet, quod non tantum nautas, & naucleros ſpectet, ſed ſummos etiam duces quorum vita, & honor, unius hominis imperitiæ alioquin permittitur. Totam hanc navigationis doctrinam in ſex partes divido.

Prima ſub nomine definitionum varias hujus materiæ voces, & terminos explicat, non quidem omnes, quod impoſſibile foret, cum in diverſis regionibus, variæ ſint, & eædem diverſimodè uſurpentur, referre ſupervacaneum, cum ex unius diei navigatione plures, quam ex quocumque libro addiſcantur. Diſtinguit item varias navigiorum ſpecies; & partes, agit de navium menſura, velificatione, remigatione, anchora, gubernaculo, & navigatione fluviatili.

Secunda pixidem nauticam conſiderat rumboſque, ſeu ut vocant ventos in ea notatos appellat, ejus uſum in dirigenda navi, correctiones item, ſeu obſervationes declinationis ex ſyderibus docet.

Tertia loxodromiarum naturam intuetur, illarum ſcilicet linearum quas ductu ejuſdem Rumbi, pixidis magneticæ, in ſuperficiei telluris decurrit navis: earum item linearum in tabulas reductarum uſum aperit tam ad dirigendam navim; quam ad determinandum quolibet tempore ejus locum.

Quarta mappas hydrographicas examinat; reductáſque per augmentum graduum meridiani circuli ſeligit, varias item praxes tradit ad directionem itineris ſervientes.

Quinta æſtimationem itineris docet, ejuſque correctiones varias, præcipuè vero in latitudinis obſervatione fundatas, ſolemne item longitudinis inveniendæ problema proponit.

Sexta denique varias praxes nautis perutiles habet, ut diarii conficiendi ichnographicum portûs, aut littoris typum, determinandæ horæ fluxus, aut reflexus; conjecturas item imminentis procellæ. Authores qui de navigatione ſcripſerunt ſunt hi.

Rodericus Zamoranus.
Petrus Medina.
Petrus Apianus.
Petrus Nonius.
Andreas Gaſpar Ceſpedius.
Villebrordus Snellius in ſuo. Typhi Batavo.
Simon Stevin l.4 & 5 Geographiæ ſuæ.
Adrianus Metius l.5 doctrinæ ſphæricæ.
Bartolomæus Creſcentius in Nautica mediterranea.
Auguſtinus Cæſareus in tractatu de navigatione.
Robertus Dudlæus de arcanis maris.
Jacobus Colom in Face navigationis.
Author Columnæ flammantis.
Petrus Herigonius tomo 4 Curſus mathematici.
Joannes Janſonius in Introductione ad orbem maritimum.
Morizotus in Orbe maritimo.
Merſennus Hiſtiódromia.
P. Georgius Fournier Societatis Jeſu, in ſua hydrographia.
Bernardus Varenius lib.3. Geographiæ univerſalis.
Lazarus Baytius de re navali.
P. Ricciolius in ſua Geographia reformata.

Qui omnes ſunt recentiores, ſcripſeruntque hoc aut precedenti ſæculo; nullus enim veterum hanc materiam attigit.

A Geographia, & arte nautica magnetem non ſejungemus, cum & virtus magnetica terreſtris ſit, & magnes tot nominibus rei nauticæ addicatur. Virtus magnetica prorſus mirabilis eſt, cum nempe uniones, margaritas, adamantes longo ſuperet intervallò hic lapis: ita mentis aciem perſtringit vis illa occulta, qua ferrum ad ſe allicit, & ſtringit, ea tamen quâ continuò ad ſeptentrionem, & auſtrum dirigitur, & quæ antiquis fuit incognita, admirabilitati utilitatem adjungit, cum navigationes omnes dirigat. Ejus proprietates omnem ferè legem detrectant, in hoc enim lapide, & contrario in eodem ſinu, etiam in ſummo ſubjectantur. Centrum eſt in circumferentia, amicæ partes ſe invicem fugiunt, inimicæ conjunguntur, quæ uni tertio uniuntur; inter ſe non cohærent, cauſa dat quod non habet, & id quod produxit deſtruit.

Magnes igitur aut à Magneſia regione, in qua luculentus, & eximiæ virtutis effunditur, aut à

magnete paſtore, qui primus in Ida monte, ex baculi ferreâ cuſpide ei adhæreſcente hujus lapidis virtutem attractivam detexit: nomen trahere volunt. Varia tamen ſortitus eſt nomina, dictus eſt Heracleus, ſeu Herculeus quod ſicut Hercules monſtra, ita magnum ferrum domaret. A nonnullis ſideritis ſeu ferreus nuncupatur, à Gallis dicitur *Aymant* quòd ferrum amet, ab Italis *Calamita*.

Magnetis natura lapidea videtur, eſt tamen potius metallica, ſeu ditior ferri vena, ex qua Chalybs eximiæ notæ educitur. Colorem habet non unicum, ſed varium; fuſcum ut plurimum, qui ſi poliatur in ferrugineum deſinet. Datur & magnes albus, cum enim ferri vena in medio marmore ut plurimum deliteſcat, cum dives non eſt, prævalet marmoris color, ſed tunc magnetis virtus eſt exigua & debilis, abraſiſque partibus nigricantibus ferè tota evaneſcit & deperit.

Magnetis virtutes variæ ſunt, quæ ad duas facilè revocantur, ad attractivam ſcilicet Antiquis non incognitam, teſte Platone aliiſque, ita ex eleganti Claudiani Pœmate; & directivam qua dum liberè ſuſpenditur, plano meridiano ſe accommodat, de qua ne verbum quidem Antiqui. Cum enim Deus optimusmaximus pro ſua in homines providentiâ, diſſitas, totoque oceano remotas Nationes Chriſtianis ritibus imbuere voluit à trecentis circiter annis hanc directionem detexit. Melphitani in regno Neapolitano primi pixidem nauticam invenerunt circa annum 1300. Nonnulli Paulum Venetum è regno Sinenſi eam in Europam advexiſſe circa annum 1260.

Invenimus item Poetam Gallum ita luſiſſe circa hæc tempora.

Icelle eſtoile ne ſe muet.
Un art font qui mentir non puet.
Par vertu de la marinette,
Qui eſt une pierre noirette,
A la quelle le fer volontiers ſe joingt.

Quidquid ſit de inventore, hôc inventô nihil potuit ad humanos uſus accommodatius excogitari.

Authores qui de magnete ſcripſerunt ſunt hi.

Chabotus Primus magneticorum variationem detexit.

Fracaſtorius magneticorum directionem montibus hyperboreis tribuit.

Cardanus ſtellæ cynoſuræ.

Conimbricenſes alicui parti cœli.

Martinus Corteſius, Beſſardus, Jacobus Severinus, Robertus Nortmannus, Franciſcus Maurolycus, Joannes Baptiſta Porta, de magnete ſcripſere. Noviſſimè verò Guillelmus Gilbertus Medicus Londinenſis, Patres Cabæus, Kirkerius, Grandamicus, Leoutaudus è noſtra Societate, magnetis naturam ſcrutati ſunt. Scripſere & nonnulla Gaſſendus, & Carteſius, ſed non ex profeſſo, quippe qui eam materiam tantum delibarunt.

Communiter in magnete multæ ſpectantur proprietates quæ variis experimentis ſtabiliuntur. Prima eſt virtus attractiva, qua ferrum aut allicit aut expellit. Secunda virtus directiva ad polos magnetis, quâ nempe magnetica, certa ejus puncta quaſi polos ſpectant, & ad ea inclinantur. Tertia virtus directiva ad polos terræ & ad planum ejus meridianum. Quarta variatio magnetis quâ in plurimis locis à tali plano exorbitat. Quinta inclinatio. Sexta denique communicatio virtutis ex quibus proprietatibus variæ circa ejus naturam concluſiones deducuntur, variæque praxes tam ad navigationem, quàm ad Geometriam, & Gnomicam deducuntur.

Authores qui de Geographia ſcripſerunt digeſti ſecundum ordinem temporum ſunt ſequentes.

Secundo Urbis conditæ ſæculo ſexcentis circiter ante Chriſtum annis Anaximander Mileſius Thaletis ſucceſſor ſphæram compoſuit. Terræ circuitum dimenſus eſt, & primus tabulam Geographicam expoſuit teſte Plinio & Laertio.

Eodem tempore Hecateus Mileſius Primus codicem de ſitu orbis reliquit. Proclus Polemon auditor Panetij Rhodij tempore Ariſtophanis Grammatici orbis deſcriptionem fecit. Ita Suidas.

Tertio Urbis conditæ ſæculo Timæus Locrus Pythagoricus cui Plato ſuum Timæum exſcripſit, ſcripſit de natura Mundi.

Quarto Urbis conditæ ſæculo ineunte 450 annis ante Chriſtum.

Democritus Mileſius inter alia multa cœli terræque deſcriptionem fecit.

Eleates Parmenides Primus dixit terram eſſe rotundam, & in medio mundi ſitam, ita Laertius, ex quo concludo præcedentes deſcriptiones fuiſſe valde imperfectas.

Philoſophus Platonis auditor ſcripſit de magnitudine ſolis, lunæ, & terræ.

Quinto Urbis ſæculo ante Chriſtum 300 annis.

Euclides Geometra inter alia multa ſcripſit phænomena in quibus ſunt nonnulla principia ad Geographiam ſpectantia.

Autolycus præceptor Arceſilai floruit circa Olympiadem 120. ſcripſit de ſphæra quæ movetur, nempe habet principia communia Aſtronomiæ, & Geographiæ.

Dicearcus Siculus primus perpendicularem dimenſus eſt, invenitque Pelion eſſe 1250 paſſuum.

Sexto Urbis conditæ ſæculo 250 ante Chriſtum terræ ambitum dimenſus eſt per ſolis umbram ſolſtitialem. Extat apud Ptolemæum ejus methodus.

Archimedes item ſphæram conſtruxit.

Septimo Urbis ſæculo 100 ante Chriſtum annis, Poſſidonius Philoſophus Panetij diſcipulus Rhodi temporibus Ciceronis docebat; Scripſit Geographica, quæ citantur à Strabone. Dicitur Pomponius magnus, eum audiviſſe & imperii faſces ad ejus januam ſubmiſiſſe.

Cleomedes Græcè ſcripſit meteora quibus tractat ea quæ in ſphæra docentur, ſuntque principia Geographiæ.

Octavo Urbis conditæ ſæculo, 50 annis ante Chriſtum.

Teodoſius Tripolita, præter tres libros ſphæricorum, ſcripſit de habitationibus nempe ſunt præcipuæ proprietates cœleſtes variarum regionum. Scripſit de diebus, & noctibus quæ eò etiam pertinent.

M. Agrippa Auguſti Gener, & Conſul, terrarum Orbem propriis commentariis deſcriptum, poſtea in porticu depictum populo Romano ſpectandum propoſuit. Plin. l. 3. cap. 2.

Chriſti primo ſæculo ineunte.

Dionyſius Afer, vel ut vult Suidas, Corinthius, vel ex Byſante civitate tempore Auguſti Geographiam, verſibus Græcis exametris ſcripſit quam Priſcianus Latinam fecit. Baſileæ Græcè & Latinè. In octavo 1585. Idem fecit Pœma de ſitu orbis, quod

quod idem Priſcianus eſt interpretatus verſibus Latinis. Plutarchus fecit libellum de appellatione fluviorum,& montium, in quo Antiquorum fabulas refert.

Marianus Heracleota, Scylax Caryandenſis, Artemidorus Epheſius,Dicearchus Meſſenius, Iſidorus Characenus Geographica ſcripſere Græcè, quæ à Davide Hoeſchelio edita ſunt: habent autem ſimplicem regionum deſcriptionem. Aug. Vindelicorum in octavo 1600.

Strabo eruditè, & fusè orbis ſitum cujus magnam partem peragrarat deſcripſit. Mela pariter de Geographia ſcripſit.

Marinus Tyrius ſcripſit Geographica.Hunc in multis Ptolemæus reprehendit.

Solinus ſcripſit Polyhiſtora. In quo opere multa habet Geographica.

Pomponius Mela Epitomen Geographiæ Veteris & novæ edidit, in qua placita generalia Geographiæ ſatis benè explicat, deſunt tamen figuræ ad formandum imaginationem; pauca habet de ſingulis regnis. Aug. Vindelicorum in octavo 1557. in folio. Baſileæ.

Idem tres libros edidit de ſitu orbis, in quo nomina Veteris, & Novæ Geographiæ comparat. Pariſiis in 8. 1538 & 1557 cum commentariis Olivarii.

Scylax Caryendenſis periplum edidit in quo deſcripſit varias Regiones.

Hoc Opus Iſaac Voſſius vertit, & commentario auxit. Amſterodam. in quarto 1639.

Straton Amaſenus Philoſophus lib.7. Geographicos edidit.

Artemidorus iiſdem temporibus Strabonis ſcripſit Geographica.

Ju. Hyginus de Mundo & ſphæra ſcripſit.

Dionyſius Alexandrinus ſcripſit de ſitu Orbis librum, quem Euſtathius Theſſalonicenſis Archiepiſcopus Commentariis item Græcis illuſtravit. Omnia in Latinum vertit Bernardus Betrandus Rhegino, Galloprovincialis. Baſileæ in octavo 1556. Opus ferè hiſtoricum.

Plinius à ſecundo libro ad ſextum habet Geographica.

Secundo Chriſti ſæculo.

Ptolemæus Alexandrinus ſcripſit Geographiam nempe Geographicæ enarrationis libros octo, totum opus potius hiſtoricum eſt quam mathematicum. Habet tamen initio nonnulla circa deſcriptionem meridianorum, & parallelorum ad Matheſin ſpectantia. Bilibaldus Pickeimberus ea vertit in folio 1541. Gerard. Mercator Græcè & Latinè ea edidit 1584. item Baſileæ 1542. Jodocus Hondius 1605.

Arrianus authior Græcus Xeriophon minor dictus ſcripſit Græcè periplum.

Tertio Chriſti ſæculo Porphyrius ſcripſit Iſagogen Aſtronomicarum rerum quæ etiam poteſt eſſe iſagogica ad Geographiam.

Quarto Chriſti ſæculo.

Sextus Auienus Rufus Arati phænomena & Dyoniſii Afri Poœma de ſitu Orbis latinè interpretatus eſt.

Abifeldea Princeps Syriæ, Aſſyriæ, & Perſidis Geographus inſignis, ejus Geographia Arabica aſſervatur in Bibliotheca Palatina.

Geminus Rhodius ſcripſit phænomena, quæ in Bibliotheca Ambroſiana Græco-Latina aſſervantur.

Sub Conſtantio & Conſtante author Græcus anonymus Veterem deſcriptionem Veteris Orbis Græci elucubravit. Habet autem nomina aliquarum regionum incognitarum de quibus videtur fabuloſa multa dicere. Jacobus Gotofridus hoc Opus interpretatus eſt & notis illuſtravit Genevæ in quarto 1628.

Quinto Chriſti ſæculo.

Proclus Diadochus librum de ſphæra edidit, nempe, de axe, polis, circulis ſphæræ, de quatuor parallelis, de occultatione, & emerſione parallelorum, de magnitudine, ordine, poteſtate, intervallo eorumdem, de coluris, ſignifero, horizonte, tabula climatum, de meridianis circulis, de quinque zonis, & ſignis cæleſtibus.

Hic liber Latinè, & Græcè eſt editus in octavo Baſileæ 1585 interprete Thoma Linacro-Britanno, Eraſmus Oſvaldus addidit annotationes. Vixit Traiani temporibus, Scripſit alia multa.

Pappus Alexandrinus inter alia multa, ſcripſit univerſalem Orbis deſcriptionem; item de fluviis Lybiæ.

Conſtantinus Porphyrogeneta Imperator, ſcripſit de Thematibus ſeu præfecturis occiduæ partis Orientalis Imperij. Habetur tantum liber ſecundus, Interprete & Commentatore Frederico Morello. Latinè typis mandatus eſt Pariſiis 1619 in octavo.

Septimo Chriſti ſæculo.

Iſidorus Hiſpalenſis Epiſcopus in libro de Mundo breviter nonnulla de ſphæra perſtringit.

Nono Chriſti ſæculo.

Almeon ſive Almamon Rex Arabum dimenſus eſt ambitum terræ in planitie Singar prope Babyloniam, invenitque uni gradui terræ deberi milliaria 56.

Achilles Statius, ſeu Tatius Alexandrinus Epiſcopus ſcripſit de ſphæra.

Undecimo Chriſti ſæculo.

Campanus Italus ac Novarienſis ſcripſit in ſphæram.

Duodecimo ſæculo Rabbi Abraham ſcripſit de ſphæra.

Decimo tertio Chriſti ſæculo.

Joannes de Sacro Boſco Anglus ſcripſit de ſphæra tractatum optimum, & clarum quem multi ſunt commentati. Non tamen omnia demonſtrat, ſed ſimpliciter propoſitiones affert, quaſi eſſent claræ ex inſpectione ſpheræ, quod etiam uſurparunt plerique.

Joannes Gira Amalphenſis primus pixidem nauticam compoſuit. Creditur tamen paulò ante detecta magnetis proprietas, ad meridianum planum ſe conformandi quâ nonnulli utebantur impoſito magnete in cimba ſuberea. Unde magnes dictus fuit à Gallis *Marinette*, quæ eſt ſpecies ranarum, eo quod tanquam rana nataret. Ipſe tamen Joannes Gira meliorem uſum excogitavit. Multi tamen credunt quod ipſe hanc magnetis proprietatem primus detexit.

Decimo quarto ſæculo.

Marcus Paulus Venetus per totum Orientem pervagatus multa ſcitu digna de regnis Aſiæ Orientalibus Italicè ſcripſit.

Decimo quinto ſæculo.

Petrus De Aliaco ſcripſit de parallelis.

Chriſtophorus Columbus Ligur detexit Americam.

Anno 1519 Ferdinandus Magellanes rei nauticæ peritiſſimus Fretum Magellanicum invenit, & totum Orbem circumnavigavit.

Eodem

7 Eodem anno Joannes Stobniza Polonus introductionem elaboravit in Ptolemæi Geographiam.

8 Anno 1520 Joannes Bellendenus, natus in Orientali Scotia, Scoticè Geographiam edidit.

9 1521 Joannes Venetus edidit Ptolemæi Geographiam à ſe Latinè redditam cum annotationibus, & libello de 4 planis terrarum deſcriptionibus, cum Opuſculo de Geographia.

1525 Bilibaldus librum Ptolomæi de Geographia Latinum fecit.

1530 Barlouus Anglus Coſmographiam vertit.

1 1480 Jacobus Faber Stapulenſis Commentarium edidit in ſphæram Joannis de Sacro Boſco.

Hoc Opus in quatuor libros dividitur; In primo de ſphæra, centro, axe, ſphæræ diviſio in rectam, obliquam, parallelum cœleſtem, elementarem, quot cœleſtes ſphæræ & motus, de cœli figura, de terræ figura, de immobilitate terræ, de dimenſione terræ, de diſtantia terræ à cœlis.

In ſecundo de circulis, conſtellationibus, de Zodiaco, Eclyptica, ſignis, Zenit Nadir, declinatione, de meridiano, de longitudine de horizonte, de æquatore, tropicis, polaribus, quinque zonis.

In tertio de ortu & occaſu ſyderum, Coſmico Chronico, Heliaco. De aſcenſionibus rectis, & obliquis, de die naturali, artificiali, de die longiſſima, quomodo habeatur arcus ſemidurnus, aut ſeminocturnus, de diverſitate horarum, de climatibus, tabula Climatum.

In quarto libro de circulis excentricis Solis, & Lunæ, de Epicyclo Lunæ, de cauda & capite draconis, de directionibus & ſtationibus planetarum, de Eclypſibus Solis & Lunæ. Totum Opus optimum eſt, videturque omnia comprehendere quæ ad univerſalem geographiam pertinent.

Circa hæc tempora Bonetus de Latis Hebræus Medicus Provincialis, Opuſculum edidit de annuli aſtronomici uſibus non benè explicatum.

2 1498 Impreſſus eſt Pariſiis tractatus de ſphæra mundi Joannis de Sacro Boſco Angli & Doctoris Pariſienſis unà cum textualibus optimiſque additionibus, & commentario Petri Cirvelli Darocenſis atque inſertis quæſtionibus Cardinalis de Aliaco.

Hoc Opus habet principia geographiæ communia ſatis benè explicata. Item principia Aſtronomicæ non tamen demonſtrata. In quarto Pariſiis 1498.

3 1507 Prodiit Opuſculum Introductio ad geographiam Ludovici Boulengerij, cum Americi, Reſpuccii navigationibus.

4 1515 Zacharias Lilius Vincentinus Breviarium Orbis edidit ordine alphabetico. In quarto 1515.

5 1518 Joannes Schonerus Caroloſtadius Opuſculum geographicum ex pluribus mappis collegit, accommodavítque globo terreſtri à ſe elaborato. Præmiſit aliquos uſus globi materialis, tum de ſingularibus regnis locutus nimis tamen breviter, ita ut vix quidquam bene doceat: habet tamen multa bona de principiis geographiæ. Nuremburgæ in quarto.

6 1532 Sebaſtianus Munſter Novum Orbem edidit Baſileæ in folio, Opus hiſtoricum, continens navigationes.

7 Circa annum 1530 Petrus Nonius Luſitanus Salacienſis inſignis Mathematicus occaſione aliquorum quæſitorum ſibi ab inſigni Navarcho Martino Alphonſo à Soſa propoſitorum tractatum edidit de arte navigandi in duos libros diviſum, quorum primo reſpondet duobus quæſitis, nempè quòd ubique die æquinoctii ſol oriri videatur in linea æſtatis, quam ſi ſequamur deſcribimus parallelum. Video autem jam illum agnoviſſe loxodromicas, nempe quod curſus navigii eumdem rombum ad meridiem inclinatum decurrentis ſit ſpiralis.

In ſecundo libro loquitur de regulis & inſtrumentis ad nauticam ſpectantibus, ut de charta marina, de tabula nautica præcipuè utili ad inveniendam longitudinis differentiam, de inſtrumentis ad elevationem ſyderum indagandam, tum de latitudine regionis multis modis invenienda, tum ſolvit nonnulla problemata nautica explicatque naturam loxodromiarum.

Habet item annotationes in theoricas Purbachii, quæ faciunt ad intelligentiam pleniorem. Ultimò tractatum edidit de Orontii Finæi erroribus.

Character hujus authoris eſt obſcuritas, unde impoſſibile judico ut nauclerus aliquis poſſit ex eo Opere aliquid utilitatis percipere; quamvis enim clarè appareat ipſum ſciviſſe loxodromiarum naturam, non tamen illius doctrinæ uſum ſatis accommodavit captui nautarum, quibus praxes faciles ſunt proponendæ, melius poſtea Spellius de iiſdem lineis loxodromicis locutus eſt.

1533 Prodiere Coſmographiæ aliquot deſcriptiones Joannis Stofleri Juſtingenſis Mathematici de ſphæra coſmographica, hoc eſt de globi terreſtris artificioſa ſtructura, nempe de duplici projectione terræ in planum, & quâ ratione commodiùs chartæ coſmographicæ deſignari queant. 8

Hoc opuſculum parvum eſt, utile tamen, continet aliquot tantum folia. Marpurgi in quarto 1537.

1534 Hyeronimus Gemuſcius Strabonis epitomen Latinam fecit. 14

Anno 1535 Orontius Finæus deſcriptionem Orbis evulgavit ad effigiem cordis, item Galliæ tabulam & planiſphærium geographicum. 15

Anno 1535 Joannes Dyander edidit Introductionem Coſmographiæ. 16

1536 Franciſcus Ritterus Granbergenſis geographiam amplam verſibus edidit. Nihil habet ad Matheſin pertinens. In quarto. 17

1538 Georgius Rithaymerus compendium de ſitu Orbis edidit. 18

1540 Guillelmus Poſtellus Barentonius Syriæ deſcriptionem edidit Latinè, Opus hiſtoricum. 19

1540 Franciſcus Maurolycus tres libros Coſmographiæ edidit. In primo agit de forma, ſitu, numeróque tam cœlorum quam elementorum; In ſecundo agit de circulis primi mobilis & eorum officiis, de zodiaci diviſione, de zonis, plagis ventis, longitudinibus, latitudinibus, declinationibus aſcenſionibus dierum & noctium magnitudinibus, decrementis crepuſculis. In tertio de motuum ſpeculatione. Eſt igitur introductio ad magnam conſtructionem optima quidem & utilis ſed in multis non demonſtrata. 20

1548 Gemmafriſius ſcripſit de principiis Aſtronomiæ & Geographiæ, déque uſu globi Coſmographici ab ipſo editi, item de telluris diviſione. Principia geographiæ non videntur ſatis benè explicata in hoc opere, nec demonſtrata. Antuerpiæ in octavo 1548. 21

1550 Floruit Gerardus Mercator Geographorum ſui temporis facilè princeps reſtituit Ptolomæi Geographiam, item Athlantem elucubravit. 22

1551

Digitized by Google

23 1551 Guillelmus Poſtellus deſcripſit Etruriam, item librum de Coſmographia ſeu de Univerſitate.

24 1552 Robertus Recordus Anglus edidit Coſmographiæ iſagogen & librum de uſu globorum.

25 1556 Pater Ludovicus Vulcanus della Padula Ordinis Minorum ſancti Franciſci Deſcriptionem edidit Terræ Sanctæ, Opus hiſtoricum bonum. Neapoli in octavo 1556.

26 1556 Joannes Leo Africanus Africæ deſcriptionem edidit. In folio Lugduni.

27 1557 Joannes Leo Africanus de totius Africæ deſcriptione libros novem edidit, hiſtoricos potius quam mathematicos. Antuerpiæ in octavo.

28 1557 Sigiſmundus Librum rerum Moſcovitarum Commentarium edidit, cum Ruſſiæ breviſſima deſcriptione, & geographia totius Imperii Moſcovici, hoc Opus mathematicum non eſt. Antuerpiæ in octavo 1557.

29 1557 Proclus genere Lycius Syriani Alexandrini Philoſophi diſcipulus & Plutarchi filij Neſtorii Philoſophi auditor, Philoſophus Platonicus, Athenis Philoſophiæ ſcholis præfuit & in Syriani locum ſuffectus, cui poſtea Marinus Neapolitanus ſucceſſit, Scripſit in Homerum & in Heſiodi Georgica Commentarios, in Platonis politiam libros quatuor, de diſcendi commoditate libros tres, de inſtitutione duos ſcripſit & in Chriſtianos cui Joannes Philoponus reſpondit. Scripſit igitur de ſphæra mundi Opuſculum in quo circulos dumtaxat explicat.

Hic libellus Impreſſus eſt Pariſiis 1557 Latinè ex interpretatione Thomæ Linacri Britanni cum annotationibus Jacobi Tuſani Regii Græcarum litterarum Profeſſoris. Additum eſt aliud ejuſdem Opuſculum Græcum hypotypoſis aſtronomicarum hypotheſeon; in quo opere explicat planetarum hypotheſes.

Tertio aliud ejuſdem Opus de motu; poſteriores quinque de auſcultatione libros mira brevitate complectens, Spiritu Martino Cuneato interprete. Pariſiis in quarto 1557.

Dominicus Marius Niger geographiæ libros undecim edidit omnino hiſtoricos. In eodem volumine habetur Laurentii Corvini Novoferenſis geographia in cujus proœmio ſunt nonnulla Mathematica. Habetur in eodem epitome Strabonis ad hiſtoriam ſpectans. Baſilææ in folio.

30 1557 Paſcaſius Hamellius Regius Mathematicus Commentarium edidit in Archimedis Syracuſani librum de numero Arenæ, & emendavit, qui Commentarius facilis eſt & bonus. Pariſiis in octavo 1557.

31 1558 Guillelmus Xilander Strabonis geographica latinè reddidit & Stephanum de Urbibus ſeu Hermolaum Byſantium edidit emendatiorem.

32 1561 Petrus Medina Hiſpanus Hiſpanicè artem navigandi tradidit quam Gallicam fecit anno 1661 Nicolaus Nicolai Delphinas Geographus Regius.

Hoc Opus in ſex libros dividitur. Primo tradit principia quædam ſphæræ ad intelligentiam navigationis neceſſaria.

Secundo agit de mari, de curſu aquarum, de prognoſticis tempeſtatum ex Luna & Sole.

Tertio de ventis & rumbis. Videtur autem ignoraſſe naturam loxodromiarum, loquitur tamen de rumbis quorum habet aliquam tabulam malè explicatam.

Quarto agit de altitudine ſyderum, & profert tabulam declinationis pro quattuor annis.

Quinto de altitudine polari per ſtellam Polarē.

Sexto de declinatione magneticorum quam tamen non benè corrigit.

Septimo de Luna & æſtu maris prædicendo.

Octavo de Kalendario.

Multa habet optimè hoc Opus, & ſuo tempore erat magni momenti. Lugduni Gallicè in quarto 1661.

1567 Philippus Appianus Bavariæ deſcriptionem elucubravit, & patris ſui Petri Appiani Coſmographiam, & Mercatoris ſphæram eſt interpretatus. 33

1571 Henricus Glareanus Helvetius Poëta laureatus de geographia librum unum conſcripſit, ſed valdè brevem, in quo principia non ſunt ſatis explicata, nec determinata. Coloniæ Agrippinæ in octavo 1571. 34

1576 Jacobus Cheyncius Arnage Scotus Duaci matheſeon Profeſſor duos libros de Geographia ſcripſit. 35

In priori principia tradit & nonnulla attingit ad nauticam ſpectantia; In ſecundo regiones deſcribit, exigui omnia momenti. Duaci in octavo 1576.

1572 Benedictus Arias Montanus Hiſpalenſis edidit Antiquitates Judaicas egit que de gentium primis ſedibus, Orbiſque terrarum ſitu. 36

1577 Pomponij Mela epitome geographiæ veteris & novæ. Prodiit in lucem operâ Georgij Heniſchij Auguſtæ Vindelicorum in octavo 1577. 37

Idem libros tres edidit de ſitu Orbis in quo veteris geographiæ nomina & novæ comparat. Pariſiis in octavo 1538.

Franciſcus Barocius Patricius Venetus præter alia multa Coſmographiam edidit. 38

Alexander Picolomineus ſcripſit Italicè ſphæram, & de magnitudine terræ & aquæ. 39

1575 Munſter & Belleforeſt ediderunt Coſmographiam Gallicam tribus tomis in folio. Initio ſunt nonnulla ad Matheſin ſpectantia ſed pauca & vulgaria. 40

1575 Andreas Thevet Coſmographus regius edidit Gallicè Coſmographiam univerſalem duobus tomis. Non benè tradidit principia. Pariſiis in folio 1575. Non habet tabulas Liber eſt potius hiſtoricus. 41

1579 Antonius Berga Philoſophus Taurinenſis edidit Italicè diſcurſum circa hanc quæſtionem, An terra major eſſet quàm aqua, cui reſpondet Italicè Joannes Baptiſta Benedicti Philoſophus Ducis Sabaudiæ. Altercantur autem in re facillima, & quæ duobus verbis conſtitui poterat. Taurini in quarto 1579. 42

1580 Lambertus Danæus geographiam poëticam ſeu univerſæ terræ deſcriptionem ex vetuſtiſſimis latinis poëtis collegit libris quatuor quorum primus Europam; Secundus Africam; Tertius Aſiam; Quartus mare & inſulas continet. 43

In ſingulis libris hic ordo obſervatur ut cujuſque partis regiones, populi, populorúmque mores, urbes, flumina, & montes illuſtriores, ex iiſdem Poëtis deſcribantur. Opus optimum ad veterum geographiam cognoſcendam. In octavo 1580.

1582 Bernardinus Baldus Urbinas anonymi Arabis Hortum geographicum Latinè reddidit & hiſtoriam contexuit ex ſcriptoribus pluſquam trecentis. 44

1583 Lucas Joannis Aurigarius edidit ſpeculum nauticum continens Oras maritimas Galliæ, Hiſpaniæ, 45

Hiſpaniæ, & præcipuarum partium Angliæ, unà cum uſu & explicatione. In hoc ſunt multa bona ad navigationem ſpectantia. Lugduni Batavorum magno folio 1583.

46 1584 Prodiit Petri Appiani & Gemmafriſii Coſmographia, ſeu totius Orbis deſcriptio. Continentur in hoc Opere, primò Appiani Libellus de principiis Coſmographiæ, & Aſtronomiæ, nempe de figura, ſitu terræ, circulis majoribus, & minoribus, de climatibus, longitudine, latitudine, de globo terreſtri, ventis &c. Tum habet deſcriptiones Europæ, Aſiæ, Africæ, Americæ, Peruviæ. Judiarum &c.

Opus hoc optimum eſt & clarum. Antuerpiæ in quarto 1584.

47 1585 Joannes Honterus Coronenſis de Coſmographiæ rudimentis libros quatuor verſibus compoſuit, unà cum tabellis geographicis præcipuis adjectis ejuſdem tam Aſtronomiæ quam Geographiæ principiis. Baſileæ in octavo.

48 1588 Livius Sanutus geographiam duodecim libris Italicè edidit. Habet initio diſcurſum de acu magneticâ in quo non ita benè ratiocinatur. Venetiis in folio 1588.

49 1589 Prodiit Itinerarium à Burdegalâ Hieruſalem, & ab Heraclea per Aulonam & Romam Mediolanum uſque ante annos 1200 ſimplici ſermone ſcriptum.

50 1590 Papyrius Maſſonius Juriſconſultus Gallus edidit Deſcriptionem fluminum Galliæ.

51 1591 Giraut Lingonenſis tractatum edidit Gallicè ſub hoc titulo, *Globe du monde contenant un bref traité du Ciel & de la Terre.* Hoc Opus per dialogiſmum procedit, ſatiſque clarè res cœleſtes explicat appoſitis figuris idoneis.

52 1592 Chriſtianus Adricomius Delphus urbis Hieroſolimæ qualis fuit tempore Chriſti Domini deſcriptionē edidit Coloniæ Agripp. in oct. 1592.

53 Anno 1593 prodiit Gerardi de Judæis ſpeculum Orbis terrarum cum brevi introductione ad geographiam.

In hoc opere continentur mappæ præcipuorum regnorum, & Provinciarum Europæ, & aliæ nonnullæ cum prævia explicatione. Opus potius hiſtoricum quàm mathematicum. Antuerpiæ in majori folio 1593.

54 1595 Joannes Boterus univerſales relationes geographicas edidit tribus tomis 1595. Romæ in quarto.

55 1595 Prodiit Epitome Theatri Orteliani præcipuarum Orbis regionum delineationes minoribus tabulis expreſſas, Brevioribus declarationibus illuſtratas continens. Antuerpiæ in octavo 1595.

56 1598 Leonardus Verietus Cernoti Ptolomæi geographiam Italicè edidit cum tabulis. Venetiis in folio.

57 1598 Jacobus Sevetius ſcripſit de Orbe Catoptrico; in quo Opere ſunt multa ad navigationem pertinentia.

58 Abrahamus Ortelius Theatrum Orbis univerſi edidit, in quo continentur mappæ omnium regionum cum earum explicatione. In folio 1598. Idem fecit parergon in quo profert tabulas Terræ Sanctæ.

59 1599 Bartholomæus Pitiſcus edidit problemata geographica.

60 Prodiit libellus utilis naucleris de declinatione Solis pro quatuor annis, unà cum modis elevationis polaris obſervandæ, per elevationem poli & ſtellæ polaris. Habet item multa ad navigationem ſpectantia Gallicè. In eo habetur deſcriptio littorum Oceani Galliæ, Hiſpaniæ, Flandriæ &c. Author eſt Joannes Garcia dictus Ferrand. In quarto Pictavij ſine anno.

1601 Joannes Herrera deſcripſit Americam, 61
Petrus Bertius geographiæ tabulas contractas edidit, & Ptolomæi geographiam Græcè & Latinè.

1608 Simon Stevinus Principis Auriaci Ma- 62
thematicus in ſuorum hypomnematum parte ſecunda tractatum habet geographicum in ſex libros diviſum. In primo aliquas definitiones habet, præcipuè agit de primo meridiano, & initio diei geographico. Excurrit exinde ad eruditum ſæculum, & quomodo invenienda ſit ſcientia, item de bonitate linguæ ſeu idiomatis, texitque Catalogum verborum monoſyllaborum tam Belgicorum quam Latinorum.

Secundus liber eſt de terreſtris globi hylocineſi, nempe quomodo materia ab agris ſublimioribus aquis deteratur, agroſque alios efficiat; de montium origine, quomodo colles arenacei in pinguem terram mutentur, cur ripæ deterantur, cur ad oſtia fluviorum pulvini jaceant.

Qui liber nihil habet notatu dignum nec debuit in hunc locum reponi.

Tertius eſt de terreſtri athmeoria ſeu de athmoſphæra terreſtri, ea autem quæ habet deſumpſit ex Alaceno Girardo Cremonenſi, & Petro Nonio. Brevis eſt liber & pauca complectitur.

Quartus liber eſt de navigatione, in quo primo navigationem circularem explicat tum loxodromicam.

Quintus limeneuretica agit præcipuè de uſibus pixidis magneticæ ejuſque declinatione.

In ſexto æſtus maris conſiderat præcipuè ad praxim. Hic geographicus tractatus imperfectus eſt habetque pauca ad eas etiam quas tractat materias ſpectantia.

Chriſtophorus Clavius edidit Commentarium 63
valdè bonum in ſphæram de Sacro Boſco, non tamen ſatis ordinatum, nec in omnibus demonſtratum, eſtque potius introductio ad Aſtronomiam.

1600 Guillelmus Gilbertus Medicus Londi- 64
nenſis primus ex profeſſo de magnetis proprietatibus & de tellure, magnete ſcripſit optimè, quamvis non approbent ejus omnem modum explicandi; eſt tamen laude dignus quod eam materiam primus agreſſus ſit. Londini in quarto 1600.

1605 Paulus Merula Coſmographiæ libros tres 65
edidit, & particularis libros quatuor, principia geographiæ non benè explicat.

1608 Villette Sacerdos Pariſiis Gallicè edidit 66
Deſcriptionem Syriæ. Pariſiis in octavo.

Anno 1610 prodierunt tabulæ Arithmeticæ 67
poſthaphæreſeos univerſales, quarum ſubſidio numerus quilibet ex multiplicatione producendus per ſolam additionem, & quotiens quilibet è diviſione eliciendus per ſolam ſubtractionem, ſine tædioſa & lubrica multiplicatione, atque diviſionis operatione etiam ab eo qui Arithmetices non admodum ſit gnarus nullo negotio invenitur.

E muſæo Joannis Georgij Heruvart ab Hoemburg utriuſque juris Doctoris, Præſidis Provinciæ Schuabæ. Monachiæ Bavariarum in magno folio 1610.

Hoc inventum videtur coincidere cum logarithmis Neperi, non dat tamen conſtructionem hujuſmodi canonis.

1611

68 1612 Joſephus Langius Cæſaromontanus elementale geographiæ dedit, ſatis benè ſi principiis nonnullas adhibuiſſet figuras ad formandam imaginationem.

69 1614 Prodiit Hyeroſolymitana peregrinatio Principis Radſivilii. Antuerpiæ in folio.

70 1615 Joannes Antonius Maginus edidit Commentaria in Ptolomæi Geographiam.

71 1616 Philippus Cluverius Veteris Germaniæ, Italicæ, & Siciliæ deſcriptiones perfecit, Epitomen etiam geographiæ. Principia habet non ſatis explicata.

72 1617 Prodiit Eratoſtheres Batavus de terræ ambitus vera quantitate à Villebrordo Snellio Batavo editus, in quo refert Eratoſthenis, Poſſidonii, Ptolemæi, aliorúmque methodos in definiendo terræ ambitu, tum praxim ſuam explicat totumque terræ ambitum definit.

Dicam tamen licet doctrina hoc opere comprehenſa ſit optima, praxis tamen fuit tantum ſemel peracta, ut ſpecimen operationis ſuæ tantum ederet, item multiplici triangulorum ſolutione adhibita, quorum anguli ſemicirculo valdè parvo determinati fuerunt, ideóque jure reprehendit hanc Snellii determinationem Pater Ricciolus, qui per decem annos integros obſervationes multas adhibuit ut terræ circuitum determinaret, aſſeritque circuitum terræ à Snellio nimis parvum factum eſſe.

73 1619 Gabriel Sionita Interpres Arabicæ linguæ tellurem per climata deſcribit.

74 1620 Bernardinus Amicus Minorita Sacratum ædium Terræ Sanctæ deſcriptiones & figuras edidit. Florentiæ in folio 1620.

75 1623 Nicolaus Doglioni Nobilis Bellunecenſis Amphiteartum Orbis Venetiis edidit. Initio habet nonnulla principia geographiæ ſed malè. Opus hiſtoricum eſt.

76 1623 Judocus Hondius edidit magnum Athlantem Orbis, in quo continentur mappæ cum explicatione ſingularum. Amſterodami 1623 in folio.

77 1624 Prodiit Philippi Cluverii Italia cum tabulis. Opus elaboratum. Lugduni Batavorum in folio.

Item ejus Introductio ad geographiam quæ eſt nimis ſuccincta, neque enim benè explicat principia. In quarto.

78 1625 Franciſcus Schottus Senator Antuerpienſis Itinerarii Italiæ rerumque Romanorum libros tres edidit; ex antiquis noviſque ſcriptoribus quod Pater Hyeronymus Capugnanus Ordinis Prædicatorum auxit. Opus eruditum, & curioſum non mathematicum. Antuerpiæ in octavo 1625.

79 1625 Conimbricenſes ſcripſerunt de magnete l. 7. Phyſicorum, cap. 2. quæſt. 1. ſed pauca admodum. Lugduni in quarto 1625.

80 1626 Bertius Profeſſor & Coſmographus Regius Breviarium totius Orbis terrarum edidit. Opus ad Matheſin vix pertinens. Pariſiis in octavo 1629.

81 1627 Prodiit Philippi Cluverii Veneti Opus poſthumum Introductio in univerſam geographiam, tam veterem quàm novam ſex libris. In primo tradit nonnulla principia univerſalia, nempe de circulis zonis, climatibus, ventis, de Oceano, & mari. In ſecundo 3. & 4. Europam deſcribit; quinto Aſiam; ſexto Africam & Americam.

Deſcriptiones ſunt ſuccinctæ. Principia Geographiæ non dedit nec eo modo qui imaginationi prodeſſet. Lugduni Batavorum in decimo ſexto 1627.

1628 Chriſtianus Adricomius Delphus edidit Theatrum Terræ Sanctæ cum figuris. Opus ad intelligentiam ſacræ ſcripturæ utile. Coloniæ Agrippinæ in folio. 82

Anno 1629 Joannes Lhoſte Mathematicus Ducis Lotharingiæ Gallicè tractatum edidit de ſphæra artificiali, ejuſque uſibus, in quo poſt communes notiones excurrit in aliqua aſtronomica, tum ad praxes deſcribendorum horologiorum, tum ad aſtrolabia & alia hujuſmodi. Nihil habet niſi vulgare. In quarto Genevæ 1629. 83

Anno 1629 Pater Nicolaus Cabæus Ferrarienſis Societatis Jeſu, Philoſophiam magneticam edidit, in qua magnetis natura explicatur, & proprietatum magnetis cauſa aſſignatur. Novam pixidem conſtruit, quæ poli elevationem per magnetis inclinationem indicet. Multa item habet de electricis. Tractatus in quatuor libros dividitur. In primo vim attractivam explicat, ejuſque cauſam aſſignat; oſtendit terræ vim magneticam ineſſe, & magnetica inclinari verſus polum terræ, ex quo gradus latitudinis regionis cujuſcumque poteſt innoteſcere. 84

In ſecundo libro magneticorum directionem exhibet, duplicemque eorum faciem.

Liber tertius effectus ad directionem ſpectantes explicat, præcipuéque oſtendit ad nullum cœli punctum magnetem dirigi; aſſignat cauſas declinationis magneticæ. Item de vi communicativa loquitur.

In quarto ponuntur effectus ad attractionem ſpectantes, in quo multa ſunt practica circa verſoriorum compoſitionem & uſum. In hoc opere multum promovit Philoſophiam magneticam, multáque ſcitu digna detexit, meliuſque de hoc lapide philoſophatus eſt quàm qui ante illam ſcripſerunt. Poſt ipſum tamen alii multa ſcitu digna addiderunt & meliora.

1629 Paulus Henſtner Itinerarium Germaniæ Galliæ, Angliæ Italiæ, cum indice locorum, rerum atque verborum cum monitis peregrinatoriis, &c. Noribergæ 1629 in octavo. 85

1630 Jodocus Hondius edidit Atlantem Gerardi Mercatoris multo auctiorem. Opus potius hiſtoricum quam mathematicum. Item Atlantem minorem. In folio figura oblonga. Amſterodami cum tabulis optimis. 86

1633 Joannes Taſſin Geographus Regius tabulas littorum Mediterranei & Oceani edidit. Pariſiis in folio.

1634 Prodiere Pariſiis varia ſcripta & reſponſiones circa propoſitam à Morino methodum inveniendarum longitudinum, ex quibus tantum hoc elici poteſt. In octavo Pariſiis 1634. 87

1634 Pater Philibertus Monet Sabaudus Societatis Jeſu, Geographiam veteris recentiſque galliæ edidit. Hoc Opus hiſtoricum potius eſt, quàm mathematicum. Lugduni in octavo 1634. 88

1639 Franciſcus Quareſmius Laudenſis Minorita, Elucidationem hiſtoricam Theologicam, & Moralem Terræ ſanctæ edidit. Antuerpiæ in folio duobus tomis. 89

1640 Joannes & Cornelius Blaeu Novum Atlantem ediderunt. In folio Amſterodami quatuor tomis. 90

1640 Pater Georgius Fournier Societatis Jeſu edidit Hydrographiam Gallicè, in qua etiam tradit 91

artem navigandi quam non ita benè explicuit, nec demonſtravit omnia. Videtu. habere nimis multa parerga. In folio Pariſiis 1640 & 1665.

92 Pater Vincentius Berdini generalis Minoritarum Paleſtinam antiquam & novam edidit Italicè. Venetiis in quarto 1642.

93 1641 Pater Carolus à Sancto Paulo Abbas Fulienſis Geographiam Sacram Epiſcopatuum etiam antiquorum cum figuris edidit. Opus hiſtoricum. Pariſiis in folio 1641.

94 1642 Guillelmus Blaeu Inſtitutionem aſtronomicam Gallicè edidit de uſu Globorum & Sphærarum, Cæleſtis & Terreſtris, duabus partibus comprehenſam; quarum prima habet duos libros. In primo compoſitionem globorum. In ſecundo uſus tradit octoginta, pleroſque ad geographiam ſpectantes, nonnullos ad gnomonicam, aliquos ad navigationem, omnes in hypotheſi terræ immobilis. Secunda pars uſus attingit globorum in hypotheſi terræ motæ, multa tamen repetit quæ in prima parte fuerant dicta. Opus tamen bonum & utile iis qui geometriam neſciunt. In quarto Amſterodami 1642.

95 1642 Prodiit Pariſiis Petri Daviti Geographia quinque tomis. In primo de Mundo multa habet ad Matheſin ſpectantia. In folio. Deſunt tabulæ.

96 1643 Prodiit Bartholomæi Morizoti Orbis Maritimus. Liber potius hiſtoricus, in quo refert geſta varia in mari, nempe bella navalia. Divione 1643.

97 1644 D. Coulon Deſcriptionem Galliæ inſtituit Gallicè per flumina. Hoc Opus nihil habet niſi hiſtoricum. Pariſiis duobus tomis in octavo 1644.

98 1646 Pater Jacobus Grandamicus è Societate Jeſu, ſcripſit de magnete novam demonſtrationem immobilitatis terræ petitam à virtute magnetica terræ, licet ejus demonſtratio non ſit legitima. Habet multas experientias novas circa magnetem optimas. Flexiæ in quarto.

99 1646 Pater Philippus l'Abbe Societatis Jeſu, Gallicè Geographiam regiam edidit, quam ex Cluverio, Ortelio, Merula, Berthio, Goniths, Sympilio & aliis deſumpſit.

Nonnulla initio de circulis Sphæræ ſed nimis breviter, ita ut imaginationem non informet ſatis. Pariſiis in octavo 1646.

100 1649 Pater Nicolaus Zuchi Parmenſis Diſſertationem edidit magneticam de primo magnetico, & cauſis progreſſionum magneticorum, in qua potius cauſam finalem cur terræ indita ſit virtus magnetica, quàm aliàs, aſſignat. In quarto Romæ 1649.

101 1652 Pater Joannes Francois Societatis Jeſu, Geographiam diviſam in tres partes quæ explicant, diviſiones, univerſalitates, & particularitates globi terreſtris. Edidit multa inutilia ad ſuum inſtitutum nempe diviſiones importunas. Redonis in octavo 1652.

102 1652 S. Sanſon Geographus Ordinarius Regis, Aſiæ, Europæ, & Africæ Deſcriptionem edidit cum mappis optimis. Pariſiis in quarto.

103 1653 Philippus Briet è Societate Jeſu, Theatrum geographicum Europæ edidit Gallicè. Opus figuris conſtans. Pariſiis.

Item Parallela Italiæ veteris & novæ 1649. Opus hiſtoricum.

104 Anno 1654 Pater Kirker edidit Tractatum de magnete in tres libros diviſum, in quorum primo agit de natura & facultatibus magnetis. In prima parte de etimologia, inventione, generatione & ſpeciebus magnetis agit. In ſecunda de omnibus facultatibus magnetis, nempe attractione, directione, armatura, declinatione, inclinatione communicatione virtutis. Habet item 21 paradoxa ſcitu digna. In ſecundo varios magnetis uſus aperit, & habet ſtaticam magneticam, verſoriorum fabricam, eorumque uſus in geometria practica, aſtronomia, gnomonica, in variis machinis, denique in nautica. In tertio multa habet de magnetiſmo ſeu conſenſu elementorum, ſolis & lunæ in maria, heliotropii, muſicæ, imaginationis, de tarantiſmo.

In hoc opere uſus præcipuè & praxes habet; ſunt tamen aliqua nimis minutè explicata. In tertio libro multa congeſſit inutilia.

1658 D. Samſon Abbavillenſis Geographus 105
Regius mapparum geographicarum volumen integrum edidit. In folio 1658.

1660 Bernardus Varenius Doctor Medicus 106
Geographiam univerſalem edidit duobus libris comprehenſam. In primo agit de tellure abſolutè conſiderata, nempe de ejus figura, magnitudine, motu, & quiete, loco, de telluris ſubſtantia, de continentibus, montibus, fodinis, ſylvis, de oceani partitione per terras, de ejuſdem proprietatibus, de lacubus & fluviis, aquis mineralibus, de athmoſphæra & aëre, de ventis.

Libro ſecundo agit de affectionibus telluris a cœleſtibus, de locorum latitudine, de zonis & apparentiis cœleſtibus in ſingulis zonis, de climatibus, de luce, calore, & anni tempeſtatibus, de umbris & denominationibus inde ortis, de horologiis ſciatericis, de antæcis, antipodibus, de diverſo ortu & occaſu ſolis, de longitudine locorum, de horizonte ſenſibili, de navigatione ſeu Iſtiodromia.

Omnium quos hactenus legi palmam retuliſſe de geographia videtur Varenius, exceptis nonnullis quæ non videntur ad hanc materiam pertinere, ut de Horologiis & Navigatione non erat dicendi locus. Videtur item figuris imaginationi ſufficienter non ſerviiſſe, in qua efformanda non mediocriter laborandum erat.

Hoc Opus bis editum; ſemel in decimo ſexto, noviſſimè in octavo ab Iſaaco Nouton mathematum Profeſſore Lucaſiano apud Cantabrigienſes qui 33 figuris hoc Opus illuſtravit. Cantabrigiæ in octavo 1671.

Anno 1661 Pater Joannes Baptiſta Ricciolius 107
Ferrarienſis Geographiam & Hydrographiam reformatam edidit libris duodecim.

Liber primus eſt Iſagogicus. Secundus agit de menſuris. Liber tertius agit de menſurandis regionum intervallis, cum Catalogo Navigationum. Liber quartus geodeticus eſt. Quintus de magnitudine dimetienda terræ. Sextus agit de altitudinibus dimetiendis. Septimus de latitudine regionum. Octavus de longitudine dimetienda; in hoc habetur tabula declinationum magnetis. Nonus de primo meridiano. Decimus hydrographicus in quo inter alia ſolvit problemata nautica. Undecimus Onomaſticus eſt, nempe habet nomina plurimarum regionum cum latitudine, & longitudine. Duodecimus eſt Synopſis Geographiæ quam in cruce exhibet.

Hoc Opus optimum quidem eſt, potuerat tamen melius componi ſi nempe alienas materias non immiſcuiſſet.

1661 Gaſpar Schotus Societatis Jeſu, in ſuo 108
Curſu mathematico de geographia tractatum habet.

bet Initio proponit principia univerſalia geographiæ, ſed leviter eo quod in Aſtronomia jam fuerint tradita. Ferè totus tractatus hiſtoricus eſt, nempe in eo ſingula regna & provincias deſcribit. Habet in hydrographia nonnulla ad navigationem ſpectantia quæ non demonſtrat.

109 1665 Petrus Courtin Profeſſor Matheſeos in Opuſculo Gallico tradit tredecim uſus globi ſatis communes terraquei ſine demonſtrationibus. Poterant plures afferri. Pariſiis in octavo 1665.

110 *1666* Prodiit incerto authore Geographia univerſalis Gallica aut compendioſa, in qua præcipuè deſcribuntur Provinciæ Galliæ. Lugduni in *decimo ſexto 1666.*

111 *1666 Dominus Denis Sacerdos Hydrographus Regius & Profeſſor Dieppenſis Artem Navigandi compoſuit*, ſeu tractatum de variatione pixidum nauticarum, in quo tractatu, quinque modos tradit inveniendæ talis variationis, præcipuè vero qualibet hora diei & noctis.

Tabulas habet amplitudinum ortivarum ad hoc neceſſarias, tractatus eſt nimis amplus; illæ enim omnes praxes & demonſtrationes brevius tradi & explicari poterant. Habet item nonnulla non ita benè explicata ut dum dicit polo convenire definitionem centri, quod falſum eſt; cum centrum debeat in eodem plano exiſtere & polus in ſublimi eſſe. Dieppe in quarto 166[illegible].

112 P. Vincentius Leotaudus ſcripſit de magnete benè & ſolidè, novumque tradit modum explicandi tam virtutem magneticorum quàm telluris duobus libris.

Liber primus univerſaliora capita magneticæ Philoſophiæ complectitur.

Secundus varios magnetis affectus explicat; refellit Gilbertum & Cabæum efficaciter. Lugduni in quarto 1668.

N. Samſon filius, Europæ, Aſiæ & Africæ Mappas edidit. Pariſiis in quarto.

113 1668 M. Denis Presbiter artem Navigandi tradit per numeros. Hujus praxis in longioribus Navigationibus fallax. Falsò item reprehendit mappas reductas. Dieppæ in quarto 1663.

114 *1669* M. Denis Presbyter Hydrographus Ordinarius Regis & Profeſſor Navigationis Diepæ edidit Opus Gallicum cujus titulus, *Un diſcours de la declinaiſon du Soleil, & des principales eſtoiles du firmament.*

Enſemble un diſcours ſur l'Eſtoile du Nord avec deux tables pour trouver l'elevation du Pole à toute heure de la nuit.

In hoc Opere tradit ſolis declinationem pro quatuor annis in ordine ad latitudinem inveniendam, immò totum Opus eſt de elevatione poli invenienda, quæ omnia Nautis ſunt perutilia.

Anno 1671 Pater Honoratus Fabry Societatis Jeſu, in tomo quarto ſuæ Scientiæ phyſicæ ſcripſit optimè de magnete, oſtenditque virtutem magneticam per ſubſtantialem diffuſionem propagari.

Opus hoc optimum eſt ſolidum & clariſſimum. Lugduni in quarto 1671.

CAPUT VI.

Architectonices progreſſus.

ARchitectonices nomen ædificiorum omnium ſcientiam indicat, quæ cum in menſuris, & proportionibus obſervandis tota poſita ſit, jure ad Matheſin revocatur, quamvis à pleriſque negligatur perinde ac ſi incertis placitis, & non indubitatis niteretur. Hujus diſciplinæ placita omnia ad ſeverioris geometriæ leges non exiguntur, eo quod vel habitationis humanæ commoda, & ſalubritatem, vel operis ſoliditatem, vel tandem elegantiam externamque ſpectet magnificentiam, quæ omnia cum à geometricis rationibus tantum, non pendeant, ſed alia requirant bene multa, mixtam efficiunt diſciplinam, executio tamen & quaſi praxis quæ ad particularia deſcendit tota mathematica eſt.

Quod ad ædium commoda pertinet, cum variæ ſint hominum conditiones, varioſque in ſuis domibus uſus requirant; variam etiam partium diſtributionem exigunt in quibus vix regula certa dari poteſt. Ex quo fit ut de hac parte utiliſſima licet, vix verbum authores faciant, exceptiſque paucis aliquibus legibus ex Vitruvio deſumptis, nihil omnino de privatarum ædium ſtructura dicant. Puto autem quod ille optimè de architectura mereretur, qui luſtratis Europæ partibus, præcipuè ideas aliquas ædium bene compoſitarum in lucem ederet, non palatiorum tantum, caſtellorum, ſed etiam aliarum minus præcipuarum, ut omni hominum conditioni accommodatas ædes proponeret concinnas, elegantes, commodas, & bene in ordinem digeſtas, & hoc ſecundum omnium nationum genium, aut cœli diverſam temperiem. Id enim verò operis Architectonicæ deeſſe videtur.

Architectonicam igitur civilem ad publica tantum ædificia externámque illam præſtantiam quæ ex columnarum, capitellorum, & ſuperimpoſitâ trabe, zophoro & coronide reſultat ſolent authores communiter coarctare. Unde autem hæc ſubſtructionis ſpecies ortum duxerit non ſatis liquet; cum aperta intercolumnia, & omnino pervia incommodas ædes, & ad habitandum fere inutiles reddere videantur, ſupervacaneum ex alia parte ſit ad ſuſtentandam contignationem & tectum; columnas addere ſi murus undique ſolidus, & perpetuus erectus ſit. Unde vel ex publicis ædibus, quæ omninò apertæ, & perviæ eſſe debebant; vel ab aliquarum nationum conſuetudine, quæ quidem ſolem & pluvias ſuis ædibus arcere intendebant; aërem verò liberum & ſpirare & videre cupiebant, hujuſmodi compoſitio originem duxiſſe dicenda eſt. Nam quod pertinet ad primum, in templorum veſtibulis publiciſque porticibus primò adhibitas credimus; & inde ad templorum ornatum traductas; ut quod primitùs ob certum, & peculiarem uſum uſurpatum fuit, quia gratius oculis, & magnificentiùs apparebat, ceſſante licet tali uſu adhibeatur. Quod verò ad ſecundam rationem attinet, accepimus ex litteris Sinenſibus, Tartaros ita conſuetos eſſe in libero aëre verſari, ut ſi quas Sinenſium ædes habitandas nanciſcantur, priùs diruto ſaltem uno pariete eas aperiant, ne ſibi incarcerati videantur. Vel denique quod in multis regionibus ſolos domorum angulos, & per intervalla parietes columnis, & quadrario lapide, quaſi catenis vincire, & munire ſoleant, intercolumnia verò leviori materia, & minus ſolida claudere. In qua regione nata ſit Architectura, nempe quæ Natio primum hoc genus ædificii quod ſtylobata, columna, capitello, trabe, zophoro, & coronice conſtat, inquiri poteſt. Antiquiſſima referuntur in Græcia deorum delubra, quæ talem formam imitarentur, immò quæ diverſis,

ſtructurarum hujuſmodi generibus nomen dederunt. Ab ipſis Græciæ partibus & regionibus appellationem habent, ita Doricum, Ionicum, Corinthiacum non aliunde quam in Græcia videntur nata,& uſurpata. Certum tamen eſt in templo Salomonico,hoc eſt mille ante Chriſtum annis,architecturæ leges fuiſſe uſurpatas, ita ut ſit credibile in Ægypto ubi immodicus calor, auram liberiorem captare docet, jam ſtructuras, columnis fuiſſe diſtinctas, ſicut apud Meridionales Americanos ædes ſalubriores ſunt, quæ fiſſuris crebris, & frequentibus perviæ, auræ & aëri liberiorem aditum præbent, quam quæ continuo & minime interrupto pariete continentur. Accedit quod ipſa tabernaculi idea in deſerto à Moſe excitati artificibus in Ægypto edoctis, architecturæ jam ſatis manifeſta præbeat indicia.

Huic tamen conjecturæ duo obſtant: primum quod nulla referatur ædes ſacra alicujus momenti in Ægypto; neque enim pyramides aliquid ex ordinibus Architectonicis deſumebant. Adde quod non ita facile opus lateritium in Ægypto uſurpatum tantam coronidum projecturam pati poteſt. Inſuper à tignariis operibus, potius quàm à lapideis, hæc ſcientia profecta eſt; cujus quippe præcipuè partes à trabibus, & domorum coronide cui tectum imponitur nomenclaturam accipiant. Hinc oritur quod cum tecta, ut à ſubjectis parietibus imbres prohibeant, ultra perpendiculum promineant, tignáque ut plurimum appareant; In architectura qua columnis imponitur moles, præcipue coronix, & multum ultra ſubjectas ſibi partes projecta ſit, & tignis, denticulis, mutuliſque ornetur. In Ægypto nec tanta lignorum copia, nec domibus tectum ut arceantur imbres imponatur, cum raræ ſint in Ægypto pluviæ, ſed ſimplex doma, ex terra bene compreſſa conſtans ædes pro tecto habeant. Quare & ipſæ hujus artis voces quæ omnes Græcæ ſunt,Græcis hanc laudem tribuunt.Nullus tamen author Græcus de hac materia ſcripſiſſe legitur, Primus Vitruvius, qui & ſingulorum ordinum proportiones, & leges ſatis accuratè tradit.

Architectura civilis brevibus admodum coarctatur finibus, utpote quæ ultra quinque pervulgatos ordines Doricum, Jonicum, Corinthiacum compoſitum, & Tuſcum non excurrat. Ad Matheſin vix pertinet hæc materia, cum demonſtrationibus careat, ad eam tamen revocatur, eò quod praxes Geometricæ in architectura ritè uſurpanda locum habeant.

His ultimis ſæculis Architectura militaris nata eſt, cujus ne verbum quidem Antiqui, quorum in muniendis urbibus ſolertia, in frequentibus turribus tota poſita fuit. Nos neceſſitate poſt inventum pulverem pyrium, alias moles multo majores, ſed pauciores hoſtibus objicimus, certóque ordine diſponimus ut pauci multis obſiſtamus. Hanc Architecturam militarem in ſeptem partes commodè dividimus. Prima pars fundamenta, ſeu axiomata hujus doctrinæ tradit. Secunda polygona regularia ſuis propugnaculis, vallo, & foſſa inſtruit. Tertia circa prætenturas omnes, ſeu opera externa, hoc eſt parmulas, lunatas caſſides,cornuta, coronata, forcipulas ſuis vallis, loricis foſſis muniendas occupatur. Quarta irregulares figuras, certis principiis, & regulis adſtringit. Quinta obſidionales foſſas, vineas aggeres, cuniculos ducit, caſtra ſuis munitiunculis tutatur, tormentorum bellicorum ſuggeſta, ſeu tribunalia excitat. Sexta erit repugnatoria variaſque propugnaculorum reſciſſiones & tumultuario opere excitatas munitiones complectitur. Addunt nonnulli ſeptimam perſpectivam militarem, ut facile hæc omnia exhibeantur & deſcribantur in charta.

Utrique Architecturæ duæ famulantur facultates, quarum prima circa lapidum ſectiones verſatur, ſecunda tignaria nuncupatur. Varia enim ſunt ædificiorum genera quæ latomis noſtris negotium ſolent faceſſere utpote quæ ex geometricis principiis robur, & firmitatem accipiunt. Ea autem ſunt, variæ ſpecies teſtudinum, & fornicum, quæ licet ex materia ſolida, & gravi, nempe ex lapidibus conſtent, in aëre tamen pendent, & vi innatæ gravitatis à caſu prohibentur: à mutua nempe partium complicatione, & figura ipſis geometricè inducta hanc firmitatem mutuantur. Hanc ſcientiam in quatuor partes commodè dividere poſſumus. Prima pars circa arcus, ſeu compluviatas teſtudines, non tantum ſimplices, & orbe pleno ut vocant tornatas, ſed etiam elumbes ſeu depreſſas, faſtigiatas, reptantes, ſeu pedum inæqualium, obliquas, inclinatas, perſtringentes, ſeu deſinentes in aliud compluvium, in turrim rotundam occupatur. Secunda conicas teſtudines, penduloſque ut ita dicam fornices excitat. Tertia decumanos extruit, lunatóſque fornices, ſphæricos clauſtrales quadrario lapide decuſſatos componit. Quarta denique in orbem aut Ellypſin aſcendentes extruit.

Artem tignariam adjungimus, quæ nempe lignorum ſectiones, & in tectis elegantioribus uſum explicat.

His præmiſſis recenſendi auctores præſtantiſſimi qui artes has ſuis operibus illuſtrarunt.

Octavo Urbis ſæculo circa Chriſti domini annũ primum M.Vitruvius ſcripſit de Architectura tempore Auguſti. Cum enim Julio Cæſari in multis militiæ operibus, quæ ab Architecto dependent præcipuè verò in machinis fabricandis ſuam novaſſet operam, ab Octavia Auguſto fratri eſt commendatus, à quo cum ita eſſet honoribus, & præmiis affectus, ut amplius ſenii paupertatem non reformidaret, otium nactus ſcripſit de Architectura 10 libros.

In primo loquitur de Architectura quaſi in genere, ex quibus rebus conſtet, item de ejus partibus, tam in publicis, quam privatis ædificiis, de electione locorum ſalubrium,de fundamentis murorum, de diviſione operum intra civitatem, & electione locorum ad uſum communem civitatis.

In ſecundo agit præcipuè de materia ædificiorum, arena, calce, pulvere Puteolano, de generibus ſtructuræ, de arboribus cædendis.

In tertio de ſacrarum ædium ſtructura,de quinque ædium ſpeciebus, de fundationibus, de columnis, & Epiſtyliis.

In quarto de tribus generibus columnarum. De ratione Dorica, de interiore cellarum diſpoſitione, de Tuſcanis rationibus.

In quinto de ædibus publicis de foro, ærario carcere, curia, Theatro, balneis, Paleſtris, Portubus.

In ſexto de privatorum ædibus de atriis, tricliniis, exedris, de Ruſticis ædibus de Græcorum ædificiorum diſpoſitione, firmitate, fundamentis.

In ſeptimo de maceratione calcis ad dealbandum, de ruderatione, de coloribus, & picturis ædificiorum, de Ocra, Minio, Ceruſſa & aliis.

In

In octavo de fontibus inveniendis, de perductionibus, libellationibus.

In 9 Platonis inventum de Agro metiendo, de Gnomonicis rationibus, ſolis curſu de horologiorum deſcriptione, & uſu, de deprehendendo auro, permixto in opere.

In 10 de machinis tractoriis, de machinis ad hauriendam aquam, de cteſibica machina, de catapultis, baliſtis aliiſque ſimilibus.

Vitruvius omnium Architectorum Magiſter habetur, quod primus eâ de re ſcripſerit. Ejus tamen Opus poterat melius diſponi.

Vitruvium commentariis illuſtrarunt Guillelmus Philander Caſtilionius civis Romanus anno 1586, & Bernardinus Baldus Urbinas Guaſtallæ Abbas qui librum conſcripſit de verborum Vitruvianorum ſignificatione, cum vita ejuſdem. Auguſtæ Vindelicorum in quarto 1612.

De hac materia à Vitruvio ad annum 1500. nemo ſcripſit. Gothi quidem qui in pleriſque Europæ partibus dominatum obtinuerunt, aliam ædificandi rationem inierunt, ab illis ordinibus omnino alienam, de qua nihil omnino ſcripſerunt.

1 1512 Leo Baptiſta Alberti Florentinus libros decem edidit de re ædificatoria.

Primus liber agit de lineamentis, de regione ſeligenda & cognoſcenda, de area, de parietum & columnarum formis, de ſcalis.

Liber ſecundus agit de materia.

Tertius de opere, de lapidum contextu, de tectis & detrabibus.

Quartus de univerſo opere, de ſitu urbis, mœnibus, pontibus, cloacis.

Quintus de ædibus, porticu, veſtibulo, ſcalis; item de arce, de palæſtris, de terreſtribus caſtris, de privatis domibus.

Sextus de ornamento, de ædificatoriæ adoleſcentia apud Aſianos, de machinis tractoriis, de incruſtationibus.

Septimus de ſacrorum ornamentis, de porticibus, de columnis, capitulo, trabe, de trabeatis & arcuatis columnationibus.

Octavus de ornamentis prophanorum ædificiorum, ſepulchris, pyramidibus, theatris, thermis.

Nonus de privatis ædibus.

Decimus de operum inſtauratione, & latentis aquæ indiciis.

In hoc opere multa repetuntur eorum quæ in Vitruvio continentur, multa tamen propria, & utilia. Pariſiis in quarto 1512.

Item Florentiæ in quarto 1585.

Item Venetiis in quarto 1665 ſed Italicè à Coſino Bartoli.

2 Anno 1536 Joannes Baptiſta Caporali Peruſinus Vitruvii quinque libros priores in linguam Italicam vertit adjecta explicatione ſatis fuſa & clara locorum difficilium, & adiectis etiam figuris. In quo egregiam navavit operam. In folio.

3 Anno 1553 Leonis Baptiſtæ Alberti, Nobilis Florentini Architectura in gallicum verſa eſt à Joanne Martino, in decem libros diviſa.

In primo agit de regionibus ſalubribus, & ſitu eligendo in genere, de columnis, parietibus, feneſtris, portis & ſcalis.

In ſecundo loquitur de exemplari ædium, tum de materia lapidibus, cæmento, calce, lignis, &c.

In tertio de ſtructura, ſeu de lapidum connexione, de contignationibus, tectis, teſtudinibus.

In quarto de civitatibus, de muris, propugnaculis, pontibus & portubus.

In quinto de ædibus Principis, de templis, ædibus privatis, de caſtris, navalibus, villis.

In ſexto de ornamentis, tum de machinis ad ædificandum.

In ſeptimo de templis, eorumque partibus, de quatuor ordinibus, Dorico, Ionico, Corinthiaco, Italico.

In octavo de ſepulchris, amphitheatris, aulis comitiorum, Thermis.

In nono de ornamentis ædium.

In decimo de aquæductibus, aggeribus &c.

Hic author de ſuis materiis potius oratoriè & in genere agit, quam mathematicè, neque enim docet ſatis in particulari praxin, ſed tantum præcepta generalia eruditione nimis frequēti illuſtrando, ſermonē nimis prolixum habet. Ex eo nonnulli qui de Architectura ſcripſerūt, ſunt multa mutuati.

1554 Petrus Cateneo Venetus Italicè ſcripſit de Architectura libris quatuor. 4

In primo agit de ſitu civitatibus idoneo, de methodo muniendi, breviter tamen, multas habet ideas civitatum, nempe vicorum & munitionum.

In ſecundo agit de materia ad ædificandum idonea.

In tertio profert varias templorum ideas.

In quarto agit de palatiis, quorum ichnographias tradit. Hoc Opus multa habet bona. Ideæ tamen pleræque non ita benè ſuccederent, ſi ad praxin deſcenderetur, poſſunt tamen Architecto non eſſe inutiles, viamque ad utiliora aperire.

1563 Jacobus Lanterius Brixienſis libros duos de modo ſubſtruendi terrena munimenta ad urbes atque oppida quibus aditus hoſti præcludatur. 5

Hic modus muniendi bonus eſt, multúmque accedit ad hodiernum, potius ſpectat ipſam praxin & fabricationem quam diſpoſitionem partium, de qua pauca admodum habet. Venetiis in quarto 1563.

Anno 1567 Philibertus de Lorme Conſiliarius & Eleemoſinarius Regius, necnon Abbas Sancti Sergij Andegavenſis, Architecturam Gallicè edidit in novem libros diviſam. In primo principia generalia ad benè & ſalubriter ædificandum habet. In ſecundo varias regulas & problemata geometrica artificibus ſubalternis proponit, & modum fundamenta jaciendi. In tertio proponit ædificia quæ ſunt ſubterranea, ut cellas vinarias, & ex occaſione docet methodum arcus elumbis ſeu depreſſioris efformandi, nonnulláque inſtrumenta huic negotio accommodata. In quarto agit de teſtudinibus cylindricis, inclinatis, item de portis, & arcubus variè obliquis, aut in angulo aut in turri rotunda, aliiſque hujuſmodi, & eorum omnium praxes tradit. Item conicas teſtudines decuſſatas, ſphæricas in Helicem aſſurgentes deſcribit. In quinto, ſexto & ſeptimo ordines Architectonicos per ſingulas eorum partes, & ornatus proſequitur. In octavo oſtendit quomodo ordinatio Architectonica aptari debeat, urbium portis, arcubus triumphalibus, feneſtris, caminis. 6

In ultimo denique agit præcipuè de caminis, & multa ad praxin ſpectantia aperit.

Opus bonum & utile præſertim quod multa contineat circa teſtudines compluviatas & arcus, quæ ante illum nullus tradiderat, geometricè enim procedit quamvis demonſtrationes non afferat, multas ex eo praxes deſumpſimus in tractatu de lapidum ſectione, addidimus tamen perſpicuitatem

Digitized by Google

tatem & demonſtrationes quas ne judicarat quidem. Videtur autem in eo deficere hic author, quod eruditionem in his materiis importunè accerſat & ingerat pro genio nempe ſuorum temporum. In folio.

7 Anno 1570 Galaſſus Alchiſi Architectus Ducis Ferrarienſis librum edidit Italicè de fortificationibus, in quo repudiatis conſuetis muniendi modis, alium introducit meo quidem judicio peiorem, in quo nempe & propugnacula ſunt minora quàm par ſit, totáque ordinatio reprehenſibilis eſt, unde in uſum numquam revocata fuit, nec ut puto umquam revocabitur. In folio.

8 Anno 1571 Sebaſtianus Serlius.

In prioribus libris varia antiquorum ædificia proponit, & templorum ichnographias, variáque eorum ornamentis & fragmentis ruderum eruit.

In ſequentibus ordines architectonicos explicat variiſque materiis applicat.

Septimo libro proponit viginti quatuor domorum ruralium ichnographias & ſcenographias, tum unius urbanæ habentis in parte anteriori ergaſteria, tum ornamenta caminorum affert. Item nonnulla ad corrigendas ædificiorum irregularitates pertinentia.

Habet item aliqua de tectis contignationibus roborandis utilia communia licet, quæ omnia contemni non debent, licet multæ domorum ruralium ideæ videantur nimis vaſtæ, & non ſatis ad uſum communem accommodatæ. In folio.

9 1572 Martinus Baſſi Mediolanenſis Opuſculum Italicum edidit in quo nonnullas opiniones refert circa architecturæ & perſpectivæ aliqua placita cum ſolutionibus celebrium Architectorum.

Opus hoc indigeſtum eſt & exigui momenti. Titulus eſt *Diſpareri in materia d'architettura & perſpettiva*, Breſſiæ in quarto 1572.

10 1574 Joannes Baptiſta Benedictus Patritius Venetus edidit Opuſculum de ſtatica & mechanica, in quo nihil habet niſi vulgare & malè explicatum, ita ut ſæpe vix poſſit bene intelligi; habet item deſcriptionem lucernæ ſatis ingenioſæ, quam Sereniſſimo Duci Sabaudiæ obtulit. Hæc procedit ſecundum Heronis principia.

11 Anno 1575 Andreas Palladius librum edidit de Architectura Italicè ſcriptum libris quatuor. In primo diſſerit de materia ædificiorum præcipuè vero de lapidibus, & cœmento, variiſque conſtructionibus, tum de ordinibus breviter, exinde proponit ideas varias ſcalarum. In ſecundo varias ideas domorum tam Græcorum, quàm Romanorum. In tertio ædificia publica ut pontes tam ligneos quam lapideos, areas & baſilicas efformat. In quarto templa præcipuè antiqua quæ Romæ viſuntur.

Opus bonum & probatum niſi quod ædes particularium ab eo propoſitæ nimis vaſtæ videantur, & non ſatis ad uſum hodiernum accommodatæ. In folio.

12 Anno 1584 Hieronymus Maggi, & Jacobus Caſtriotus Regis Chriſtaniſſimi Architectus militaris librum Italicè ediderunt, de munitionibus civitatum, tribus libris.

In primo agunt de civitatibus earumque munitionibus quaſi in genere.

In ſecundo de munitionibus particularibus.

In tertio de munitionibus portuum, modiſque fundamenta jaciendi in aqua.

Additus eſt tractatus de inſtruendâ acie compoſitus à Joachimo Coniano.

Multa in tractatu iſto de munitionibus à peritis hujus artis reprehenderentur, nec ab iis ut legitima admitterentur. In folio.

Circa annum 1600 Joannes Errard *de Barleduc* Architectus militaris Regis Galliæ librum 13
gallicum edidit de munitionibus ſub hoc titulo, *La fortification reduite en art & demontrée*, Opus ſuum in quatuor libros partitur. In primo non nulla habet univerſalia de tormentis bellicis, de ſitu, de muris &c.

In ſecundo de regularibus munitionibus.

In tertio de irregularibus.

Libro quarto de defectibus corrigendis, præcipuè de remediis adverſus colles urbibus imminentes. Figuris quidem elegantibus ornatur hoc Opus: Multa tamen habet antiqua, quæ nunc reprehenderentur. Suo tamen tempore fuit alicujus nominis in Gallia. In folio.

Anno 1604 Joannes Franciſcus Fiamelli Florentinus Architecturam edidit militarem Italicè 14
cum titulo, *Il Principe difeſo*.

Opus iſtud in octo libros dividitur. In primo proponuntur problemata nonnulla communia. In ſecundo proponit præcipuas partes munitionis. In tertio habet partes propugnaculi, diſtributionem platearum intra munitionem. In quarto varias deſcribit munitiones earumque vitia aperit. Quintus munitiones irregulares proponit. Sextus munitiones in aqua extructas deſcribit. Septimo apparatum obſidionalem inſtruit. Octavus gubernatorem informat.

Opus hoc eſt exigui momenti, nihilque habet quod in aliis paſſim non invenias. Ordo illius nullus fere. In folio.

Hieronymus Cataneo Novarienſis altero ſæcu- 15
lo ſcripſit de munitionibus octo capitibus.

In primo capite proponit nonnullas operationes geometricas.

In ſecundo habet delineationes propugnaculorum & partium.

In tertio conſiderationes militis qui arcem propugnandam ſuſcipit.

In quarto quomodo propugnanda ſit arx.

In quinto conſiderationes Imperatoris qui arcem oppugnat.

In ſexto quo ordine procedere debet in obſidione.

In ſeptimo quomodo ſe gerere debent qui arcem propugnant.

In octavo quo ordine iter faciat exercitus.

Modus muniendi ſatis perfectus eſt, pro ratione illorum temporum, multa habet bona ad praxin ſpectantia. Circa annum 1608.

Idem Hieronymus Cataneo Novarienſis Architecturam militarem tradidit altero tractatu, in quo agit de ratione muniendi, propugnandi, & impugnandi, de caſtrametatione de modo inſtruendæ aciei cum examine eorum qui tormenta bellica explodunt. Breſſiæ in quarto 1608.

Anno 1614 Samuel Marolois tractatum edi- 16
dit de quinque ordinibus, figuris elegantibus ornatum. Explicatio non eſt uſque adeo clara, ſed ſæpè confuſa.

Idem tractatum edidit de Architectura militari in quo communes regulæ continentur. Opus etiam vulgare. In folio.

An. 1615 prodiit idea Architecturæ univerſalis 17
Vincentij Scamozzi Veneti in decem libros diviſa. In primo, ſecundo, & tertio tractat de Architecturæ laudibus, & officio Architecti habetque

Digitized by Google

berque nonnulla de area triangulorum quæ ſunt communia.

Tum de ſalubritate ſitus, de portubus, de methodo deſcribendi ſitus, tum de mari & fluviis, de aëre ſalubri, de ventis, & eorum diviſione, de civitatibus, earumque partibus, & munitionibus, plateis, templis, palatiis: habet nonnulla de areis polygonorum.

Denique de ædibus Romanorum, tum variarum ædium & villarum ideas tam ſcenographicas quam ichnographicas exhibet, partéſque deſcribit. In ſequentibus agit

De ordinibus, columnis, ornamentis, arcubus, intercolumniis.

Tum de materia ædificiorum, lapidum variis ſpeciebus, cæmentis.

Denique de lignis, contignationibus, tectis, teſtudinibus.

In pleriſque nimis prolixè & oratoriè procedit nec ad particularia deſcendit, præcipuè in duobus prioribus libris. Tertius utilior eſt eo quòd ædium verè exiſtentium deſcriptionem habeat. In folio.

18 1618 Prodiit *Corona Imperiale*, ſeu de Architectura militari Italicè, authore Petro Sardi Romano. Hic tractatus duas partes habet Theoricam, quæ de fine Architecturæ, de ſitu, de oſtenſione, de forma, & materia munitionum agit. Tota ferè hiſtorica eſt exemplis antiquorum illuſtrata. Secunda quæ practica, modum habet communem muniendi, nonnulla tamen quæ à noſtris Architectis non probarentur. Præcipuè verò, quæ de duplici quaſi foſſa proponit, altera plena ſed non multum lata, altera ſicca & lorica quaſi dentata. Hæc inquam ab omnibus non probarentur. Reliqua ſunt bona ſed communia. In folio.

19 Anno 1619 Prodiit Pariſiis Regula generalis Architecturæ quinque ordinum, nempe Tuſci, Dorici, Ionici, Corinthiaci, Compoſiti, ſecundum regulas Vitruvii: In quo nihil niſi commune opus utile, in quo brevis tantum figurarum explicatio continetur. Nullus hujus operis author profertur: dicitur correctum à D. de Broſſe Architecto Regio. In folio.

20 Anno 1623 Petrus le Muet brevem ideam ædificandi edidit in lucem. Opus utile quidem ſecundum modum Pariſienſem, non videntur tamen ejus ideæ ſatis ſublimes, & ſatis regulares. In folio.

21 1624 Ludovicus Savot Medicus regius Architecturam Gallicam de ædibus particularibus edidit in quo agit de menſuris & proportionibus ædificij cujuſque.

Hoc Opus figuras nullas habet, continet tamen multa utilia. Pariſiis in octavo 1614.

22 Anno 1627 Mathurinus Jouſſe tractatum edidit de arte ſeras fabricandi. Primus quod ſciam de hac arte ſcripſit, multaque arcana hujus artis aperit. Opus utile. In folio.

Eodem anno 1627 idem Mathurinus Jouſſe tractatum edidit de arte fabri lignarij, nempe artem conſtruendi tecti elegantioris, methodo ſcilicet apud Gallos uſitata. Ex eo multa deſumpſimus in tractatu de ea re quem edidimus. In folio.

23 1629 Dominus Fabre Architectus militaris Gallicè Architecturam militarem edidit ſub titulo. *Les Fabriques du ſieur Fabre ſur l'ordre de fortifier, garder, attaquer & deffendre les places.* Quatuor habet tractatus.

Primus praxes habet ad muniendum quodlibet polygonum, cujus praxis ſupponit figuræ minorem radium, quo poſito aſſignat latus cujuſlibet polygoni, in eoque menſuras omnes tam ichnographicas, quam orthographicas.

Ejus praxis facillima eſt, & à quovis intelligi poteſt, quod intendebat, ut ſine geometria & arithmetica has praxes doceret.

In ſecundo tractatu docet methodos uſurpatas ad cuſtodiendam arcem tempore pacis, nempe ordinum, ſtationum & vigilum.

In tertio & quarto propugnationem.

Opus potius practicum quam theoricum, facile & intelligibile complectens omnia, quæ communiter uſurpantur.

1629 Antonius de Ville Eques Toloſas Archi- 24
tecturam militarem Gallicè edidit ſub hoc titulo, *Les fortifications du Chevalier de Ville Toloſain.* Hic erat addictus obſequio ſereniſſimi Ducis Sabaudiæ, militavítque in Pedemontio. Tres libros habet.

Primus verſatur circa conſtructionem munitionum, ſubdividitúrque in quatuor partes. In prima parte nonnulla univerſalia circa ſitum loquitur de ſingulis polygonis regularibus. Singulas item partes munitionis internas deſcribit. In ſecunda exteriores partes, promurale, foſſas & viam tectam exhibet.

Tertia operâ externâ, & irregulares figuras conſiderat.

In quarta munitiunculas aliáque additamenta.

Secundo libro impugnationem proponit prima parte improviſam, loquitúrque de infititio tormento. *Le Petard.*

In ſecunda de obſidionibus ſinguliſque circunſtantiis, lineis obſidionalibus, vineis, cuniculis, ſuggeſtis machinarum.

Tertius de munitionum cuſtodia: In prima parte, de excubiarum ordine: In ſecunda de repugnatione.

Hoc Opus optimum eſt & ab omnibus æſtimatur. In folio.

Anno 1630 Franciſcus Tenſini Cremenſis 25
quondam Architectus militaris & Loco-tenens Generalis tormentorum bellicorum Ducis Bavariæ, Regis Hiſpaniæ, & Imperatoris Rodolphi ſecundi, & poſtea reipublicæ Venetæ, poſtquam interfuiſſet octodecim obſidionibus, & quater fuiſſet obſeſſus, poſt varia certamina & pugnas Architecturam militarem conſcripſit Italicè ſub hoc titulo, *La fortificatione, guardia, difeſa, e eſpugnatione delle fortezze.*

Suum Opus in tres libros partitur, in quorum primo poſt laudes architecturæ militaris, de ſitu munitionum ſingulorumque prærogativas & incommoda profert, tum ſingulas partes munitionis percurrit, etiam præmunitiones item exhibet.

In ſecundo diſſerit de gubernatoris officio, & quomodo ſe gerere debeat præſertim tempore obſidionis, quomodo ſuppetiæ obſeſſis ſint ferendæ, docet.

Tertius de oppugnatione urbium ſive ex improviſo ſive ex longa obſidione diſſerit, & de ſingularibus artibus trincheis, vineis ſuggeſtis, aliiſque ſermonem habet.

In hoc opere ad particularia deſcendit & bene explicat, remque prout de facto geritur exhibet. In folio.

Anno 1631 Jacobus Barrozzio & Vignola 26
Opus edidit de quinque ordinibus, in quo ſcilicet proponit ideam ſimplicem horum ordinum ex probatiſſimis antiquorum exemplis erutam, cum

ornamentis ſingulorum ordinum, quod Opus ſimplex eſt & probatum ab omnibus, idcóque poſteà ſub forma minori editum eſt, ut commodiorem uſum & artificibus magis accommodatum haberet. In folio.

27 1632 Joannes le Normand tractatum habet de reſtitutione militiæ Gallicæ, in quo diſſerit de muniis omnibus à ſimplici pedite ad Imperatorem, cum exercitiis tam equitatus quam peditatus, aciem inſtruendi tam in planitie quam in montibus, caſtrametatione, item de re nautica in ordine ad claſſes. Rothomagi in quarto 1632.

28 1634 Antonius Rivan Carpentoratenſis artem muniendi loca regularia, ſeu irregularia Gallicè compoſuit, cum modo omnia in ſolo exequendi.

Putat author multa circa irregulares figuras dixiſſe, quæ à nullo hactenus dicta fuerant, quæ tamen non ſunt magni momenti. Pariſiis in quarto 1634.

29 Anno 1635 Adamus Froitach edidit Architecturam militarem Gallicè figuris appoſitis ornatam, eamque in tres libros diviſam.

In primo agit de munitione in genere, & de regulari, habet tabulas trigonometricè ſupputatas.

In ſecundo libro irregulares figuras munit, & opera externa extruit.

In tertio de caſtrametatione, de oppugnatione, de vineis cæteriſque diſſerit.

Opus bonum & benè digeſtum nec nimis prolixum & quod ſufficiens videtur. In folio.

30 1642 Mathurinus Jouſſe edidit Gallicè librum cui titulus, *Le ſecret d'Architecture*, in quo tradit delineationes geometricas compluviorum, arcuum, teſtudinum, helicum praxes habet ſine ullis demonſtrationibus.

Opus tamen utile præcipuè verò artificibus. In folio.

31 Anno 1643. P. Franciſcus Derand è Societate Jeſu librum edidit Gallicum, cui titulus, *L'Architecture des voutes ou l'art des traits & coupe des voutes*, ſeu de conſtructione omnis generis teſtudinum, & de praxibus ad formandos lapides. Tractatus utiliſſimus, videtúrque pauca admodum omiſiſſe, ſolas praxes habet figuris aptiſſimis explicatas. Opus abſolutiſſimum ſi demonſtrationes, adhibuiſſet, eas in tractatu de ſectione lapidum adhibuimus.

32 1645 Comes de Pagan edidit Gallicè novam methodum arces muniendi multo meliorem conſuetâ, triploque magis reſtitivam. Hoc probatur ab omnibus communiter, expenſas tamen in muniendo paulo majores. In folio.

33 Anno 1641 prodiit in lucem Peribologia, ſeu muniendorum locorum ratio Vvilelmi Dilichij totum ferè volumen in figuris poſitum eſt, quarum pleræque explicationem nullam habent. In explicando autem artificio munitionum immoratur diutiùs, tantumque nonnulla affert ad ſitum pertinentia. In folio.

34 Anno 1647 Mathias Dogen Dramburgenſis Architecturam militarem modernam edidit, variis hiſtoriis tam veteribus quam recentioribus confirmatam, figuris ornatam cum Ichnographiis præcipuarum totius Europæ munitionum præcipuè belgicarum & batavicarum.

Primus liber terminos & axiomata totamque munitionem regularem cum præmunitionibus, tabulas item tam ichnographicas, quam orthographicas complectitur.

Secundus munitiones habet irregulares cum ſuis pariter tabulis, ſingulaſque earum circunſtantias commoda & incommoda perſequitur.

Tertius liber eſt de munimentorum oppugnatione, caſtrametatione, lineis acceſſuum, munitiunculiſque excitandis, de vinea, ſuggeſtis tormentorum bellicorum.

Quartus habet propugnationem. Opus iſtud abſolutum eſt, & quoad doctrinam non multum differt ab iis quæ Adamus Froitach docuit. Habet præterea hiſtorias varias quibus doctrinam ſuam illuſtrare & probare nititur: ex quo fit ut ſit prolixior, ita ut qui ſola præcepta & artem inquirunt, vix eam tam facile agnoſcant aut ex tot hiſtoriis eruant. In folio.

1655 P. Petrus Bourdin Societatis Jeſu architecturam militarem & geometriam militarem edidit. 35

In hoc opere principia munitionum clarè explicat adjectis figuris & praxibus idoneis. Pariſiis in octavo 1655.

1658 F. du Breuil è Societate Jeſu, ſub nomine Sylvere de Bitanvieu gallicè Architecturam militarem edidit. Cui titulus eſt, *L'Art univerſel des fortifications Françoiſes, Holandoiſes, Italiennes, avec l'Art d'attaquer & deffendre.* 36

Hoc Opus figuris elegantibus illuſtratur, habétque praxes ordinarias. In eo difficiliora deſiderantur, ut quæ pertinent ad figuras irregulares. Pariſiis in quarto 1658.

Anno 1669 prodiit in lucem Architectura militaris Patris Andreæ Tacquet Antuerpienſis è Societate Jeſu, in tres partes diſtributa. 37

In prima parte Architecturæ militaris progreſſum explicat, terminos tam ichnographicos, quam orthographicos & axiomata tradit, regulam munitionum exarandarum, tam in charta quam in ſolo, opera item externa extruit.

Secunda pars munitiones irregulares habet.

Pars tertia oppugnationem & defenſionem habet circunvallationem, lineas, ſeu trincheas reductus, munitiunculas tormentorum ſuggeſta, perforationem loricæ, vineam, cuniculos, item defenſionem. Omnia clarè & benè.

1662 Pater Gaſpar Schotus è Societate Jeſu, in ſuo Curſu mathematico tractatum habet de Architectura militari nimis brevem. 38

CAPUT VII.

De progreſſu Muſicæ.

QUartam Matheſeos partem Muſicam agnoverunt Antiqui, cujus dignitatem, & præſtantiam, vel ex ſuavitate quâ omnes demulcet, ita ſuſpexerunt, ut in celebrioribus, præcipuiſque actionibus, tanquam divinum quid illam adhiberent. Tanto enim in honore apud eos fuit, ut nuptias celebrari, epulari, bellum inire, fœdera ſancire, diis ſacrificare ſine muſica nefas eſſet, illeque indoctus penitùs haberetur qui muſicam ignoraret. Rectè quidem, ſi enim vim nominis ſpectemus omnem eruditionem, & ſcientiam ſignificare videtur muſica, ſeu omnem diſciplinarum orbem, ipſamque adeo Philoſophiam, complecti nomenclatura à muſis deſumpta, quæ omni omninò diſciplinæ præeſſe creditæ ſunt. Audiamus Quintilianum, *Quis ignorat*, inquit, *muſicen*

ſicen tantum jam antiquis illis temporibus, non ſtudy modò, verum etiam venerationis habuiſſe, ut iidem muſici, & ſapientes haberentur. Pariter Plato, Philoſophiam, maximam muſicam appellat; quæ nempe affectuum harmoniam, virtutumque concentum inducat. Sed nimiùm latè patet hæc muſicæ appellatio, eam ſuis finibus coarctabimus, ſi eam canendi appoſitè ad aures demulcendas ſcientiam nominemus: ad quod præſtandum, non ſimpliciter ſoni naturam, & productionem inveſtigat; ſed circa illud verſatur, quatenus aurium, & rationis judicio, ſub menſuram, & numerum cadit. Quare Arithmetices aliqua ſpecies cenſenda eſt muſica, non abſtracta illa quidem, quæ numeros ab omni materia ſeparatos conſideret, ſed quæ eoſdem affixos intueatur, nempe eorum conſonantias, diſſonancias, & intervalla determinet; idcóque veteres muſici voluerunt melos objectum ſcilicet muſicæ eſſe temporum ordinem, Plato verò motus ordinem nominavit.

Nimis rudis, & inepta videtur muſices diviſio, in naturalem, & organicam, nempe naturalem quæ voce articulatâ conſtet, & organicam quæ inſtrumentis variis producatur. Cum eadem in utraque conſtet ratio muſicæ, hæcque conſideratio quod cum voce articulata conjuncta ſit, aut cum in ſono in articulato conſiſtat, nihil ad hujus ſcientiæ conſiderationem pertinere videatur. Solidior videretur hæc diviſio quæ duplicem admitteret in muſica facultate Theoricam quæ circa ſonorum Theoriam, ſola eorum cognitione contentâ verſatur, & practicam, quæ ſecundum regulas artis artificioſè, & cum delectatione modulatur. Alij nonnulli muſicæ diviſionem protulerunt, nempe in harmonicam, rithmicam, & metricam. Prima differentias ſonorum ſecundum acutum, & gravem, nempe ſonos ad harmoniam aptos, rejectis ineptis conſiderat, hoc eſt intervalla harmonica, tonos, hemitonia, conſonantias, diſſonantias, & in quibus numerorum proportionibus ea omnia poſita ſint inveſtigat, praxis vero illi reſpondens vocem per eam intervalla attollere, aut dimittere, & ſecundum ea intervalla movere docet, quod vulgò intonare dicimus.

Rythmica præterea quæ obſervat varias in quocumque ſono moras, & quaſi prolationes, ſeu ut vocant ad menſuram & numeros canit. Tertia metrica quæ metris, ſeu vocibus & argumento convenientem modulationem adaptat, ſed verba notis, & notas verbis accommodat. Hæ quidem viderentur potius partes muſicæ, quam ſpecies, qui enim apud nos muſici dicuntur, hæc munia implere debent, nempe ut benè intonent, exactè menſuram ſequantur, & qui componunt, vocibus, & argumento notas accommodent, ſed neque hoc modo omnia muſici officia recenſentur, cum præterea melopeiam habeamus, quæ diverſas partes ita componit, ut ſymphoniam efficiant, & nunquam diſcordent. Quæ ultima muſices pars ad recentiorem muſicam pertinere videtur, cum nullum ſymphoniæ apud antiquos extet veſtigium, nempe concludi non poſſit ex eorum ſcriptis pluribus ſimul diverſis vocibus ceciniſſe, quarum una baſſum efficeret, alia tenorem, aut contratenorem, alia ſuperiorem. Quare communiter recentior muſica videtur has partes poſſe admittere. Ut imperfectior dicatur cantus planus ut vocant & Gregorianus, in quo genere canendi, attollitur, aut demittitur ſonus, ſecundum acutum, & gravem, menſura verò non ita exactè obſervatur, hunc cantum communiter in Eccleſiâ adhibemus, nullumque aliàs admittebamus. Illa vero ſpecies muſices eſt perfectior, quam cantum variabilem; & figuratum vocamus, in quo tempora prolationum, & quaſi moras exactiùs ſeu in minutiores partes dividimus, & ad menſuram exigimus. Metrica autem & melopeya, ad choragum, ſeu compoſitorem pertinet, qui non tantum ſonos, & moras vocibus, & argumento accommodet, ſed ſonos ſonis, acutos gravibus, ita adaptet ut diſſonantias non efficiant, ſed gratam auribus ſymphoniam producant.

Doctior erit illa diviſio quâ muſica in canonicam, & mathematicam dividitur, canonicâ de placitis & principiis muſices ſecundum ſenſuum experientiam dijudicat. Ita muſici noſtri, etiam qui in ea arte ſublimiores cenſentur, à ſenſibus ſuas regulas accipiunt; nempe eſſe aliqua intervalla conſona, alia diſſona; Diapaſon ſeu octavam ex quinta, & quarta compoſitam eſſe, Tonum eſſe exceſſum quintæ ſupra quartam, neque ulterius in iis inveſtigandis operam ponunt.

Mathematica vero non tantum ſenſuum judicium admittit, ſed præterea ratione eadem placita examinat, conſonantiarumque ſingularum rationes in numeris exhibet. Ex qua diverſa procedendi, & ſonos examinandi methodo, Triplex muſicorum ſecta, ſeu quaſi claſſis orta eſt. Ariſtoxenia, Pythagorica, & Ptolemaica. Prima ſenſibus fidebat, & ad eorum judicium provocabat. Pythagoras è contra parvi faciebat ſenſus judicium, quod non ſatis accuratum, & in rebus minutioribus non ſatis fidele exiſtimabat. Sed aliquas cauſas intelligibiles, in certis numerorum rationibus poſitas excogitabat, ad quas omnia muſicæ placita exigebat. Ptolemæus vero utrumque admiſit judicium, tam ſenſus, quam rationis.

A quo ſit inventa muſica ſolent multi inquirere, Euſebius Dionyſio eam adſcribit, Diodorus, & Lucianus Mercurio. Alij Apollini, Polybius Arcadibus, Athenæus Phrygibus Plinius Amphioni Dircæo, alii Philemoni, alii Lino Thebano, alii Pythagoræ Samio, alii Orphæo. Quæ tamen omnia falſa ſunt, cum Geneſis aſſerat Tubal fuiſſe patrem canentium cithara, & organo. Puto ergo ſi de muſica naturali loquamur, eam ita fuiſſe inſitam à natura, ut nulla ſit natio barbara quæ aliquos modos muſicos non habeat, & tam eſſe homini hoc à natura inditum, ut vocem ad concentuum modulationem inflectat, eaque modulatione delectetur, ac luſciniæ, aut avi cuilibet, atque adeo inventore opus non fuit, in ea facultate, quam à natura diſcimus. Si vero de arte & ſcientia agatur, certum eſt Tubal inventorem fuiſſe inſtrumentorum, quæ chordis conſtant. An vero præterea idem Tubal ex malleorum ſono; eorum didicerit proportionem ut accidit Pythagoræ, hoc ſine ullo probabili fundamento aſſeritur. Unde puto muſicam quam vocamus mathematicam jure tribui Pythagoræ, qui cum muſicam ariſtoxeniam optime calleret, & caſu aliquo in officina ferraria, malleos in octava perfectè conſonos repeririſſet, ad ſtateræ examen deprehendit, unum alterius duplum fuiſſe, concluſitque octavam in ratione dupla poſitam eſſe, ex quibus ad alias conſonantias examinandas progreſſus eſt.

Muſices utilitatem, & efficaciam multa commendant: præcipuè verò quod moleſtias animi minuat & abſtergat. Celebris eſt enim ad muſicæ commendationem locus ille Scripturæ, nempè Regum

gum cap. 16. in quo aſſeritur quod quandocumque ſpiritus Domini malus arripiebat Saul, David tollebat citharam, & percutiebat manu ſuâ, & refocillabatur Saul, & leviùs habebat; cum enim naturalis omnino non eſſet ægritudo, ſed dæmon abuteretur humore melancholico, ſimul & harmonia humorem noxium ſedaret, & ſacri hymni dæmonem abigerent. *Pythagoras* ait Seneca *perturbationes animi lyrâ componebat, quis autem ignorat, lituos, & tubas concitamenta eſſe, ſicut quoſdam cantus blandimenta quibus mens reſolvatur. Confuſis oculis proſunt virentia, & quibuſdam coloribus infirma acies aquieſcit, quorumdam ſplendore perſtringitur, ſic mentes ægras ſtudia læta permulcent.* Dicitur ergo Pythagoras muſicâ ebrios ab ſobrietatem revocaſſe, & Clytemneſtra fuiſſe pudica quamdiu muſicum Doricum habuit. Dicitur item Alexander Timothei Mileſij cantu orthio, quaſi furibundus, & alio remiſſiori cantu placatior evaſiſſe. Innumera ſunt quæ circumferuntur de muſica, quorum pleraque aut fabuloſa ſunt, aut exaggerationem poeticam ſapiunt veriùs de ea Boethius muſica obtinet principatum inter ſeptem artes liberales, inter omnes ſcientias ipſa laudabilior, jucundior, lætior, amabilior eſt, & probatur ab effectu. Muſica enim curas abigit, inſomnes infantes compeſcit vagientes, laborantium mitigat labores, feſſos reparat artus ac perturbatos reformat animos.

Accedit ad ejus commendationem, quod in ſacris tam in veteri lege, quam Chriſtiana fuerit adhibita. Ita Chriſtiani jam Apoſtolicis temporibus, ut teſtatur Paulus Apoſtolus ad *Coloſſ. 3. & ad Epheſ. 5.* muſicâ utebantur. Qui mos canendi in Eccleſia omni ævo obtinuit, aliis vero modulis uſæ Græcorum Eccleſiæ, aliis occidentales. Immo & apud occidentales non eadem fuit ubique canendi conſuetudo. Vetuſtiores enim Eccleſiæ ſolum Gregorianum cantum admittunt, nec figurato cantu, ut non ſatis gravi, ad majeſtatem & venerationem conciliandam minus idoneo non utuntur.

Ut autem ea de quibus agit muſica breviter perſtringamus, & quaſi oculis ſubjiciamus, primo conſonantiarum, & intervallorum omnium proportiones aſſignat non tantum præcipuorum, ut octavæ, quintæ, quartæ, ſed aliorum omnium etiam minorum. Tum Syſtemata omnia explicat, diatonicum, chromaticum, enharmonicum, ſingulaque eorum intervalla, ſeu chordas determinat, modos item ſeu diverſas octavæ ſpecies attingit, neque ulterius progreſſa videtur, atiquorum muſica. Exinde ad Syſtema Aretini progreditur, totamque hodiernæ muſicæ rationem exponit, ſcalamque communem diatonicis intervallis diſtinctam proponit, tum ad menſuras quæ ad rithmicam pertinere videtur progreditur. Melopeiam item ſeu plurimarum partium, ſimul canentium compoſitionem docet de qua apud antiquos neve ſtigium quidem reperitur. Atque hi ſunt muſicæ noſtræ fines. Ut autem melius ejus progreſſum videamus, per ſingulas ætates, & tempora eam conſiderabimus.

Centum circiter annis ante Urbem conditam ante Chriſti nativitatem annis 852, annis 75 ante primam Olympiadem, floruit Terpander Thebanus Muſicus celeberrimus, Homeri pronepos. Lyram quam Orpheus tetrachordum fecerat, Eptachordum reddidit modulos lyricos, ſeu leges fidium edidit, ſuis & Homeri carminibus modos adjecit quibus canerentur. Primus dicitur de muſica ſcripſiſſe, & Lacedæmonios diſſidentes cantus ſuavitate ſedaſſe, & quater in Pythiis ludis victor evaſiſſe. De eo ſic loquitur Plutarchus, *Omnino Cythara cantus Terpandri ratio omnino ſimplex perrexit, uſque ad ætatem Phrynidis, non enim antiquitus pro libidine cujuſque (uti nunc) licebat fidibus canere; nec rithmos, concentuſve transferre: in ipſis namque legibus accommodatam cuique tenſionem tuebatur, cujus rei cauſa id nominis inditum erat: leges enim ſunt vocata ne quis per unam ſpeciem formamque tenſionis tranſgrederetur.* Appoſitè videtur lyram Eptachordum inſtituiſſe, cum ſeptem vocibus totum diatonicum ſyſtema contineatur; utrum vero hæc muſicæ ratio tantum ex judicio ſenſus procederet, ut ſolent muſici vulgares multa identidem nova comminiſci, licet rationes neſciant, ignoratur.

Xenocrates Italus Locrenſis poſt Terpandrum floruit, dicitur fuiſſe Pæanum conditor. Ardulus Træſenius Tibianam muſicam inſtituit, cujus poſtea circa primam Olympiada Clonas imitatus Terpandrum leges tulit. Ita Plutarchus.

Circa primum annum Urbis, ante Chriſtum 752. Olymp. 6. anno 4. Sacadas Argivus fuit conditor modorum; Hoc eſt, videtur inveniſſe, multas eſſe ſpecies octavarum, pro varia diſpoſitione duorum hemitoniorum, quæ in qualibet octava inveniuntur, inventor legis tripartilis, fuit antiquior Pindaro, ter in ludis Pythiis vicit.

Secundo Urbis ſæculo, nempe ante Chriſtum 600 annis, Simonides lyricus octavam chordam lyræ addidit ut octavam perficeret.

Lycaon muſicus novum cordarum ordinem invexit. Octavam lyræ chordam nonnulli illi tribuunt.

Sapho Poetria, & muſica Plectri uſum invenit, cum antea ſolis digitis lyra pulſaretur. Plectrum ſcilicet adhibuit ne digitos attereret. Dicitur inventrix mixtolydii concentus.

Pythagoras muſicæ theoriam ex fabri malleis adinvenit, & intervallorum proportiones determinavit.

Damon Muſicus aliquos adoleſcentes luxuriæ deditos, cantu ad bonam frugem revocavit, ita Zarlinus.

Tertio Urbis conditæ ſæculo ante Chriſtum 500 annis, Phrinis inſignis Cytharœdus primus apud Athenienſes cithara cecinit. Tulit præmium in Panathenaicis, fuit diſcipulus Ariſtoclis qui ex Terpandi familia ortum ducebat.

Phrinicus cujus Ariſtoteles meminit fuit inſignis muſicus, & inventor carminis tetrametri.

Laſus Herminæus primus de muſica ſcripſit. Diocles item de muſica ſcripſit ut vult Suidas.

Iſmænius Coraules teſte Boëtio multos cantu à morbis & ægritudinibus liberavit.

Nicomachus Arithmeticus de muſica etiam egit, ex Zarlino.

Quarto Urbis ſæculo 400 ante Chriſtum annis Antiſthenes Socratis auditor de muſica ſcripſit. Laert. Sicut & Simias Thebanus ejuſdem Socratis diſcipulus.

Epicurus item. Plato in ſuis Operibus multa habet ad muſicam ſpectantia.

Quinto urbis ſæculo 300 ante Chriſtum annis. Euclides Megarenſis inſignis geometra cujus extant elementa, data, aliaque nonnulla, introductionem ad muſicam compoſuit, in qua primò bene explicat, diſtinctionem trium generum, Diatonici, Chromatici,

Chromatici, & Enharmonici, & horum ſingula intervalla ſatis diſtinctè explicat, & proportionem. Hoc Opus latinè vertit Marcus Meibonus notiſque illuſtravit, anno 1652.

Ariſtoteles librum unum de muſica ſcripſit.

Theophraſtus Eriſſius Ariſtotelis diſcipulus, & ſucceſſor, reliquit tres libros de muſica, unum de muſicis, harmonicorum unum. Diog. Laert.

Ariſtoxenus Harmonicorum libros tres edidit; in quibus de antiquorum muſica, præcipuè de triplici genere nempe Diatonico, Chromatico, Enharmonico, de conſonantiis item, & intervallis ſed valde obſcurè. Ariſtoxenus fuit filius Mneſij, qui & *Spintharus* vocabatur, muſici Tarentini; hic cum *Mantineæ* aliquandiu vixiſſet, factus eſt *philoſophus*, fuitque auditor Patris, Lampri *Erythræi*, Xenophyli Pythagorei, denique Ariſtotelis, quem mortuum probris laceravit, quod Scholæ ſucceſſorem reliquiſſet Theophraſtum.

Vixit Alexandri temporibus, compoſuit muſicam & hiſtorias, hunc Marcus Meibonius vertit & notis illuſtravit 1652. In quarto.

Heraclides Ponticus Speuſippi, & Ariſtotelis auditor ſcripſit duos libros de muſica.

Timotheus Muſicus cum ad Alexandri magni menſam orthium caneret, Regem ad arma incitavit, cum vero mitiùs caneret Regis ira reſedit. Chromaticum genus invexit, cujus tamen meminit Euclides. Terpandri ſeptem chordis alias quatuor addidit.

Dicitur & Xenophantus cantu Alexandrum ad arma concitaſſe.

Sexto Urbis ſæculo ante Chriſtum 200 annis, dicitur Archimedes ab aliquo ſancto Patre inveniſſe organum Pythaulicum, in quo nempe eſſent innumeri meatus ſonorum, & ſegetes fiſtularum.

Octavo urbis ſæculo ineunte quinquaginta circiter annis ante Chriſtum floruit Cleomedes cujus Arithmetica, & Harmonica dicitur aſſervari in Bibliotheca Vaticana.

Primo Chriſti ſæculo Plutarchus libellum de muſica edidit, multa eruditione refertum.

Secundo Chriſti ſæculo Ptolemæus tres libros harmonicorum edidit quos citat Nicomachus. Hoc Opus dicitur aſſervari in Bibliotheca Oxonienſi. Syſtema diatonicum ſimplex & nathrale vocatur, & monochordon Ptolemaicum. Fuit autem Ptolemæi ratio media inter rationem Pythagoræ & Ariſtoxeni. Primus rationem tantum adhibebat judicem, Ariſtoxenus ſenſum. Ptolemæus voluit ut in harmonicis utriuſque judicium ſequeremur, Nicomachus Geraſſenus Pythagoricus Harmonices manuale edidit duobus libris. Primus liber eſt de harmonicis elementis, in quo agit de muſica cœleſti Planetarum. Tum oſtendit muſicam in numeris eſſe, & ſeptem chordis octavam fuiſſe additam. Exinde docet quomodo arithmeticæ ſonorum rationes ſint inventæ. De bisdiapaſon in genere diatonico. De ſonorum ſecundum tria genera progreſſione.

Liber ſecundus explicat intervalla muſica.

Vixit ut cenſet Meibonus qui primus eum explicuit, & notis illuſtravit circa Ptolemæi tempora. Dicitur Geraſſenus, à Geraza, cavæ ſyriæ urbe. In quarto Amſtelodami 1652.

Theon Smirnæus fuit ille quem Plutarchus inducit de maculis lunæ diſſerentem. Hic fuit Philoſophus Platonicus, qui loca Platonis ad Matheſin ſpectantia explicuit quare liber ejus eſt ferè totus de arithmetica, & muſica. Titulus autem libri eſt Theonis Platonici, eorum quæ in mathematicis ad Platonis lectioné utilia ſunt expoſitio. In hoc Opere vix quidquā invenies, quàm quod in iis qui de muſica egerunt; aut de numerorum diviſionibus, reperitur. Hoc Opus ex Thuana Bibliotheca latinè vertit, & commentariis illuſtravit Iſmael Bullialdus. Pariſiis in quarto 1644.

Quinto Chriſti ſæculo S. Auguſtinus 6 libros de muſica edidit.

Sexto Chriſti ſæculo ineunte Boetius Exconſul, & Patritius ordinarius tractatum edidit de muſica. In primo libro explicat naturam conſonantiæ, & primam antiquorum muſicam, cum ſyſtemate vocum ſeu chordarum. In ſecundo explicat in particulari, ſingularum conſonantiarum proportionem. In tertio aliorum intervallorum præcipui toni. In quarto monochordi diviſionem præcipue diatonicam per ſingula tetrachorda. In quinto ea refert in quibus veteres authores non conveniunt. Totum Opus optimum, multa ſcitu digna complectens præcipue circa ſonorum naturam, quam in motu poſitam eſſe exiſtimabant.

Alypius item introductionem muſicam edidit quæ tota conſiſtit in deſcriptione modorum ſecundum tria genera, diatonicum, chromaticum enharmonicum; datque notas quibus notæ in ſingulis modis notentur, quarum difficile eſt recordari.

Hunc item Meybonius latinè vertit & notis illuſtravit.

Ariſtides Quintilianus muſicæ libros 3 edidit, in quibus quæ à prioribus dicta ſunt collegit, & brevitate concinna explicuit, hunc Meibonius notis illuſtravit.

Bachius Senior Græcus author Iſagogen Harmonicam edidit per dialogiſmum, in qua veterem Muſicam, & Harmoniam explicat, ſed nimis breviter, ita ut vix intelligi poſſit.

Hoc Opus ex Bibliotheca Regia Morellus profeſſor Regius latine vertit, & notis illuſtravit: Pariſiis in octavo 1623.

Pſellus author Græcus compendium muſicæ ita breve edidit, ut in eo nihil addiſcas niſi aliunde ſcias. Hoc Opus Xylander vertit & notis illuſtravit.

Ut autem Antiquos omnes complectar Euclidis iſagogen harmonicam primus edi curavit Pariſiis Doctor Joannes Pena anno 1557.

Ariſtoxeni filii Mneſiæ ſeu Spinthari Tarentini libros 3 elementorum muſicorum è Græco latinos fecit Antonius Hermannus Gegava, Gravienſis, ſicut & Nicomachi libros duos.

Alypius Caſſiodoro librum ſcripſit de muſica.

Gaudentius item iſagogen harmonicam quæ ſupereſſe dicitur in regia bibliotheca.

Varro, Ptolemæus, & Cenſorinus ſcripſerunt de muſica.

Ariſtides Quintilianus, Bachius Iſagogen muſicam.

Porphyrius ſcripſit de muſica. Opus hoc dicitur eſſe in Bibliotheca Regia Pariſiis.

Tota muſica Antiquorum conſiſtit in proportione conſonantiarum aſſignanda, nominibus ſingularum chordarum in duplici octava per ſingula tetrachorda, in diſtinctione triplicis generis diatonici, chromatici, enharmonici, neque tamen bene explicant uſum chromatici, & enharmonici. Item in diſtinctione modorum, ſeu ſpecierum octavæ. Nihil habet quod ſpectet ad praxin, nihil de

de tactu, & menſuris, ſive durationum prolationis cujuſque vocis, nihil de compoſitione, etiam unius cantus. Multo minus de compoſitione plurimarum partium, immo nullum extat veſtigium quod antiquitus plures ſimul diverſis vocibus canerent. Citatur à nonnullis aliqua lex, qua cautum eſt ut ſi quis unum phonaſcum occiderit, plectatur & mulctetur, quaſi omnes occidiſſet, eo quod reliqui reddantur inutiles. Hanc tamen non legi.

Sexto Chriſti ſæculo Sanctus Gregorius magnus Papa in muſica excelluit, eique ita addictus fuit, ut ipſemet Clericos Muſicam doceret. Cantum Eccleſiaſticum reformavit, qualem nunc habemus, nempe cantum planum, ſeu firmum, quem propterea Gregorianum nominamus.

Septimo Chriſti ſæculo Iſidorus Hiſpalenſis Epiſcopus omnium mathematicarum compendia inſerit.

Martianus Capella qui & Felix Mineus dictus eſt de quatuor Mathematicis ſcripſit. De muſica autem libros 6.

Octavo Chriſti ſæculo Venerabilis Beda ſcripſit de muſica.

Decimo Chriſti ſæculo temporibus Gregorii ſeptimi, Guido, ſive Guidmundus, patria Aretinus, prius Benedictinus Monachus cœnobii S. Leufredi apud Ebroicenſes Normannos, poſtea Cardinalis, & Archiepiſcopus Averſanus. Hic dum monachus eſſet duos ad præſulem Theobaldum ſcripſit libros de muſica, unum proſa, alterum carmine partim heroico, partim trochaico rythmico. Idem adverſus Berengarium, ſcripſit de corpore, & ſanguine Chriſti Domini, in venerabili Sacramento. Hic novum excogitavit ſyſtema, ſeu monochordi diviſionem, magis accommodatam muſicis inſtrumentis. Cum enim in diviſione monochordi diatonica vulgari, & Ptolemaica admittatur diſtinctio toni majoris, toni minoris, & hemitonii majoris, & quinta præcisè conſtet tonis majoribus duobus, uno minore, & uno hemitonio, invenitur in decurſu una quinta falſa. Ut quinta quæ eſt ab A ad E falſa eſt, nam A B eſt tonus minor, B C hemitonium, C D tonus major, D E tonus minor. Quare deficit unum comma quod ſenſibile eſt. Ipſe nulla habita ratione toni majoris, & minoris, hunc unius quintæ defectum, aliis omnibus quintis communicat, & quaſi dividit, ita ut nulla deficiat aut abundet niſi quarta parte commatis, quæ inſenſibilis eſt; ex quo fit ut in organo Pythaulico, omnes quintæ ſunt nonnihil diminutæ. Hoc ſyſtema quod valde commodum eſt dicitur Aretini: ut autem illud excogitarit, debuit perfectè ſcire antiquorum muſicam. Hic excogitavit ſcalam ſeu Gammam communem. His vocibus ut, re, mi, fa, ſol, la, deſumptis ex hymno ſancti Joannis, Ut queant laxis Reſonare fibris, Mira geſtorum Famuli tuorum, Solve &c. Voluit autem hanc ita diſponere, ut qui ſciret intonare exachordon ut, re, mi, fa, ſol, poſſet omnes voces intonare: diſpoſuitque omnia per exachorda, ſi adhibuiſſet unam vocem ſi, quemadmodum factum eſt à quadraginta annis, omnes mutationes ſeu tranſitus vitaſſet.

Anno 1240 floruit Albertus Epiſcopus Ratisponenſis cognomento magnus qui inter alia multa ſcripſit de muſica.

Anno 1503 claruit Jacobus Faber Stapulenſis interque multa alia 4 de muſica libros reliquit. Titulum appoſuit Elementa Muſicalia. In iis duos ſuos præceptores laudat Jacobum Labinium, & Jacobum Turbelinum. Hos libros tanti fecit Joſephus Blancanus, ut inde jubeat auſpicari, tum ad Boetium accedere, Ariſtoxenum, Ptolemæum, Euclidem.

Anno 1518 Franchinus Gafurius Laudenſis 1
Regius Muſicus, delubrique Mediolanenſis phonaſcus, De harmonia muſicorum inſtrumentorum Opus edidit, in quatuor libros diviſum.

In primo loquitur de genere diatonico, & diſpoſitione quatuor tetrachordon, hypaton, meſon, diezugmenon hyperboleon, item ex ſynnemenon, de ſpeciebus diateſſaron, diapentes, diapaſon in ſyſtemate diatonico, de proportionibus & modis auferendi unam proportionem ab alia.

Liber ſecundus eſt de genere chromatico, de converſione chromatici in diatonicum aut enharmonici. De inſtrumento continente quatuor octavas.

In tertio de continua proportionalitate arithmetica, geometrica, harmonica, oſtenditque tres ſonos in medietate harmonica conſonos eſſe, in aliis diſſonos.

In quarto de modis antiquorum, tum aliqua habet de harmonia Cœleſti.

Nullus plura dixit de diſtinctione generum diatonici, chromatici, & encharmonici.

Anno 1529 Ludovicus Folianus Mutinenſis 2
Muſicam Theoricam compoſuit in duas ſectiones diviſam, in prima agit de diverſis ſpeciebus rationum in genere. In ſecunda hanc rationum ſeu propoſitionum ſingulis conſonantiis applicat, oſtenditque in ſingulis quam rationem habeat major terminus ad minorem, ſeu gravis ad acutum. Dividit autem chordam in 120 ex qua auferendo ſextam partem, quintam, quartam, tertiam, tres octavas partes & tres quintas & medietatem, habet omnes conſonantias, exinde monochordi diviſionem & manus quam gammam vocamus compoſitionem.

Hæc omnia communia ſunt, ſed ſatis pro illo tempore benè explicata.

Anno 1529 Muſica Petri Aronis Florentini or- 3
dinis Hyeroſolimitani ſub titulo Toſcanello, nonnihil aucta & correcta in lucem prodiit in duos libros diviſa. In quorum primo poſt nonnulla in laudem Muſices loquitur de modis & de valore notarum in ſingulis modis, ſeu proprie menſuris, tum de punctis aliiſque notarum alterationibus. In ſecundo agit de tono hemitonio ſinguliſque conſonantiis, tum de genere diatonico chromatico, enharmonico, exinde de contra puncto & regulis ad compoſitionem neceſſariis. In fine aliquid habet de proportionalitatibus & diviſione monochordi.

Opus hoc ad praxin potius pertinet quàm ad Theoriam, & habet communia præcepta muſicæ hodiernæ, non tamen omnia.

1552 Gaudentius Philoſophus harmonicorum 4
introductionem perfecit. In qua loquitur de ſono, voce, intervallis, generibus, aliiſque. Brevis eſt. Hunc Meybonius notis illuſtravit.

Bachius ſecta Ariſtoxenius pariter introductionem Muſicam edidit brevem, quæ tota eſt in explicandis ſeptem tantum modis ſeu diapaſon ſpeciebus. Hanc Meybonius vertit & notis illuſtravit.

Anno 1530 floruit Henricus Loricus Glorea- 5
nus Helvetius qui anno 1549 libros de muſica eruditos edidit.

Anno

Anno 1577 clarus fuit Orlandus Laſſus, qui multa muſica compoſuit, de arte non ſcripſit.

1575 Franciſcus Maurolycus Meſſanenſis muſicas traditiones edidit. Initio habet quaſi Epitomen Boëtianæ Muſicæ primo initio exinde in fine.

Mancum tamen eſt Opus, in quo ſcilicet multa deſiderantur quæ dici poterant. Venetiis in quarto 1575.

7 Anno 1583 Joſephus Zarlinus Chiogenſis, Præfectus muſicæ Sereniſſimæ Reipublicæ Venetæ, librum edidit de muſica Italicè, in quatuor partes diviſum ſub titulo, *Inſtitutioni Harmoniche.*

In prima parte poſt laudes Muſicæ, ejuſque diviſionem loquitur de numeris & de proportionalitatibus, eorumque ſpeciebus reguliſque ad addendas, ſubtrahendas multiplicandas, & dividendas rationes, ſeu proportiones.

In ſecunda parte agit primo de antiquorum muſica, tum de ſonis acuto, & gravi. De conſonantiis & diſſonantiis, de triplici genere diatonico, chromatico, enharmanico, eorumque inventoribus; tum de diviſione monochordi ſecundum hæc tria genera, diatonicum eſſe naturale, diverſum tamen ab eo quod in inſtrumentis muſicis invenitur.

In tertia parte agit de contra puncto, & regulis ad componendum, tum de menſura ſyncopa, de compoſitione trium aut quatuor vocum.

In quarta parte explicat modorum naturam; nempe de modis Antiquorum, tum de modis hodiernis.

Hic author multa eruditè ſcribit, nimis mihi fuſus videtur, ſermocinationes enim habet longiores, & parum ad rem facientes, videtur hanc materiam exhauſiſſe. Poterat breviſſimè tota hæc doctrina tradi.

8 Anno 1588 Joſephus Zarlinus Chiogienſis præfectus muſices Sereniſſimæ Reipublicæ Venetæ, lectis omnibus Antiquis, quotquot nempe in ejus manus venerunt, librum edidit Italicè cum titulo, *Sopplimenti muſicali*, in libros octo diviſum.

In primo aliqua communia, & quaſi ſequentium principia proponit.

In ſecundo agit de ſono & voce, quaſi de elementis muſicis, eorumque accidentia conſiderat.

In tertio de intervallo ſeu de conſonantiis & diſſonantiis.

In quarto de generibus muſicis, de diatonico præſertim & de diviſione varia unius octavæ.

In quinto de ſyſtematibus.

In ſexto de tonis & modis.

In ſeptimo de mutationibus.

In octavo de melopæia.

Hic tractus multa habet inutilia, nempe diſcurrit aliquando longius ſupra univerſalia; poterant item multa dici breviùs, & clariùs meo quidem judicio; vix enim ab illo intelligeretur, ab eo qui aliunde in Theoria non benè eſſet verſatus.

Anno 1615 Salomon de Caux Architectus militaris Electoris Palatini tractatum gallicum edidit de muſica, ſub titulo, *Inſtitution harmonique.* In duas partes dividitur.

In primo libro agit de conſonantiis, earumque rationibus, & diviſione monochordi.

In ſecundo tradit praxin hodiernæ muſicæ, & regulas compoſitionis. Nihil habet niſi valdè commune.

1610 Joſephus Blancanus Bononienſis Societatis Jeſu, geometricum tractatum habet de Echone. Habet autem in hoc tractatu theoremata novemdecim, problemata ſex. De hac materia primus quod ſciam egit geometricè & ſolidè. In quarto Bononiæ 1610. In fine aliorum Operum. 9

1639 P. Antonius Parran è Societate Jeſu, Opus gallicum de muſica edidit, de theoria ſcilicet & praxi, comprehendentem præcepta compoſitionis. 10

Habet quidem muſicæ hodiernæ præcepta, antiquam tamen muſicam non ſatis explicuit. Pariſiis in quarto 1639.

Renatus Des Cartes compoſuit Opuſculum de muſica, ſed nimis ſuccinctum & breve, in eo enim multa deſiderantur tam circa veterem quam novum muſicam. 11

1644 Theonis Smyrnæi Platonici muſicæ, eorumque quæ ad Platonis lectionem utilia ſunt expoſitio, in lucem prodiit operâ Iſmaelis Bullialdi, à quo eſt in latinum verſa & notis illuſtrata. In eo opere eſt tractatus de muſica, in quo habetur totâ antiquorum muſica valde clarè, ita ut ex eo authore videatur deſumpſiſſe Michael Pſellus ea quæ de muſica dicit, & ex eo alij conſequenter. 12

Anno 1650 Pater Athanaſius Kircher Fuldenſis è Societate Jeſu, muſurgiam univerſalem edidit, duobus tomis in decem libros diviſam. 13

In primo ſonorum naturalium productionem, ſonoſque & voces plurimorum animalium conſiderat, & organum auditus explicat.

Secundus de muſica antiquorum, eorumque muſicis inſtrumentis agit.

Tertius eſt de intervallis ſeu conſonantiis & diſſonantiis, eáque occaſione proportionalitates explicat eaſque conſonantiis adaptat, de tetrachordis & generibus diatonico, chromatico, enharmonico, agit & de modis tam antiquis quàm novis.

Quartus eſt de monochordorum diviſione geometrica libro quinto novam componendarum melodiarum rationem tradit, in quâ agit iterum de modis, ſeu tonis, de contrapuncto, & regulis compoſitionis.

Sextus liber exhibet inſtrumenta muſica omnis generis, eorumque Theoriam tradit.

In ſeptimo libro Muſicam antiquam cum nova comparat.

In octavo artem componendi per numeros explicat, quâ nempe Imperitus in arte muſica componere poſſit perfectè.

Nono reconditiora ſonorum arcana reſerat, multáſque affert experientias circa naturam conſoni & diſſoni, circa Medicinam per Muſicam operantem, circa reflexiones ſonorum & alia ſimilia.

In decimo oſtendit naturam in omnibus Muſicæ leges obſervaſſe.

Hoc Opus multa optima de muſica habet minutias tamen multas & parerga continet; ideóque eſſet multo perfectius ſi ad tertiam partem redigeretur & paulo melius ordinaretur.

P. Gaſpard Schotus Regiſcurianus in ſuo Curſu mathematico muſicam tradit, de antiquorum muſica, ita breviter diſſerit, ut tantum termini percipi poſſint. Muſica recentiorum eſt paulo uberius explicata. 14

1652 Marcus Meibomius antiquæ muſices authores ſeptem, nempe Ariſtoxenum, Euclidem, 15

Nicomachum

Nicomachum Alypium, Gaudentium, Bachium ſeniorem, Ariſtidem Quintilianum, Martianum Capellam. Primos ſex latinè vertit, omnes reſtituit, & notis illuſtravit.

In præfatione Kircherium noſtrum reprehendit, quòd in ſua Muſurgia multa antiquæ muſicæ placita aliter explicuerit, quam reverà habuerint.

In hoc Opere antiquorum muſica continetur & benè explicatur. Amſtelodami in quarto 1652.

CAPUT VIII.

Progreſſus Opticæ.

PArtem Matheſeos jucundiſſimam aggredimur, quam ferè novam eſſe dicimus, cùm ad Alhazenum uſque ita pauca ſint, quæ ab Antiquis authoribus de hac parte ſunt edita, ut ad conſtituendam partem ab aliis diſtinctam, & ſeparatam non ſufficiant. Hujus opticæ præſtantiam commendat oculi dignitas, à cujus actione nempe ab actu videndi ſuam habet appellationem, regia ſcilicet ſcientiarum via; ſi enim Philoſophia defluxit è cœlo, oculis ſequeſtris deducta eſt in hoſpitium. Accedit objecti nobilitas, cùm coloribus, & lumine nihil illuſtrius cogitari poſſit. Modus ipſe cognoſcendi, intellectionis æmulus, qui res etiam diſſitas, apprehendat, velocitas item tanta, & nullum temporis intervallum admittat, accedit certitudo qua major in ſenſibus cogitari non poteſt. Varietas item objectorum, cùm nullo ſenſu tot rerum differentias percipiamus; corporum enim colores, magnitudinem, continuitatem, diſcretionem, numerum, figuram, ſitum, motum, quietem oculis diſtinguamus. Sub hoc Opticæ nomine ſex tractatus comprehendimus, nempe Opticam univerſalem, ſeu in genere, perſpectivam, catoptricam, dioptricam, projectionem ſphæræ in planum, & Gnomonicam. Cùm enim viſio directis, reflexis, & refractis radiis peragatur, appoſitè quatuor in Optica partes conſtituimus; primam quæ generalis oculorum affectiones conſiderat. Secundam perſpectivam ſeu de radio directo. Tertiam Catoptricam de reflexo. Quartam dioptricam de refracto. Quia vero Aſtrolabia veram ſpeciem perſpectivæ continent, in qua nempe, aſſumpto plano circuli cœleſtis pro ſectione, oculum in aliquo puncto collocamus, oppoſitumque ſpectamus hemiſphærium. Gnomonica pariter ex ſtyli extremitate, hemiſphærium cœleſte in extremitate ſtyli ſtatuit, & in oppoſito plano cœleſtes orbes intuetur. Cùm igitur utraque ſit vera perſpectivæ ſpecies, ſub eodem genere debuit collocari. Optica ergo poſt exactam oculi deſcriptionem, organum præcipuum in quo exercetur viſio determinat, quod adeo exactè perficit, ut ea omnia in materiali oculo exhibeat quæ naturali accidunt. Exinde ſingulas oculorum deceptiones, circa magnitudinem, diſtantiam, numerum, diſtinctionem. Omnia oculorum vitia detegit, tam myopum qui viciniora melius vident, quam presbytarum qui remotiora diſtinctius intuentur. Ad hunc tractatum referimus totam luminis propagationem, ſtriatas imagines, aliaſque difformes, quæ ex certo, & determinato loco ſpectatæ reformantur.

Perſpectiva pictoribus perutilis ſuis geometricis demonſtrationibus, ſi quæ alia matheſeos pars ornatur, eam in ſex partes commodè dividere placet, quarũ prima fundamentales propoſitiones cõtinet. Secunda circa horizontalia plana, ſeu ichnographias perſpectivè deſcribendas occupatur. Tertia ſcenographiam ſeu elevationes tradet. Quarta puncta accidentalia explicat. Quinta in laquearibus, & fornicibus perſpectivam exercet. Sexta denique perſpectivas pluribus conſtantes partibus ſeparatis, umbrarumque deſcriptiones attinget, inventumque à 40 annis parallelogrammum delineatorium explicat.

Catoptrica viſionem per reflexionem factam explicat, quam in tres partes partimur; quarum prima reflectionis leges inquirit, tum ſpeculorum planorum proprietates omnes explicat, nempe cur imago tantum intra profunditatem ſpeculi immerſa videatur, quanta eſt objecti à ſpeculo diſtantia, cur dextra apparent ſiniſtra, in horizontalibus everſa, cur in ſpeculis parallelis diſtantia, & objectum multiplicentur. Ex quibus multæ deducuntur praxes perjucundæ, ut in exigua capſa porticum efformemus, quæ in immenſam planitiem excurrere videatur; ſic objecta quantumlibet multiplicamus; omnes circa regiones nativis coloribus radio ſolari adumbramus. Secunda pars ſpecula convexa intuetur, inquiritque cur in iis objecta propiora, nonnihilque incurva ſpectentur, cur in iis reflexi radii diſpergantur, atque adeo myopibus ſint utilia. Exinde ad Cylindra & Conica deſcendit, pervulgatumque de imagine difformi per ſpeculum cylindricum, aut conicum reformanda, problema proponit. Tertia ſpecula concava conſiderat; primoque oſtendit quam vim ad comburendum ex radiorum unione poſſideant. An verum ſit vel fabuloſum, quod de Archimede Claſſem Romanorum ſpeculo concavo incendente fertur, examinat: item an poſſibilis ſit linea uſtoria infinita. Tum de radiorum paralleliſmo, modicoque luminis decremento, quo fit ut ad trecentos paſſus de nocte legere liceat. Denique cur objecta antrorſum, non intra profunditatem ſpeculi everſa videantur inquirit, & Teleſcopia ex ſpeculis concavis, & convexis componit.

Non minus jucunda & illuſtris eſt Dioptrica quæ pariter tres ſibi partes vendicare poteſt. Prima poſt explicatam luminis naturam, & leges, ſpecillorum convexorum, & concavorum proprietates aperit. Convexorum quidem ad radiorum unionem & conſequenter ad comburendum, ad exprimendas rerum imagines, formandos luminis penicillos, juvandoſque presbytarum oculos; concavorum ad radiorum diſperſionem, myopum oculis perutilem. Neque vero polygonas lentes, ad objectorum multiplicationem, aut diſperſorum unionem miſſas faciet, ſicut nec maximè convexas ad microſcopia. Secunda, multa ſpecilla componit, & comparat, teleſcopiáque communia ex lente convexa, & ſpecillo concavo conſtruit, tum ex duobus, & tribus, & quatuor convexis, microſcopia item melioris notæ, magicam item laternam, methodum obſervandarum eclypſium, aut macularum ſolarium tranſmiſſo per tubum radio ſolari: addit item nonnulla ad praxin ſpectantia. Tertia pars de refractionibus coloratis agit; primóque de priſmate triangulari, tum de Iride ejuſque proprietatibus, rotunditate, diſtantia, motu, tum de coronis, pareliis, virgis, crepuſculo & aurora.

Hæc dioptrica ferè tota nova eſt, de qua tantum leviter egerunt antiqui authores, nempe attigerunt

Digitized by Google

gerunt eam refractionem, vi cujus baculus in aqua fractus apparet, de ſpecillis autem non egerunt, Alhazen & Vitello nonnulla habent de globo vitreo objectorum apparentiam augente, ex cujus occaſione paulo poſt nempe circa annum 1100 inventa ſunt ſpecilla convexa quibus utuntur ſenes, & concava quibus myopes, cum ante illud tempus nullus fuerit eorum uſus. Aſſerente Jordano celebri ex Prædicatorum ordine concionatore, qui floruit ab anno 1200 ad 1135, in una ex ſuis concionibus, ante 20 annos fuiſſe inventa perſpicilia. Dicunt nonnulli eum fuiſſe anno 1220. Teleſcopia vero initio hujus ſæculi inventa ſunt, quidquid de iis demonſtratur novum eſt; quare tota fere dioptrica inter hujus ſæculi inventa annumeranda eſt.

Ad opticam, Aſtrolabiorum doctrinam revocamus, ut veræ perſpectivæ ſpeciem, quæ nempe ſecundum regulas perſpectivæ procedat, quamvis enim à nonnullis hæc pars ad Aſtronomiam revocetur, eo quod Aſtrolabiis utamur ad ſolvenda problemata aſtronomica, verè tamen eſt pictura, qua in plano Sphæram cœleſtem adumbramus. Cum igitur perſpectiva omne objectum in plano exprimat, illius etiam erit cœlum ipſum in planum projicere. Idem etiam de Gnomonica dicendum eſt, quæ ſpeciem Aſtrolabii exprimit, circuloſque cœleſtes in quolibet plano adumbrat.

Aſtrolabiorum doctrinam in quinque partes dividimus, cum enim globum cœleſtem aut terreſtrem, in planum projiciendum, ſeu exhibendum ſuſcipiamus, Prima pars globum cœleſtem, & terreſtrem conſiderabit, eorumque uſus aperiet. Secũda erit de Analemmate in quo ſcilicet pro tabella meridianũ aſſumimus, oculumque infinitè removemus. Tertia Aſtrolabiũ univerſale, in quo ſcilicet idem tabellæ planum, nempe meridiani planũ, & oculus in puncto veri ortûs, aut occaſûs ſtatuitur. Quarta in plano æquatoris, aut alio illi parallelo cœleſtes orbes deſcribit, oculo polum Antarcticum obtinente. Quinta denique ex Nadir, hemiſphærium oppoſitum in plano horizontali tanquam in tabella contemplatur.

Quamvis cœlum ſphæricum ſit, in plano tamen ita graphicè à Gnomonica exprimitur, ut ſol in cœlo moveri non poſſit, quin eundem in pictura noſtra motum animadvertamus. Pro tabella igitur quodlibet planum aſſumitur, & oculus in extremitate ſtyli collocatur, ex quo trans tabellam hemiſphærium oppoſitum contemplatur. Nullius quidem momenti videtur horologiorum delineatio, cum eam cæmentarii etiam noſtri ſatis exactè perficiant; eorum tamen quæ ad horologiorum demonſtrationem requiruntur ſcientia, homine digna ſemper mihi viſa eſt. Horologia ſciaterica varia ſunt, cum nulla ſit materia in qua fœlicius luſerit mathematicorum ingenium. Aſtronomica, Babylonica, Italica deſcribimus, & in iis verticales circulos, Almicantarath circulorum domorum cœleſtium, parallelos ſignorum, augmentum, & decrementum dierum, totumque Kalendarium inſcribimus. Solaria, lunaria, ad ſtellas componimus. In omni plano ea delineamus, æquinoctiali, polari, horizontali, verticali, declinante, quomodolibet inclinato. Per radium directum, reflexum, & refractum. Portarilia item in annulis, cylindris, armillis, ſcipionibus. Gnomonicam in quatuor partiemur, Prima pars de horologiis in quocumque plano per radium directum deſcribendis agit. Secunda portarilium variam ſupellectilem ſubminiſtrat. Tertia exhibet horologia reflexa. Quarta tradit refracta.

Ut autem melius hujus Opticæ progreſſus innoteſcat, eam per ſingulas ætates conſiderabimus, authoreſque qui eam promoverunt referemus.

Secundo Urbis conditæ ſæculo ante Chriſtum ſexcentis annis Anaximander Mileſius horologium ſolare deſcripſit. Plin. & Laertius.

Tertio Urbis ſæculo ineunte, 552 annis ante Chriſtum, Anaxagoras Clazomenius ſcripſit de radiis viſivis, vel ut puto de ratione ſcenographices, ſeu perſpectivæ. Vitruv. l. 7.

Quarto Urbis ſæculo ante Chriſtum 452. Democritus Mileſius uno anno major quam Socrates, ſcripſit Actinographiam ſive de radiis, hoc eſt perſpectivam. Ita Laertius.

Eudoxus Gnidius invenit Arachnen horologium videlicet ſolare, in quo lineæ horariæ, & arcus ſignorum, in modum araneæ ſe interſecant.

Philippus Mendæus diſcipulus Platonis deprehendit Iridem inſequentes ſe fugere, & fugientes ſequi. Philoſophus Platonis auditor ſcripſit de opticis.

Quinto Urbis ſæculo 300 ante Chriſtum annis, Euclides Megarenſis Geometra, opticam, & catoptricam ſcripſit, quam Joannes Pena Mathematicus Regius latinè vertit è Græco anno 1604.

In optica continentur tantum generalia quædam placita de radio directo, quæ poſſunt eſſe uſui ad perſpectivam. Sed hæc optica valdè imperfecta eſt.

In catoptrica continentur tantum quædam proprietates ſpeculorum planorum, concavorum ſphæricorum, & convexorum: valde item imperfecta eſt hæc captotrica. Pariſiis 1604.

Lucius Papyrius Curſor Romæ primum ſolare horologium, publico loco conſtruxit.

Ariſtoteles habet nonnulla de Iride, & Halone. Extabat alias liber Ariſtotelis de optica; ejus meminit Laertius. Opticam Ariſtotelis viderat Vincentius Bellovacenſis. Dicitur ibi Ariſtotelem exiſtimaſſe pyramidem opticam eſſe exagonam, non conicam.

Ariſtarchus Samius Scapheri, ſeu horologium ſolare in hemiſphærio deſcripſit.

Sexto Urbis ſæculo, 200 ante Chriſtum annis, Archimedes Syracuſius dicitur ſpeculis concavis claſſem Romanorum incendiſſe, quod falſum eſſe plerique modo exiſtimant.

Septimo Urbis ſæculo Apollonius Pergæus, inſignis Geometra, pharetram ſolaris horologii genus invenit. Ita Vitruvius.

Octavo Urbis ſæculo ineunte, 50 ante Chriſtum annis, Theodoſius Tripolita cujus ſunt ſphærica, Horologium ad omne clima id eſt univerſale excogitavit. Vitr.

Dionyſiodorus invenit conum, id eſt horologii ſolaris genus figuram conicam referens, vel deſcriptum in cono.

Scopas Syracuſanus invenit Plinthum, nempe genus horologii in plintho, ſeu cubo deſcripti, nempe in ſummo erat horizontale, in aliis faciebus verticalia.

Patrocles invenit bipennem, genus horologii figuram bipennis referens.

Parmenion invenit horologium quod cœli hiſtoriam indicaret, nempe horas, dies, menſes, ſigna Zodiaci &c.

Vitruvius Architectus aliqua ſcripſit de horologiis ſolaribus ex analemmate.

Secundo Chriſti ſæculo, Ptolemæus Aſtronomorum facilè princeps in ſua Aſtronomia ſcripſit de analemmate,& de Planiſphærio. Hoc Ptolemæi planiſphærium tranſlatum eſt in latinam linguam anno 1588 unà cum Jordani planiſphærio, praxin ejuſdem planiſphærii aliquantiſper clarius explicantis, & Frederici Commandini Urbinatis in Planiſphærium Ptolemæi commentario editum eſt Venetiis.

Planiſphærium Ptolemæi eſt in plano æquinoctiali non ſatis explicatum, nos illud clariſſimum reddidimus.

Videtur item excogitaſſe Aſtrolabium univerſale in plano meridiano, ſeu coluro ſolſtitiorum, quo in mappis Geographicis univerſalibus deſcribendis utitur.

In Commentario Commandini aliqua ſcenographices principia demonſtrantur.

Incertus author vertit ex Græco in Latinum Opuſculum Ptolemæi de ſpeculis in duos libros diviſum. In primo habet aliquas Propoſitiones de ſpeculis planis. In ſecundo de concavis. Totum Opus non excedit duo, aut tria folia. Nihil habet magni momenti. Videtúrque ſupponere lumen eſſe ſubſtantiam quæ motu locali feratur.

Quinto Chriſti ſæculo Proclus Diadochus dicitur Conſtantinopoli Valentis Claſſem ſpeculis uſtoriis combuſſiſſe.

Theon Alexandrinus commentarium edidit in parvum Aſtrolabium.

Sexto Chriſti ſæculo Heliodorus Lariſſæus libros duos ſcripſit qui ſunt editi anno 1657 ab Eraſmo Bartolino Gaſp. filio.

Primus liber ſuppoſitiones tantum habet quarum aliquæ prout jacent videntur falſæ. In 2 habet Theoremata circà rerum apparentias, quæ melius demonſtrari poterant. Opus tamen antiquitate commendatur.

Additus eſt tractatus Hypſiclis de aſcenſionibus rectis partium Zodiaci quæ omnia ſunt communia, & melius à Theodoſio explicantur, & demonſtrantur. Pariſiis 1657.

Octavo Chriſti ſæculo Venerabilis Beda ſcripſit de Aſtrolabio, & de horologiis.

Anno Chriſti circiter 1100 floruit Alhazen Scriptor Arabs, qui de optica volumen ſatis magnum reliquit, nec in libros, nec in Propoſitiones diviſum, ſed indigeſtum, & informe quod Fridericus Riſnerius diſtinxit in libros, capita, & propoſitiones, demonſtrationeſque in multis obſcuriſſimas, & mancas ſuplevit. 7 libros habet hæc Alhazeni optica. In primo conſiderat colorum, & luminis actionem in oculum, oculi item figuram, & compoſitionem, viſionem item, & quæ ad eam ſunt neceſſaria.

2 Explicat pyramidem viſualem, item quomodo videatur color, lumen, diſtantia, locus, magnitudo, cæteræque viſibilium circumſtantiæ, aſpectum item ab obtutu diſtinguit.

Tertius circa deceptiones viſùs, earumque cauſas verſatur.

Quartus eſt catoptricus, de reflexione, tam in genere, quàm in ſpecie, in plano ſpeculo, in ſphærico convexo, & concavo.

Quintus eſt de loco imaginis objectorum in quacumque reflexione.

Sextus errores ex reflexione ortos detegit, nempe ex ſpeculis planis, concavis, & convexis ſphæricis, cylindricis, & conicis.

Septimus Refractiones, deceptioneſque ex iis emanantes aperit.

Acceſſit ejuſdem tractatus de crepuſculis, & illuminatione terræ, in quo altitudinem Athmoſphæræ aliquo modo determinat.

Opus iſtud obſcuriſſimum, demonſtrationes habet ita prolixas, & procedentes per circuitum alienum à materia, ut plerumque facilius ſit alias demonſtrationes cudere, quam ab hoc authore allatas intelligere. Quare cum jam ultra hujus operis fines progreſſa ſit optica, totus hic tractatus redditur inutilis, & in eo legendo tempus & opera perditur. In folio.

Anno 1250 floruit Vitello Polonus ex matre Turinga, ſcripſitque ſuum de optica librum in Italia, ſuaſore Guillelmo de Morbeta ſummi pontificis pœnitentiario. Multa videtur ſumpſiſſe ex Alazeno, quem tamen ipſe non citat, licet fateatur libros Arabicos ſuper ea materia legiſſe, & pertæſum eſſe, verboſitatem Arabicam, & implicationem Græcam,Latinos autem paucos ſuper ea materia reperiſſe aſſerat. Suam autem opticam in 10 libros partitur.

Primus continet axiomata,& nonnulla geometrica ab Euclidæis diſtincta.

Secundus propagationem luminis directam, præſertim illuminationem corporum ſphæricorum denique propagationem luminis refractam.

Tertius organum viſus, & viſionem explicat.

Quartus deceptiones quæ viſioni accidunt ex radio directo.

Quintus Catoptricus eſt, conſiderátque reflexiones in ſpeculis planis, ſphæricis, convexis, & concavis, cylindricis, & conicis convexis.

Sextus intuetur ea quæ viſui accidunt ex reflexione facta in ſphæricis convexis.

Septimus ea quæ ex conicis,& cylindricis convexis.

Octavus quæ ex ſpeculis concavis ſphæricis in ordine ad viſionem oriuntur.

Nonus de cylindricis, & conicis convexis,item de irregularibus, denique de combuſtione.

Decimus Refractiones, & deceptiones ex refractione ortas explicat. Iridis item generationem attingit.

Hoc Opus in pleriſque prolixitate peccat, ita ut cujuſque patientiam vincat. Habet item demonſtrationes malè digeſtas. Inſuper multa in hoc opere deſunt, ad opticam pertinentia. Non benè explicat oculum. Deceptiones ex radio directo procedentes melius, & brevius explicari poterant. De perſpectiva nihil habet. Non benè conſtituit locum imaginis in ſpeculis præcipuè ſphæricis. Dioptricam habet valdè mancam hanc ab invento teleſcopio auctiorem habemus. Dicuntur ab aliquibus inventa perſpicilia circa annum 1300. Dicunt enim Jordanum quemdam concionatorem ex ordine Prædicatorum, qui florebat ab anno 1300 ad 1335 aſſerere in una concione inventa eſſe ante 20 annos. Jordanus tamen qui fuit Magiſter Ordinis, vivebat anno 1220. Hic etiam author non benè explicuit Iridem,denique vix quidquam boni habet, quod in multis recentioribus, meliùs digeſtum & demonſtratum non reperias. In folio.

Nec multò poſt anno 1279 Joannes Peccamus S Bonaventuræ diſcipulus poſtea Archiepiſcopus Cantuarienſis,& Primas Angliæ humili licet loco natus perſpectivam communem edidit. Primus liber eſt de luce ſimplici.Secundus de radio reflexo. Tertius eſt de refracto. Pauca videtur addidiſſe ſupra

pra

Digitized by Google

pra Euclidem Coloniæ Agrippinæ in quarto 1580.

Circa hæc tempora floruit Rogerus Baccon Anglus ex ſancti Franciſci ordine. Primo deſcribit oculum, non tamen ita benè, oſtenditque viſionem fieri in nervo optico, tum de ſpeciebus,& in medio, & in pupilla productis, exinde de viſione directa ejuſque erroribus ab oculo provenientibus. De reflexione item,& refractione, ſed pauca dicit de utraque. Habet item Opuſculum quod vocat ſpeculum mathematicum; in quo agit de utilitate matheſeos. Totum opus potius phyſicam ſpectat quàm matheſin. Pauciſſimas habet demonſtrationes quæ rectè procedant. Francofurti in quarto 1614 opera Joannis Combachij Philoſophiæ profeſſoris in Academia Marpurgenſi. Hic Baccon magiæ accuſatus fuit quod eſſet matheſi addictus. Mortuus eſt anno 1284, ſepultúſque Oxonij.

1 Anno 1510 Joannes Stoflerinus Juſtingenſis apud Tubingam, Aſtronomiæ Profeſſor, librum compoſuit de Aſtrolabio in plano ſcilicet tropici Capricorni; oculo poſito in polo antartico; tractatum in duas partes dividit. In prima parte docet fabricam & deſcriptionem aſtrolabij circa ſydera, tum etiam ejuſdem uſum in menſurationibus, qui ultimi uſus non tam ſunt uſus aſtrolabij quam uſus circuli, aut quadrati geometrici in dorſo Aſtrolabij deſcripti.

Totum Opus demonſtrationibus caret, ſolaſque praxes habet & figuras illis appoſitas. Non dicit ſe eſſe inventorem hujus aſtrolabij.

2 Circa annum 1520 Albertus Durerus Pictor Nurembergenſis quatuor inſtitutionum geometricarum libros edidit. In primo methodum tradit deſignandarum aliquarum linearum, ut volutæ, ellypſis, hyperbolæ,& parabolæ, aliarumque. In ſecundo ſuperficies pariter varias exhibet. In tertio & quarto corpora ſolida. Opus non geometricùm ſed practicum, quod poteſt eſſe utile in aliquo pictoribus, & aliis; eſt tamen parvi momenti, nullámque habet demonſtrationem.

3 Anno 1521 prodiit artificialis perſpectiva viatoris, latinè & gallicè ſcripta, in qua præcepta communia ſine demonſtratione afferuntur ſatis appoſitè, qualia in praxi uſurpantur. Opus non contemnendum ſi modo paulò fuſius praxes explicaret. Habet autem figuras optimè diſpoſitas, quamvis non elegantes.

4 1548 Gemmafriſius tractatum edidit de annulo aſtronomico, in quo ſunt multæ praxes & uſus. Poterant plura addi. Antuerpiæ in octavo 1548.

5 1550 Joannes de Roias libros ſex edidit Commentariorum in aſtrolabium quod planiſphærium vocant.

Iſtud autem Aſtrolabium in plano meridiano deſcribitur, & oculus infinitè diſtat. Vocatur autem communiter analemma; tradit autem omnes ejus uſus. Uſus autem partis poſticæ potius ad quadratum geometricum pertinent. Habet item aliquam methodum deſcribendi horologii portatilis.

Tota hæc doctrina poterat breviùs & clariùs tradi. Pariſiis in quarto 1550.

6 1551 Orontius Finæus Delphinas regius mathematicus, Opuſculum compoſuit de ſpeculo uſtorio ignem ad propoſitam diſtantiam producente. In quo & duarum linearum ſemper appropinquantium & nunquam concurrentium demonſtratio colligitur.

Speculum hoc eſt parabolicum. Hæc proprietas paraboles quod omnes radios axi parallelos in focum colligat, facilius & melius demonſtratur, quàm ab hoc authore præſtetur. Falſum item fieri poſſe ſpeculum quod ad quamlibet diſtantiam per reflexionem urat. Pariſus in quarto 1551.

1553 Nicolaus Simus Bononienſis ibidem publicus profeſſor, Theoricas planetarum in compendium redegit. Non deſcendit tamen ad particularia, nempe motus ipſos non conſtituit nec determinat, ſed tantum quaſi univerſaliter proprietates theoricarum explicat. In octavo Baſileæ 1553. 7

1554 Eraſmus Reinoldus Salveldenſis librum edidit tabularum directionum diſcentium prima elementa aſtronomiæ utiliſſimum. Additus eſt canon fœcundus ad ſingula quadrantis minuta, item nova tabula climatum, parallelorum & umbrarum, appendix libri ſecundi canonum directionum qui in Regiomontani opere deſideratur. 8

Ante tabulas ſunt multæ praxes ſpectantes ad doctrinam primi mobilis, quibus adjunctas habet tabulas proprias. Habet item præcepta ad aſtrologiam ſpectantia. Hoc opus benè explicat praxes ad primum mobile ſpectantes; non tamen ſatis exactè demonſtrat. In quarto Tubingæ 1554.

1559 Paſcaſius Hamellius Mathematicus regius perſpectivam edidit tribus libris. In primo agit de propagatione luminis, & de viſu quaſi in genere. 9

In ſecundo agit de reflexione.

In tertio de refractione. Non multa addit ſupra ea quæ tradidit Euclides. Pariſiis in quarto 1556.

1557 Joannes Martinus Problacion egit de uſu aſtrolabii per compendium, illuſtratum figuris. 10

Hanc materiam nimis breviter attigit, & ſine demonſtrationibus, aliquos item uſus geodeticos quadrati geometrici deſcripti attigit: Eſt autem aſtrolabium particulare in plano tropici capricorni deſcriptum. Acceſſit Procli Diadochi fabrica uſuſque aſtrolabii, Georgio Valla Placentino interprete.

Item Gregorii Nicephori aſtrolabus eodem interprete, in quibus pauca ſunt alicujus momenti. Pariſiis in Octavo 1557.

1560 Joannes Stofler Juſtingenſis tractatum edidit de compoſitione & uſu aſtrolabii particularis, deſcripti ſcilicet in plano tropici capricorni oculo in polo antarctico conſtituto. 11

Fabrica hujus aſtrolabij clarè quidem traditur, ſed non demonſtrat, nec principia perſpectivæ cui innititur traduntur, uſus etiam ſatis clarè exhibentur.

Hic tractatus in gallicum verſus eſt Pariſiis in octavo 1560.

1571 Joannes Fleicherus Vratiſlavienſis de iridibus doctrinam Ariſtotelis, & Vitellionis certa methodo comprehenſam explicuit, nonnullis demonſtrationibus. Præmiſſa ſunt optica nonnulla ad horum intelligentiam neceſſaria. 12

Quamvis hic author non ſatisfecerit in omnibus, nec veram ubique habeat demonſtrationem, habet tamen quamplurima optima & ſcitu digna. Ideoque ſuo tempore optimus erat liber. Ulterius tamen in hac materia provecti ſumus. Vvitembergæ in octavo 1571.

Anno 1571 Pater Chriſtophorus Clavius Bambergenſis Societatis Jeſu, gnomonicam edidit ſatis amplam, in octo libros diviſam. In primo demonſtrantur varia quæ pertinent ad analemma, 13

ad conicas ſectiones, horarios circulos, inclinationem & declinationem planorum. Secundo deſcribuntur horologia, horizontale, verticale, polare, æquinoctiale. Tertio horologia in planis declinantibus & inclinatis. Quarto agit de horologiis in ſphæra recta, aut parallela deſcribendis. Explicat item locum, ſtyli magnitudinem, quomodo ad quamcumque ſtyli longitudinem horologium ſit conſtruendum. Quinto tabulas conſtruit ad faciliorem horologiorum deſcriptionem. Sexto Ptolomæi analemmatis uberiorem uſum, aliáque ex Commandini opere deſumpta. Septimo praxes omnes repetit. Octavo proponit horologia portatilia. Opus hoc bonum eſt & ſolidum, tamen eſt difficile intellectu. Habet enim figuras ita intricatas & demonſtrationes ita prolixas, ut cujuſcumque patientiam fatiget, in multis mihi fuit facilius aliam demonſtrationem cudere & comminiſci quàm ab illo allatam intelligere. In hoc præcipuè Opere peccavit, quòd nimis multa coacervet & lectorem obruat, poterant enim pleráque facilius demonſtrari. Immo tota gnomonica poterat unica Propoſitione comprehendi, neque tamen etiamſi in tantam molem excreverit ejus gnomonica, omnia quæ ad hanc materiam pertinent, ut gloriatur, tradidit: cùm de reflexis & refractis aliiſque non paucis nihil habeat. Laudandus nihilominus, quod ferè primus ſit qui gnomicam abſolutam ſuis demonſtrationibus ornatam tradiderit.

14 1574 Joannes Baptiſta Benedictus Patritius Venetus gnomonicam edidit, cujus præcipuæ praxes ab analemmate dependent, quod analemma author ſe inveniſſe aſſerit, antequam analemma Ptolomæi vidiſſet. Multas continet praxes valdè utiles, quæ in analemmate ſuas habent demonſtrationes, non tamen ſatis explicatas, ut qui ea in materia peritus non eſt, poſſit eas invenire, eo quòd non indicentur ſufficienter. Habet tamen multa utilia & propria quibus proficere poſſet qui jam aliunde gnomonicam teneret, & poſſet ipſe demonſtrationes invenire.

Idem author parvum Opuſculum edidit de perſpectiva, in quo non ſatis methodicè procedit, nec totam perſpectivam tradit, ſed tantum errores aliquarum partium detegere ſatagit. Hoc pariter non intelliget qui aliunde perſpectivam neſciverit, quare ex hoc Opuſculo magnum emolumentum habere non poſſumus.

15 1575 D. Franciſcus Maurolicus Meſſanenſis abbas tractatum edidit de lumine, & umbrâ ad perpectivam & radiorum incidentiam pertinentia. Item dioptricæ libros tres. In primo agit de perſpicuis corporibus. In ſecundo de iride. In tertio de organi viſualis ſtructura, & conſpiciliorum figuris. Multa bona habet de radio directo, præcipuè de radii ſolaris figura per foramen tranſmiſſi. Quæ de iride dicit nec ſunt ſatis clara, nec iridis ſatis naturam explicant. Dioptrica item eſt valdè imperfecta. In quarto Venetiis 1575.

16 1576 Jacobus Androuet du Cerceau Architectus Pariſienſis Perſpectivam edidit ſub titulo, *Leçons de perſpective poſitive*, in qua ſolas praxes breviter indicat. Figuræ ſunt bonæ, praxes communes, Demonſtrationes non ſatis indicatæ nec explicatæ. Opus tamen hoc artificibus inutile non eſt.

17 1579 Guidus Ubaldus è Marchionibus montis planiſphæriorum univerſalium Theoricam edidit duobus libris.

In primo agit de planiſphærio univerſali in circulo meridiano deſcripto, oculo punctum veri ortus aut occaſus occupante.

In ſecundo explicat aſtrolabium de Royas ſeu analemma, ſed clariſſimè, eorumque generationem explicat, & varios uſus aperit. Piſauri in quarto 1579.

1581 Michael Coignet Antuerpienſis inſtru- 18
ctionem novam circa navigationem compoſuit, unà cum methodo navigandi eſt oueſt hactenus incognita.

In hoc opere ſunt omnia, communicatio, navigatio eſt oueſt ſupponit horologium arenarium exactiſſimum 24 horarum ex quo facile longitudo haberetur. Antuerpiæ in quarto 1581.

1590 Joannes Paulus Gallucci Salodianus tra- 19
ctatum edidit Italicum de novo Inſtrumento, quatuor modis compoſito ad quodlibet horologium perficiendum, reducitur autem ad æquinoctiale. Caret demonſtrationibus. Venetiis in octavo 1590.

1599 Joannes Vredeman Friſon Perſpectivam 10
edidit ſub titulo hoc, *Perſpective, c'eſt à dire le tres renommé Art du point oculaire.* Figuras habet elegantes, & bene multas, explicationem modicam, demonſtrationem nullam, locutionem Gallicam ferè barbaram. Poſſunt tamen intelligi praxes ex figuris.

1599 Bartholomæus Pitiſcus Grunbergenſis 21
in fine ſuæ Trigonometriæ adjecit decem libros problematum, & inter alia problematum gnomonicorum, in quibus horologia per trigonometriam abſolvit, quod ad magnam præciſionem gnomonicam adducit, licèt praxes ſint difficiliores. Auguſtæ Vindelicorum 1599.

Anno 1600 Guidus Ubaldus è Marchionibus è 22
Monte Perſpectivam edidit in ſex libros diviſam. In primo conſiderat quomodo variæ lineæ in ſectione appareant, quæ conſideratio fundamentalis eſt. In ſecundo data rectilinea figura in plano horizontali ejus in ſectione ſeu tabella apparentiam inveſtigat, ſeu ichnographiam quamcumque perſpectivè delineat viginti modis. In tertio apparentiam priſmatum, baſin in horizonte habentium, in tabella quacumque etiam inclinata, ex pluribus planis conſtante, concava etiam, ſphærica, conica, cylindrica. Quarto agit de corporum variorum rectilineorum apparentiis, exinde de circularibus figuris perſpectivè deſcribendis. Quintus liber agit de umbris; ſextus de ſcenarum apparatu. Doctrina hujus operis ſolida eſt & geometrica, tamen methodus paulo difficilior; ita ut nullus in eo ſolo libro poſſit perſpectivam addiſcere, videtur enim non ſatis ad praxin deſcendiſſe, qui tamen in perſpectiva mediocriter eſſet verſatus poſſet ex eo multùm lucis haurire.

1600 Frater Cherubinus Sandelinus Utinenſis 23
Capucinus librum edidit cui titulus, *Nova inventio horologiorum*, continens inſtrumentum ad omnes horas dignoſcendas, & ad horologia deſcribenda; ejus autem inventio conſiſtit in inſtrumento ſpeciem aſtrolabij præferente; nullas demonſtrationes habet ſed ſolas praxes malè, & inextricabiliter explicatas, figuras enim non indicat; ita ut ſit difficilius figuram reſpondentem invenire, quam aliam praxim æque bonam reperire. Habet tamen multa bona quæ ſi demonſtrata eſſent, & in bonum ordinem digeſta mererentur ut in iis ediſcendis aliquid temporis impenderetur; ſed prout jacent confuſionem tantum pare-

re

re poſſunt. Habet aliquas tabulas ſupputatas ſatis utiles.

24 1602 Joannes Paulus Gallucius Saloenſis tractatum edidit de fabrica & uſu horologii ſolaris, lunaris, ſyderalis in parva quâdam pixide notati, in qua omnia horarum genera ad omnem latitudinem cernuntur, & multa alia tum ad navigationem tum ad Coſmographiam peropportuna. Tractatus in duas partes diſtributus, in quarum prima agit de horologii fabrica & uſu, eſt autem horologium æquinoctiale cujus planum ſecundum omnem loci latitudinem aptari poteſt. In ſecunda parte eodem inſtrumento utitur quaſi organo ad alia horologia perficienda.

Opus vulgare & exigui momenti nunc primum latinè verſum & in lucem editum. Venetiis in quarto 1602.

25 1604 Joannes Kepler Cæſaris mathematicus Aſtronomiæ partem opticam tradidit, potiſſimum de artificioſa obſervatione & æſtimatione diametrorum, deliquiorumque ſolis & lunæ, cum exemplis inſignium eclypſium. Habetur inter alia multa nova tractatus de modo viſionis, & humorum, oculi uſu contra opticos & anatomicos.

Habet item nonnulla nova circa locum imaginis ſeu apparentiæ objectorum viſorum per reflexionem ſpeculorum convexorum; item per refractionem. Tractatus iſte optimus eſt & magno homine dignus; Videtur tamen non ſatis ordinatus, & ab eo tempore multum proveximus tam dioptricam quam catoptricam. Francofurti in quarto 1604.

26 1606 Fridericus Riſnerus Petri Rami in mathematicis adjutor communi ſtudio inchoatos quatuor opticæ libros abſolvit. Primus liber de viſibili dat communia principia propagationis lucis & colorum per lineam rectam, de tranſmiſſione per foramen, de illuminatione globi, à luminoſo ſphærico majori, minori & æquali.

Secundus liber de viſione ſimplici ſeu directa, cujus proprietates & deceptiones explicat.

Tertius eſt de reflexione & refractione.

Quartus eſt de iride.

Hoc Opus pauca dicit multóque ulterius hoc tempore provecta eſt hæc ſcientia. In quarto Caſſellis 1606.

27 1607 Prodiit Odonis Malcotij Bruxellenſis è Societate Jeſu, aſtrolabium æquinoctiale per modum compendii à Leonardo Damerio Leodienſi in lucem editum. Opus bonum, ſi paulò uberius hanc materiam explicuiſſet. Scopus hujus operis eſt idem hemiſphærium in plano æquinoctiali deſcriptum modo pro auſtrali, modo pro boreali ſumatur. Bruxellæ in octavo 1607.

28 1608 Simon Stevinus Principis Auriaci mathematicus Opticam edidit tribus libris comprehenſam. In primo tradit ſciagraphiam, ſeu potius perſpectivam, in qua quamvis bonas demonſtrationes habeat; methodus tamen non eſt ſatis practica.

In ſecundo de catoptrica pauca tantum habet. De tertio, nempe de refractione nihil.

29 1608 Joannes Voellus Valmocelotanus Societatis Jeſu, de horologiis libros tres edidit.

In primo horologia communiora tradit.

In ſecundo uſum quadrantis in horologiis conſtruendis explicat,

In tertio præcipuè agit de horologiis univerſalibus. Opus quidem ſatis clarum, non tamen ſatis demonſtratum, in pleriſque enim demonſtrationibus caret. Turnoni in quarto 1608.

1611 Ambroſius Rhodius Kembergenſis mathematum profeſſor in Academia Leucorea Opticam edidit in tres partes diviſam. Prima agit de radio directo ſeu propagatione luminis, ſecunda de reflexo, tertia de refractione. Satis benè habet ea quæ eo tempore communiter tradebantur, ab eo tamen tempore multa didicimus in ſingulis partibus præcipuè circa viſionem directam & refractam. 30

Habet item tractatum de crepuſculis nonnihil obſcurum Vvitebergæ in octavo 1611.

1611 Chriſtophorus Clavius Bambergenſis Societatis Jeſu, aſtrolabium ſeu projectionem ſphæræ in planum tribus libris explicat. 31

Primus liber problemata varia ac theoremata geometrica partim ſphærica, partim ex conicis deſumpta, neceſſaria ad demonſtrationes aſtrolabiorum quæ ſunt quaſi lemmata.

In ſecundo modum deſcribendi aſtrolabii, in eóque omnes circulos inſcribendi tradit.

In tertio varios uſus aſtrolabii aperit; addidit autem de ſuo uſus trigonometricos non paucos. In hoc opere aſtrolabii unicam tantum ſpeciem explicat; nempe cujus tabellæ eſt planum æquatori parallelum; & oculus in polo antarctico. Nempe eſt Ptolomæi aſtrolabium cui aliquid addidit Jordanus & Maurolycus.

Quare defectuoſus eſt hic tractatus, quod unicam tantum ſpeciem aſtrolabii attingat, reliquas ſpecies intactas relinquat ſecundo nimius eſt in ſuis lemmatibus; cum tota hæc doctrina paucis admodum propoſitionibus & clariùs & univerſaliùs comprehendi potuiſſet. Hoc enim Opus tantum eſt ut menſes integros requirat, cum tamen hæc materia ſit facillima ſi bene explicetur. Sed eſt hujus authoris vitium ut materias coacervet, ſtudeat prolixitati. Multa tamen bona ex eo mutuati ſumus.

1611 Adrianus Romanus mathematum profeſſor Herbipoli Pyrotechniam edidit, hoc eſt de ignibus feſtivis, jocoſis artificialibus, & feriis, ex ſcriptoribus latinis, Italis, & germanis collectis. 32

In hoc libro ſola praxis habetur. Herbipoli in quarto 1611.

1611 Marcus Antonius de dominis tractatum edidit de radiis viſus & lucis, in vitris perſpectivis, & iride, duo nempe habet in hoc tractatu, nempe de teleſcopio quod non ita benè explicat. Item de iride de quo multa optima habet quæ ejus generationem explicant. Venetiis in octavo 1611. 33

1611 Joannes Keplerus Imperatoris Mathematicus Dioptricen edidit, ſeu demonſtrationem eorum quæ viſui & viſibilibus propter conſpicilla non ita pridem inventa accidunt. Præmiſſæ epiſtolæ Galilæi de iis quæ poſt editionem Nuncij ſyderei ope perſpicilli nova & admiranda in cœlo ſunt deprehenſa. 34

Item Examen præfationis Joannis Penæ Galli in optica Euclidis. In eâ enim præfatione multa dicit reprehenſibilia, nam & viſionem fieri per emiſſionem radiorum ex oculo aſſerit, & negat refractionem in ſyderibus aliáque multa habet reprehenſione digna.

Quod verò ad dioptricen Kepleri pertinet, hæc valde eſt imperfecta, demonſtratque unam aut alteram proprietatem ſpecilli concavi, & convexi; ſed non demonſtrat tubum opticum, & alia multa quæ ab eo tempore inventa ſunt. Auguſtæ Vindilicorum in quarto 1611.

Pater Chriſtophorus Clavius Bambergenſis 35

Societatis Jeſu, in Operum mathematicorum tomo quarto Gnomonicam edidit libris octo comprehenſam.

Primo tradit analemma, aliaque pertinentia ad conicas ſectiones, planorum interſectiones, declinationes & inclinationes.

In ſecundo horizontalia, verticalia, meridiana, polaria, & æquinoctialia deſcribit.

Tertio declinantia & inclinata. In quarto de horologiis in ſphæra recta, & obliquiſſima, item de magnitudine ſtyli. Quintus componit tabulas ad horologiorum compoſitionem utiles. Sextus Ptolomæi analemma ad uſus univerſaliores accommodat. Item Opus Commandini de horologiorum deſcriptione. Septimus praxes ſecundi & tertii libri. Octavus de horologiis univerſalibus.

Habet item deſcriptionem novam horologiorum & compendium breviſſimum deſcribendorum horologiorum adjectis notis. Hoc Opus quamvis ſit ingens non continet omnia quæ ad horologia pertinent; de reflexis enim & refractis nihil dixit. Demonſtrationes habet difficillimas & figuras ita lineis implicatas & onuſtas ut ex iis ſe expedire etiam rebus mathematicis aſſueto ſit difficillimum, & ferè impoſſibile. Ita ut ſæpe ſit facilius alias demonſtrationes invenire, quam ita fusè explicatas perſequi.

Habet doctrinam ſolidam & bonam, quæ & meliori methodo & breviori clariùs tradi poterat.

36 1612 Michael Joannes Couſin Pictor & geometra tractatum edidit gallicum cum titulo, *Livre de pertraiture.* In quo humanum corpus priſmatibus quaſi concludit & ad regulas communes perſpectivæ quantum poteſt revocat. Opus pictoribus ſummè utile. In praxi tamen nimis longum. Pariſiis in quarto 1612.

37 Anno 1613 prodiere Patris Franciſci Aquilonij Belgæ è Societate Jeſu, Opticorum libri ſex. Primus quaſi fundamentalis agit de oculi ſtructura & partibus, de objecto, & natura viſus.

Secundus optici radij & horopteris proprietates explanat.

Tertius eſt de perceptione à viſu facta communium objectorum, nempe magnitudinis, diſtantiæ, figuræ, ſitus loci, continuitatis, diſcretionis, numeri, motus & quietis.

Quartus oculorum deceptiones quæ præcipuè circa omnia objecta accidunt, explicat.

Quintus luminis propagationem, luminum occurſum, & concurſum, luminis illapſum, & trajectum, & umbras intuetur.

Sextus ſphæræ in planum projectiones ſeu aſtrolabia exhibet, ſcenographicen, item breviter attingit, & corporum umbras, catoptricen, item & dioptricen meditabatur, quam abſolvere non potuit.

Opus bonum & ſolidum, habet tamen aliquas repetitiones tædioſas. Cum enim ſeparatim communia perſequitur & deceptiones viſus circa illa ortas, ea ut diſtincta explicat quæ ſimul una eademque opera explicari debuerant. Fuiſſet igitur perfectiùs volumen iſtud ſi ad dimidiam partem, ut poterat, contractum eſſet. In ſexto libro ubi agit de aſtrolabiis, item de horologiis ſolaribus nimis multa coacervat, nec in bonum ordinem digerit, debuerat enim aſtrolabiorum ſpecies & ſingulorum uſus ſeparatim explicare, quæ de horologiis dicit, ſunt nimis breviter indicata, ſicut & ſcenographicen ſeu perſpectivam nimis breviter perſtrinxit.

1614 Ludovicus Meigret Lugdunenſis quatuor libros Alberti Dureri Pictoris & geometræ de proportionibus corporis humani gallicè fecit. Voluit autem Duretus ſingulas corporis humani partes ita intra parallelepipeda includere, ut qui hæc perſpectivè ſciret delineare, & in omnem partem detorquere, poſſet idem præſtare circa corpus humanum. 38

Hæc tamen methodus eſt nimis longa & tædij plena quare tantam ex ea utilitatem non percipient pictores quantam author pollicetur.

1614 Samuel Marolois Perſpectivam Gallicè edidit. 39

1616 Clemens Timplerus Steinfurti Philoſophiæ profeſſor, Opticæ Syſtema methodicum per theoremata & problemata concinnatum duobus libris comprehendit. 40

Hic tractatus eſt potius philoſophicus quàm mathematicus, habet item tractatum de Phyſiognomia, qui etiam philoſophicus eſt. Hanoviæ in octavo 1616.

1618 Hyeronimus Sirturus Mediolanenſis teleſcopium edidit ſeu artem perficiendi novum illud Galilæi viſorium inſtrumentum in tres partes diviſam. 41

Prima exactiſſimam artem perſpicillorũ tradit.

Secunda teleſcopii Galilæi abſolutam conſtructionem & artem apertè docet.

Tertia alterius teleſcopii faciliorem uſum & admirandi adinventi arcanum patefacit.

In hoc opere nulla eſt demonſtratio, potiuſque praxim, & artem docet, quàm theoriam, tantumque loquitur de tubo optico convexo cavo. Francofurti in quarto 1618.

1618 Prodiit ſyntagma in quo exhibentur varia diagrammata corporum ex præſcripto opticæ. Opus præcipuè utile pictoribus, ſtatuariis, ſculptoribus, architectis. 42

In hoc opere non traditur praxis qua hujuſmodi corpora perſpectivè delineentur, ſed ipſa corpora tantum exhibentur, ſunt autem ut plurimum corpora ſolida compoſita. Videntur nonnulla eſſe deſumpta ex Maroloiſio. Amſterodami in quarto 1618.

1619 P. Chriſtophorus Scheiner edidit Opus quod vocavit *Oculum*, hoc eſt, Fundamentum opticum, in quo ex accurata oculi anatome & abſtruſarum experientiarum ſedula perveſtigatione, radius viſualis eruitur, anguli viſorij ingenium aperitur. 43

Hoc opus benè quidem explicat in qua parte fiat viſio, multa tamen fuſiſſimè quæ meliùs breviùs dici poterant. Non ſatis explicuit, an imago objecti in oculo ſitum inverſum obtineret, nec officia omnia humorum. Opus tamen bonum eſt, cum primus hanc materiam extricare ſit aggreſſus, ab eo tamen adhuc magis extricata eſt. Oeniponti in quarto 1619.

Anno 1622 Inſtitutionem artis perſpectivæ edidit Henricus Hondius Gallicè. Solas praxes communes complectitur hoc Opus ſine ulla demonſtratione; figuras habet benè delineatas. 44

1623 Sebaſtianus de Caux Gallicè Opuſculum edidit de horologiis ſolaribus, ſolas praxes continens fundatas in analemmate & malè explicatas; ita ut in hoc libro ſit difficile eas addiſcere. Modus explicandi ſapit artificem mechanicum potius quam virum doctum. Præmiſit aliqua de proportionibus quæ applicat diverſis materiis, ut geodeſiæ, ſtaticæ, perſpectivæ, muſicæ. 45

1625

1625 Jacobus Jaquinotius librum gallicum edidit de fabrica & uſu utriuſque aſtrolabij; nempe particularis in plano æquatoris deſcripti, & univerſalis in plano meridiano. Inſuper adjecit tractatum de uſu quadrati aſtronomici in geodeſia.

Habet quidem fabricam & uſus præcipuos horum inſtrumentorum ſatis bene explicatos, non bene tradit theoriam & ſcientiam horum aſtrolabiorum. Pariſiis in octavo 1625.

47 1626 Joannes Fernelius Ambianus monaleſphærium ſive aſtrolabium partibus conſtans quatuor edidit.

Prima ſtructuram ejus & uſum explicat.

Secunda feſtorum mobilium; criticorúmque dierum rationes complectitur.

Tertia quaſcumque ex motu primi mobilis deſumptas utilitates elargitur.

Quarta geometricam praxin exhibet nempè ad geodeſiam; eſt autem aſtrolabium in plano tropici capricorni deſcriptum, cui adjungit aliquas rotulas ad uſus peculiares. Non ſatis explicat compoſitionem aſtrolabii, multos etiam uſus nimis breviter indicat.

48 1628 Joannes Antonius Maginus Mathematicus in ſtudio Bononienſi, Opuſculum edidit cum hoc titulo, *Breve inſtruttione ſopra l'apparenze & mirabili effetti dello ſpecchio concavo*, ſeu de apparentiis ſpeculi concavi. Sunt in hoc opere multa bona, non tamen exactè demonſtrata, ſed pleráque indicata tantum, plurima item prætermiſit quæ demonſtrata ſunt ab aliis. Bononiæ in quarto 1628.

49 1631 Chriſtophorus Scheiner Germano-ſuevus è Societate Jeſu, Pantographicen ſeu artem delineandi res quaſlibet per parallelogrammum lineare ſeu cavum invenit. Duobus libris explicuit, & demonſtravit; Prior Epipedographicen ſive planorum deſcriptionem, poſterior ſtereographicen ſeu ſolidorum aſpectabilium projectionem edocet. Opus benè demonſtratum utile maximè pictoribus. In quarto Romæ 1631.

50 1635 Mathurin Jouſſe Flexienſis Perſpectivam poſitivam viatoris Latinè & Gallicè edidit, ornatam figuris & praxibus variis. Opus valde imperfectum, quod tamen nonnullas praxes bonas, ſed vulgares habet. Flexiæ in octavo 1635.

51 Anno 1635 Joannes Franciſcus Sil Belga latinè vertit Philippi Lansbergii quadrantem aſtronomicum geometricum, nec non ejuſdem introductionem in aſtrolabium, quæ omnia militiæ præfectis, machinarum præfectis, mercatoribus, geodætis, nautis & mathematicis valdè utilia prædicat. Uſus tamen quadrantis aſtronomici habetur multis in locis, præſertim in Gnomonica Clavii, quæ de aſtolabio dicuntur. Habentur pene omnia in Stoflerino ante annos 120 typis mandata.

52 1635 Pater Athanaſius Kirker Buchovius è Societate Jeſu, primitias Gnomonicæ Catoptricæ, hoc eſt horologiographiam novam ſpecularem edidit. In qua demonſtrationem habet horologiorum reflexorum, nempe methodum deſcribendorum quorumlibet circulorum in planis, quantumlibet irregularibus, qui radio reflexo judicentur; duobus libris.

Primo theoricen habet, ſecundo praxin.

Doctrinam optimam continet hoc Opus, non tamen ſatis accuratè demonſtratam. Avenione in quarto 1635.

53 1640 Jacobus Hume Scotus Matheſeos profeſſor methodum univerſalem edidit ad deſcribenda horologia ſciaterica, cum novis demonſtrationibus; demonſtrationes habet & praxes difficiles nimis, & obſcurè explicatas, licet habeat doctrinam bonam. Agit autem tantùm de horologiis regularibus. Poſſunt ex eo opere deduci multæ praxes univerſales. Pariſiis in octavo 1640.

54 1640 Natalis Durret Coſmographus Regius in ſecunda parte Ephemeridum habet Gnomonicam, in qua omnia horologia ſciaterica revocat ad horizontalia, & trigonometriam; inquirit elevationem poli ſupra planum tale; aliaſque circumſtantias; multa habet bona; methodus autem eſt difficilior. Pariſiis in quarto 1640.

55 1640 P.Petrus Georges Canonicus Regularis Congregationis Sancti Salvatoris, horologium magneticum ellipticum demonſtravit. Nempe commune illud in quo unicus invenitur circulus mobilis, qui nempe vel centro admovetur, vel ab eo removetur: quod quidem eſt ex ſe univerſale non eſt, ſed tantum ad determinatam latitudinem componitur, dat tamen aliquas praxes quibus aliquo modo univerſale evadat.

Opus bonum, utile, & ingenioſum, & in pleriſque partibus demonſtratum, licet in aliquibus partibus videatur non eſſe demonſtratio omnino accurata. Toul in octavo 1640.

56 1642 Dubreüil Pariſienſis Societatis Jeſu, Perſpectivam practicam Gallicè edidit optimis & elegantibus figuris ornatam. In qua dantur optimè praxes communes, ultra quas non excurrit, nec ullas demonſtrationes affert.

Opus hoc utiliſſimum eſt pictoribus, ſculptoribus, architectis, praxes enim faciles habet.

In hujus Operis prima parte agit de plano horizontali, nempe omnes ichnographias perſpectivè delineat, procedit exinde ad elevationes, tum ad puncta accidentalia, denique ad umbras quorum omnium habet exempla optimè delineata.

In ſecunda parte docet modum inclinandi corpora quælibet, item corpora regularia perſpectivè exhibet.

In tertia dat methodos exercendi perſpectivam in planis horizontalibus, in fornicibus; imagines item deformes reformat; per lentem polyedram, imagines ſeparatas adunat, & de reflexionibus item ſpeculi praxes exhibet. Pariſiis tribus tomis in quarto 1642.

57 Anno 1644 Renatus Des Cartes Dioptricam edidit, in qua diſſerit, Primò de lumine, Secundò de refractione, Tertiò de oculo, Quartò de ſenſibus in genere, Quintò de imaginibus quæ formantur in fundo oculi, Sextò de viſione, Septimò de modis viſum perficiendi, de variis ſpecillis, de modo poliendi vitra. Hæc dioptrica optima eſt; ea tamen quæ habet de methodo poliendi vitra, oſtendunt ipſum numquam vitra elaboraſſe; in praxi enim ſuccedere non poſſunt.

58 1643 Prodiit D.Aleaume Architecti militaris Regii Perſpectiva ſpeculativa practica. Opus poſthumum gallicum; in lucem editum à Stephano Migon Matheſeon profeſſore.

Theoriam perſpectivam benè demonſtrat paucis propoſitionibus, praxin item habet benè deductam, ſed quæ ultra ichnographias perſpectivè delineandas non extendatur, ideóque imperfectum cenſendum eſt iſtud Opus. Pariſiis in quarto 1643.

59 1644 P.Merſennus è Minimorum ordine libros

ſeptem opticorum edidit, ſolos propoſitionum titulos complectentes ſine ulla explicatione,aut demonſtratione. Sub hoc optices nomine comprehendit perſpectivam, catoptricam, & diopticam. Habet in fine aliquam refractionum demonſtrationem.

60 1644 P.Petrus Bobinet Societatis Jeſu, Horographiam curioſam Gallicam compoſuit continentem varias methodos antiquas, & novas, ad delineanda facile quælibet horologia.

Prima parte ſuppoſitiones ad horographiam proponit.

Secunda parte tradit methodos varias, Prima peragitur ſemicirculo, Secunda quadrato, Tertia regula aſtronomica, Quarta eadem circini apertura, Quinta globo terreſtri aut cœleſti, Sexta per umbram alterius horologii jam perfecti.

Hæ praxes ſunt bonæ & faciles, deſunt tamen demonſtrationes quibus ſtabiliantur, qui enim has praxes teneret, non tamen propterea Gnomonicam ſcire dicendus eſſet.Flexiæ in octavo 1644.

61 1645 P. Athanaſius Kirker Fuldenſis è Societate Jeſu, librum edidit ſub titulo, (Ars magna lucis & umbræ) in decem libros digeſtum.

In primo agit de natura lucis.

In ſecundo de radiationibus lucis ſeu perſpectiva.

Tertio de apparatu ad Gnomonicam curioſam, nempe de circulorum cœleſtium officiis, de planorum varietate, de ſectionibus gnomonicis, ſeu conicis, earumque deſcriptionibus, de invenienda linea meridiana, altitudine poli, aliiſque ex tribus umbris, de analemmate, ex quo eruit tabulas gnomonicas.

Quarto horologia directa deſcribit.

Quinto totam primi Mobilis doctrinam Gnomonicè exhibet, domos cœleſtes, arcus ſignorum, ortus ſtellarum, quantitatem dierum, crepuſculorum.

Sexto horologia portatilia & univerſalia fabricatur.

Septimo horologia reflexa tradit, videtúrque eſſe primus ſcriptus in Gallia circa annum 1630.

Octavo horologia refracta exhibet.

Nono geometriam ſeu geodeſiam per umbram & reflexionem exercet.

Decimo horologia prodigioſa & magnetica extruit. Explicat item multa de ſpeculis parabolicis, & lentibus.

In toto hoc Opere demonſtrationibus non inſiſtit, quamvis enim nonnullas breviter indicet, multa tamen ſine demonſtratione profert, potiuſque in praxibus novis inveniendis, quæ ornatum aliquem habeant, quam in demonſtrando immoratur, multa item ad alios tractatus pertinentia continet hic tractatus, qui melior foret ſi eſſet expurgatior, & brevior.

62 1646 P.Petrus Sanctæ Mariæ Magdalenæ Abbavillenſis Congregationis Fullienſis tractatum horologiographicum compoſuit, in quo continentur plures methodi conſtruendorum horologiorum in qualibet ſuperficie, una cum aliquibus inſtrumentis ad id neceſſariis, & ad cognoſcendas horas de nocte, item horam fluxus & refluxus. In ſuper methodus formandorum corporum regularium in quacumque materia.

Item horologia in ſuperficiebus, convexis concavis aliiſque irregularibus.

Opus hoc practicum ſolum eſt, & demonſtrationibus caret. Pariſiis 16. 1646.

Idem 1647 alium tractatum edidit etiam gallicum, quem vocavit Horographiam ingenioſam, in quo nempe gnomonicam ad trigonometriam revocat in prima parte.

In ſecunda præcipuè agit de parallelis ſignorum inſcribendis, item univerſalia nonnulla horologia deſcribit, quæ omnia eſſent optima, ſi demonſtrationes haberent adjunctas. Pariſiis in octavo 1647.

1646 P. Joannes Franciſcus Niceron Pariſinus Ordinis Minimorum Thaumaturgum opticum edidit latinè in tres libros diviſum. 63

In primo tradit methodum univerſalem ad exhibenda perſpectivè objecta.Habet aliquas praxes in quibus punctum diſtantiæ ſemper eſt in ipſa tabella.

In ſecunda habet modum exercendi perſpectivam in plano obliquo, datque uſum inſtrumenti ſcenographici. Non excurrit ultra praxes communes, quas benè explicat, & demonſtrat. Pariſiis in folio 1646.

1648 Dominus Deſargues edidit tractatum gallicum, *Maniere univerſelle, pour pratiquer la perſpective*, ſeu methodus univerſalis exercendæ perſpectivæ per parvas menſuras ſicut in geometrico plano, & cum determinatione eorum objectorum quæ vividioribus coloribus, aut dilutioribus exhiberi debent. Tota autem methodus conſiſtit in eo ut doceat ichnographiam in quadratula diviſam perſpectivè delineandi, in quo notat ichnographiam omnium objectorum exhibendorum. Hæc praxis poteſt ſufficere artificibus, plurimáque præſtare poteſt, non tamen propterea in omnibus caſibus facilior eſt; quare imperfectum cenſendum eſt Opus illud, nec omnia tradere quæ ad perſpectivam pertinent, quæ tamen profert, demonſtrat. 64

Quæ de umbris coloribuſque dilutioribus profert, ſunt bona, & utilia. Pariſiis in octavo 1648.

Anno 1648 Nobibilis de Magnanes Gaultier Perſpectivam edidit Gallicè cum hoc titulo, *Invention nouvelle & bréve, pour reduire en perſpective par le moyen du quarré toutes ſortes de plans & corps, &c.* Opus hoc demonſtrationibus caret, nec ita clarè procedit ut ab omnibus percipi poſſit, quod tamen initio promittit; quod autem ſine punctis diſtantiæ quadratum perſpectivè deſcribit, id multis modis docuerunt alij, & nos etiam poſuimus, quòd verò per ichnographias quæ omnes in quadrato inveniri poſſunt, vel per quadratula determinari, omnia deſcribi poſſint, id etiam habent multi, eſtque ut ita dicam via communis, & trita, quare methodus quam affert difficilior eſt communi, neque eſt in eo bene explicata. 65

Anno 1648 R. P. Emanuel Maignan Toloſanus Ordinis Minimorum edidit Gnomonicam ſub titulo Perſpectivæ horariæ, quam in quatuor libros dividit. 66

In primo ponit hujus perſpectivæ principia, quæ ſunt ſuppoſitiones Gnomonicæ circa plana & eorum ſectiones. Habet nonnullas novas animadverſiones circa refractionem luminis in aëre. In ſecundo tradit & demonſtrat praxes omnes ad declineationem horologiorum quæ per radium directum in planis deſcribuntur. Tertio libro catoptricam horariam tradit, primóque theoriam, ad reflexionis naturam intelligendam neceſſariam proponit, in quo multa ſunt phyſica, deinde ad praxes deſcendit, omniſque generis horologia reflexa

Digitized by Google

reflexa deſcribit ſpeculo plano; vel immobili, vel verſatili. Tum conſiderat reflexiones in ſpeculo cylindrico factas, quibus etiam iridem catoptricam, horas indicantem efformat, in hoc libro multa ſunt nova & jucunda. In quarto ex principiis phyſicis eruuntur refractionum leges & menſura. Tum practicè ita delineat circulos cœleſtes in quacumque ſuperficie, ut radius luminis refractus in aqua vel chriſtallo omnes motus cœleſtes indicet, addidit & modum elaborandorum ſpecillorum ad tubos opticos.

Hoc Opus optimum eſt, & ut plurimum demonſtratum, videtur tamen nimis prolixum, cum poſſet ad pauciores demonſtrationes revocari.

Multa habet circa reflexionis & refractionis naturam ſcitu digna, & in re Gnomonica fere omnia dixiſſe videtur, ſi aliquid de horologiis portatilibus addidiſſet.

67 1650 F. Bonaventura Cavalerius Ordinis Jeſuatorum tractatum opticum edidit, quod vocavit Speculum uſtorium, eſtque de proprietatibus ſectionum conicarum, earumque effectibus circa reflexiones luminis, caloris, frigoris, ſoni & motus.

Supponit autem totam doctrinam conicarum ſectionum Apollonij, quam indicat tantum ſicut demonſtrationes ſuas, ex quo evadit Opus difficile: Accedit quod figuræ in finem operis dilatæ non citentur in propoſitionibus omnibus atque adeo operoſum ſit determinare quæ cuilibet propoſitioni figura conveniat. Bononiæ in quarto 1650.

68 Anno 1651 prodiit Italicè Pariſiis Opus Leonardi da Vinci Nobilis Florentini de pictura, in ordinem redactum ex veteri manuſcripto operâ Raphaëlis Trichet du Freſne, mortuus eſt ſub Franciſco primo Fontenebleau ferè inter manus ipſius Regis, à quo ſeptuagenario major fuerat Pariſios evocatus. Hoc Opus ad Matheſin vix pertinet, cum perſpectivam non contineat, ad eam tamen aliquomodo revocatur.

Huic Operi additum eſt Opuſculum de pictura Leonis Baptiſtæ Alberti Florentini ex illuſtri Albertorum familia, fuit Eugenii Papæ ex fratre nepos. Hic varia alia edidit Opera inter alia de Architectura. Hoc etiam Opus ad Matheſin vix pertinet, dat enim præcepta picturæ valdè univerſalia. Utrumque Opus in gallico legitur.

68 1652 Pater Franciſcus Niceron Pariſienſis Ordinis Minimorum Perſpectivam Gallicè edidit, ſub titulo, *La perſpective curieuſe*, in quatuor libros diviſam.

Primo poſt tradita nonnulla problemata geometrica, præcepta perſpectivæ tradit modo communi, nempe per ichnographias & elevationes, quæ omnia clarè explicat adjectis etiam demonſtrationibus, non tamen ultra praxes communiter uſurpatas eſt progreſſus.

In ſecundo tradit varias imaginum deformationes in quacumque ſuperficie.

In tertio imagines deformes exhibet quæ reflexè viſæ reformentur, nempe in ſpeculo plano cylindrico & conico.

In quarto imagines exhibet diviſas, quæ ſpecillo poliædro coaleſcant.

Hoc Opus habet praxes faciles, non tamen omnia demonſtrat.

69 1652 P. Nicolaus Zuchi Parmenſis, Societatis Jeſu, olim in Collegio Romano Matheſeon profeſſor, Opticam philoſophiam edidit in duas partes diviſam, quarum prima eſt de viſibilibus & viſibilium repræſentativis. Primo agit de perſpicuo terminato, lucido & colorato, de propagatione repræſentativorum, directè, refractè, & reflexè; de legibus earum propagationum, de teleſcopio; de variis colorationibus.

In ſecunda parte agit de naturali oculorum conſtitutione & uſu, de apparentiarum viſus determinatione, de oculorum vitiis, ſpecillorum artificio emendandis & promovendis.

Hoc Opus potius Phyſicum eſt, quàm Mathematicum. Hic author eſt valdè obſcurus, ita ut in multis vix poſſit percipi; affectat item modos loquendi à communi abhorrentes, quod obſcuritatem auget: multa tamen habet optima. Lugduni in quarto 1652.

1653 Scipio Claromontius Philoſophus ac Mathematicus Opuſcula varia edidit. 70

Primo de phaſibus lunæ.

Secundo de horizonte ſenſibili.

Tertio de uſu ſpeculi pro libella.

Quarto, ex inſpectione imaginis per reflexionem ex aqua diametrum terræ inveſtigare.

Quinto de altitudine Caucaſi.

Pleraque ſunt obſcurè explicata, ſuntque in multis aliis authoribus meliùs explicata.

1654 Franciſcus Maurolicus Meſſanenſis Abbas Tractatum opticum compoſuit, in cujus primo libro egit de propagatione luminis directa, præcipue de radio ſolari per foramen tranſmiſſo, quem benè explicuit. Item agit de reflexione in ſpeculis planis, convexis, ſphæricis, & concavis: Compoſuit item diaphanon libros tres. 71

In primo agit de refractione.

In ſecundo de iride, quam tamen non perfectè explicuit.

In tertio agit de oculi ſtructura breviſſimè; adjecit nonnulla problemata ad iridem & perſpectivam ſpectantia. In quarto 1554.

1654 Pater Petrus Du Heaulme Congregationis Oratorii Jeſu, tractatum gallicum edidit; nempe Principium curioſum ad omnis generis horologia perficienda. Intendit autem in hoc Opere inſtrumentum exhibere quo quilibet etiam omnis Matheſeos ignarus poſſit horologia omnia perficere. Inſtrumentum quod profert eſt horologium compoſitum nempe ex duobus horologiis horizontali & azimutali cujus aliquot uſus & praxes profert. 72

Habet multa bona ad praxin ſpectantia, res tamen poterat univerſalius proferri. Quolibet enim horologio jam facto, quodlibet perficere poſſumus. Demonſtrationes nullas habet, quæ præcipui ſunt in hac materia momenti. Pariſiis in octavo 1654.

1655 Petrus Borellus Regis Chriſtianiſſimi Medicus, tractatum edidit de vero teleſcopiorum inventore. Omnibus perpenſis invenit hanc laudem deberi cuidam artifici Mildeburgenſi cujus nomen eſt Hans, ſeu Joannes, & filio ejus Zachariæ circa annum 1591. Microſcopia invenit pater. Circa annum 1610. Prima teleſcopia convexa concava. Alii tamen hoc inventum perfecere. In antiquis nulla eſt conſpiciliorum mentio. Affert autem conſpiciliorum hiſtoriam, ubi de eorum confectione & uſu, ſeu de effectibus. Acceſſit item Centuria obſervationum miroſcopicarum. 73

Hic liber potius hiſtoricus eſt quàm mathematicus. Hagæ-Comitum in quarto 1655.

Digitized by Google

74 1655. P. Petrus Bourdin è Societate Jeſu, perſpectivam militarem clariſſimè & breviter explicuit, nempe methodum delineandarum perſpectivè munitionum ſervata eadem ichnographia geometrica. Pariſiis in octavo 1655.

75 Sethus Vvardus Oxonii profeſſor Savilianus compoſuit Aſtronomiam geometricam ubi methodum proponit, qua primariorum planetarum aſtronomia ſive ellyptica ſive circularis geometricè abſolvitur.

Hoc Opus egregiè promovet ellypticam præcipuè hypotheſin, multas enim habet propoſitiones ex quibus facilis redditur calculus in ellypſi; nimis tamen compendioſè hanc materiam tractat; ita ut multa ſubticeat; doctrina tamen optima eſt. Londini in octavo 1656.

76 1657 P. Gaſpar Schottus Regiſcurianus Societatis Jeſu, Magiam univerſalem naturæ & artis edidit, ſive recondita naturalium, & artificialium rerum ſcientia.

Opus quadripartitum prima pars optica eſt in decem libros diviſa.

Primus liber proemialis loquitur de magia in genere.

Secundus deſcribit oculum,& de diffuſione viſibilium agit.

Tertius de imaginum deformatione opticè & catoptricè.

Quartus de prodigioſis repreſentationibus.

Quintus de variis colorationibus inducendis.

Sextus magia catoptrica tam in planis ſpeculis quam concavis & convexis.

Septimus de ſpeculis urentibus.

Octavus de catoptrologica.

Nonus de dioptrica,de iride trigoni,de uſtione.

Decimus de teleſcopiis, de methodo terendi vitra in patinis, de microſcopiis.

In hoc opere potius praxin quàm theoriam quærit. Herbipoli 1657. In quarto.

77 1661 P. Gaſpar Scottus Regiſcurianus in ſuo Curſu mathematico Gnomonicam habet, in qua praxes habet, nimis tamen breviter indicatas, & non demonſtrantur utiles iis qui demonſtrationes negligunt.

Opticam item, catoptricam, dioptricam eodem modo ſine demonſtrationibus.

1665 Prodiit P. Franciſci Mariæ Grimaldi Opus poſthumum, nempe Phyſicomatheſis de lumine, coloribus, & iride, aliiſque annexis libris duobus.

In quorum primo afferuntur nova experimenta & rationes ab eo deductæ pro ſubſtantialitate luminis.

In ſecundo autem diſſolvuntur argumenta in primo adducta, & probabiliter ſuſtineri poſſe docetur ſententia peripatetica de accidentalitate luminis. Quâ occaſione de hactenus incognita luminis diffuſione diſſerit, de reflexionis, refractionis ac diffractionis modo, & cauſis, de viſione, déque ſpeciebus intentionalibus viſibilium & audibilium, ac de ſubſtantiali magnetis effluvio; & ſpeciali argumento impugnantur atomiſtæ.

Primus invenit novum genus propagationis luminis nempe per radium diffractum, qui omnes colores efficeret, multa habet nova & ſcitu digna. In quarto Bononiæ 1665.

78 1667 P. Honoratus Fabri Societatis Jeſu, Synopſin opticam edidit, in qua omnia quæ ad opticam, dioptricam, catoptricam pertinent ſeu ad triplicem radium viſualem directum, refractum & reflexum breviter demonſtrantur.

Doctrina hujus operis optima eſt, nonnihil tamen breviùs explicata, quàm ut qui opticam aliundè neſcit, omnia intelligat. Accedit difficultas ex figuris in finem operis dilatis, quæ meo judicio in rebus difficilioribus non eſt exigui momenti. Lugduni in quarto 1667.

1669 Prodiit optica P. Andreæ Tacquet An- 79
tuerpienſis è Societate Jeſu, in libros tres diſtributa. In primo explicat apparentias rerum ſimplices ſeu directas, nempe quomodo diverſa objecta & corpora oculo variè appareant, phaſes item lunæ.

In ſecundo projectiones ſcenographicas, ſeu perſpectivam tradit, item projectiones monſtroſas.

In tertio projectiones ſphæræ in planum ſeu aſtrolabia explicat primo univerſaliter, ſecundo aſtrolabium in plano æquatori parallelo, & oculo in polo conſtituto. Tertio in plano coluri ſolſtitiorum. Quarto aſtrolabium horizontale indicat. Quinto analemma, uſus item aſtrolabiorum explicat.

Catoptrica item ejus eodem tempore edita eſt tribus pariter libris comprehenſa.

In primo libro profert fundamenta catoptricæ, & proprietates omni reflexioni convenientes.

In ſecundo ſpecula plana conſiderat, reflexioneſque tam ſimplices quàm multiplices in ſpeculis aut parallelis aut quemcumque angulum comprehendentibus.

In tertio ſpeculorum tam convexorum, quam concavorum affectiones tradit, non tantum ſphæricorum ſed etiam parabolicorum cavorum, & hyperbolicorum convexorum.

Totum Opus clarum; videntur multa deeſſe ad perſpectivam ſpectantia, cylindrica ſpecula non attingit nec dioptricam tradidit.

Anno 1671 Pater Cherubinus Aurelianenſis 80
Ordinis Capucinorum Gallicè Dioptricam ocularem edidit in tres partes diviſam, quarum prima agit de viſione primò in communi, ſecundo de viſione directa, tertiò de refracta.

In ſecunda parte agit de tubo optico, ejúſque inventore, tum de proprietatibus ſpecillorum convexorum ſphæricorum ſeparatorum, de conjunctione convexorum, exinde de combinatione concavi, & convexi, de teleſcopiis quadruplici convexo inſtructis, item de microſcopiis, de teleſcopio cui admiſcetur reflexio de binoculo.

In tertia parte quæ praxin præcipuè ſpectat, oſtendit quam proportionem obſervare debeant ſpecilla in tubo optico cum uſibus variis noviſque phænomenis in cœlo ope tubi optici detectis. In uſibus invenitur novus modus delineandi quodlibet objectum ope tubi optici. Ultimo tamdem habetur methodus elaborandorum omnium ſpecillorum.

Illud Opus multa habet nova ad praxin præcipuè ſpectantia, licet autem demonſtrativè ſemper procedat, nonnullas tamen habet demonſtrationes quæ à ſevero geometra non admitterentur.

CAPUT IX.

Progreſſus Aſtronomiæ.

Quatuor tantum in Mathematicis diſciplinis partes agnoſcebant veteres authores, quarum

Digitized by Google

rum duæ puræ eſſent, Geometria ſcilicet, & Arithmetica, duæ mixtæ, & ad materiam peculiarem contractæ Aſtronomia nempe & muſica. Quamvis autem plures alias partes modo diſtinguamus, commodéque aliàs quatuor aſſignemus opticam, geographiam, mechanicam & architecturam; ut tamen Antiquorum veſtigiis quantum fieri poterit inhæreamus, Aſtronomiam tertio loco proponimus, illiuſque naturam & per ſingula ſæcula progreſſum hoc capite conſideramus. Atque ut ab ipſo nomine auſpicemur, Aſtronomiam vocamus quaſi aſtrorum legem, ſeu quod cœleſtium orbium periodos certis nempe legibus definitas calleat, quo nomine eam vocavit Plato. Ariſtoteles vero eandem Aſtrologiam vocat, quod rationem aſtrorum teneat, quæ duæ appellationes primitùs eidem facultati indifferenter ſunt attributæ. Succeſſu vero temporis cum Aſtrologia divinatrix eſſet in Græciam illata, diſtinguere placuit, eamque aſtronomiam vocare quæ circa cœleſtium orbium motus conſtituendos occupatur, quæ vero caſus hominum, & eventa ex ſyderum converſionibus prædicit Aſtrologia diceretur. Nos utramque in hoc capite conſideramus.

Quantum autem cæteris corporibus cœlum ſupereminet, quantum terreſtribus ſydera, & ſplendore & dignitate præſtant, tantum cæteris ſcientiis ſuperior eſt Aſtronomia, quâ nempe mens humana hæc infima, & caduca deſpiciens, ad ſublimes illos tractus aſſurgit, externamque ſaltem manſionis æternæ ſpeciem contemplata ad divina ſenſim aſpirat. Quare mirum non eſt ſi tantum apud omnes nomen adepti ſunt Aſtronomi, ſi divinorum conſiliorum participes, ſi deorum interpretes, ſi viri ingentes numinum lege deprehenſa, rerumque naturæ capaces, & conſcii fuerunt appellati. Si enim in tanta verſamur caligine, ut obvia quæque ea nempe quæ tangimus, & palpamus ignoremus; noſque in dies etiam in minimis, & facilibus graviter errare deprehendimus, quis meritò eum non ſuſpiciat, qui cœleſtium corporum leges, in tanta præſertim à nobis diſtantia deprehenderit, ſyderumque tam variè implexos motus, certis & indubitatis calculis alligarit. Unde mirandum non eſt, ſi cœleſtium cognitio veræ ſapientiæ etiam ab ipſo Salomone tribuatur, qui dum recenſet ea quorum cognitionem ipſi Deus infudit, cœleſtium præcipuè mentionem facit.

Ipſe mihi dedit eorum quæ ſunt cognitionem certam, ut cognoſcam conſtitutionem mundi, & vim elementorum, principium, & finem mediumque temporum; ſolſtitiorum mutationes, & varietates tempeſtatum; anni circuitus, & ſtellarum ſitus.

Hoc ſtudium priſcis præſertim temporibus excoluere magni Reges & principes, ut in hac quaſi ſchola à ſuperis diſcerent quomodo eſſet ſubditis imperandum. Neque vero hanc tantum ſcientiam commendat quod circa ea verſetur, quæ ſplendorem, & mirabilitatem aliquam habeant, ſed quod illius maximi ſint uſus in humana ſocietate, vitáque civili. Motus enim cœleſtis nobis eſt norma temporis, nec ſine dierum, menſium, annorumque notitia, ulla negotiorum diſtributio, ſed fœda in rebus etiam minimis; in recenſendis præſertim hiſtoriis confuſio. Quod ſi duo quaſi reipublicæ cardines ſunt agricultura, & res nautica, dum prima quæ domi naſci poſſunt abundè ſuppeditat, hæc quæ deſunt ab exteris regionibus importat, utrique tamen facem præfert aſtronomia, quæ docet

Quo ſydere terram, vertere conveniat;
Hinc tempeſtates dubio prædicere cœlo
Poſſumus; hinc meſſiſque diem tempuſque ſerendi,
Et quando infidum remis impellere marmor
Conveniat; quando armatas deducere claſſes,
Aut tempeſtivam ſylvis evertere pinum.

Virg. 1. Georg.

Quantum Aſtronomiæ ignoratio detrimenti Athenienſibus attulerit, Niciæ factum ſatis oſtendit, qui Eclypſi territus, educere exercitum, & prælio decernere non eſt auſus, quantùm iiſdem emolumenti attulerit eâdem Aſtronomia Pericles, aut Romanis Sulpitius, aut Chriſtophoro Columbo nemo eſt qui ignoret. Omitto cæteras utilitates, præſertim in Sacris peragendis, cùm vix ſit ulla natio tam barbara, quæ feſtos aliquos dies, recurrentibus certis aſtrorum converſionibus non addixerit; Chriſtiana præſertim relligio, cujus præcipuæ celebritates, ſive mobiles, ſive fixæ, utriuſque ſyderis periodo tam exactè affiguntur, ut exactiſſimum requirant motuum cœleſtium calculum.

Jam ab ipſis Mundi primordiis inchoatam eſſe Aſtronomiam facilè quis in animum inducat ex tam longa Patriarcharum ætate excultam, repetitis ab eodem homine obſervationibus perpolitâ; apud Hebræos primum uſurpatam, ab Hebræis ad Ægyptios, ab Ægyptiis ad Chaldæos, ab his ad Græcos; inde verò ad Romanos tráſmiſſam. Si verò non conjecturis, ſed ſcriptis ipſis notatiſque obſervationibus, & experimentis agendum ſit, Chaldæis haud dubiè hanc laudem debebimus, quos ultra cæteros Aſtronomiæ deditos fuiſſe ferunt, & apud Babylonios ſeptingentorum annorum obſervationes ſyderum coctilibus laterculis inſcriptas aſſerat Plinius. Et Hyparchus obſervationes Eclypſium vetuſtiſſimas Nabonaſſari anno 7. ſeu ante Chriſtum 720 annis obſervatas referat. Exciderunt hæc omnia exceptiſque Eclypſibus nonnullis ab Hipparcho relatis, nihil de Chaldæorum doctrina niſi nomen & famam habuimus.

Apud Græcos verò, qui primi Aſtronomiam excoluere, ab occaſu & ortu ſyderum obſervando, nempe fixarum inceperunt. Neceſſitate ſcilicet eos ad hoc ſtudium impellente, cùm enim eorum annus peſſimè eſſet compoſitus, neque ſolis converſioni reſponderet, ne temerè agriculturam exercerent præcipua ejus opera, ſtellarum ortui, & occaſui fuerunt addicenda. Horum frequens eſt apud Poëtas mentio ut apud Homerum. Hanc gloriam nonnulli tribuunt Palamedi, alij verò Prometheo qui in monte Caucaſo reſidens, & ſydera obſervans, finitimis Aſſyriis Aſtronomiam communicarit. Hinc Æſchylus Poëta Tragicus in Prometheo, ita eum loquentem inducit

Nullum enim ipſis hiemis erat ſignum.
Neque floridi veris, neque frugiferæ
Æſtatis conſtans, ſed temerè quidvis
Faciebant, donec ipſis ortus ego
Aſtrorum oſtenderem, & occaſus captu difficiles.

Multi apud Græcos Aſtronomiam quatenus ortus, & occaſus ſyderum reſpicit excoluerunt, immò ſolebant ſingulis annis, ſyderum ortus, & occaſus ſuis diebus reſpondentes deſcribi, una cum tempeſtatibus anni, præcipuiſque aëris mutationibus. Sed hæc erant quaſi Aſtronomiæ rudimenta, neque enim Plato dignos exiſtimavit Aſtronomi nomine qui has metas non eſſent

tranſgreſſi

Digitized by Google

tranſgreſſi, & ſeptem Planetarum motus ignorarent. De hac præcipuè Aſtronomiæ parte quæ circa errantium periodos definiendas occupatur, controverſia moveri poteſt, cui nationi præcipuè debeatur: In hoc non conſentiunt vetuſtiſſimi authores. Arabibus primò hanc gloriam tribuunt nonnulli, à quibus ad Ægyptios propagata ſit, exinde ad Chaldæos, tum ad Græcos. Alii vero alium ordinem ſequuntur.

Ut tamen quæ ſunt probabiliora ſequamur. Quamvis certiſſimum ſit Genus humanum ex Aſia in Europam, & Africam cæteraſque orbis partes propagatum eſſe, non tamen æque certum eſt eâdem opera hanc ſcientiam fuiſſe propagatam, cùm multo tempore apud Græcos nullum fuerit ejus veſtigiũ,& apud Romanos non niſi tardè admodum pervenerit. Quarè cum vetuſtiſſimæ obſervationes quæ habentur, & extant, fuerint Babylone habitæ, & quæ de aliis nationibus dicuntur, ſint fabuloſa, & incerta; iis facilè ſubſcribimus qui Babyloniis ſive Chaldæis hanc gloriam tribuunt. Inter eos Herodotus in Euterpe, Græcos polum, & gnomonem parteſque diei duodecim à Babyloniis didiciſſe aſſerit, conſentitque Diodorus Siculus. Cicero item in primo de divinatione, ita loquitur; *Principio Aſſyrii, ut ab ultimis auctoritatem repetam, propter planitiem, magnitudinémque regionum quas incolebant, cum cœlum ex omni parte patens, atque apertum intuerentur, trajectiones, motuſque ſtellarum obſervaverunt.* Refert ea quæ de antiquitate hujus ſcientiæ ab eis referrentur. *Contemnamus etiam eos, qui è Caucaſo ſigna cæli ſervantes, numeris, & motibus, ſtellarum curſus proſequuntur: condemnemus inquam hos, aut ſtultitiæ, aut vanitatis, aut imprudentiæ, qui quadringenta ſeptuaginta millia annorum, ut ipſi dicunt monumentis comprehenſa continent.* Quæ licèt fabuloſa ſint, & apertè falſa, hujus tamen ſcientiæ apud Aſſyrios pervetuſtam originem, acceptamque à Prometheo in Caucaſo degente ſatis indicant. Hæc jam ab antiquis temporibus ita invaluit opinio, ut qui Aſtrologiam divinatricem exercerent, Chaldæi dicerentur. Quæ quidem omnia ita inter ſe cohærent, communique conſenſu comprobantur, ut omnem ei opinioni probabilitatem adimat quæ Chaldæos Ægyptiorum eſſe coloniam exiſtimantes, ab iis etiam Aſtronomiam didiciſſe volunt. Reclamant enim ipſæ obſervationes, quæ nullæ in Ægypto niſi centum ante Epocham Alexandri annis notantur, Babylone verò longè ante hæc tempora fuerint.

Quamvis autem in Jobo quem Arabem nonnulli Moyſique coævum exiſtimant, fiat mentio Pleiadum, & arcturi, & Orionis, non propterea concluditur in Arabia hoc ſtudium viguiſſe, ſed tantum eas conſtellationum appellationes pervetuſtas fuiſſe, & tunc ſatis cognitas, quarum ſcilicet ortus, & occaſus obſervarent, non tamen propterea Aſtronomiam, ſeu planetarum motus callerent.

Quæ quidem non impediunt quominus eodem etiam tempore Atlas Mauritaniæ Rex in extremis Africæ finibus Aſtronomiæ deditus fuerit; dicit autem Euſebius in Chronicis, Promethei fratrem Athlantem fuiſſe. Sed quidquid ſit de Athlante, certum eſt quod non ab eo, aut à Mauris in Græciam, ſed à Chaldæis, aut Ægyptiis fuerit invecta.

Quamvis autem à Chaldæis in Græciam advectam fuiſſe Aſtronomiam non dubitem, rudia fuerunt hæc initia, cum ſubinde notentur aliquorum Græcorum inventa, quæ imperfectam valdè, & in ipſis principiis hærentem Aſtronomiam indicabant. Primus enim Pythagoras dicitur apud Græcos Zodiaci obliquitatem inveniſſe, quæ ſi antea ignorabatur, non video quid tandem in Aſtronomia ſciretur, cùm ille ſit primus ferè greſſus qui in ea fieri debet, ut planetarum periodi certis legibus adſtringantur. Geminus quidem Capite primo iſagoges, refert de Pythagoricis, quòd ab iis in tota Aſtronomia ſupponuntur motus ſolis, & lunæ, & quinque planetarum æquales, & circulares contrariique quotidianæ mundi revolutioni. Cum enim primi inveſtigationi talium rerum animum adjecerint,ſuppoſuerunt motus circulares & æquabiles ſolis & lunæ, & aliorum quinque planetarum. Talem enim in divinis non admiſerunt confuſionem, inque æternis rebus, ut quandoque celeriùs, quandoque tardiùs moveantur, aliàs vero ſtent; prout dicunt in quinque planetis eſſe ſtationum puncta.

Paucas tamē à Græcis accepimus obſervationes, quidquid igitur dicatur, & quantumvis eorum inventa ſimus inferiùs ſecundum ordinem temporum notaturi, Aſtronomia non multum promota fuit in Græcia. Toti enim fuere Græci in anno civili excolendo, cycliſque lunæ ſolaribus excogitandis; ita Oenopides, Cleoſtratus, Harpalus tetraëteridem quatuor annorum, & octoëteridem octo annorum, Meton periodum novemdecim annorum, in qua per additionem aliquorum menſium, motus lunæ cum motu ſolari, aut cum anno civili congrueret. De cæteris verò Aſtronomiæ partibus aut parum admodum, aut nihil omnino reliquerunt.

Ægyptum igitur tanquam Aſtronomiæ noſtræ parentem agnoſcimus; Eſto enim Ægyptii eam à Chaldæis acceperint, quia tamen exceptis nonnullis obſervationibus, aliæ omnes Chaldæorum elucubrationes perierunt, Ægyptiis Aſtronomiæ magiſterium tribuendum eſt. Nam ex quo Alexandriæ apertum eſt Gymnaſium, floruerunt in ea urbe Ariſtillus, Timochares, Eratoſthenes, Conon, Hipparchus, Soſigenes, Theon ſenior, Ptolemæus, Paulus Alexandrinus, Theon junior, Hypatia ejus filia, Pappus, Diodorus, Theophylus & Cyrillus. Ita ut ab annis ante Chriſtum trecentis ad annum Chriſti quingenteſimum Aſtromia ſedem fixiſſe Alexandriæ videretur. Ptolomæus inter alios excelluit, egregiúmque illud Opus, magnam ſcilicet conſtructionem compoſuit, in quo quæ in aliis diſperſa erant, in unum corpus methodo ſcientificâ collegit, traditaſque ab anteceſſoribus ab Hipparcho præcipuè ſyderum periodos magna diligentia ad examen revocavit.

Ab Ægyptiis ad Arabas & Saracenos tranſmigravit Aſtronomia, quorum plerique Aſtrologiæ potius divinatrici, quàm Aſtronomiæ dediti fuerunt, multi tamen in ea non impigram navarunt operam. Ex horum autem opinionibus & obſervationibus Alphonſus totam Aſtronomiam redintegrare ſategit & Alphonſinas tabulas concinnare. Quarum brevi tempore animadverſi ſunt errores, ſicut & æquinoctiorum verſus anni principium retroceſſio. Quare actum ſæpius de Kalendario reformando. Ex quo factum eſt ut ſæculo ſuperiori plures in his regionibus Aſtronomiæ vacarent, inter quos primas tulerunt Copernicus, &

Tychobrahe

Digitized by Google

Tychobrahe qui occaſione novæ in Caſſiopeya ſtellæ Aſtronomiam de novo cudere cœpit ; poſt quem multi alii conſequenter hoc ſtudium excoluerunt, & adhuc nunc excolunt ; inter quos hoc ſæculo floruerunt Ricciolius noſter qui Almageſtũ novum, ſeu Bibliothecam integram Aſtronomicam in lucem edidit. Opus ſcilicet ingens, in quo Ptolemæi exemplo quæcumque in aliis ſcitu digna continentur adunavit. Fuerunt & alij celebres hoc ſæculo, ut Gaſſendus ; Bullialdus qui ex Tychonis Brahe, Gaſſendi, & ſuis obſervationibus, tabulas Philolaicas concinnavit. In quo notare potes apud Romanos non multum viguiſſe hoc ſtudium ; ſaltem nihil ab iis circa Aſtronomiam didicimus. Ut ergo omnia quæ toto hoc capite ſum explicaturus quaſi per ſynopſin hic oculis ſubjiciam.

Inceperunt deinceps in Ægypto & Græcia fieri obſervationes. Nam Euctemon & Methon Athenis ſolſtitium obſervarunt Nabonaſſari anno 317, ſeu ante Chriſtum 424 annis. Hic Meton Cyclum novemdecim annorum invenit ut diximus. Ariſtillus paulò poſt ſtellarum declinationes obſervabat, & poſt 100 annos Calippus ſuam periodum annorum 76 conſtantem ſeu quatuor periodis Metonicis adinvenit : & ſic anni magnitudinem correxit.

Succeſſerunt circa annum ante Chriſtum 274. Timocharis qui lunæ ad fixas adplicationes obſervabat, & Ariſtarchus Samius qui ſolſtitium obſervavit, & Pythagoricam de terræ motu opinionem celebrem reddidit anno ante Chriſtum 263 Dioniſius Aſtronomus.

Ut autem meliùs totus Aſtronomiæ progreſſus innoteſcat eam priùs quaſi in ſuas partes dividere neceſſe eſt. Aſtronomia igitur ut jam diximus ſcientia eſt quæ circa ſydera conſideranda quomodocumque occupatur. Hanc in duas ſpecies dividimus ; in Aſtronomiam propriè dictam, quæ nempe μετεωροσκοπικὴ nominatur ; quòd ſublimia, aſtra ſcilicet contempletur, eorumque motus, & converſiones, diſtantiam, magnitudinem definiat. Hanc in plurimas partes dividere poſſumus, nempe in octo. Prima pars doctrinam primi mobilis continet, nempe generalem quandam cœlorum ideam efformat, variaque ſyſtemata proponit, circulorumque omnium diviſionem ; ſyderum declinationes, aſcenſiones rectas, & obliquas, magnitudinem dierum, aliaque ſimilia definit.

Secunda pars de ſolis motu annuo agit, ejuſque irregularitatem certis regulis adſtringit, nempe eccentricitatem, apogæum, perigæum, maximam declinationem, aliaque his affinia determinat.

Tertia pars lunarem motum conſiderat ; qui cum intra menſem peragatur, ſicut ſolaris annum efficit, in eo multum operæ collocarunt Aſtronomi, ut motum lunarem cum ſolis motu annuo conciliarent, unde tot ortæ ſunt periodi in quibus per certos menſes intercalares hoc diſſidium tolleretur. Sic varias intercalationes adhibemus ut feſta paſchalia celebremus, quamvis enim annum civilem purè ſolarem habeamus annum tamen ſacrum luni-ſolarem efficimus. Hujus ſyderis motus tot irregularitatibus ſubjacet, ut à nonnullis contumax ſydus, & legum impatiens nominetur, ideo ſane quod terris viciniùs, meliùs ſe ſe ſpectandum offerat, erroreſque vel minimos detegat. Hujus motus irregularitates omnes certis hypotheſibus ad regularitatem revocat hæc tertia pars.

Quarta pars varia utriuſque ſyderis, ſolis nempe & lunæ accidentia explicat, hoc eſt parallaxin, refractionem, diſtantiam, magnitudinem, diametros apparentes, eclypſes & lunæ phaſes.

Quinta fixarum motum non communem tantum quo ab ortu in occaſum feruntur determinat, ſed peculiarem ; etiam quo ſupra polos Eclypticæ ab occaſu in ortum, lento admodum greſſu moventur. Hic decurſu tantum temporis detectus eſt propter tarditatem.

Sexta tres ſuperiores planetas Saturnum, Jovem & Martem intuetur, eorumque motum tam in longitudinem quàm in latitudinem, regreſſiones, directiones, ſtationes, phaſes item varias certis hypotheſibus & regulis adſtringit.

Septima Venerem & Mercurium conſiderat.

Octava denique de cometis agit.

Hæc Aſtronomiæ pars aliam affinem, & quaſi ſubalternam ſibi vindicat, quam ſub Kalendarii nomine nuncupamus : Hæc ſcilicet totam anni civilis cum ſolis lunæque motibus conjunctionem, & comparationem continet, variarum nationum annos civiles proponit, quæſtiones paſchales ſolvit, cyclum aureum, epactas, cyclum ſolarem, indictiones, dies biſſextiles, cyclorum combinationes, periodum Julianam contemplatur. Kalendaria varia proponit ut Turcarum annum purè lunarem, annum vagum Ægyptiorum, & Perſarum, annum Julianum, annum Gregorianum.

Secunda Aſtronomiæ ſumptæ univerſaliter pars, dicitur communiter Aſtrologia divinatrix ; quæ ex vario ſyderum aſpectu ; in futurorum cognitionem venire contendit. Hæc item authores habuiſſe Chaldæos, & Babylone ſimul cum vera Aſtronomia viguiſſe ita pervulgatum eſt, ut Aſtrologi, & Chaldæi pro iiſdem ſumantur.

Hanc porro diſciplinam à Beroſo, qui in Inſula Coo, hodiè *Lango* diù egit, in Græciam invecta eſt, & à Græcis in Latium, & ad Arabas pervenit ; Quæ etenim vetuſtiores Poëtæ, ad præſignificationes mutationum aëris, & anni tempeſtatum in ſuis verſibus cecinerunt, ea inquam longè abſunt ab arte Chaldaica, cùm tantum varias circa agriculturam operas ſtatis temporibus faciendas eſſe ſignificarent, & certam aëris temperiem, quæ in Græcia præſertim regulariter ut plurimùm ſolet recurrere tantùm indicarent. Hanc divinatricem Aſtrologiam quatenus ex horoſcopo totaque cœli diſpoſitione, eventus hominum liberos prædicit, vanæ curioſitatis partum matheſeoſque opprobrium nominare ſolemus. In quâ ſcilicet ne una quidem demonſtratio, nulla ſcientiæ aut veritatis umbra, ſed hallucinatio perpetua, & ex ſolis planetarum & conſtellationum nominibus ſibi de futuro blandienti, ineptia.

Utriuſque tamen ſcientiæ progreſſum, authoreſque à quibus aut inventa, aut promota fuit per ſingulas ætates in hoc capite refero.

Vetuſtiſſimæ obſervationes quarum extant memoria, ſunt tres Eclypſes obſervatæ Babylone anno Nabonaſſari 27 & 28, nempe 720 annis ante Chriſtum, nempe circa annum 32 urbis Romæ conditæ. Fuerunt tamen aliæ antiquiores habitæ ibidem. Refert enim Porphyrius, quòd cùm Alexander Magnus cœpit Babylonem aſſervabantur in ea urbe obſervationes annorum 1903. Fuit autem Alexander circiter 320 annis ante Chriſtum, cui numero ſi addas 1903, fuerunt illæ obſervationes factæ ante Chriſtum 2223. nempe anteceſſerunt fundationem urbis Romæ annis 1471

 miſſæque

miſſæque ſunt ad Ariſtotelem à Calliſthene. Referuntur aliæ eclypſes obſervatæ Babylone Nabonaſſari anno 367, ſeu ante Chriſtum 380 annis; ſeu circiter trecenteſimo ſeptuageſimo ſecundo Urbis conditæ anno. Ex quibus vides quam rectè Chaldæis inventæ Aſtronomiæ gloria tribuatur.

Thales Mileſius natus anno Urbis conditæ 120, ſeu ante Chriſtum 632. primus omnium ſapientis nomine appellatus, præter Geometriam quam ex Ægypto in Græciam advexit tropicos, & æquinoctialem dicitur deſignaſſe, eclypſes ſolis prædixiſſe, nempe anno Urbis conditæ 170, cum eſſet quinquagemarius primam prædixit teſte Plinio. Dicitur inventor Urſæ minoris, forſitan quod ejus uſum aliquem in navigatione oſtenderit, aut aliquid ſimile circa Urſam minorem præſtiterit. Dicitur ex prænotione aſtrorum, futuram olearum fertilitatem prævidiſſe, & immenſas ex earum coemptione divitias ſibi comparaſſe.

Paulò poſt Anaximander pariter Mileſius Thaletis ſucceſſor obliquitatem Zodiaci obſervavit, Lunam alienâ luce ſplendere docuit, ſphæram conſtruxit.

Cleoſtratus paulò poſt Anaximandrum Zodiacum in 12 ſigna diviſit, vitium tetraëteridis detexit, & pro ea octaëteridem introduxit. Hecateus compoſuit librum de ſitu orbis.

Pythagoras Samius Ægypto, & Perſide perluſtratâ, multa in mathematicis præſtitit. Docuit Luciferum, & Heſperú idem eſſe Veneris Aſtrum. Hunc aſſerunt nonnulli obliquitatem Zodiaci inveniſſe, quam jam ſuprà obſervatam videmus: potuit alia circa hanc obliquitatem notare, nempe omnes planetas, in Zodiaco, circa proprios ejus polos, ab occaſu in ortum proprio motu deferri, & hanc circumvolutionem contrariam eſſe primæ & generali qua ſtellæ omnes ab ortu in occaſum moventur. Hoc enim nonnulli tribuunt Pythagoricis. Hæc item opinio terræ motæ, quam Copernicus è ruderibus ſuſcitavit, Pythagoræ tribuitur, Pythagorici enim, etiam ante Ariſtarchum Samium eam tuebantur.

Anaximenes Mileſius qui floruit tempore Pythagoræ dixit ſydera non ſolum ſupra terram, ſed etiam circa moveri.

Philolaus Crotoniates Philoſophus Pythagoricus dicitur primus dixiſſe terram in orbem moveri; ita Laërtius qui addit nónullos hanc opinionem Hicetæ, aut Nicetæ Siracuſio tribuere. Idem ſenſerunt, Seleucus, Cleanthes Samius, Leucippus, Ecphantus, Heraclides Ponticus, Ariſtarchus Samius.

Tertio Urbis conditæ ſæculo, ante Chriſtum 550 annis floruit Anaxagoras Clazomenius, qui primus dicitur lunæ eclypſin prædixiſſe, & cauſam aperuiſſe. Idem aſſeruit ſolem majorem eſſe Peloponeſo. Pericles item ejus diſcipulus Athenienſium princeps, populum ob eclypſin ſolis trepidantem explicatâ eclypſis naturâ ſedavit.

Quarto Urbis ſæculo, 450 annis ante Chriſtum Democritus Abderita, quem nonnulli Mileſium volunt, Anaxagoræ, & Leucipi diſcipulus, uno anno major natu quàm Socrates, ſcripſit de ſyderibus vagis ſeu planetis, de anno magno, & de polo.

Deinceps inceperunt fieri obſervationes in Græcia, & Ægypto, nam Euctemon & Meton Pauſaniæ filius Athenis ſolſtitium obſervarunt Nabonaſſari anno 317 ſeu 424 annis ante Chriſtum. Hic Meton primus Enneadecaterida ſeu Numerum aureum invenit, & in Græcia inſtituit, qui annus Metonis propterea dictus eſt. Primus tempeſtatum, & mutationum aëris Prognoſtica edidit, & octaëterida correxit. Tetraëteride primùm utebantur Græci, cujus vitium notavit Cleoſtratus, ut diximus, & introduxit octoëteridem, cujus vitium notavit Harpalus, aliamque octaëteridem ſubſtituit. Hanc iterum correxit Meton, & ſuum cyclum novemdecim annorum introduxit. Octaëteridem nonnulli Eudoxio Gnidio Aſtronomo inſigni tribuunt, qui eodem tempore vixit, ſcripſit etiam de conſtellationibus.

Circa hæc tempora Helico Cyſicenus Platonis familiaris, cum regi Dyoniſio ſolis defectum prænunciaſſet, Rex ſummè admiratus ei argenti talentum dono dedit.

Philoſophus Platonis auditor ſcripſit de intervallo ſolis, & lunæ, de eclypſi, de magnitudine ſolis, lunæ, & terræ, de Planetis.

Centum annis poſt Metonem Calippus ſuam periodum 76 annorum ex quatuor ſcilicet Metonicis cyclis concinnavit, & ſic melius anni quantitatem, & lunationum recurſum adeptus eſt.

Quinto Urbis ſæculo ſub medium 300 circiter ante Chriſtum annis Euclides tractatum edidit qui extat dicitúrque phænomena. Agit de ſphæra, & primo mobili, de ortu, & occaſu tam ſyderum, quam punctorum Zodiaci in diverſo horizonte, nempe loquitur de aſcenſionibus obliquis. Continet propoſitiones 19, quarum nonnullæ clarius in Theodoſio demonſtrantur. Hunc pariter tractatum habemus ex traditione Theonis Alexandrini, quem Bartholomæus Zambertus Venetus Latinum fecit. Doctrina hoc libro contenta, utilis eſt, potuit tamen facilius tradi.

Eodem fermè tempore, hoc eſt Olympiade 124. ſeu circiter 280 annis ante Chriſtum Aratus Poëta Solenſis in Grammatica Menecratis diſcipulus, in Philoſophia Timonis, & Menedemi ſcripſit phænomena, ſeu deſcripſit conſtellationes, ex quarum ortu aut occaſu prognoſtica mutationum aëris prædixit.

Græcè & Latinè editus eſt hic liber Baſileæ 1585 in octavo. Hic Aratus ſecutus eſt in omnibus Eudoxium Aſtronomum, & ſua phænomena accommodavit ad Helleſponti, & Lacedæmonis Clima, ubi eum vixiſſe credibile eſt. Fabulas etiam conſtellationum retulit. Hoc Opus ſequentes commentariis illuſtrarunt Ageſianax, Alexandri Ætolus, & Epheſius, Antigonus grammaticus, Apollonii Grammaticus, & Geometra, Ariſtarchi Grammaticus & Samius, Ariſtophanes, Ariſtilli duo, Attalus Ahodius, Bohethius, Callimachus Cyreneus, Calliſtratus Tenedius, Crates, Dydimi duo, Eratoſthenes, Heliodorus Stoicus, Hermippi duo, Hipparchy Bithynus, Numenius Parmenides, Parmeniſcus, Pyrrhus Magneſius, Sminthes Thales, Timotheus Zeno.

Autolycus Præceptor Arceſilai floruit circa Olympiadem 120: extat ejus liber de ſphæra quæ movetur & alter de vario ortu, & occaſu ſyderum. Primus continet 12 propoſitiones quibus proprietates circulorum ſphæræ demonſtrantur. Impreſſus Pariſiis cum commentario Paſchaſii in Arenarium Archimedis in octavo 1585.

Conon Geometra, & Aſtronomus inſignis Ptolemæo Philadelpho gratificaturus Berenices comam in cœlum tranſtulit, libroſque 6 de Aſtrologia compoſuit, qui non extant. De eo ita loquitur Virgilius

In

Digitized by Google

In medio duo ſigna Conon, & quis fuit Alter. Hunc alterum Pontanus exiſtimat eſſe Archimedem, qui ei fere ſynchronus fuit.

Beroſus Chaldæus dicebat Lunam eſſe pilam dimidiâ parte candentem, & dimidiâ parte cæruleam, huic ob divinas prædictiones ſtatuam inauratâ linguâ poſuerunt Athenienſes.

Eodem fere tempore celebris fuit Ariſtarchus Samius, qui Pythagoram, & Philolaum ſecutus terram ſole immoto moveri credidit. Hodiè nihil hujus Ariſtarchi Samii habemus, præterquam de diſtantiis ſolis, & lunæ; cujus tractatum cum Pappi Alexandrini explicationibus, latinè vertit, & commentariis illuſtravit Federicus Commandinus. Piſauri 1572. Solemne item Problema quò ex differentia dichotomiæ apparentis, & quadraturæ veræ diſtantia ſolis à terra eruitur, Ariſtarcho Samio tribuitur, quod problema ope Teleſcopii adhuc ulterius provehimus, invenimuſque immenſam pene ſolis à terra diſtantiam, ita ut ſemidiametros terræ 7000 excedat, reddàtque horizontalem ejus parallaxin unius ſemiminuti. Obſervavit item ſolſtitium. Opus ejus ita procedit Primò oſtendit lunam à ſole lumen accipere. Secundò terram puncti, ac centri habere rationem ad ſphæram lunæ. Cum luna dimidiata apparet, circulum qui limbus eſt illuminationis, vergere ad viſum & per modum lineæ apparere, & tunc deficere à quadrante gradibus tribus, ex quibus colligit diſtantiam ſolis à terra majorem eſſe quam duodeviginturplam diſtantiæ Lunæ à terra.

Hoc tamen problema tubo optico exactiùs perficimus, majoremque ſolis diſtantiam invenimus. Piſauri in quarto 1572.

Ariſtillus circa hæc tempora, obſervabat ſtellarum fixarum motum, nonnullaſque ejus obſervationes refert Ptolemæus in ſua magna conſtructione.

Timocharis item loca ſtellarum obſervavit, primam arietis duobus gradibus à ſectione verna reperit.

Dionyſius Aſtronomus anno Alexandri magni 39 nempe ante Chriſtum 285 ſuum ſolarem Aſtronomicum jam publicaverat, in quo nomina menſium, à ſignis Zodiaci indiderat.

Sexto Urbis ſæculo, ab obitu Alexandri annis 90, nempe ante Chriſtum 234 Erathoſtenes Cyreneus Aſtronomiæ in Ægypto vacabat, reperitque maximam ſolis declinationem grad. 23. min. 51, librum item de Zonis, terræ ambitum dimenſus eſt. Illo ſuadente poſitæ ſunt Alexandriæ Armillæ, & regulæ ad quotidianas obſervationes; fuit bibliothecæ Alexandrinæ præfectus. Reliquit canonem temporum.

Archimedes quoque Siracuſius Solſtitiis notandis, incubuit, non extant ejùs ullæ obſervationes. Dicitur & celebre automaton conſtruxiſſe, ſphæram ſcilicet mobilem vitream, de qua Claudianus compoſuit Epigramma. Jupiter in parvo, &c.

Sulpitius Gallus Conſul primus inter Romanos rationem Eclypſium in vulgus edidit, pridiè quam P. Æmilius Perſen Regem ſuperaret.

Olympiade 154. Nabonaſſari 587. ante Chriſtum annis 160, floruit Hipparchus qui aliis dictus eſt Abrachis, qui in inſula Rhodo obſervavit maximam ſolis declinationem grad. 23. 51. primam arietis ſtellam grad. 4 promotam à ſectione vernâ, novam ſtellam ſuo tempore genitam deprehendit, cujus occaſione ſtellarum omnia loca aſſignavit organis ad id excogitatis. Scripſit de motu lunæ in latitudinem. Item commentarium in Arati phænomena, uſuſque Aſteriſmorum, non ita pridem in lucem editi.

Iſagogen ejus in Arati & Eudoxi phænomena interpretatus eſt Dyoniſius Petavius è Societate Jeſu. In toto hoc opere deſcribuntur conſtellationes earumque ortus, & occaſus cum ortu, & occaſu ſignorum comparantur. Oſtendit autem Aratum omnia ſumpſiſſe ex Eudoxo, & cum illo errare, ſicut & Attalum Grammaticum. Idem Hipparchus luminarium motus, ex collatione propriarum obſervationum cum veteribus exactiores reddidit, & in tabulas retulit.

Paulò poſt Cleomedes Græcè ſcripſit meteora; ſeu de circulis cœleſtibus elegantem admodum tractatum, ſeu de mundo. Item circularis inſpectionis meteororum libros duos, quorum primus agit de mundi quantitate, de cœli orbibus, de globorum cœleſtium converſione, de orbe ſignifero, de torrida, de augmento dierum, de totius terræ habitatione, quod mundus ſit globoſus; quod terra ſit mundi medium. In ſecundo de ſolis quantitate, de lunæ ſtellarumque magnitudine; de lunæ defectu, de vagis ſtellis, Joanne Valla interprete. Græcè, & Latinè Baſileæ 1585. Opus optimum, quamvis ea quæ dicit ſint modo communia.

Octavo Urbis ſæculo ante Chriſtum 50 annis Theodoſius Tripolita præter ſphæricorum libros tres quos in Geometria retulimus, & qui accommodari poſſunt Aſtronomiæ cujus elementa continent; edidit & tractatum de diebus & noctibus, qui ad Geographiam refertur.

Floruit eodem tempore Soſigenes Ægyptius Aſtronomus, cujus operâ Julius Cæſar Kalendarium correxit. Feciſſetque melius niſi Soſigenes ipſe addubitaſſet quibus præcipuè diebus eſſent notanda ſolſtitia.

Circa tempora Ciceronis & Sullæ vixit Geminus patria Rhodius qui ſcripſit elementa Aſtronomiæ quæ extant: hunc citat Proclus, immò Procli ſphæra nihil videtur continere, niſi quædam capita horum elementorum. Hujus authoris Opus Latinum fecit Edo Hildericus.

In hoc opere primò author diſtinguit Zodiacum conſtellationum, & dodecatemoriorum; tum motus ſolis inæqualitatem explicuit per eccentricum. Differit de aſpectibus planetarum, de axe, & polis, & circulis ſphæræ, æquinoctiali, tropicis, polaribus, eclyptica, meridiano, horizonte. Diſtinguit climata per diem longiſſimam. Cur in qualibet die, & nocte 6 ſigna oriantur, & occidant. Agit de menſe, de anno lunari, & ſolari, de annis Ægyptiacis, de octaëteride, cyclo novemdecim annorum, de lunæ illuminationibus, eclypſibus ſolis, & lunæ, de ortu, & occaſu, de habitationibus, & diviſione terræ; de ſignificationibus aſtrorum, in quo oſtendit ea eſſe ſigna, non cauſas mutationum. Agit item de cyclis, habet catalogum ortus ſyderum, cum ſignificationibus, ſeu aëris temperie quæ ſolet accidere per ſingulos dies; item catalogum Aſtronomorum, adjectis locis in quibus mutationes aëris obſervarunt. Vultque ut ſinguli in ſuis regionibus idem præſtent, Ex hoc opere quam plurimi deſumpſerunt.

C. Julius Cæſar Monarcha ſcripſit Metaphraſim in Arati phænomena. Manilius Antiochenus Aſtrologus, & Poëta primus Latinis carminibus Aſtronomica cecinit. Extat ipſius Aſtronomicon il-

illudque

ludque dicavit Auguſto, initio deſcribit conſtellationes, tum ad prognoſtica Aſtrologica gradum facit.

C. Julius Hyginus Auguſti libertus Poëticon Aſtronomicum ſcripſit in quo poſt levem ſphæræ explicationem, ſingulas percurrit conſtellationes; fabulaſque antiquorum recenſet iis convenientes, deſcribit item earum ſtellas. Hoc Opus recognitum, & mendis purgatum impreſſum eſt Salingiaci in quarto 1539. Habet item nonnulla ad horoſcopos ſpectantia. In quarto Auguſtæ Vindelicorum 1668. In hoc nihil addiſces niſi fabulas conſtellationum.

Primo Chriſti ſæculo ante Ptolemæum, 400 annis Menelaus qui & Mileſius obſervationes aliquas fecit quæ à Ptolemæo referuntur, nempe primam Arietis poſt æquinoctium gradibus 6.12. de ſubtenſis, & ſphæricis triangulis ſcripſit. Obſervavit Romæ & Rhodi.

Extremis Neronis temporibus Andromachus Cretenſis floruit, qui primus dicitur edidiſſe Theoricas planetarum, alii Andronicum vocant.

Paulò pòſt Theon qui Mathematicus appellatur, quem Smyrnæum fuiſſe exiſtimat Bullialdus. Alexandriæ obſervavit motus cœlorum, extantque ejus obſervationes à Ptolemæo relatæ.

Sub initium ſecundi ſæculi nempe anno Chriſti 107, Agrippa Mathematicus in Bithynia obſervabat lunæ conjunctionem cum Pleyadibus.

Secundo item Chriſti ſæculo Claudius Ptolemæus Pheludienſis Alexandrinus floruit ſub Adriano, & Antonino, mortuus anno Chriſti 147, natus annos 78. Alexandriæ Ægypti ſuas obſervationes habuit. Scripſit autem Græcè primo. Almageſtum vocavere Arabes, ſeu magnam conſtructionem, quam Georgius Trapezuntinus in latinum tranſtulit, & Lucas Gauricus Neapolitanus matheſeos profeſſor recognovit, & Typis mandari curavit anno Chriſti 1528.

Hoc Opus in libros 13 dividit Ptolemæus.

In primo habet principia univerſalia Aſtronomiæ, de cœli, & terræ figura, de magnitudine reſpectiva terræ, de quiete. Tum principia trigonometriæ proponit nempe canonem chordarum breviſſimum, & demonſtrationes trigonometriæ communes, paucas admodum, ita ut hæc trigonometria ſit valdè imperfecta. Denique declinationem Eclypticæ maximam inquirit, & ex ea declinationum, & aſcenſionum rectarum tabulas componit.

In ſecundo libro terræ à nobis habitatæ ſitum deſcribit, & ex maximæ diei quantitate, elevationem poli, & amplitudines ortivas determinat, tum aſcenſiones in ſphæra obliqua, ejuſdem ſphæræ obliquæ proprietates, & angulos Eclypticæ cum meridiano inquirit.

Tertius liber eſt de ſole, de magnitudine anni, de anomalia ſolari, eccentricitate, proſtaphæreſibus, & inæqualitate diei naturalis.

Quartus agit de motu lunæ præcipuè verò de ejus mediis motibus, longitudinis, anomaliæ, latitudinis, & de prima lunæ inæqualitate.

Quintus verſatur præcipuè circa ſecundam lunæ inæqualitatem, primóque proponit inſtrumentum Armillare ad ejus à ſole longitudinem obſervandam, tum de diverſitate aſpectuum lunæ diſſerit, & de inſtrumento ad eam capiendam, deinde de lunæ diſtantia, de ſemidiametris utriuſque ſyderis, & eorum diſtantiis à terra.

Sextus conjunctionis ſolis & lunæ conſiderat periodos, eclypſes, earumque terminos, tabulaſque conficit ad earum ſupputationem.

Septimus fixarum in conſequentia motum determinat, modumque deſcribendarum conſtellationum docet.

Octavus de conſtellationibus hemiſphærii auſtralis agit, de via lactea, de ortu, & occaſu ſtellarum de earumdem occultationibus.

Nonus de motibus quinque Planetarum minorum in genere, & de motu Mercurii in longitudinem.

Decimus de motu in longitudinem Veneris, ejuſque periodis, item de eccentricitate Martis ejuſque epicyclo.

Undecimus de motibus in longitudinem Jovis, & Saturni, eorumque epicyclis.

Duodecimus agit de ſtationibus, & regreſſibus quinque planetarum, maximiſque digreſſionibus Veneris, & Mercurii.

Decimus tertius agit de motu in latitudinem quinque planetarum, eorumque occultationibus ſub radiis ſolaribus.

Opus hoc continet Aſtronomiam perfectam, quam ante ipſum nemo tam perfectè tradiderat. Immo continet id totum quod ex Antiquis in hac materia reſtat. Videtur tamen non ſatis docere quomodo inventæ ſint certæ periodi, præcipuè anomaliæ lunæ; nam potius traditos ab Hipparcho motus examinat, quàm ipſe de novo inveniat. Jure præſtantiſſimus habitus eſt Aſtronomus, quotquot enim poſt ipſum fuerunt, ejus praxin, methodum totumque ordinem ſecuti ſunt. Sicut ipſe ſecutus fuerat Hipparcum.

Idem Claudius Ptolemæus tractatum edidit cui titulus, Apparentiæ Inerrantium cum ſignificationibus. Hunc interpretatus eſt Dyoniſius Petavius è Societate Jeſu, in ſuo Uranologio. Eſt autem Kalendarium Ægyptiacum per ſingulos menſes, & dies digeſtum cum ortu, & occaſu ſyderum, & ſignificationibus, nempe mutationibus aëris accidere ſolitis in iis regionibus. Hoc Opus utile poteſt eſſe ei qui aliquid ſtatuere vellet ex aſtris circa mutationes aëris. Inventum eſt Pariſiis in Bibliotheca Regia.

Additus eſt in eodem Petavii Uranologio alius Ptolemæi tractatus digeſtus ſecundum menſes Romanos, ex tranſlatione Nicolai Leonici.

Invenitur ibidem Kalendarium Romanum pro Conſtantini magni temporibus, nempe Chriſti 325 quo Nicæna ſynodus prima celebrata eſt, è muſeo Joannis Georgii Heruvart.

Eidem Claudio Ptolemæo nonnulli falsò tribuunt Quadripartitæ conſtructionis libros 4 ſeu de Aſtrologia judiciaria. Duos priores Joachimus Camerarius latinos fecit. Poſteriores Eraſmus Oſvaldus Schrekhenfuchſius.

In primo oſtendit Aſtrologiam, & ſcientiam eſſe, & utilem; tum diſſerit de viribus Planetarum, eoſque dividit in diurnos, & nocturnos; exinde de aſpectibus à ſole, de anni temporibus, de ſignis maſculinis, & fæmininis, de imperantibus, & obedientibus, de domibus triangulis, altitudinibus, de cujuſque Planetæ dignitatibus, & de finibus.

In libro ſecundo ſingulas gentes ſub ſuis ſignis conſtituit, loquitur de tempore eventuum, de coloribus eclypſium, de cometis, de noviluniis, de tempeſtatum conſideratione.

In tertio de ſcientia gradûs aſcendentis, de parentibus, de nativitate geminorum, de ſpatio vitæ, de qualitatibus animæ nati.

In

Digitized by Google

In quarto de proſperitate, conjugiis, filiis, peregrinationibus, de fixarum ſignificationibus.

Hoc Opus nihil habet ſolidi, nullam demonſtrationem, nullam experientiam.

Author Anonymus Græcè ſcripſit annotationes in quadripartitum Opus Ptolemæi quem plurimi exiſtimant eſſe Proclum, nempe verba ſubobſcura explicat, & ſæpè rationes addit de ſuo.

Tertio Chriſti ſæculo Porphyrius Philoſophus introductionem edidit in Opus quadripartitum Ptolemæi, & pariter ejus loco obſcura explicuit & rationibus confirmare viſus eſt.

Eodem tempore Cenſorinus in eruditiſſimo libello de die natali, multa habet ad Aſtronomiam ſpectantia.

Hippolitus Epiſcopus ob diſcordias inter Latinos, & Græcos circa celebrationem Paſchæ ſcripſit primus de cyclo Paſchali, ejuſque propterea inventor dicitur.

Quarto Chriſti ſæculo Sextus Avienus Rufus Arati phænomena & Dyoniſii Afri Poëma de ſitu Orbis latinè interpretatus eſt.

Floruit ſub Cõſtantino Julius Firmicus Maternus Siculus, Vir Conſularis qui ad Mavortium Lollianũ virũ item Conſularẽ Aſtronomicæ libros octo conſcripſit, de Aſtrologia judiciaria, quos Pruckneruſ Aſtronomus ab innumeris mendis expurgavit. Liber primus Aſtrologiam judiciariam adverſus æmulos defendit, eorumque rationes diſſolvit. In ſecundo libro Zodiacum in ſigna partitur, planetarum domicilia, altitudines, dejectiones, ſignorum decanos, fines, diurna, & nocturna gaudia, ducatus, trigonorum dominos, ſignorum ortus in diverſis climatibus, genituræ cardines, loca ſecunda, aſpectus planetarum, ſignorum cognationes, vitæ datorem, cronocratorem, aliaque Aſtrologiæ judiciariæ fundamenta explicat. Tertio libro Mundi Thema, ſingulorumque planetarum decreta, per ſingulas cœli ſtationes. Item Mercurij cum reliquis planetis decreta proponit. Quarto lunam applicat ad ſingulos Planetas, ejúſque defluxionem à Planeta uno ad alium explicat, item generalia ejus decreta, tum fortunam exploŗat, genituræ dominum, ejuſque decreta fatalia, 36 decanos, ſignorum partes maſculinas, & fœmininas conſiderat. Quintò ſimplicia cardinum decreta, ſingulorum planetarum in ſingulis Zodiaci ſignis, & in aliorum planetarum domiciliis decreta proponit. Sextò agit de radiationibus, ſeu aſpectibus Planetarum, nempe trigono, ſextili, oppoſitione, quadrato, de decretis item planetæ cujuſlibet dum fuerit cronocrator. Septimo genituras expoſitorum, geminorum, libertinorum, orborum, adoptivorum conſiderat. Octavò determinat quæ clara ſydera cum ſingulis ſignis oriantur, ſingulorum item ſignorum myriogeneſin. Hoc Opus clarè procedit.

Valens inſignis Aſtrologus juſſu Conſtantini urbis Conſtantinopolitanæ genituræ Thema erexit.

Theophilus Epiſcopus Alexandrinus mathematicus inſignis juſſu Theodoſii Senioris cyclum Paſchalem ordinavit, cui contrarium paulò poſt Dyoniſius Abbas Romanis propoſuit.

Euſebius Cæſarienſis ſcripſit de cyclo Paſchali.

Quinto Chriſti ſæculo Proclus Diadochus Athenis Platonicæ Scholæ præfuit, fuit natione Lycius, diſcipulus Siriani, ſcripſit commentarium in Platonem, epicheremata in Chriſtianos, & tractatum valdè parvum de ſphæra, in quo loquitur tantum de quinque parallelis, nempe æquatore, tropicis, & polaribus, de meridiano, & horizonte. Item de conſtellationibus qui tractatus non ſufficit, ad docendam ſphæram cœleſtem.

Compoſuit idem Proclus Hypotypoſin Aſtronomicarum poſitionum, quæ eſt quaſi epitome Almageſti memoriæ ſublevandæ cauſa. Loquitur autem in hoc opere quod nullam habet diſtinctionem, de motu ſolis, lunæ, & mercurii. Tum de Aſtrolabii fabrica, ejuſque aranea, de diurna ſolis inſpectione, de horis Italicis. De inſpectione ſtellarum, additæ ſunt variæ praxes, ad inveniendas horas tam Aſtronomicas, quam Planetarias; de inveniendo climate in quo verſamur.

Opus eſt exigui momenti, vixque intelligi poteſt, quia ſine figura de aſtrolabio loquitur, vix enim poteſt ſciri de quo loquatur. Omnia igitur in hoc opere ſunt obſcura, quæ ex eo addiſci non poſſunt.

Idem Proclus compoſuit ut volunt multi Paraphraſin Græcam in Opus Ptolemæi quadripartitũ, illudque melius explicat. Hoc Opus latinè vertit Leo Allatius. Lugduni Batavorum 1635 in octavo.

Porphyrius compoſuit brevem ejuſdem operis explicationem quæ eſt parvi momenti, ex quo concluditur hoc Opus non fuiſſe Procli quem anteceſſit Porphyrius.

Cyrillus Epiſcopus Alexandrinus ſcripſit de cyclo Paſchali.

S. Proſper Aquitanus ſcripſit de cyclo Paſcali. Præcipuè cyclum magnum annorum 532.

Victorinus Aquitanus Aſtronomus ab Hilario Papa Romam invitatur ad Kalendarii correctionem.

Pappus Alexandrinus compoſuit commentarium in Ptolemæi magnam ſyntaxin.

Extant ejus explicationes in Ariſtarchum Samium, de magnitudinibus, & diſtantiis ſolis, & lunæ. Quas latinas fecit ut & Ariſtarchum Federicus Commandinus. Piſauri anno 1572.

Eodem ferè tempore floruit Theon Alexandrinus qui commentarium edidit in magnam Syntaxin Ptolemæi. Obſervavit eclypſin ſolis quam refert anno Nabonaſſari 1112 ſeu Chriſti 365. Scripſit item de ortu caniculæ.

Hujus filia Hypatia Aſtronomiæ peritiſſima, quæ à ſuis concivibus miſerè occiſa eſt & per urbem tracta, Ita Heſichius, & Suidas, ſcripſit Aſtronomicum canonem.

Circa annum Chriſti 427 claruiſſe dicitur Cleomedes cujus extat duobus libris circularis meteororum inſpectio. Eam vertit Georgius Valla Placentinus quam Græcè primus edidit Conradus Neobarius Pariſiis 1539. poſtea Henricus Petri Baſileæ 1561.

Sexto Chriſti ſæculo ineunte ſeu anno 500. Diocletiani 216 Athenis Thius Mathematicus in ſyderibus obſervãdis operam poſuit. Hujus ſeptem obſervationes valdè utiles Pariſiis edidit Iſmael Bullialdus, eò gratiores quod à Ptolemæo ad Albategnium nullæ extent. Exſcripſit ex veteri codice manuſcripto Bibliothecæ Regiæ.

Eodem ſæculo Caſſiodorus vir conſularis ſcripſit de quatuor mathematicis Geometria, Arithmetica, Aſtronomia, Muſica.

Hero Alter, item mechanicus aſſerit in ſua Geodeſia ſtellas in conſequentia à tempore Ptolemæi ad ſuam ætatem, ſeu ut aſſerit Albategnius annis 460, eſſe progreſſas 7 gradibus.

Dionyſius Exiguus Abbas Romanus compu-

tum & cyclum paſchalem, aliter ac Græci ordinavit ann. D. 532, quem latina Eccleſia ſecuta eſt, uſque ad correctionem Kalendarii ſub Gregorio XIII factam. Primus annos à nativitate Domini numerare cœpit, qui prius à Diocletiano numerabantur.

His temporibus Mahometani per Africam ſe extendunt, & ceſſavit Aſtronomia Alexandriæ exerceri. Non tamen proterea hæc natio bellum ſcientiis indixit, nam Caliphæ quamplurimos libros Græcos, omnium ſcientiarum, ac artium, ex Græco in Arabicum ſermonem verti curaverunt, ut ſyntaxis Ptolemæi, juſſu Maimonis regis Saracenorum Babylone Arabicè reddita eſt anno Chriſti 827. Hegiræ 212. Quare brevi apud Arabas multi evaſerunt Philoſophi, & Aſtronomi, multò plures Aſtrologi.

Septimo Chriſti ſæculo Iſidorus Hiſpalenſis omnium mathematicarum compendium inſerit in ſuo libro de originibus. Egit item de cyclo paſchali. Et in libro de mundo Tractatum de ſphæra brevem edidit.

Martianus Capella, qui & Mineus Fœlix dictus eſt, ſcripſit de 4 Mathematicis.

Anno Chriſti 633 S. Maximus monachus, & martir compoſuit Græcè Brevem enarrationem Chriſtiani Paſchatis, quam Dionyſius Petavius è Societate Jeſu interpretatur. Habet pro ratione illorum temporum, quidquid requiritur ad inventionem diei Paſchæ, lunationum, cæterorumque ad computum eccleſiaſticum pertinentium.

Idem Petavius interpretatus eſt Iſaaci Argyri monachi ad Oenæoten Andronicum computum eccleſiaſticum. Sicut fragmentum Incogniti de eadem materia quæ omnia utilia eſſe poſſunt ei qui antiquas methodos ſcire cupit.

Ad hæc circiter tempora referimus Achillem Statium ſeu Tatium, ſecundùm Suidam. Hic Alexandrinus fuit qui de Leucippo, & Clitophonte ſcripſit, & alia amatoria libris octo; tandem factus Chriſtianus, & Epiſcopus, ſcripſit de ſphæra, & etymologia, item hiſtoriam miſcellaneam, quæ multorum magnorum virorum mentionem facit. Ipſius vero oratio, in omnibus ſapit ſtylum amatorium. Hujus iſagogen Græcam in Arati phænomena vulgavit Petrus Victorius ex Medicea bibliotheca, & hanc Dionyſius Petavius ex Societate Jeſu latinam fecit. In hac igitur loquitur de natura, & figura Univerſi, de motu, an ſit aliquid extra mundum. An tellus ſtet. De ſtellarum natura, figura, motu, de Planetis, de ordine, & numero ſphærarum, & planetarum, de anno magno. De ſole, & ejus magnitudine, de Luna, de circulis Zodiaco parallelis, coluris, axe, zonis, umbrarum differentiis, de meteoris, ventis, cometis, de motu ſyderum, ortu, occaſu, & differentiis.

Octavo Chriſti ſæculo Venerabilis Beda ſcripſit de computo eccleſiaſtico.

Nono Chriſti ſæculo ineunte nempè anno 800 litteræ apud Arabes florere incipiunt. Almeon, ſeu Almamon quinquaginta annis ante Albategnium dicitur obſervaſſe maximam ſolis declinationem gradum 23. 51. item in campis Singar prope Babylonem obſervavit uni gradui terræ deberi milliaria 56.

Albategnius Aracenſis Arabs anno Chriſti 880, obſervavit maximam ſolis declinationem graduum 23. 35. primam arietis promotam eſſe ab interſectione verna gradibus 18. 2. Eſt autem Aracta urbs Syriæ à qua dictus eſt Aracenſis hic author dictus etiam eſt Machometus filius Acharani. Librumque edidit de ſcientia ſtellarum ſeu Aſtronomiam, quæ extat. Sequitur autem ferè ordinem Ptolemæi. Nam præmittit nonnulla de chordis in circulo, in ordine ad trigonometriam. Tum ſcientiam primi Mobilis, & ejus problemata capitibus 17 explicat. Secundò de ſtellis fixis capitibus 10. Tertiò de ſole tribus capitibus. Quartò agit de luna ejuſque oppoſitionibus, conjunctionibus, eclypſibus, exinde de aliis planetis, totamque Aſtronomiam reſtituit. Multas habet obſervationes proprias. Difficilis eſt hic author ob phraſin non ſatis latinam, ſed quæ ſapit Arabicum idioma. Typis mandatus eſt Norimbergæ in quarto 1537. & iterum Bononiæ 1545, cum aliquot additionibus Joannis Regiomontani, ex Vaticana Bibliotheca tranſcriptus in quarto.

Ejus obſervationes circa declinationem zodiaci, & loca ſtellarum ſunt maximi momenti in Aſtronomia.

Hoc eodem tempore Pſellus author Græcus, qui filios Imperatoris docuit. Aſtronomiæ compendium tradidit in quo univerſales tantum notiones circulorum & Theoriæ Planetarum, ita breviter tradit, & ſine figuris, ut illud legere ſit diſpendium temporis, in quo nempe nihil addiſces, niſi prius illud ſciveris. Hoc Opus à Xylandro latinè verſum eſt, & annotationibus illuſtratum. Baſileæ in octavo 1556.

Paulus Philoſophus Introductionem Aſtrologiæ compoſuit.

Petoſciris Ægyptius Aſtrologica è ſacris libris pertractavit.

Geber Arabs à quo dicitur Algebra nomen accepiſſe, Opus Aſtronomicum edidit, in quo novem libris Ptolemæi Almageſtum exponit, ac corrigit. Similiterque cum Ptolemæo agit de triangulis ſphæricis. Ex hoc Opere multa ſumpſit Georgius Purbachius, & Regiomontanus dum Almageſtum in epitomen contrahunt. Voluit Geber Ptolemæum emendare. Hunc vocat proptereà Copernicus Ptolemæi calumniatorem. Norimbergæ 1533 cum inſtrumento primi mobilis Apiani.

Decimo Chriſti ſæculo floruit Ebenneſophin aliis Aſophi dictus qui loca ſtellarum obſervabat anno 936.

Jam ab Anno 711 Arabes in Hiſpaniam tranſierant, & ſecum Philoſophiam Peripateticam, & Aſtronomiam advexerant, ideóque multi in Hiſpania obſervationes ſyderum faciebant.

Eodem temporè apud Perſas inſtaurabatur Aſtronomia, annus Perſicus ex vago dierum 365, factus eſt Julianus, nempe initium anni affixum eſt æquinoctio verno habueruntque tabulas eo tempore cum cœlo congruentes, exceptis tabulis Mercurii.

Alpharabius Aſtronomus inſignis his temporibus floruit.

Albumazar Aſtrologus ſcripſit de magnis conjunctionibus, & aliis ad judiciariam pertinentibus.

Alphraganus Aſtronomus Arabs ſcripſit de rudimentis Aſtronomiæ, Primò enim proponit nonnulla principia Geographiæ. Agit deinde de ſingulis planetis, de fixis item, menſuraſque habet, & diſtantias, ortus, eclypſes &c. Non tamen deſcendit, ad particularem motuum conſtitutionem. Hunc publicè interpretatus eſt Joannes De monte Regio, ejuſque Operibus præfixit Orationem quam habuit, quâ ſcientiæ mathematicæ declarantur

Digitized by Google

rantur eorumque utilitates. In quarto Norimbergæ 1537.

Undecimo Chriſti ſæculo Alhaſen Arabs in ſua Optica nonnulla habet de crepuſculis.

Arzahel, ſeu Arzachel Hiſpanus circa annum 1070, nempe 190 annis obſervavit maximam eclypticæ declinationem graduum 23.34.

Iſaac Argyrus monachus Græcus egit de Paſchatis correctione.

Anno Chriſti 1050, & genere & doctrina clarus fuit Hermannus Contractus filius Volferadi Comitis Varingenſis; fuit monachus Augienſis, inter alia ſcripſit de eclypſibus, & de computo; de Aſtrolabio & muſica.

Circa annum 1080 celebris fuit Guillelmus Hirſaugienſis Abbas in diœceſi Spirenſi; qui philoſophicas & aſtronomicas inſtitutiones edidit.

Anno 1100 ſeu duodecimo ſæculo ineunte Sigebertus Gemblacenſis ſcripſit de computo.

Anno 1130 clarus fuit in Anglia Athelardus monachus Bathonenſis. Scripſit de Aſtrolabio, & Erichiafarin Arabem de Planetis vertit in latinum.

Anno 1142 Almeon Almanſorius ſolis maximam declinationem obſervavit gr. 23.33. Idem propoſitiones aliquot, quaſi Aſtrologiæ judiciariæ compendium miſit ad Saracenorum regem. Opus breve quod interpretatus eſt ex Arabico in latinum Plato Tiburtinus 1493.

Quo etiam tempore Hermes Aſtrologus Arabs centum Aphoriſmos edidit, nempe 100 propoſitiones explicantes quibus in locis planetæ ſint fortunati, aut infortunati.

Bethem pariter Aſtrologus Arabs ſimile Opus edidit, quod extat; ſicut & aliud de horis Planetarum.

Zahel Aſtrologus Arabs edidit Opuſculum de electionibus, in quo docet quandonam ſit aliquid agendum, vel non agendum. Extat item.

Meſſahalach Arabs Opuſculum edidit de ratione circuli, & ſtellarum qualiter operantur in hoc ſæculo. Eſt autem præcipuè in ordine ad mutationes aëris continetque duo folia.

Omar Ben-Alfargdianus Tiberiadis Aſtrologus, Opuſculum edidit de nativitatibus, tribus libris: utiturque vocibus Arabicis, quæ deinde ab Aſtrologis conſequentibus ſunt receptæ. Ut Almuta pro dominatore loci, Hylech pro aſcendente.

Albohazen Haly filius Aben-Ragel Arabs librum edidit de judiciis Aſtrorum, quem Yhuda filius Muſcæ ex præſcripto Alphonſi Regis, tranſtulit de Arabico in ſermonem Hiſpanicum, & quem Ægidius de Tebaldis Parmenſis, aulæ Imperialis Notarius, unà cum Petro de Regio ejuſdem aulæ protonotario tranſtulit in latinum. Dicit autem author ſe in hoc libro, multos ſenſus adjunxiſſe de ſcientia ſtellarum, collegiſſeque ex multis libris ſapientum. Prima ergo parte loquitur de ſignis & eorum natura, de planetarum qualitatibus, & aliis principiis judiciariæ. In tribus ſequentibus agit de quæſtionibus. In quinta, & ſexta de Nativitatibus. In ſeptima de de revolutionibus annorum nati. In octava de revolutionibus annorum mundi.

Rabbi Abraham ſcripſit de ſphæra.

Anno 1149 Averroes ſeu Aben-Roes Medicus Cordubenſis Epitomen edidit magnæ conſtructionis qui Commentarios ſcripſit in totum Ariſtotelem, dictuſque propterea Commentator.

Alpetragius Arabs eodem tempore quò Almeon eandem maximam ſolis declinationem obſervavit.

Anno 1170 Clemens Langthonienſis Presbyter, & canonicus librum edidit de orbibus cœleſtibus.

Joannes Hiſpalenſis circa annum 1142 convertit Alphraganum in latinum.

Anno 1200 ſeu decimo tertio Chriſti ſæculò ineunte Campanus Novarienſis Italus ſcripſit computum eccleſiaſticum; librum item de compoſitione quadrantis, Kalendarium, ſphæram Theoricas Planetarum. Vertit item Euclidem ex Arabico. Scripſit item introductorium in Aſtronomiam. In quo primo conſtituit generalia quædam circa terræ locum, magnitudinem, figuram, circulos cœleſtus conſiderat, ortuſque ſyderum; proprietates item cœleſtes terrarum ſubjectarum, diverſis cœli partibus, de eclypſibus ſolis & lunæ. Nihil habet quod vulgare non ſit. Non habet demonſtrationes.

Idem Campanus ſcripſit Kalendarium in quò agit de erroribus Kalendarii, & correctionibus, de Epactis item. Tractatus hic methodicus eſt, in 33 capita diviſus, adjectis tabulis ad invenienda omnia ad Kalendarium ſpectantia.

Anno 1230 juſſu Friderici ſecundi Imperatoris Magna Ptolemæi ſyntaxis ex Arabico in latinum ſermonem verſa eſt. Ei tamen remanſit inditum nomen Arabicum ut diceretur Almageſtum.

Anno 1231 Joannes De ſacro Boſco, vel de ſacro Buſto tractatum de ſphæra mundi edidit, quem multi commentati ſunt, & in ſcholis legere ſolent multi. Opus clarum & bonum. Ea tamen quæ profert ut plurimum demonſtratione carent, quæ facile ex Theodoſio demonſtrari poterant. De induſtria tamen id factum putamus, ut cœlorum notitiam etiam iis daret, qui Geometricis principiis ſunt deſtituti. Hujus tractatus ſunt quatuor partes. Prima eſt de partibus ſphæræ, & figura mundi. Secunda de circulis ſphæræ. Tertia de ortu, & occaſu ſignorum, diverſitate dierum, noctiumque, de diverſitate climatum. Tertia continet alia accidentia, ut eclypſes &c.

Anno 1235 Joannes Alkindus ſcripſit de radiis ſtellarum.

Anno 1270 Alphonſus Rex Caſtellæ, & Legionis accerſitis undique Toletum Aſtronomis inſignibus, inter quos præcipuus fuit Rabbi Iſaac Hazan, Tabulas Alphonſinas edidit. Expenſis in Aſtronomia quadraginta millibus ducatorum. Ex quo tempore apud Europæos cœpta eſt coli Aſtronomia. Hoc Opus editum eſt Pariſiis in folio anno 1521.

Anno 1255 Rogerius Bacon Anglus Oxonienſis multa ſcripſit de Aſtronomia. Primo de utilitate Aſtrologiæ, de locis ſtellarum, de radiis ſolaribus, aſpectibus lunæ, introductionem in Aſtrologiam, de judiciis Aſtrologiæ, prognoſticæ ex ſyderum curſu. Accuſatus fuit magiæ, quòd Aſtrologiæ eſſet deditus.

Anno 1300, ſeu decimo quarto Chriſti ſæculò ineunte, Thebit primus in Aſtronomiam invexit motum trepidationis octavæ ſphæræ, nempe ad obliquitatis Eclypticæ variationem ſalvandam.

Anno 1303 Prophatius Judæus ſolis maximam declinationem notavit g. 23.52. In Hiſpania obſervabat.

Anno 1355 Nicolaus Linnenſis Anglus variæ ſcripſit de Aſtrologia.

Digitized by Google

Anno Chriſti 1347 Joannes Eſchuid Anglus Summam judicialem de accidentibus mundi edidit. Quod Opus vocant nonnulli Summam Anglicanam de Aſtrologiæ prognoſticationibus. Hæc in duos tractatus dividitur: Primus eſt de accidentibus mundi in univerſum. Secundus de accidentibus mundi in particulari. Primus tractatus in 12 diſtinctiones dividitur; in prima agit de principio mundi, & quis planeta, aut ſignum dominetur in regione noſtra. 2 De prognoſticationibus magnarum conjunctionum, 3 Eclypſium, 4 De ſignificationibus Planetarum cùm fuerint domini annorum, conjunctionum, Eclypſium. 5 De ſignificatione Planetæ ſupra alium elevati. 6 De ſtellis fixis. 7 De naturis ſignorum & duodecim domorum. 8 De dominio Planetarum, & ſignorum in regiones. 9 De prognoſticatione accidentium mundi per revolutiones. 10 De mutatione planetarum de natura in naturam. 11 De ſecundis ſtellis & cometis. 12 De qualitatibus planetarum, & ſignorum quaſi per compendium.

2 Tractatus habet pariter 12 diſtinctiones. 1 De prognoſticatione caloris. 2 frigoris. 3 ſerenitatis, & ſiccitatis. 4 imbrium. 5 nivis, & grandinis. 6 ventorum. 7 tonitruorum. 8 terræ motuum. 9 peſtilentiarum. 10 cariſtiæ. 11 bellorum. 12 praxin habet.

Nullum reperies qui plura habeat de eventibus phyſicis & naturalibus.

Anno 1411 Petrus De Alliaco poſtea Cardinalis, compoſuit certas quæſtiones mathematicas circa ſphæram, & orbes cœleſtes, ſed difficultates proponit exigui momenti. Peccavit item quod crediderit Chriſti nativitatem præſciri potuiſſe ex genethliacis obſervationibus, adducitque ſtellam Magorum ad id comprobandum. Vidè Sixtum Senenſem libro 5 Bibliothecæ ſanctæ.

Anno 1440 illuſtris fuit Nicolaus Cuſanus Cardinalis titulo Sti Petri ad Vincula, Natione Germanus, ex ditione Treverenſi: qui inter alia multa ſcripſit reparationem Kalendarii, & correxit tabulas Alphonſinas.

Anno 14[illegible]0 floruit Dominicus Maria Bononienſis, qui fuit præceptor Copernici.

Eodem Tempore fuit Georgius Purbachius præceptor Regiomontani. Scripſit Compendium Almageſti Ptolemæi, ſed morte ſublatus cùm vix ſextum librum abſolviſſet. Regiomontanus ejus diſcipulus natus anno 1436 Opus hoc perfecit. Compoſuit item Theoricas planetarum, ut dicemus inferiùs, qui Romam ad emendationem Kalendarii evocatus, dicitur ab invidis veneno ſublatus annos natus 33, nempe anno 1469. Referemus infra utriuſque ſcripta, eo tempore quo typis ſunt mandata. Primus dicitur Ephemerides conſcripſiſſe.

Anno 1472 Joannes Blanchinus Tabulas motuum cœleſtium edidit, quas poſtea Lucas Gauricus Venetiis edi curavit.

Anno 1491 Bernardus Gualterus Regiomontani diſcipulus, præcipue docuit quantùm in ſyderibus horizonti vicinis refractio noceat.

Anno 1470 Theodorus Gaza, author græcus, ſcripſit de menſibus Atticis librum. Hunc interpretatus eſt Joannes Perellus anno circiter 1530. Loquitur autem in hoc Opuſculo de menſibus Atticis, de anno, de epactis, de menſe intercalario.

1472 Prodiit Almanach perpetuum, ſeu Ephemerides & diarium Abrahami Zacuti Hebræi, cum Theorematibus Joannis Michaëlis Germani Budurenſis cum Lucæ Gaurici caſtigationibus, & pleriſque aliis tabulis; ut revolutionum ſeptem planetarum, tabulis veri motus ſolis & lunæ, oppoſitionum & conjunctionum nodorum, ad eclypſes latitudinis lunæ &c. Videtur autem hic author, ſicut tabulæ quatuor annorum pro ſole ejus locum ſemper indicant, inveniſſe alias revolutiones in ſingulis planetis, poſt quas redeant ad eadem loca iiſdem diebus; quòd ſi verum foret, poſſet utiliſſimum eſſe ad inveniendum locum planetarum ſine calculo. Sunt autem iſtæ revolutiones pro ſole 4. anni, pro luna anni 31. pro Saturno 59. anni, quibus perficitur revolutio motus, centri & argumenti. Jupiter intra 83 annos. Mars 79. Sed centrum & argumentum annis 32. Veneris motus annis octo, centra verò Veneris, & Mercurii annis 4. Mercurii motus annis 125. argumentum annis 40. Quæ omnia exactiore examine egerent. Venetiis in quarto 1472.

1489 Leupoldus Ducis Auſtriæ filius de aſtrorum ſcientia compilationem edidit, in decem diſtinctam breviſſimos tractatus.

Primus definitiones ſphæræ, & circulorum continet.

Secundus planetarum theorias.

Tertius de probatione ſcientiæ judiciorum.

Quartus de introductoriis judiciorum, in quo de ſignis, planetis, in ſe & comparativè. Reliqui item pertinent ad aſtrologiam judiciariam. Venetiis in quarto 1489.

1496 Camillus Leonardus Piſaurenſis Opuſculum edidit cui titulum appoſuit, Liber deſideratus Canonum æquatorii cœleſtium motuum ſine calculo, nempe ut quis loca planetarum ſine ullo calculo per circulos & rotulas chartaceas invenire poſſit. Dividit hoc Opus in tres partes; quarum prima ſex quaſi tabulas, & inſtrumenta circulis conſtantia ad locum planetarum inveniendum continet. Secunda pars introductoria erit, & quidquid de ſignis, gradibus, ſtellis fixis dici poteſt, compendio declaratur. Poteſtates item, & vires tam eſſentiales, quàm accidentales. Tertia de aſpectibus, de diebus criticis. Omnia ex directorio.

Opus hoc viam aperit ad ſimilia inſtrumenta, quæ utilia ſunt iis qui omnimodam præciſionem non deſiderant. Piſauri in quarto 1549.

Anno 1507 Lucas Gauricus Neapolitanus Ferrariæ Matheſeos profeſſor, edidit Aſtronomiam. Incipit ab oratione de laudibus, & utilitate aſtronomiæ; exinde proponit Opuſculum de ſphæra cum figuris. Omnia tamen carmine explicat. Sequuntur tabulæ ampliſſimæ motuum omnium planetarum ſatis intricatæ, nec ita faciles. Tertio eſt calendarium non benè explicatum, in quo congeſſit multa carmina, aliáque ſine ordine; atque hæc in primo tomo continentur. In ſecundo verò habet tractatum de judiciaria aſtrologia, præmittit Iſagogen in prædictivam aſtrologiam, in qua tamen multas exhibet tabulas de aliâ materia. Exinde habet tractatum de primo Mobili in quo innumeras tabulas exhibet. Alia multa congeſſit in fine Operis, *ut prognoſticon pro multis annis carmine.* Totum Opus eſt indigeſta moles & confuſa, in quâ nihil addiſces niſi prius id ſcias.

Anno 1526 Laurentius Bonincontrius Miniatenſis de rebus cœleſtibus libros tres edidit, à Luca Gaurico recognitos, & Operibus Gaurici additos.

In

Digitized by Google

In hoc Opere eleganti carmine tota traditur aſtronomia.

Anno 1510 Joannes Stoflerinus Juſtingenſis apud Tubingam aſtronomiæ profeſſor ſcripſit de Kalendario, adjectis tabulis tam ad feſta mobilia invenienda, quàm ad cyclos reliquos determinandos. Adjecit nonnullas tabulas ſolis,& lunæ, item & tabulas motuum ſolis & lunæ in circulos, & quaſi aſtrolabia digeſtus. Totum Opus obſcurum eſt, & ſine methodo & ordine procedit. Ita ut ſit perdifficile ei qui Kalendarii rationem neſciat illam in eo authore addiſcere.

Anno 1514 Joannes Vernerus Germanus ſedulò motus ſyderum obſervabat. Reliquit duos tractatus de octava ſphæra,ſtatuitque maximam ſolis declinationem grad. 23. 28. Obſervavit primam Arietis gradus 26.ab Ariete progreſſam. Ejus obſervationes ut legitimas admittit Tycho.

Anno 1518 Joannes Baptiſta Capuanus de Manfredonia Canonicus Regularis Ordinis ſancti Auguſtini Congregationis Lateranenſis, expoſuit Sphæricum Opus Joannis De ſacro Boſco Aſtronomi celeberrimi. Nempe de ſphæra mundi, de principiis tam geographiæ quàm aſtronomiæ.

Utrumque Opus utile eſt & bonum. Item Purbachii Theoricas planetarum.

Eodem circiter tempore Jacobus Faber Stapulenſis Commentarium edidit in Introductorium Joannis de Sacro Boſco, facile,& clarum; ſequitur autem eumdem ordinem. In primo agit de terræ figura, magnitudine, loco, quiete. In ſecundo circulos explicat omnes, eorumque officia aſſignat. In tertio de occaſu ſyderum & de climaribus. In quarto de circulis & motibus planetarum, de cauſis eclypſium.

1519 Joannes Scieureus Brittulianus Bellovacenſis Opus quadripartitum Ptolemæi recognovit, & typis mandari curavit. Pariſiis 1619. in quarto.

1518 Albertus Pyghius Campenſis Mathematicus ac Theologiæ baccalaureus edidit Opus adverſus prognoſticatorum vulgus qui annuas prædictiones edunt, & ſe aſtrologos mentiuntur; aſtrologiæ defenſionem ad Auguſtinum Nyphum Sueſſanum aſtrologiæ ſincerioris reſtauratorem. Pariſiis in quarto 1518.

Extat libellus D.Pauli Veneti theologi clariſſimi Auguſtiniani de compoſitione mundi. Habet autem nonnullas definitiones de ſphæræ circulis, polis, &c. Habet etiam nonnullas propoſitiones circa motus cœleſtes, quarum probationes ſunt potius Philoſophicæ quam Mathematicæ. Totum Opus eſt exigui momenti. In quarto Pariſiis. Neſcitur annus.

1520 Albertus Pyghius Campenſis tractatum edidit de æquinoctiorum, ſolſtitiorumque inventione, déque aſtronomorum erratis intolerandis: Præcipuè in ſtellarum locis. Procedit autem ratiocinium ſecundum Alphonſinorum doctrinam diſtinguentium duas eclypticas. Non videtur ſatis clarè oſtendere errorem qui faciliùs oſtendi poterat.

1520 Idem alium tractatum compoſuit de ratione Paſcharis celebrationis, déque reſtitutione eccleſiaſtici Kalendarii ad Leonem decimum, Pontificem Maximum. Non ſatis explicuit methodum correctionis adhibendæ; hoc eſt, non ſatis ad particularia deſcendit. In quarto Pariſiis 1520.

1521 Joannes Saxonius Alcabitij ad magiſterium judiciorum aſtrorum Iſagogen commentario declaravit. Pariſiis in quarto 1521.

1521 Auguſtinus Riccius tractatum compoſuit de motu octavæ ſphæræ. Opus Mathematica & Philoſophia plenum. In quo tam antiquorum, quàm juniorum errores clariſſimè demonſtrantur, & quamplurima Platonicorum, & antiquæ Magiæ, quam Cabalam Hæbræi dicunt, dogmata videre licet cognitu ſuaviſſima. Ejuſdem de aſtronomiæ authoribus epiſtola.

Inter alia rejicit mutationem declinationis eclypticæ & alios motus quos invectos putat ab obſervationibus perverſis antiquorum. Hunc tractatum magnifecit Orontius Finæus, & typis denuò mandari curavit. In quarto Pariſiis 1521.

1522 Albertus Pyghius Campenſis Apologiam edidit ſeu potius expoſtulationem adverſus novam Marci Beneventi Aſtronomiam,quæ poſitionem Alphonſinam ac recentiorum omnium de motu octavi orbis multis modis depravavit, & ſecum pugnantem fecit. In qua demonſtrat Alphonſinam rationem quam putat à paucis intellectam, & à Purbachio in multis malè explicatam.

Brevis eſt & luculenta enarratio Alphonſinæ poſitionis. Ejuſdem Explanatio methodi quâ poſſit tabularum abacus referri ad eclypticam mobilem octavæ ſphæræ.

Tota altercatio eſt de motu quaſi trepidationis, quo puncta æquinoctialia cœli ſtelliferi videntur reciproco motu moveri circa ſectionem vernam ſuperioris cœli, nempe ut explicetur irregularitas qua ſtellæ inæqualiter recedere videntur à punctis æquinoctialibus. Communis eſt opinio aſtronomorum hujus temporis fictitiam eſſe hanc inæqualitatem, & provenire à motu telluris, qui refunditur in ipſas ſtellas; quare totum hoc Opus redditur inutile. In quarto Pariſiis 1522.

Anno 1524 & 1525 Petrus Appianus Ingolſtadii docuit. Scripſit de quadrante aſtronomico; aliiſque inſtrumentis.

1528 Joannes Fernelius Ambianas Coſmotheoriam libris duobus comprehenſam edidit. Prior mundi totius formam & compoſitionem, ejus ſubinde partium ſitus, & magnitudines, orbium tamdem motus quoſvis ſolerter referat.

Poſterior ex motibus ſyderum loca & paſſiones diſquirit,ſed omnia per epitomen.Nihil habet quod in præcedentibus non reperias; latinè benè loquitur.

1530 Joannis Hiecthtembergers Prognoſticatio, quam olim ſcripſit ſuper magna illa Saturni ac Jovis conjunctione quæ fuit anno 1484. prætereà ad eclypſin ſolis anni ſequentis 1485. quæ durat ad annum 1567. jam iterum prodiit in lucem. Pariſiis in quarto 1530. Opus non ſolidum.

1530 Petrus Nonius Salacienſis annotationes fecit in theoricas Purbachii, in quibus explicat quæ videbantur obſcuriora, aut non ſatis demonſtrata.

Opus quidem bonum, bonam continet doctrinam ſed malè explicatam.

1531 Jacobus Zieglerus Landavus Bavarus in Plinii librum ſecundum de naturali hiſtoria, commentarium edidit, quo difficultates Plinianæ præſertim Aſtronomicæ tolluntur; item Organum aliquod hæc oculis ſubjiciens ſeu ſphæra materialis.

Item Georgius Collimitius, & Joachimus Vadianus in eumdem ſecundum Plinii librum ediderunt.

In hoc Opere ferè tota aſtronomia continetur, non tamen in bonum ordinem digeſta, nec idiomate ſatis claro. In quarto Baſileæ 1531.

Anno 1533 Joannes Stoflerinus Juſtingenſis hunc Procli Diadochi tractatum de ſphæra, commentario erudito explicuit, ſed non ſatis ordinatò. Potuiſſet enim totam hanc doctrinam meliori ordine digerere, & non eam addicere ordini à Proclo propoſito, cui ſæpè non ita benè congruit.

Anno 1533 Otho Brunfelſius libellum edidit Iſagogicum ad aſtrologiam judiciariam de definitionibus, & terminis aſtrologiæ.

1534 Joachimus Vadianus Sangallenſis Epitomen trium terræ partium, Aſiæ, Africæ, & Europæ, præcipuè eorum locorum quorum fit mentio in Evangelio. Habet nonnulla initiò de Zonis & circulis, ſed pauca.

1534 Jacobus Milichius profeſſor Mathematicus in Schola Vvitembergenſi Commentarium edidit in eumdem ſecundum Plinii. Hic commentarius non eſt ita amplus ac ſuperior, & ſequitur ad amuſſim authorem, & explicat. Bonus tamen eſt. Plinius autem in hoc ſecundo libro agit de mundo, & ejus forma, de ſeptem planetis, ſolis, & lunæ magnitudine, & eclypſibus, de errantium motu, lumine, de repentinis ſyderibus, de coronis, parcliis, diſcurſu ſtellarum, de echo, ventis, fulminibus, de natura terræ, de mari, navigationibus, de ſyderum ortus diverſitate. In quarto Haganoæ 1534.

1535 Norimbergæ Ptolemæi Opus quadripartitum Græcè impreſſum eſt, tum Latinè.

Ejuſdem fructus librorum ſuorum ſeu centum dicta de eadem materia.

Item traductio in linguam latinam Joachimi Camerarii Pabergenſis.

Traductio centum dictorum Joviniani Pontini.

Mathæi Guarimberti Parmenſis Opuſculum de radiis & aſpectibus planetarum.

Aphoriſmi Aſtrologici Ludovici de Rigiis ad Patriarcham Conſtantinopolitanum. Norimbergæ in quarto 1535.

1538 Hyeronimus Fracaſtorius Veronenſis tractatum cõpoſuit quem homocentrica nominavit. Finis iſtius Operis eſt tollere de medio circulos omnes eccentricos, & per homocentricos omnes motus cœleſtes explicare. Quare hâc methodo utitur in ſingulis motibus, ut obſervationes, ſeu apparentias referat; tum aliorum explicationes ſeu hypotheſes afferat, exinde eas refellat, & ſuum modum explicandi explicet. Quia tamen cogitur ad explicandas inæqualitates motuum cœleſtium, introducere circulos retardantes, & in ſua hypotheſi vix poteſt explicare mutationem apparentium diametrorum, ejus homocentrici circuli ſubſiſtere minimè potuerunt.

Habet item tractatum de diebus criticis, per ea quæ in nobis inſunt, in quo optimè ratiocinatur dierum criticorum in ipſorum humorum putrefactionem, & quaſi fermentationem referens. Venetiis in octavo 1538.

Anno 1538 Prodierunt Theonis commentationum libri undecim in Magnam conſtructionem Ptolemæi Græcè. Baſileæ. Ibidem Magna conſtructio Ptolemæi. In quarto Venetiis 1538.

1539 Lucas Gauricus prædictiones ſuper omnibus futuris luminariũ deliquiis, in finitore Veneto. Anno Chriſti 1533. examinatæ figuræ cœleſtes Venetiarum, Bononiæ, Florentiæ.

Paraphraſes & annotationes in Claudii Ptolemæi 2 librum apoteleſmatum ſuper luminum eclypſibus, Procli Diadochi Lycii decreta eclypſium utriuſque luminaris, quæ in quolibet ſignorum decano accidere poſſunt, Interprete Laurentio Miniatenſe. Venetiis 1539. in quarto.

1539 Joannes Schonerus Caroloſtadius Opuſculum aſtrologicum ex diverſorum libris ſumma cura pro ſtudioſorum utilitate collectum, nempe inſtructionem intelligendæ Ephemeridos.

Iſagoge Aſtrologiæ judiciariæ de electionibus communibus. Canones ſuccincti nativitatum, tractatum integrum electionum Marci Laurentii Bonicontrii Miniatenſis.

Aſſertio contra calumniatores aſtrologiæ Ebherhardi Scheuſingeri. Norimbergæ in quarto 1539.

1542 Magiſter Ricardus Rouſſat Canonicus Lingonienſis Arcandam Aſtrologi tractatum de prædictionibus nativitatum correxit, & in meliorem formam redegit. Pariſiis in octavo 1541.

1542 Orontius Finæus Delphinas Regius Mathematicus de mundi ſphæra, ſeu Coſmographia primâque aſtronomiæ parte libros quinque edidit.

Primus agit de mundo, de quiete, loco, figura, & magnitudine terræ.

Secundus de circulis, & zonis.

Tertius de ortu & occaſu ſyderum.

Quartus de die, ejuſque inæqualitate, de altitudine ſyderum, umbris.

Quintus de circulis diſtinctivis climatum, de longitudine & latitudine, de numero ventorum ad hydrographiam, chordarum & ſinuum definitione hanc materiam clarè explicuit, & breviter. Pariſiis in octavo 1542.

1542 Petrus Ditatus Veronenſis Mathematicus novum Almanach edidit, nempe Ephemerides, ſuperadditis annis quinque ſupra ultimos, nempe uſque ad annum 1562.

Item Iſagoge in cœleſtem aſtronomicam diſciplinam tractatus tres perbreves de electionibus, revolutionibus & mutatione aëris.

Item horariæ tabulæ altitudinum ſolis ac ſtellarum pro medio ſexti climatis nempe à latitudine 37. ad 54.

1542 Joannes Virdungus Hasfurdius Mathematicus & Medicus tabulas reſolutas edidit de ſupputandis ſyderum motibus, ex quibus ſyderum omnium motus tam ad præterita quàm ad futura tempora calculari facilè poſſunt. Adjecit & uſus, nimis breviter; neque enim omnium rationem ita reddit ut plenè doceat. Norimbergæ in quarto 1542.

Anno 1543 prodiit Epitomes Almageſti Ptolemei à Georgio Purbachio inchoata, & à Joanne Demonteregio perfecta. Scopus autem authorum in hâc Epitome concinnanda fuit, ut Almageſtum, quod difficulter etiam à doctioribus intelligi poteſt, ſive ob phraſin græcam nonnihil à noſtra abhorrentem, ſive ob aliam cauſam, in hac epitome redderetur facilius. Hæc Epitome ſicut & Almageſtum in tredecim libros dividitur. Proponuntur in primo univerſalia principia circa cœli & terræ figuram & ſitum. Tum quia ſine trigonometria in aſtronomicis progredi nemo poteſt, chordarum, ſeu ſubtenſarum omnium cum diametro comparationem inſtituit, exinde maximam eclypticæ declinationem, & ex eâ angulum ejuſdem cum æquatore obſervat, & ex ea aſcenſiones rectas & declinationes omnes determinat.

Secundus liber. Ortus varietatem, prolixitatem

tem

tem diei, altitudinem poli, umbras ſolis, varioſque in ſphæra angulos pro quâlibet regione conſiderat, ſeu doctrinam primi mobilis tradit.

Tertius liber eſt de ſolis motu annuo, ejus proprietatibus æquinoctiis, ſolſtitiis, de motus medii & veri differentia, eorumque cauſis.

Quartus de motu lunæ præcipuè ex eclypſibus determinando, ſeu de prima motus lunæ inæqualitate.

Quintus de ſecunda motus inæqualitate, & obſervationibus quibus deprehenditur, tum de comparatione diametrorum apparentium ſolis, lunæ & umbræ terræ. Item de parallaxi omnimoda.

Sextus luminarium cognitiones, oppoſitiones, & eclypſes conſiderat.

Septimus motum fixarum in longitudinem determinat.

Octavus ſtellarum fixarum ſitum deſcribit, variamque ad luminaria & planetas habitudinem.

Nonus ſphærarum cœleſtium ordines, planetarum omnium motus medios, & Theoriam Mercurii habet.

Decimus Veneris Theoricam & Martis perficit, generatimque de aliis loquitur.

Undecimus de Jove, & Saturno ſpeciatim agit.

Duodecimus planetarum progreſſum, ſtationum, & regreſſum, variationemque in longitudinem explicat.

Decimus tertius latitudines eorumdem planetarum intuetur. Hæc Epitome bona eſt ſolida, & utilis, veréque Ptolemæi doctrinam faciliorem reddit. Perfectius tamen eſſet Opus ſi dum modum conſtituendi aliquem motum docet, veras obſervationes aut ſuas, aut alienas retuliſſet; ſic enim meliùs totus aſtronomiæ progreſſus apparet, cùm in particulari novæ occurrant difficultates. Hanc methodum in noſtra Aſtronomia uſurpandam cenſuimus.

1544 Prodierunt ſcripta Joannis Regiomontani de Torqueto inſtrumento conſtante circulo verticali & horizontali, quo ſimul altitudo ſyderis, & verticalis obſervatur. De Aſtrolabio armillari regula magna Ptolemaica, baculóque aſtronomico; item de obſervationibus Cometarum aucta Joannis Schoveri Caroloſtadii additionibus.

Item obſervationes motuum ſolis ac ſtellarum. Item libellus Georgii Purbachii de Quadrato geometrico, quæ omnia non ſunt ſatis benè explicata. Norimbergæ apud Joannem Montanum 1544.

1545 Paſchaſius Hamellius Mathematum Regius profeſſor tabulas aſtronomicas Alphonſi Hiſpaniarum Regis in propriam integritatem reſtituit, cum adjectione tabularum ex diverſis authoribus cum uſibus harum tabularum. Adjectæ ſunt in fine tabulæ fixarum ex Gaurico. Opus utile ſi tabulæ Alphonſinæ à cœlo non aberrarent. Pariſiis in quarto 1545.

1546 Lucas Gauricus Geophonenſis ſuper diebus decretoriis quos etiam criticos vocitant, axiomata, ſive aphoriſmi grandes.

In hoc Opere enucleavit pleráque Hipocratis & Galeni theoremata, quæ ex cœleſtium rerum cognitione pendent.

Hic tractatus iſagogicus eſt ad Aſtrologiam, medicis utilis, demonſtrationibus caret, ut omnia opera quæ ad Aſtrologiam judiciariam pertinent. In quarto Romæ 1546.

1547 Joannes de Sacro Boſco libellum edidit de anni ratione ſeu computo eccleſiaſtico.

Quæ dicit ut plurimum ſunt vulgaria, nec benè correctionem adhibet Kalendario. Antuerpiæ in octavo 1547.

1548 Claudii Ptolemæi Peluſienſis Mathematici Operis quadripartiti traductio ab Antonio Gegava. Aſtrologica varia edita à Camerario Græcè & Latinè.

Aſtrologica edita Opuſcula à Thadæo Hagecio. 1. anonimi 2. liber Regum ſeu de ſignificatione planetarum in duodecim domibus. 3. Hermetis 100 Aphoriſmi. 4. Pauli Alexandri rudimenta de natalitiis Græcè, & Latinè.

Item de ſectione Conica orthogona ſeu de parabola, deque ſpeculo uſtorio cum præfatione Gemmæfriſii. Lovanii in quarto 1548.

1548 Joannes Schonerus Opuſculum edidit ſatis bonum de globi uſu aſtriferi. Quod additum eſt in fine tractatus Gemmæfriſii de principiis Aſtronomiæ, & Geographiæ Antuerpiæ 1548.

1549 Prodierunt Meſſahalæ antiquiſſimi, ac laudatiſſimi inter Arabas aſtrologos libri tres, opera Joachimi Helleri Norimbergenſium Mathematici.

Liber primus de revolutionibus annorum mundi, de dominis anni, & loco ejus, de diviſione climatum, de natura ventorum, de eclypſi.

Secundus liber de ſignificationibus planetarum in nativitatibus.

Tertius de receptione unius planetæ ab alio.

In eodem volumine habetur liber Arbohali de judiciis nativitatum. Norimbergæ in quarto 1549.

1549 Meſſahalæ Arabis aſtrologi de elementis & orbibus cœleſtibus liber antiquus typis mandatus, in quo tantum generalia quædam & vulgaria aſtronomiæ placita.

Huic adjectum eſt ſcriptum cujuſdam Hebræi de Aris, ſeu intervallis regnorum, & de diverſis gentium annis & menſibus. Item iiſdem de rebus ſcriptum cujuſdam Saraceni continens præterea præcepta ad uſum tabularum aſtronomicarum utilia. Hæc Chronologiæ prodeſſe poſſunt. Ex veteri codice. Norimbergæ in quarto 1549.

Anno 1550 Guido Bonatus Forolivienſis Mathematicus tractatus decem edidit de Aſtronomia, nempe de judiciaria ratione nativitatum, & aëris tempeſtatum.

In primo tractatus ſcientiam confirmat. In ſecundo agit de diviſione orbis in ſigna duodecim. Tum de domibus planetarum, gaudiis, exaltationibus, detrimentis, fortitudinibus. In tertio de naturis ſeptem planetarum. In quarto de conjunctionibus. In quinto de ſignificatis ſtellarum, & quæſtionibus. In ſexto de judiciis præcipuè de ſingularum domorum judiciis.

Tractatus ſeptem de electionibus, octo de revolutionibus, novem de nativitatibus, decem de mutationibus aëris. Opus immenſum & malè digeſtum.

Additum eſt Centiloquium Aphoriſmorum Claudij Ptolemæi ex Græco in Latinum verſi à Georgio Trapezuntino.

1551 Eraſmus Reynoldus Saveldenſis tabulas Prutenicas compoſuit ex mente Copernici, à quo ſumpſit tantùm obſervationes, & demonſtrationum veſtigia, canones omnes de novo condidit. Ex his tabulis anni magnitudo apparens eclypſis, motus omnes ſupputantur.

Opus arduum benè perfectum: hæc tamen

converſio

converſio temporis in ſexagenas difficiliorem reddit calculum. Tubingæ in quarto 1551.

Anno 1551 acceſſit compendium duodecim domorum cœleſtium, ex novem clariſſimis & vetuſtiſſimis authoribus Arabibus excerptum, nempe Meſſahalla, Aomare, Alkindo, Zaele, Albepait, Dorotheo, Jergi, Ariſtotele, & Ptolemæo, nempe ob oculos ponitur, quidnam ex quolibet domicilio judicium ſumendum ſit, & horum authorum teſtimonio confirmatur authore Petro Liechtentei.

1551 Antonius Miſaldus Monſlucianus Planetologiam edidit rebus aſtronomicis, medicis, & philoſophicis refertam in qua cœleſtium corporum cum humanis, aſtrologiæ cum medicina, ſocietas demonſtratur.

In hoc Opere multa eſt eruditio ex antiquis fabulis deducta, multa tamen vana ut ſunt pleráque quæ ad aſtrologiam ſpectant. In quarto Lugduni 1551.

1551 Joannis Regiomontani tabulæ directionum & profectionum prodiere, non tam utiles aſtrologiæ indiciariæ, quam tabulis & inſtrumentis aſtronomicis conficiendis. Item tabulæ ſinuum per ſingula minuta univerſam ſphæricorum doctrinam comprehendentem, cum ſuccincta methodo procedendi in directionibus, illuſtrata exemplis, obſervato diligenti ordine.

Tum tabulas 54 poſitionum ad directiones, quarum uſus ſe extendit ad climata 4.5.6.7.8.9.

Opus optimum quantum materia permittit.

Joannes Angeli Ephemerides compoſuit pro anno 1494. & ſequentibus ſex. Item aſtrolabium planum in tabulis aſcendens, continens qualibet hora & minuto æquationes domorum cœleſtium. Moram nati in utero. Cum quodam tractatu nativitatum, in quo prædictiones figuris variis illuſtrantur. Item horas inæquales pro quolibet clymate mundi. Hoc ultimum Opus à Joanne Angeli elaboratum eſt 1494. Opus obſcurum.

1551 Andræas Perlachius Stirus Medicus & in Academia Viennenſi ordinarius Mathematicus Commentaria Ephemeridum ita ſcripſit, ut quiſque ſine præceptore integram Ephemeridum artem & uſum conſequi poſſet. Hæc commentaria quatuor habent partes. Prima nonnulla docet ad Kalendarium ſpectantia. Secunda motum planetarum, ejuſque proprietates, eclypſes exhibet. Tertia multa problemata primi Mobilis ſolvit, ut longitudinem diei & ex ea maximam elevationem. Quarta pars thema cœleſte erigit, cæteraſque leges Aſtrologiæ judiciariæ proponit.

Opus non contemnendum eò quòd clarè procedat. Viennæ Auſtriæ in quarto 1551.

Anno 1554 prodierunt tabulæ ampliſſimæ ſecundum methodum & hypotheſes Alphonſi, nempe tabulæ octoginta quinque, authoribus Joanne Blanchino, Nicolao Pragneto, Georgio Purbachio.

His tabulis præmiſſi ſunt 17 canones in Purbachii tabulas. In toto volumine nihil aliud continetur præter tabulas; Opus immenſum, decurſu tamen temporis Alphonſinæ tabulæ deprehenſæ ſunt, in planetis præſertim minoribus, à cœlo aberrare.

1554 Lucius Bellantius Senenſis Mathematicus, Artium & Medicinæ Doctor, librum edidit quæſtionum de Aſtrologica veritate. Hic liber editus eſt poſt mortem Pici Mirandulani. Continet viginti quæſtiones. Prima de ſcientia Aſtrologiæ. Secunda de cœlorum dominio. Tertia de natura partium cœli. Quarta de numero ſphærarum. Quinta de primo mobili. Sexta de octava ſphæra, & conſtellationibus. Septima de planetis. Octava de ſphæricis planetarum. Nona de aſpectibus. Decima de autiſtiis. Undecima de conjunctionibus. Duodecima de domibus. Decima tertia de principiis univerſalibus. Decima quarta de principiis particularibus. Decima quinta de ſignificatoribus. Decima ſexta de virtute dirigibili. Decima ſeptima de ponte fortunæ. Decima octava de triplicitatibus. Decima nona de colligatione ſequentium, & præcedentium figurarum. Vigeſima de partibus terræ.

Idem librum compoſuit reſponſionum ad objectiones Joannis Pici Mirandulani. Reſpondet duodecim libris objectionum.

Eodem tempore Gabriel Pirouanus Philoſophus de aſtrologiæ veritate librum edidit.

1554 Joannes Schonerus Caroloſtadius profeſſor Mathematum Norimbergæ, ſcripſit tres libros de judiciis nativitatum.

In primo proponit nonnulla generalia, conſideranda ante judicium nativitatis, nempe de parentibus natis, fratribus & ſororibus, de forma & figura, infirmitatibus, de fortuna, conjugiis, amicitiis, peregrinationibus.

In ſecundo libro agit de ſignificatis domorum, triplicitatum partium, tum de conjunctionibus, & aſpectibus planetarum, de ſignificatis dominorum in ſingulis domibus, planetarum ſimiliter in ſingulis domibus, vel in propria domo.

In tertio de eventuris nato per ſingulas ætates, de gubernatoribus ſeptem ætatum, de vitæ ſpatio, de progreſſionibus, de Styleg. Algebutar. Alfridariis, Cronocratoribus, de domino orbis. De tranſitu planetarum, de eligendis temporibus actionum, de veſtium & equorum coloribus nato idoneis, qui dies felices & infelices. His addita eſt initio præfatio Philippi Melancthonis in hos libros de judiciis.

1554 Nicolaus Simus Mathematicus Bononienſis Ephemerides compoſuit ab anno Chriſti 1554 ad 1568. Cum canonibus uſum harum Ephemeridum explicantibus, & tractatu de electionibus, mutationibus aëris, & annorum revolutionibus.

Acceſſit tabula Joannis Baptiſtæ Placentini juxta motum horarium planetarum, ad inveniendum eorum locum in horis à meridie. Venetiis in quarto 1554.

1555 Hyeronimus Cardanus Mediolanenſis Medicus in Claudii Ptolemæi Pelufienſis quatuor libros de aſtrorum indiciis ſeu quadripartitæ conſtructionis commentarium edidit, cum duodecim exemplis, & aliis notatu dignis, ad hanc ſcientiam rectè exercendam, & eclypſeos quam graviſſima peſtis ſubſecuta eſt. Lugduni in octavo 1555.

1556 Cyprianus Leonitius à Leonicia Bohemus Hradecenſis Electoris Palatini Rheni Mathematicus, cum vidiſſet tabulas Purbachii, Alphonſinas ſcilicet, in eclypſium ſupputatione ſemihorâ ſæpe integra à cœlo diſſentire, illas correxit, & in ſpecimen Opus edidit, in quo eclypſes exhibuit ab anno 1556. ad annum 1606. tabulas tamen non edidit. Prædictiones Aſtrologicas harum eclypſium adjecit.

Opus hoc utile eſſe non poteſt niſi ad exemplum, nempe ut quis ſe in ſupputandis eclypſibus exerceat.

1556

Anno 1556 Joannes Garcæus Junior tractatum edidit de erigendis figuris cœli, verificationibus, revolutionibus & directionibus. Vvitembergæ in octavo 1556.

Anno 1556 Eraſmus Oſualdus Screctenſuſius commentarium compoſuit in novas theoricas planetarum Georgii Purbachii, quas etiam illuſtravit brevibus tabulis, pro eliciendis tum mediis, tum veris motibus omnium planetarum, tabulis item conjunctionum & ecclypſium. Addidit item varia exempla & methodum conficiendarum tabularum. Opus hoc in tres partes dividitur.

Prima tractat de orbibus ex quibus ſingulæ planetarum ſphæræ componuntur, & de horum motuum proprietatibus, & de neceſſariis ad calculandos tres motus.

Secunda agit de paſſionibus ſingulorum planetarum.

Tertia de ſphæræ octavæ ſeu cœli ſtelliferi motibus. Hic Commentarius clariſſimus eſt & tabulæ adjectæ ad praxin ſeu ſupputationem motuum ſunt aptiſſimæ.

Totum Opus tyronibus accommodatum. In quo Aſtronomiam addiſcere poſſunt. Sequitur autem ipſum Purbachij ordinem.

Addita eſt in fine Philippi Imſeri Medici & & Mathematici tabula ſeu catalogus omnium orbium, & linearum quæ in his theoriis occurrunt, quæ in duobus foliis quaſi per epitomen totam hanc doctrinam complectitur.

Anno 1557 Cyprianus Leonitius Bohemus Palatini Rheni Mathematicus, Ephemerides ampliſſimas edidit pro annis 50. ab anno 1556. ad 1606. & methodum addidit conſtruendi cœleſtis thematis, & tabulas ad id præſtandum neceſſarias, cum locis ſtellarum fixarum. Ab anno 1349. ad annum 2029. Sunt addita ſchemata eclypſium & pro ſingulis themata quatuor anni temporum. Opus immenſi laboris ſine magno operæ pretio; cùm elapſis his annis, liber hic magna ex parte ſit inutilis. Exceptis nonnullis tabulis domorum cœleſtium, aliiſque ad primi mobilis motum pertinentibus, & praxibus erigendorum thematum.

1557 Lucas Gauricus Geophonenſis Epiſcopus tabulas primi Mobilis, quas directionum vocăt, edidit, cum problematibus facillimis; & tractatum indicandi omnium aphetarum apoteleſmata.

Hoc Opus ſatis clarum, & bonum quantum patitur aſtrologiæ judiciariæ vanitas. In quarto Romæ 1557.

1557 Lucas Gauricus Geophonenſis Epiſcopus tabulas directionum edidit cum problematibus facillimis, quibus annectitur tractatus indicandi omnium aphetarum apoteleſmata.

Opus hoc ad judiciariam ſpectat, habétque multa ad prædictionem ſpectantia. In quarto Romæ 1557.

Idem edidit tractatum Aſtrologiæ judiciariæ de nativitate virorum ac mulierum, ex Ptolemæo & aliis authoribus digniſſimis, cum multis aphoriſmis expertis & probatis ab eodem. Addito in fine libello Antonii de Montulino de eadem re cum annotationibus Joannis de Regio monte. In quarto Norimbergæ 1540.

1557 Georgius Purbachius Germanus theoricas novas planetarum compoſuit, quas Eraſmus Reinholdus Salveldenſis pluribus figuris auxit, & ſcholiis illuſtravit. Incipit à theorica ſolis, tum lunæ, tum trium ſuperiorum planetarum Veneris & Mercurij, tum de paſſionibus planetarũ diſſerit.

Opus quidem bonum, quod excellentius foret ſi ad particularia deſcendiſſet, & his tabulis theoricis, tabulas ſubjeciſſet ad normam earum theoricarum conformatas. Poſſunt enim excogitari innumeræ hujuſmodi theoricæ; ſed difficultas eſt, ut motus cœleſtes iis ad amuſſim reſpondeant. Pariſiis in octavo 1557.

1558 Franciſcus Maurolycus Siculus Abbas Meſſanenſis Coſmographiam edidit, in tres dialogos diſtinctam, in quibus de forma, ſitu, numeróque tam cœlorum, quàm elementorum, aliiſque rebus ad Aſtronomica rudimenta ſpectantibus ſatis diſſeritur.

Opus quidem optimum, non tamen ſatis ordinatum & nimis fusè, utpote per dialogiſmum explicatum. Pariſiis in octavo 1558.

1559 Arati phænomena cum Theonis ſcholiis, & Leontii mechanici de ſphæra Arati. Impreſſa ſunt Græcè Pariſiis in quarto 1559.

1552 Lucas Gauricus Geophonenſis Epiſcopus Civitatenſis Opus Aſtrologicum compoſuit, in quo agitur de præteritis multorum hominum accidentibus per proprias eorum genituras examinatis, quorum exemplis conſimilibus, unus quiſque vaticinari poterit de futuris.

Dividitur in ſex tractatus, Primus civitatum & quorumdam oppidorum figuras cœleſtes, & eorum eventus proponit.

Secundus ſummorum Pontificum, Cardinalium, & quorumdam prælatorum ſchemata atque apoteleſmata.

Tertius Imperatorum, Regum, Principum ſchema & decreta.

Quartus illuſtrium virorum, philoſophorum, poëtarum, oratorum, muſicorum, pictorum figuras cœleſtes & eventus.

Quintus de violenta ſtrage peremptis.

Sextus de vitiatis, & mutilatis.

Vanitas hujus artis eluceſſit, in eo quòd ejus placita & ſibi ipſis contraria, ut nulla ſit genitura, quæ ad quoſlibet eventus aptari non poſſit. Venetiis in quarto 1552.

1553 Orontius Finæus Delphinas Mathematicus Regius Lutetiæ profeſſor de duodecim cœli domiciliis, & horis inæqualibus tractatum ſpectantem ad Aſtrologiam judiciarum edidit.

Ejuſdem Canonum Aſtronomicorum libri duo. In primo doctrinam primi Mobilis tradit. In ſecundo de motu particulari planetarum agit per varia problemata. Videtur non ſatis exactè tractare Aſtronomiam, ſed tantum aliquas praxes & uſus tabularum. Lutetiæ in quarto 1553.

1553 Guillelmus Poſtellus videtur ſtellas in alium ordinem digerere voluiſſe, ita ut ſub nomine unius ſigni comprehenderentur; quæ quidem ratio diviſionis legitima videbatur, ſed propter aſſuetudinem res videtur ſucceſſu caruiſſe. Prodiit ejus Opuſculum Pariſiis 1553.

1553 Gaſpar Peucerus compoſuit elementa doctrinæ de circulis cœleſtibus, & primo motu, in quo nempe explicat principia Aſtronomiæ. Hoc Opus nihil habet quod ubivis non reperias, nec eſt benè ordinatum. Vvitembergæ in octavo 1553.

1560 Valentinus Nabod Senatus Colonienſis Mathematicus ordinarius, edidit Enarrationem elementorum Aſtrologiæ, in qua præter Alcabicii qui Arabum doctrinam compendio prodidit, expoſitionem, atque cum Ptolemæi principiis collationem, rejectis ſortilegiis & abſurdis, de veræ artis præceptis, origine & uſu diſſeritur. Coloniæ 1560.

1560 Jacobus Tuſanus Regius litterarum Græcorum profeſſor, in ſphæram Procli annotatiunculas exigui momenti edidit. Pariſiis in octavo 1560.

Anno 1561 Daniel Sanbech Noviomagus tractatum edidit, propriè loquendo de uſu quadrantis aſtronomici in ſeptem ſectiones diviſum. In prima docet modum obſervandorum ſyderum ope quadrantis. In ſecunda affert multa circa doctrinam primi Mobilis. In tertia loquitur de horologiis ſcioteticis. In quarta de generalibus magnitudinum dimenſionibus. In quinta de libellationibus. In ſexta de ejaculatione globorum ex tormentis bellicis. In ſeptima de obſervatione geographica. In pleriſque hic author demonſtrationibus caret, præcipuè in horologiis ſcioteticis. In dirigendis tormentis bellicis fœdiſſimè hallucinatur, dum exiſtimat in jactu elevato globos perpendiculariter cadere. Habet tamen multa bona, licet malè explicata.

1561 Samuel Syderocrates Bretannos ordinarius Mathematicus Tubingæ, prognoſticon edidit pro anno 1561. In quo pro ſingulis noviluniis, pleniluniis & quadraturis, ex ſyderum aſpectibus multa prædicit.

Opus exigui momenti. Tubingæ in quarto 1561.

1564 Petrus Pitatus Veronenſis in Academia Philarginnica Matheſeos profeſſor compendium edidit ſuper annua ſolaris, atque lunaris anni quantitate, paſchalis item ſolemnitatis, juxta veteres Eccleſiæ canones recognitione, Romanique Kalendarii inſtauratione cum nova paſchalis celebritatis forma Pontificis Maximi Pii IV. juſſu executioni mandanda. De ortu quoque & occaſu ſtellarum.

Opus bonum & utile, non ſatis tamen benè explicatum. Venetiis in quarto 1564.

Idem Petrus Pitatus compoſuit Canones Paſchales noviluniorum, & pleniluniorum. In quarto Venetiis 1536.

1566 Nicolaus Copernicus Torinenſis de revolutione orbium cœleſtium libros ſex compoſuit.

In primo agit de figura mundi & terræ. In quo quæſtionem celebrem movet, an terræ competat motus, ſolvitque objectiones, ſeu rationes à Ptolemæo allatas pro quiete telluris, exinde triplicem telluris motum explicat. Denique Ptolemæum imitatus nonnulla ad triangulorum ſolutionem neceſſaria affert, in quibus multa addit de ſuo, quamvis ejus trignometria perfecta non ſit.

In ſecundo libro doctrinam primi Mobilis tradit, nempe agit de circulis cœleſtibus, obliquitate Zodiaci maxima, de angulis trium circulorum Eclypticæ, æquatoris & meridiani, de longitudine, latitudine, declinatione, aſcenſione recta, & obliqua, de maxima die, de ortu, & occaſu ſyderum, de eorum locis determinandis.

Tertius eſt de ſole, primóque inæqualem motum præceſſionis æquinoctiorum conſiderat. Item de mutatione maximæ declinationis Eclypticæ, quorum explicatio mediam hujus libri partem obtinet. Hi tamen duo motus à pleriſque rejiciuntur, nempe ut introducti ex erroneis antiquorum obſervationibus. Agit exinde de ſolis aut potius terræ motu in eccentrico. Item de mutatione Apogæi, & eccentricitatis.

Quartus circa lunæ motum verſatur, rejicitque hypotheſes antiquas; conſtituit duplicem ejus anomaliam in longitudinem, modum aſſignat conſtituendi proſtaphæreſes & locum ejus ſupputandi. Motum item latitudinis definit, & ad particularia deſcendit, ſolis & terræ diſtantias, diametros apparentes, parallaxin, conjunctiones, eclypſes.

Quintus de motu in longitudinem quinque reliquorum planetarum, eorumque anomaliis, de directionibus, ſtationibus, regreſſionibus, quas ex motu telluris patiuntur.

Sextus motum in latitudinem quinque minorum planetarum conſiderat, & Mercurii deviationem. Denique ordo ferè idem eſt qui in Almageſto Ptolemæi. Et ſicut Ptolemæus traditos ab hyparcho motus examinat. Ita etiam Copernicus traditos à Ptolemæo.

Quamvis Copernicus non fuerit inventor hypotheſis quæ motum telluri affingit, quam ſcimus fuiſſe Ariſtarchi Samii, magnam tamen laudem meretur, quod eam concinnarit, & in particularibus accidentibus, eam ad Aſtronomorum obſervationes exegerit. Collapſam ferè ſuo tempore Aſtronomiam reſtituit, hancque hypotheſin ſimpliciſſimam, ferè totam condidit; addita tamen ſunt poſt eum multa argumenta ad eam confirmandam, præcipuè à Galilæo & aliis, meliuſque adhuc totum hoc Syſtema à Bulialdo conſtitutum eſt. Copernicus inter præſtantiores Aſtronomos recenſetur.

1567 Conradus Daſipodius Elementa Aſtronomica compoſuit, in quo opere fere ſolas aliquorum circulorum definitiones tradidit. Fecit item Aſtronomiam, in qua paulò uberiùs de hac materia diſſerit. Nempe ea tradit quæ communiter, in introductione ad Geographicam traduntur. Deſcribit item conſtellationes. Argentorati in octavo 1567.

1567 Gilbertus Genebrardus Theologus Pariſienſis Chronologiam brevem ab initio mundi ad Chriſtum, ex Scripturis, & veterum Hebræorum Annalibus deſumptam edidit; quod Opus potiùs hiſtoricum eſt quàm mathematicum.

Anno 1570 Joannes Garcæus Aſtrologiam genethlialogicam edidit ſeu Aſtrologiæ methodum, in qua ſecundum doctrinam Ptolemæi traditur ratio facillima genituras quaſcumque indicandi.

Opus eſt inordinatum, praxes multas & exempla geniturarum continens, præcepta malè explicans niſi per praxin. Videtur fuiſſe Mathematicus Electoris Saxoniæ. Exempla pluſquam mediam operis partem obtinent.

1570 Jo. Francus Offuſius Opuſculum edidit de divina Aſtrorum facultate in larvatam Aſtrologiam, in quo quæ ad mutationes aëris pertinent ex Aſtris conjicere nititur, qui ſcopus optimus eſt, & laude dignus, puto tamen eum non attingere. Pariſiis in quarto 1570.

1571 Franciſcus Maurolycus Abbas Meſſanenſis edidit computum Eccleſiaſticum valdè brevem & ſuccinctum. Coloniæ Agrippinæ in octavo 1571.

1571 Gaſpar Peucerus in Academia Vvitembergenſi profeſſor hypotheſes aſtronomicas ſeu theoricas planetarum ex Ptolemæi doctrina ad obſervationes Nicolai Copernici & Canones motuum ab eo conditos accommodavit. Primò theoricas in genere explicat, tum in particulari ſolis, exinde lunæ, tum trium ſuperiorum planetarum in longitudinem Veneris, & Mercurii, motum item in latitudinem, paſſiones planetarum, præcipuè

eas

eas quas per reſpectum ad ſolem haberet. Denique de motu octavæ ſphæræ. Tractatus hîc ſatis clarè explicat proprietates hypotheſeon non tamen in particulari. Has adaptat obſervationibus, nec ultimo motus conſtituit. Vvitembergæ in octavo 1571.

1572 Ariſtarchi Samii de magnitudinibus & diſtantiis ſolis & lunæ librum edidit cum Pappi Alexandrini explicationibus quibuſdam Federicus Commandinus Urbinas, in latinum vertit, & Commentariis illuſtravit. Piſauri in quarto 1572.

1573 Thomas Digeſcus Nobilis Cantienſis Alas ſeu ſcalas Aſtronomicas edidit, in quo opere circa Caſſiopeiæ, parallaxin & diſtantiam inveniendam præcipuè laborat, ſecundùm principia Regiomontani & aliorum Aſtronomorum, datque bonas praxes obſervandi hujuſmodi phænomena. Opus utile, quod ad alia viam aperit. Huic operi additus eſt parallacticæ commentationis & praxeos Nucleus, authore Joanne Dee Londinenſi. Londini in quarto 1573.

1573 Cyprianus Leonitius à Leonicia Bohemus, Hradecenſis Mathematicus, Hiſtoricam enarrationem compoſuit de magnis conjunctionibus ſuperiorum planetarum, ſolis defectionibus, & cometis. Londini in quarto 1575.

Ejuſdem prognoſticon ab anno 1564 ad viginti annos, & conjunctionibus ſuperiorum planetarum, eclypſibus aliiſque ejuſmodi deſumptum.

Idem tabulas poſitionum pro variis poli elevationibus, ad directiones neceſſariò pertinentes ſupputavit, cum tabulis aſcenſionum obliquarum. Opus immenſi laboris.

1575 Alexander Picolomini Senenſis ſphæram mundi compoſuit Italicè in libros ſex diviſam. In primo ſolas habet communes notiones, linearum, angulorum, ſuperficierum corporum, & præcipuè ſphæricarum. In ſecundo agit de numero ſphærarum cœleſtium. Tum probat terram in medio immobilem eſſe, cœlos autem moveri, ſphæricos eſſe, & terram.

In tertio de decem circulis ſphæræ materialis, de æquinoctiali & polis ejus, de Zodiaco, ejus officio, diviſione, polis, de coluro utróque, de meridiano horizonte recto, de tropicis & polaribus.

In quarto de Zonis, de ortu ſtellarum vario, de diverſitate dierum artificialium, de crepuſculo, de horis planetariis.

In quinto de habitantibus in ſphæra recta, de aliis habitationibus, & earum proprietatibus de climatibus.

In ſexto de eclypſibus, de annulo Aſtronomico, de magnitudine terræ, & cœli.

Ejuſdem tractatus de ſtellis fixis cum Kalendario, in quo ſtellæ ſecundum dies ſunt diſtributæ.

Ejuſdem diſſertatio an in Globo terraqueo plus ſit terræ quam aquæ.

In toto hoc opere nihil invenitur niſi doctrina communis, nimis fusè tractata. In quarto Venetiis 1573.

Anno 1575 Jacobus Cheyneius ab Arnage Scotus, Duaci Matheſeon profeſſor, de priori Aſtronomiæ parte, ſcilicet de ſphæra duos libros ſcripſit. In quorum primo de circulis diſſerit. In ſecundo de ſyderibus, eorumque ortu & occaſu. Adjecit & duo Opuſcula, unum de Globi cœleſtis fabrica, alterum de ſphæræ armillaris uſibus.

Quæ profert communia ſunt, non ſatis explicata, utpote ſine ullis figuris. Duaci in octavo 1575.

Anno 1576 prodiit Eraſmi Oſualdi Schreckenfuchſi Auſtrii, Mathematum quondam, & linguæ Hebraicæ in Friburgiorum Schola profeſſoris: Opus poſthumum præcipuarum gentium, Alexandrinorum, Græcorum, Ægyptiorum, Perſarum, Arabum, Hebræorum, & Romanorum Kalendarii rationem continens, & cum anno Juliano collationem. Opus in dialogi formam compoſitum. Primò ergo proponit nonnulla de correctione Kalendarii Romani; exinde loquitur de Kalendario Alexandrinorum, illudque exhibet. Tertiò Kalendaria Græcorum & Atticorum. Quartò Kalendarium Ægyptiorum. Quinto Kalendarium Perſarum. Sexto Kalendarium Arabum. Septimo Kalendarium Hebræorum.

Opus quidem bonum, non tamen ſatis clarè explicatum.

1578 Franciſcus Junctinus Florentinus Theologiæ Doctor Commentaria edidit accuratiſſima in ſphæram de Sacro Boſco. Sequitur autem textum authoris, multáque addit explicationis causâ. Nonnumquam videtur longius excurrere, abſolutè tamen Opus hoc optimum eſt. Lugduni in octavo duobus tomis 1578.

Anno 1560 Joannes Stadius Leonnouthesius Regius, & Ducis Sabaudiæ Mathematicus Tabulas Bergenſes æquabilis & apparentis motus orbium cœleſtium Coloniæ Agrippinæ edidit, dictas Bergenſes, quod domino Roberto de Bergis cujus domeſticus erat dicatæ eſſent. Decem canones continent hæ tabulæ. Primus quodcumque tempus in ſexagenas convertit. Secundus motus æquabiles exhibet. Tertius epochas. Quartus proſtaphæreſes. Quintus æquabilem motum octavæ ſphæræ in apparentem mutat. Sextus æquabilem ſolis in apparentem mutat. Septimus idem præſtat circa lunæ longitudinem & latitudinem. Octavus æquat dies. Nonus quinque Planetarum motus, & octavæ ſphæræ conſiderat. Decimus planetarum ſtationes, regreſſus, & latitudinem exhibet. Habet item motus æquabiles planetarum. Denique tabulas reſolutas, quibus motus æquabiles annis Julianis reſpondent.

Additus eſt Commentarius fixarum. Motus earum, ortus, occaſus, cæteraſque affectiones exhibens, tum prognoſtica tàm univerſalia temporum, quam particularia nativitatum complectens.

Deficit hoc Opus, quòd tabulas ſine theoriis proponat, ſic enim ſolis addiſcitur uſus, cujus ratio ignoratur. Redditúrque tota praxis confuſa, cujus difficile eſt recordari. Procedit ſecundum methodum Alphonſinam.

1580 Michael Moeſtlinus Geoppingenſis Ephemerides conſcripſit ab anno 1577 ad 1590. ex tabulis Prutenicis ad horizontem Tubingenſem, in quibus nihil aliud invenitur præter Ephemerides. Tubingæ in quarto 1580.

1581 Franciſcus Junctinus Florentinus Sereniſſimi Principis Franciſci Valeſii fratris Regis Chriſtianiſſimi Eleemoſinarius ordinarius, edidit ſpeculum Aſtrologiæ, univerſam ſcientiam in varias claſſes digeſtam, duobus tomis complectens. In primo tomo initio habet defenſionem Aſtrologorum; in ſecundo Iſagogicum tractatum ad Aſtrologiam, deinde ponit quadripartiti operis Ptolemæi librum primum & ſecundum, Tertium autem & quartum commentatus eſt; & hic Commentarius pluſquam dimidiam partem tomi obtinet.

Addidit centiloquia Ptolemæi & Hermetis cum Almanſoris propoſitionibus, & Ludovici de Regiis Aſtrologi ſententias, quæ ſunt quatuor Opuſcula.

Adjunxit tractatum ſuum de judiciis nativitatum annotationes. Alium de directionibus. Tertium in quo exempla varia nativitatum profert. Quartum de converſionibus annuis, item de orbe, de peſtilentia cariſtia de bello.

Hoc Opus non eſt benè ordinatum, ſed ſapit compilationem, in qua præter inanitatem materiæ, multum temporis impendatur.

Texit autem Catalogum authorum 100 quibus uſus eſt.

In ſecundo tomo, primò Commentarium habet in Purbachii Theorias planetarum, explicatque fuſè quæ obſcura videbantur, addit ejuſdem Purbachii tabulas, & uſus.

Item Commentarium in tractatum de ſphæra Joannis de Sacro Boſco in quo Commentario refert quatuor Americi Veſputii navigationes, in quibus nihil eſt ad ſcientiam navigationis pertinens.

Item tractatum de ſtellis fixis in quo eſt Catalogus fixarum, item Opuſculum Ptolemæi de ſignificatione fixarum.

Item tractatum de reformatione Kalendarii, qui non eſt alicujus momenti nec rem benè explicat.

Item de ſignificatione eclypſium & cometarum. Author hic in omnibus eſt compilator, & multum confuſus, ita ut in ejus operibus multum ſit confuſionis.

Anno 1583 typis mandatum eſt Pariſiis in octavo Kalendarium Romanum perpetuum, quale ſummus Pontifex edi juſſit.

Gemmafriſius Medicus & Mathematicus compoſuit tractatum de annulo aſtronomico, cujus compoſitionem & uſus explicat. Idem tractatum edidit de uſu globi utriuſque, item alium tractatum de Aſtrolabio univerſali, ſeu in plano coluri ſolſtitiorum, oculo in puncto arietis, aut veri ortus poſito, qui omnes tractatus optimi ſunt. Antuerpiæ in quarto 1584.

1585 Franciſcus Maurolycus Abbas Meſſanenſis multa edidit Opuſcula mathematica, inter quæ primo occurrit de ſphæra liber unus quaſi ad Aſtronomiam Iſagogicus, in quo agit de mundo, axe, polis, æquatore, zodiaco, tropicis, æquinoctiis, ſolſtitiis, de polaribus quinque Zonis, coluris duobus, de horizonte, meridiano almicantharath; De umbris, de loco aſtri, longitudine, latitudine, aſcenſione rectâ, declinatione, de ſphæra recta, obliqua, parallela, de aſcenſionibus rectis & obliquis. Periœcis, Antœcis, Antipodibus, Amphiſciis, longitudinibus & latitudinibus locorum, de occaſu & ortu, die maximâ, climatibus, motu ſolis, lunæ, planetarum directionibus, retrogradationibus, de latitudine planetarum, parallaxi, eclypſibus, de motu octavæ ſphæræ, de numero & ordine ſphærarum. Omnia clarè & breviter ſine figuris, in quo puncto videtur deficere, eò quod imaginationem non formet.

Secundus ejuſdem tractatus eſt computus ecclesiaſticus, in quo agit de temporis diviſione, die, hora, Anno Arabico, Ægyptiaco, menſe, Kalendis, novis idibus, de cyclis, ſolari, de biſſexto, de cyclo aureo ſeu lunari, epactis, de inſtitutione Paſchatis.

Tertius de inſtrumentis aſtronomicis, de quadrato, ejuſque uſibus ad menſurationem, de quadrante ejuſque uſibus in Aſtronomia, habetque aliqua ad analemma pertinentia, de Aſtrolabii deſcriptione, & uſibus, de lineis horariis; quæ omnia ſunt nimis breviter indicata, nec ſufficienter demonſtrata.

Tertius liber totus eſt de ſectionibus conicis. Tractatus hic non eſt ordinatus, idcóque difficilis. Venetiis in quarto.

Quartum tractatum habet de lineis horariis quaſi ex profeſſo, ſeu Gnomonicam in tres libros diviſam.

In primo poſt placita univerſalia tradit horologia quaſi regularia.

In ſecundo libro agit de parrallelis ſignorum, aliiſque in plano horologiis deſcribendis, & ad praxes deſcendit.

1585 Franciſcus Barocius Jacobi filius Patritius Venetus Coſmographiam in quatuor libros diſtributam quaſi Iſagogen ad magnam Ptolemæi conſtructionem compoſuit, in cujus præfatione 84 errores Joannis de Sacro Boſco detegit, præcipuè circa ſignorum aſcenſiones.

In primo libro agit de ſphæra mundi, & de orbibus eam conſtituentibus.

In ſecundo de circulis ſphæræ.

In tertio de ortu & occaſu ſyderum, & climatibus.

In quarto de planetarum orbibus.

Omnia ſatis perſpicuè & benè. Venetiis in octavo 1585.

1589 Prodiere Aſtronomica veterum ſcripta Iſagogica, Græca & Latina Procli ſphæra.

Arati Solenſis phœnomena. Aratus patre natus eſt Athenodoro, matre Leonodora in urbe Ciliciæ Soloe, ſeu Pompeiopoli. Vixit tempore Ptolemæi Philadelphi. Deſcripſit carmine conſtellationes Leontij mechanici. De fabricatione ſphæræ Arati addita eſt Poëtica Interpretatio Arati phænomenon.

Primo authore Maco-Tullio Cicerone.

Secundo Feſti Rufi Avieni.

Tertio Germanici Cæſaris.

Item veterum Poëtarum fragmenta Aſtronomica.

C. Iuli Hygini Poëticon Aſtronomicon. In octavo 1589.

1591 Theodoſii Tripolitæ de diebus & noctibus libri duo, ſcholiis antiquis & figuris illuſtrati, ex Vaticana Bibliotheca deprompti, in linguam Latinam verſi ſunt à Joſepho Auria Neapolitano.

Hoc Opuſculum continet incrementum & decrementum dierum, æqualitatem, & inæqualitatem, quorum omnium circunſtantias omnes explicat. Romæ in quarto 1591.

1591 Thomas Finkius Horoſcopographiam edidit, ſive Aſtrologiam de inveniendo ſtellarum ſitu. In quo habentur tabulæ declinationum, aſcenſionum rectarum, differentiarumque aſcenſionalium generales aſcenſionum obliquarum pro omni gradu' poſitionum, & cœleſtium domorum pro Germania & toto Septentrione, cardinum vero ad elevationem Ranzoniana cum ſolis diario, &c.

Opus magni laboris præcepta pauca complectens nec ita benè explicata, utile tamen iis qui Aſtrologiæ ſtudent, cujus præcepta ſupponit aliunde teneri.

1593 Hyeronymus Diedo Nobilis Venetus Italicè

Italicè ſcripſit anatomiam cœleſtem in qua docet methodum dividendi domos cœleſtes in figura aſtrologica, quærendi directiones, & adæquandi aſpectus planetarum pro menſura horarum, omnium punctorum Zodiaci. Duos libros habet cum tabulis ad Aſtrologiam judiciariam ſpectantibus. Opus ſatis clarum. In quarto Venetiis 1593.

1595 Chriſtophorus Clavius Bambergenſis Societatis Jeſu edidit Opuſculum contra Elenchum Joſephi Scaligeri, & Caſtgationem Kalendariam. In quo ſolidè defendit Kalendarij Romani reformationem contra objectiones Scaligeri. Romæ in octavo 1595.

1595 David Origanus Glacenſis Sileſius Germanus Mathematicus Electoris Academiæ Brandenburgicæ Francofurti ad Viadrum ordinarius profeſſor novas Ephemerides motuum cœleſtium annorum ſexaginta nempe ab anno 1595. ad annum 1655.

Duplici calculo Tychonico & Copernicæo, & variis diverſarum nationum Kalendario accommodatas.

Primus tomus introductorius eſt in tres partes diviſus, prima agit de epochis variis, & modo numerandi annos ab illis, de annis, menſibus, notis vulgaribus annorum, de feſtis, æquatione temporum.

Anno 1596 Joannes Galucius Saloenſis Academicus Venetus Opuſculum edidit de fabrica & uſu hemiſphærii uranici, quo inſtrumento omnia obſervari poſſe contendit cœleſtia phænomena.

Opus hoc in tres partes dividitur. In prima tradit fabricam hujus hemiſphærii. In ſecunda uſus communes. In tertia uſus peculiares trigonometricos & aſtrologicos.

1600 Franciſcus Vieta Fontenæenſis Gallus edidit rationem Kalendarii verè Gregoriani. Item Kalendarium Gregorianum perpetuum. Utrumque Opus bonum eſt, non tamen receptum, eo quòd in eo paſchales lunationes non in omnibus quadrabant iis, quæ tempore Nicænæ Synodi uſurpabantur.Unde cum Clavii lucubrationes ſuis præferri vidit, in graves expoſtulationes in Chriſtophorum Clavium prorupit, in quo graviter deliquit,quòd conteſtationem ſcholaſticam acerbiùs ſit proſecutus.

1602 Natalis Torpolæus Salopienſis tractatum edidit cui titulum appoſuit, Dielides cœlometricæ, ſeu valvæ aſtronomicæ univerſales. Omnia artis totius munera ſephophoretica in duabus tabulis methodo nova continentes, præeunte directionis accuratæ conſummata doctrina.

Prima pars eſt aſtrologica, in quâ habet plurima ad hanc artem ſpectantia, ſed obſcurè. Habet item multa de triangulo peius explicata, & aliquas tabulas, ſuas propoſitiones diverſis nominibus vocat; ſed doctrina in eo contenta non eſt tanti ut quis eam extricet. In quarto Londini 1602.

1601 Jacobus Chriſtmannus Joannis Bergenſis Academiæ Heidelbergenſis in Logicis profeſſor ordinarius, tres libros edidit obſervationum ſolarium, in quibus explicatur verus motus ſolis in Zodiaco, & univerſa doctrina triangulorum ad rationes apparentium cœleſtium accommodatur.

In primo libro deſcribit ſextantem,& triangulũ ſinuoſum, tum de parallaxi & refractione diſſerit. Dat methodos elevationis polaris obſervandæ, Ephemeridem ſolis, & tabulas proſtaphæreſeon, æquationem dierum explicat.

In ſecundo ex doctrina triangulorum profert problemata primi Mobilis, initio proponit hypotheſes & definitiones.

In tertio eadem problemata proſequitur.

Hoc Opus profert inſtrumenta ſine figuris, quæ tamen ſine illis intelligi non poſſunt. Idem præſtat circa hypotheſes, doctrinam triangulorum ſphæricorum nec ſatis explicat, nec ſatis demonſtrat. In quarto Baſilææ.1601.

1602 Henricus Ranzovius Produx Cimbricus Tractatum aſtrologicum compoſuit de genethliacorum thematum judiciis, pro ſingulis accidentibus ex vetuſtis & optimis quibuſcumque authoribus collectum. Francofurti in octavo 1602.

Anno 1602 Tycho Nobilis Danus Aſtronomiæ reſtauratæ mechanicam edidit, in quo opere inſtrumenta aſtronomica, quæ in obſervandis ſyderibus adhibuit deſcribit, eorumque fabricam & uſus proponit. In fine item globum ſuum cœleſtem in quo nempe omnes ſtellæ fixæ ſuis locis reſtitutæ exhibentur, proponit, ejuſque pariter uſus explicat. Opus utiliſſimum ei præſertim qui de cœlo obſervationes facere cupit.

Anno 1603 Joannes Bayerus Rhaynanus Uranometriam edidit omnium aſteriſmorum continentem ſchemata; nova methodo delineata æreis laminis expreſſa.

Opus utile ad addiſcendas ſtellas; in eo ſtellarum longitudinem & latitudinem addiſcere facilè potes. Opus elegans & accuratum.

1503 Lucas Gauricus Geophonenſis Epiſcopus Civitatenſis Kalendarium eccleſiaſticum novum ex ſacris litteris, probatiſque ſanctorum patrum ſynodis excerptum juſſu ſummorum Pontificum Julii ſecundi, Leonis decimi, Clementis ſeptimi,Pauli tertij edidit cum faſtis Julij Cæſaris & alia quamplurima ſcitu digna.

In hoc Opere ſunt multæ tabulæ ſine explicatione ſufficienti; neque enim benè explicat errores veteris Kalendarii. Venetiis in quarto 1503.

1605 Robertus Balforeus Burdigalenſis Cleomedis meteora ex manuſcripto Bibliothecæ Cardinalis Joyoſii latinè vertit. Occaſio ſcribendi fuit,quod Georgius Valla Placentinus illam peſſimè verterat,ita ut ubique erroribus ſcateret addidit & notas. In hoc autem Opere Cleomedes agit de figura terræ, magnitudine & ſitu primo libro, Secundo de cœlo. Habet autem tantum univerſalia principia.

Hæc autem verſio Balforei, & commentarius optimus eſt. In quarto Burdigalæ 1605.

1606 Elias Vinctus brevia ſcholia in ſphæram à Sacro Boſco edidit ſimul cum textu, cui Operi adjunxit Compendium in ſphæram à Pierio Valeriano Bellunenſi editum.

Addidit & demonſtrationem Petri Novii Salacienſis circa climatum inæqualitatem.

Opus facile, & ſatis clarum. Lugduni in quarto 1606.

1606 Joannes Kepler Cæſareæ Majeſtatis Mathematicus Tractatum edidit de ſtella nova in pede Serpentarii,& qui ſub ejus exortum de novo iniit trigono igneo. Acceſſerunt primo de ſtella incognita Cygni Narratio aſtronomica, ſecundo de Jeſu Chriſti nativitate anno natalitio.

In hoc Opere primò multis diſſerit de trigono igneo contra Picum Mirandulanum, tum de tempore magnæ conjunctionis quæ fuit principium hujus trigoni ignei, ad quem ſcilicet hujus ſtellæ exortum

exortum refert, tum de conſtellatione Serpentarii, tum de loco hujus ſyderis, quod putat inter fixas fuiſſe, tum de materia ejuſdem quam comparat cum cometis & cum ſtella anni 1572. cum ſtella cygni.

In hoc Opere multa ſunt vana, præcipuè quæ de trigonis diſſerit, multa alia non ſatis probata. Sed materia difficilis in qua nihil certi dici poteſt. In quarto Pragæ 1606.

1606 Chriſtophorus Clavius Bambergenſis Societatis Jeſu, in ſphæram Joannis de Sacro Boſco, Commentarium ampliſſimum edidit, in quo benè & clarè explicat Aſtronomiæ principia, item & geographiæ. Habet item in eo tractatum de Iſoperimetris. Item tractatum ſatis amplum de creſpuſculis. Plurimas item primi Mobilis tabulas, quæ omnia optima ſunt,nimis tamen fusè ſuo more explicata. In quarto Lugduni, nova editio ab authore recognita & aucta 1606.

1607 Elias Molerius Helvetius Opuſculum edidit, Aſtronomicus epilogiſmus eclypſium ſolis & lunæ annorum 1605 & 1607. Demonſtratur In hoc Opere doctrina de ſupputandis eclypſibus juxta Tabulas Prutenicas. Cui adduntur epilogiſmi planetarum quinque, Saturni, Jovis, Martis Veneris, & Mercurii.

Secunda enarratio de planetarum eccentricis, eorumque deferentibus apogæis, perigæis,æquantibus & epyciclis. Tertia enarratio de ſydere novo annorum 1604 & 1605.

Opus hoc nihil habet, quod commune non ſit. In quarto Genevæ 1607.

1608 Dominus de ſaint Loup Ephemeridem manualem compoſuit, in qua manui & digitis curſum ſolis & lunæ, epactas aliáque ita adaptat, ut facilè inveniri poſſint. Methodus hæc ſublevandæ memoriæ cauſa adinventa eſt, proptereaque utiliſſima eſſe poteſt. Pariſiis in octavo 1608.

1608 Joannes Antonius Maginus Patavinus Matheſeon Bononiæ profeſſor, de aſtrologica ratione ac uſu dierum criticorum ſeu decretoriorum; ac præterea de cognoſcendis, & medendis morbis,ex corporum cœleſtium cognitione,

Opus ad Ephemeridum ſupplementum edidit, & duobus libris diſtinxit.

Quorum primus complectitur Commentarium in Claudii Galeni librum tertium de diebus decretoriis.

Alter agit de legitimo Aſtrologiæ in medicina uſu. Item de annui temporis menſura in directionibus, & de directionibus ipſis ex Valentini Naibodæ ſcriptis. Francofurti in quarto 1608.

1608 Joannes Antonius Maginus Mathematum profeſſor Bononiæ, novas cœleſtium orbium theoricas congruentes cum obſervationibus Copernici compoſuit, in quibus ſingulos motus cœleſtes explicat.

Liber primus omnes motus longitudinis complectitur. Secundus motum latitudinis conſiderat.

Opus quidem abſolutum cui nihil deeſt, niſi ut talibus theoricis motus cœleſtes in particulari aptentur. Moguntiaci in octavo 1608.

1608 Simon Stevinus in tractatu primo ſuorum hypomnematum librum quartum habet de problematis cœleſtibus, nempe totam doctrinam primi Mobilis complectentem: Videtur nonnihil peccare quòd ſæpe non utatur vocibus conſuetis in hac materia, in eodem ſignificatione.

Idem author in hypomnematum parte tertia agit de cœli motu.

Primus liber eſt de planetarum ſyderumquè cælo affixorum motu ex obſervationibus terrâ immotâ deducto.

Secundus de motus planetarum inveſtigatione ex ratiocinio mathematico terra ſtabili & hypotheſi anomaliæ primæ.

Tertius de anomalia ſecunda ubi Copernicææ hypotheſes exprimuntur.

Hæc aſtronomia manca eſt, & imperfecta, nec affert demonſtrationes ad inveniendos omnes motus, item ordinata non eſt atque adeo confuſionem parit.

1608 Georgius Heviſcius Medicus & Mathematicus Commentarium edidit in ſphæram Procli Diadochi ſatis clarum & longum, in quo explicationis gratia multa addit ad aſtronomiam pertinentia.

Huic adjunctus eſt computus eccleſiaſticus cum Kalendario triplici, & prognoſtico tempeſtatum, ex ortu & occaſu ſtellarum. Habet item tabulas aſcenſionum rectarum, obliquarum, quantitatis dierum, declinationum, amplitudinum ortivarum pro elevatione gradus 48. In quarto Auguſtæ Vindelicorum 1609.

Anno 1609 Joannes Antonius Maginus Patavinus Bononiæ publicus Mathematicus primum mobile duodecim libris contentum edidit, in quo habentur varia problemata trigonometrica, gnomonica, geographica, cum magno trigonometrico canone, & magna primi Mobilis tabula ad decades primorum ſcrupulorum per utriumque latus ſupputata.

In primo libro trigonometriam ſphæricam videtur abſolvere. Primò enim docet modum conſtituendi canonis ſinuum, tangentium, & ſecantium.

Secundo triangula ſphærica rectangula ſolvit.

Tertio obliquangula.

In ſecundo agit de aliqua methodo peculiari in qua ope alicujus tabulæ ſibi propriæ ſolvuntur triangula faciliùs. In libro tertio alias praxes tradit ſolvendorum triangulorum ſphæricorum rectangulorum. In quarto obliquangulorum. In quinto problemata geographica ſolvit ad ſphæram rectam pertinentia. In ſexto ad ſphæram obliquam. In ſeptimo problemata gnomonica tradit. In octavo problemata primi mobilis. In nono problemata ad tempus ſpectantia. In undecimo problemata geographica. In duodecimo problemata ad motus planetarum & cometarum ſpectantia. In fine habet duas tabulas valdè amplas ad ſolutionem triangulorum ſecundùm ſuam methodum neceſſarias.

Opus immenſum in quo multæ repetitiones ſunt. Videtur autem non ſatis explicuiſſe uſum & artificium ſuarum tabularum; puto autem quod non faciliùs his tabulis quam communibus logarithmorum triangula ſolvantur. Poterat tota hujus Operis doctrina partem ſextam voluminis non obtinere & clariùs procedere. Fecit item ſecunda mobilia.

1610 Prodierunt Tychonis Brahe Aſtronomiæ progymnaſmata. Primò agit de reſtitutione motuum ſolis & lunæ ſtellarumque inerrantium, & præterea de admiranda nova ſtella Caſſyopeyæ anni 1572.

Doctrina optima, & exquiſitis nixa obſervationibus, ſed inordinata, nec ita ſatis benè explicata. Ejuſdem epiſtolarum aſtronomicarum libri.

Celebris eſt author iſte inter Aſtronomos, cum nullus

Digitized by Google

nullus ſit qui majores expenſas in obſervationibus aſtronomicis ritè peragendis fecerit, unde ut aſtronomiæ reſtitutor ab omnibus habetur. Utrumque Opus in quarto Uraniburgi 1610.

1610 Hyeronimus Zanchius Bergomas Varias divinationum ſpecies refutavit potius theologicè & philoſophicè quam mathematicè.

Thomas item Eraſtus fecit defenſionem libelli Hyeronimi Savonarolæ de aſtrologia divinatrice, adverſus Chriſtophorum Stathmſonem Medicum Coburgenſem. Hanoviæ in octavo 1610.

1610 Prodiit ſphæra Joannis à Sacro Boſco emendata, aucta & illuſtrata, cum ſcholiis Eliæ Vineti Santonis & Franciſci Functini. Item Alberti Heronis & Chriſtophori Clavii brevibus Commentariis.

Huic Operi adjunctum eſt compendium in ſphæram per Pierium Valerianum Bellunenſem, & Petri Novii Salacienſis nonnulla de climatibus.

Opus facile, bonum tamen & utile. Coloniæ Agrippinæ in octavo 1610.

1610 Joannis Kepler Mathematici Cæſarei. Diſſertatio cum Nuncio ſydereo nuper ad Mortales miſſo à Galilæo Galilæi Mathematico Patavino.

Occaſio ſcribendi fuit liber à Galilæo conſcriptus in quo loquebatur de Novis Planetis circa Jovem detectis. Hæc autem novorum planetarum introductio convellere videbatur Joannis Kepleri myſteria, qui totius Aſtronomiæ placita ex corporibus ſolidis duxerat, oſtenderéque conatus fuerat non plures potuiſſe eſſe planetas. Cum ergo illius doctrina hoc Sydereo Nuncio convelleretur, hanc quaſi reſponſionem dedit. In quarto Pragæ 1610.

1611 Nicolaus Mulerius Doctor Medicus & Gymnaſiarcha Leouvardianus edidit tabulas friſicas lunæ ſolares quadruplices è fontibus Claudij Ptolemæi, Regis Alphonſi, Nicolai Copernici & Tychonis Brahe, quibus acceſſere ſolis tabulæ totidem, lunæ item totidem, Tychonis Hypotheſes illuſtratæ, Kalendarium Romanum vetus cum methodo Paſchali emendata.

Hæ tabulæ nihil habent de quinque minoribus planetis, ſolemque tantummodo & lunam ſpectant Ptolemaicæ traduntur in annis Julianis, & annis Nabonaſſari. Commodiſſimè exiſtimantur ad eclypſes indagandas facillimæque conſtruuntur. Suo tempore fideliſſimæ ſunt exiſtimatæ; à multis fuere typis impreſſæ cum multis erratis. Illæ ſunt correctæ quæ initio ſubſcriptæ ſunt authoris chyrographo.

1611 Chriſtophorus Clavius Bambergenſis Societatis Jeſu, in ſphæram de Sacro Boſco Commentarium edidit ſatis amplum, in quo plurima habentur ad aſtronomiam pertinentia. Dividitur in quatuor capita.

In primo explicatur, quid ſit ſphæra, centrum, axis, polus, quot ſint ſphæræ, figura mundi.

In ſecundo de circulis ſphæræ, eorumque officiis.

In tertio de ortu & occaſu ſignorum, diverſitate dierum, diviſione climatum.

In quarto de circulis & motibus planetarum, & cauſis eclypſium. Adjecit plurimas tabulas ad primi Mobilis motum pertinentes, & tractatum de crepuſculis deductum ex analemmate.

Hic tractatus eſt optimus & clarus viamque ad Aſtronomiam aperit, poteritque dici ad Aſtronomiam Iſagogicus.

1612 P. Chriſtophorus Grienbergerus Halienſis Societatis Jeſu edidit, catalogum veteres affixarum longitudines & latitudines conferentem cum novis. Tum imaginum cœleſtium perſpectivam duplicem, alteram raram ex polis mundi in duobus Hemiſphæriis, æquinoctialibus per tabulas aſcenſionum rectarum & declinationum, alteram novam ex mundi centro in diverſis planis globum cœleſtem tangentibus per tabulas particulares. Opus utile in quarto Romæ 1612.

1612 Sethus Calviſius Elenchum edidit Kalendarii Gregoriani, in quo errores qui paſſim in anni quantitate & epactis quæ feſta mobilia vitioſiſſimè determinant, committuntur, manifeſtè demonſtrantur, cum duplici Kalendarii melioris formula.

Hoc Opus in pleriſque nihil probat, & malè totum negotium explicat. Agit cum acrimonia in Clavium indigna homine honeſto. Francofurti in quarto 1612.

Huic elencho abundè reſpondet quatuor libris P. Paulus Guldin Societatis Jeſu, qui librum quintum addidit de ratione ac praxi Kalendarii Eccleſiaſtici Chriſtianorum, & computi Hebræorum.

Tractatus P. Chriſtophori Clavii Bambergenſis in ſphæram Joannis de Sacro Boſco Impreſſus eſt Lugduni. In quarto 1602.

1612 Chriſtophorus Clavius Bambergenſis è Societate Jeſu, Romani Kalendarii à Gregorio decimo tertio reſtituti juſſu ſummi Pontificis Clementis octavi explicationem edidit. Fuit autem unus ex iis qui hujuſmodi correctioni operam ſuam navavit. Lilius tamen præcipuas in ea correctione partes obtinuit.

Occaſio ſcribendi fuit quod in correctione Kalendarii facta ſub Gregorio XIII. ſimpliciter proponeretur ipſa correctio, nec ratio redderetur, ſatis manifeſta cur ita fieri conveniebat. Ex quo, fiebat ut ab hæreticis præcipuè impeteretur; quare ut iis ſimul omnibus reſponderetur, omnibuſque conſtaret quàm ſapienter eſſet inſtituta hæc correctio, juſſit ſummus Pontifex ut ea de re ſcriberet Clavius. Quod hoc Opere præſtat & quaſi de novo totam correctionem inſtituit, nonnihilque priorem correctionem immutat.

In hoc igitur Opere primò proponit compendium novæ reſtitutionis Kalendarii miſſum à Gregorio XIII. ad principes Chriſtianos unà cum Kalendario.

Incipit explicationem ab iis quæ ſacræ litteræ, & Patres de hac materia tradiderunt. Tum rationes cur corrigi debuerit Kalendarium, nempe propter mutationem æquinoctii, & falſitatem aurei numeri. Tum explicat correctiones, præcipuè verò epactas in locum numeri aurei reſtitutas, & modum per eas inveniendorum noviluniorum, tum cyclum ſolarem docet; exinde de feſtis mobilibus loquitur, modoſque varios tradit ſupputandorum pleniluniorum paſchalium.

Habet item brevem computum eccleſiaſticum per digitorum articulos & tabulas traditas.

Addita eſt apologia Kalendarii novi adverſus Michaëlem Moeſtlinum Mathematicum Tubingenſem.

In quo Opere eadem ferè habet quæ in ſuo Kalendario dicta ſunt cum minori ordine, eo quod cogatur reſpondere objectionibus Moeſtlini.

In Kalendario multas habet tabulas inutiles. Doctrina cæteroquin ſolida eſt & bona.

1612 Joſephus Langius Cæſaromontanus Elementale Aſtronomiæ & Theoriæ planetarum edidit, in quo communes tantum notiones & definitiones continentur methodicè digeſtæ. Friburgi in octavo 1612.

1613 Galilæus Galilæi Linceus Florentinus & Mathematicus magni Ducis Hetruriæ ſcripſit Italicè Hiſtoriam & demonſtrationem macularum ſolarium tribus litteris ad Marcum Verzerum ſcriptis.

Additæ ſunt aliæ litteræ ad eumdem Velzerum Apellis poſt tabulam latentis nempe Patris Scheineri è Societate Jeſu, ad eumdem Velzerum de iiſdem Maculis & Jovis ſatellitibus. Romæ in quarto 1613.

Anno 1613 edidit magnum canonem ſinuum jam olim à Georgio Joachimo Rhetico ingenti labore ſopputatum, in quo radius ſupponitur, 1, 00000, 0000, 00000. ad dena quæque ſcrupula quadrantis & pro primo & ultimo gradu quadrantis ad ſingula ſecunda adjunctis differentiis primis, ſecundis, & tertiis, & alia.

Opus immenſi laboris & utilitatis maximæ. In Trigonometria.

1614 P. Chriſtophorus Scheiner Societatis Jeſu Diſquiſitiones mathematicas edidit, de controverſiis & novitatibus aſtronomicis, ſuntque theſes paulò ampliores ad diſputationem. Habent multa curioſa & nova. In quarto Ingolſtaldii 1614.

1614 Auguſtinus Niphus Philoſophus Sueſſanus de Auguriis libros duos edidit. In primo vanitates omnes ab antiquis circa auguria prolatas refert.

Secundo libro cauſas & opiniones quibus hujuſmodi vanitatibus fidem dederunt, reprobat.

Idem de diebus criticis libros duos edidit. Tertium de prognoſticis, in quibus multa ſunt vana, multa tamen utilia ad medicinam.

Huic Operi additus eſt Rodolphi Goglenii medici aſtrologiæ generalis liber unus continens generales quaſdam præceptiones & canones clariſſimè explicatos. In quarto Marpurgi 1614.

1616 Antonius Sanu Ripomarancius Lector publicus Mathematum in Piſana Academia, & Coſmographus, tractatum edidit de cometis, in quo oſtendere conatur cometas cœleſtes eſſe, & in regione elementari produci non poſſe. Antiquos autem aſſumit cometas ut anni 1577. anni 1604. alioſque ex defectu parallaxis in cœlo fuiſſe contendit.

Addidit & aliquod caput & ſphæram ignis & aëream motu circulari viginti quatuor horarum non moveri oſtendit. Florentiæ 1616. in quarto.

1616 P. Redemptus Baranzanus Vercellenſis ex Ordine patrum Paulinorum, Uranoſcopiam ſeu tractatum de cœlo edidit. In prima parte cœleſtia prædicata communiora explicat potius philoſophicè quam mathematicè.

In ſecunda parte agit de particularibus cœlis. Tot enim agnoſcit quot motus. Explicat item principia aſtrologiæ judiciariæ. In fine habet Opuſculũ quo docet methodum conficiendi annuum prognoſticon ſecundum mentem aſtrologorum. Collegit tamen in fine ex variis authoribus prognoſtica mutationum aëris, de motibus cœleſtibus tantum, quaſi in genere loquitur, nempe quaſi philoſophus, neque ad particularia ſatis deſcendit. In quarto Coloniæ Allobrogum 1616.

1617 Joannes Kepler Cæſaris Mathematicus Ephemerides motuum cœleſtium pro quatuor annis compoſuit, incipiendo ab anno 1617. ex obſervationibus Tychonis Brahe, & hypotheſibus ſeu tabulis Rudolphinis ad meridianum Uranopyrgicum. Præmittitur explicatio præſertim pro motu lunæ, in quo recedit à Tychone. Reſpondet Davidi Fabricio, & examinat ejus opiniones circa umbram terræ. Dat etiam rationem cur non obſervet formam Ephemeridum conſuetam.

Adjectæ ſunt Ephemeridi 1617. obſervationes meteorologicæ ad dies ſingulos & aſtronomicæ nonnullæ. Lincei Auſtriæ in quarto 1617.

1617 Nicolaus Mulerius Medicus & Matheſeon profeſſor Groningæ, Nicolai Copernici Torinenſis aſtronomiam inſtauratam libri ſex comprehenſam qui de revolutionibus inſcribuntur, integritati reſtituit notiſque illuſtravit.

Liber primus nonnulla habet generalia circa locum telluris, veteremque opinionem de terra immobili depellere conatur, de triplici motu telluris agit. Habet item nonnulla ad trigonometriam ſpectantia.

Secundus doctrinam primi Mobilis tradit.

Tertius de ſole ejuſque motibus & hypotheſibus, præcipuè de præceſſione æquinoctiorum.

Quartus de lunæ duplici inæqualitate, item de diametris apparentibus ſolis, lunæ & terræ.

Quintus de motibus quinque planetarum in longitudinem.

Sextus de motu in latitudinem.

In fine additur aſtronomicarum obſervationum theſaurus.

Notæ cum calculo à Mulerio additæ hanc doctrinam clariorem reddunt. Amſterodami in quarto 1617.

1617 Joannes Antonius Maginus Patavinus profeſſor Mathematicarum in Collegio Bononienſi hanc Scaligeri Diatribam confutat, ſicut nova quædam dogmata de ſtella polari, & mutatione æquinoctiorum & ſtellarum fixarum immobilitate, & variis aliis rebus aſtronomicis.

Puto tamen hic altercari de re nullius momenti. Oſtendimus enim per ſolam mutationem poli mundi, nempe ut circa aliud punctum phyſicum & reale cœlum moveretur explicari poſſe facilè motum ſtellarum in conſequentia, cum perinde ſit aut ſtellas promovere in conſequentia aut ſectionem vernam in antecedentia retrahere. In quarto Romæ 1617.

1617 Chriſtophorus Scheiner Societatis Jeſu, Opuſculum edidit de refractionibus cœleſtibus, ſine ſolis ellyptici phænomenon illuſtravit, variaſque aſtronomorum circa hanc materiam difficultates ſolvit. Opus eſt in quo multa circa hanc materiam & circa tubum opticum optima continentur, non tamen ſatis ordinata. Ingolſtadii in quarto 1617.

1618 Villebrordus Snellius publicavit cœli & ſyderum haſſiacas illuſtriſſimi Principis Vvillelmi Haſſiæ Langravii auſpiciis quondam inſtitutum.

Item Spicilegium biennale ex obſervationibus Bohemicis Tychonis Brahe.

Item obſervationes Noribergicas Joannis Regiomontani & Bernardi Vvalteri.

In toto hoc Opere præter obſervationes nihil aliud habes. In quarto Lugduni Batavorum 1618.

1618 Saulnier Medicus & Interpres Principis Condæi Coſmologiam edidit, ſeu tractatum de mundo cœleſti, & terreſtri, diviſum in tres partes, Prima eſt de aſtronomia & ſpæra, ſecunda de

geographia,

geographia, tertia de Kalendario. Tota eius aſtronomia conſiſtit in recenſendis conſtellationibus, & enarrandis breviter fabulis.

Quæ habet de geographia pauca ſunt & minuta pariter de Kalendario pauca explicat, quare totus tractatus eſt parvi momenti. Pariſiis in octavo Gallicè 1618.

1619 Philippus Lansbergius progymnaſmatum aſtronomiæ reſtitutæ librum primum edidit de motu ſolis, in quo novam profert ſolis hypotheſin, quæ nempe mutationem excentricitatis admittat. Contendit autem ſuam hypotheſin omni ſæculo convenire. Difficiliorem tamen calculum habet ob converſionem in ſexagenas.

Opus optimum & convenientibus tabulis inſtructum Middelburgi in quarto 1619.

1619 Joannes Keplerus Imperatoris Mathematicus de Cometis tres libros compoſuit. Primum aſtronomicum theoremata continentem de motu cometarum, & demonſtrationem novam & paradoxon præcipuè verò de motu quem rectum eſſe contendit & oſtendit.

Secundum Phyſicum continentem phiſiologiam cometarum. Hic liber non eſt adeò bonus nec probabilia continet. Tertium aſtrologicum de ſignificatione cometarum annorum 1607. & 1618. Auguſtæ Vindelicorum in quarto 1619.

1619 Villebrordus Snellius deſcripſit cometam anni 1618. ejuſque à terra diſtantiam tradidit, cæteraſque circumſtantias tum de ejus natura, & materia diſputavit breviter.

Huic acceſſit Chriſtophori Rothmani Vvillelmi Haſſiæ Principis Mathematici deſcriptio accurata cometæ anni 1585. Lugduni Batavorum.

1620 Joſephus Blancanus Bononienſis è Societate Jeſu, Sphæram mundi ſeu Coſmographiam demonſtrativam facili modo compoſuit.

Pars prima, Apparatus ad ſphæram.

Pars ſecunda, Explicatio ſphæræ materialis ac mundanæ ſimul, in qua de mundi loco, motu, figura, quantitate, lumine, & umbra, tum de partis elementaris loco, motu & figura. Præcipuè verò de terra, tum de mari & aëre.

In ſectione ſecunda agit de cœlo traditque aſtronomiæ principia in tractatu primo, in ſecundo de luna, tertio de ſole, quarto de maculis ſolis, quinto de mercurio, ſexto de venere, ſeptimo de marte, octavo de jove, nono de jovis comitibus, decimo de ſaturno, undecimo de cometis, duodecimo de firmamento, decimo tertio de ſtellis novis.

Habet item appendicem de uſu ſphæræ materialis.

Item additamentum, ſeu brevem introductionem ad Geographiam.

Item apparatum ad Mathematicas ad diſcendas & promovendas.

Hæc omnia Opera bona ſunt & ſolida. In quarto Bononiæ 1620.

1621 Chriſtianus Longomontanus profeſſor Mathematum in Academia Haunienſi Aſtronomiam Danicam edidit in duas partes diviſam.

Prior doctrinam de diurna apparente ſiderum revolutione ſuper ſphæra armillari veterum inſtaurata duobus libris explicat.

In primo agit de triangulorum doctrina, item compoſitionem ſphæræ materialis explicat.

In ſecundo problemata primi mobilis ſolvit.

Secunda pars theorias planetarum duobus libris complectitur. Prior poſt deſcriptionem & comparationem triplicis hypotheſeos veteris Ptolemaicæ, Copernicanæ, & recentis Tychonis Brahe, agit de motibus apparentibus ſtellarum fixarum, item ſolis & lunæ motibus omnibus ſæculo accommodatis una cum doctrina Eclypſium & uſu lunæ peculiari.

Poſterior agit de motibus quinque reliquorum planetarum, ad cœleſtes apparentias ſimiliter reſtitutis.

Cum appendice de aſcititiis cœli phænomenis ſeu de Stellis novis & Cometis. Hæc aſtronomia perfecta eſt obſervationibus exactis nixa. In quarto Amſterodami 1621.

Anno 1621 idem Joannes Kepler Prodromum edidit diſſertationum Coſmographicarum, nempe myſterium Coſmographicum de admirabili proportione orbium cœleſtium, déque cauſis numeri cœlorum magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis, & propriis demonſtratum, per quinque corpora regularia. Hic libellus jam fuit in lucem editus anno 1596.

Hoc Opus eſt male compactum & ſine ordine. Neque ullam potui in eo deprehendere demonſtrationem quæ ad principale inſtitutum aliquid faceret. Ideóque non miror quòd epiſtola apologetica opus habuerit adverſus Robertum de Fluctibus Medicum Oxonienſem qui tale Opus jure reprehenderat.

1622 P. Georgius Schonbergerus è Societate Jeſu demonſtrationem & conſtructionem horologiorum radio recto refracto in aqua, reflexo in ſpeculo ſolo magnete horas aſtronomicas, Italicas Babylonicas indicantium compoſuit.

Pars prima agit de refractis in aqua, nempe horologium aſtronomicum, Italicum, Babylonicum refractum in plano horizontali in cylindro, in cono, in cubo.

Secunda pars de reflexis in quocumque plano verticali, ſpeculo pariter verticali, vel horologium horizontale. Item in laqueari, in cylindro concavo, quod ſimul radio directo, & reflexo utile ſit.

Pars tertia habet horologia magnetica nempe in quibus acus magnetica horas indicet.

Meliùs ſunt praxes traditæ quàm demonſtrationes. Friburgi Briſgoiæ in quarto 1622.

1621 Andreas Argolus Medicus Ephemerides ad longitudinem Urbis Romæ ex tabulis Prutenicis ſupputavit, primo ab anno 1621 ad 1640. cum Iſagoge & canonibus circa uſum Ephemeridum ſolaris motus 1621. 1622. 1623. 1624. juxta Tychonis hypotheſes. Item methodum revolutionum annuarum addidit & tractatum de aëris & temporum mutationibus. Item tractatum circa artem medicam, aut chirurgicam. Denique Catalogum fixarum, cum longitudinibus, latitudinibus, aſcenſionibus rectis & declinationibus. Romæ 1621. in quarto.

Idem Argolus Ephemerides pro meridiano Romano compoſuit juxta hypotheſes Tychonis Brahe ab anno 1641. ad annum 1700.

Cum Catalogo ſtellarum fixarum & tabula ortus & occaſus pro qualibet latitudine. Primus tomus varia continet præcepta circa aſtrologiam, aëris mutationes, varias item tabulas domorum cœleſtium. Lugduni in quarto tribus tomis 1659.

1622 Joannes Keplerus Mathematicus Cæſareus epitomen aſtronomiæ Copernicanæ uſitata forma quæſtionum & reſponſionum conſcripta, & in ſeptem libros digeſta.

Digitized by Google

Primus tradit principia aſtronomica in genere.

Secundus eſt de ſphæra & circulis ejus.

Tertius doctrinam primi Mobilis tradit, diſtinctionem ſpherarum, crepuſcula.

Quartus de ſyſtematibus.

Quintus, ſextus & ſeptimus doctrinam theoricæ planetarum.

Opus bonum, in quo tamen innumera ſunt parerga, multa fictitia, & ſine fundamento dicta, præcipuè cum ad rationes phyſicas deſcendit. Lentiis in octavo duobus tomis 1618. & 1622.

Joannes Tardo Canonicus edidit Opuſculum de maculis ſolaribus, in quo conatur oſtendere eſſe verè aſtra. Titulus autem libri eſt, *Les aſtres de Bourbon, & apologie pour le ſoleil.*

In hoc Opere licet breviſſimo agit de lentibus vitreis convexis, & ſpecillis concavis, omnia leviter. Pariſiis in quarto 1622.

Joannes Baptiſta Stelluti Fabrianenſis doctor, edidit tractatum Italicum de Cometis cui titulum appoſuit, *Scandaglio ſopra la libra aſtronomica e philoſophica di Lotario Sarſi.* Hic Sarſi libellum ediderat de cometis cum titulo Libra aſtronomica & philoſophica. Hic Sarſi multa dixerat contra Galilæi placita & aliorum. Huic reſpondit Stelluti. In hoc Opere multa ſunt minuta. Terni in quarto 1622.

Anno 1619 Joannes Kepler Harmonices mundi libros quinque edidit. In præfatione multum invehitur in Petrum Ramum, Schonerum, & Snellium, & alios qui cenſent librum decimum Euclidis 13, & 14. de quinque corporibus eſſe inutiles. Contendit rationes ex iis corporibus deſumptas continere totam planetarum theoriam. In primo libro diſtinguit varia genera quantitatum ſcibilium, nempe linearum commenſurabilium longitudine, potentia tantum, & compoſitarum, oſtenditque figuras tantum eſſe cognitas quæ geometricè inſcribuntur circulo ut trigonum, exagonum quadratum, octogonum, pentagonum, decagonum, dodecagonum &c. Endecagonum verò nullo modo ſciri. In ſecundo libro agit de angulis, qui ita congruere poſſunt ut totum ſpatium planum impleant. Item de angulis planis ad angulum ſolidum concurrentibus, & conſequenter de figuris ſolidis quæ invicem poſſunt congruere.

In tertio libro agit de conſonantiis valdè obſcurè, nec ferè in pleriſque aliquid demonſtrat. Multa enim fundat ſuper axiomata quæ nec lumine naturali nota ſunt nec demonſtrata. In genere ergo qui muſicam neſcit, eam in hoc Opere non addiſcet; nec qui tenet, aliquid diſcet. Quæ item de Pythagoreorum tetracti dicit initio, id ſine ſufficienti fundamento aſſerit. Fundat item omnes harmonias in ſectione circuli per figuras regulares planas demonſtrabiles. Hoc etiam non probavit; deberet enim oſtendere circulum per hujuſmodi figuras ita ſecari ut partes eſſent commenſurabiles, aut facere conſonantiam, quod non probat niſi de lateribus figurarum reſpectu diametri. Secundo etiam falſum eſt omnia latera facere conſonantiam, ita ut totum illud exemplum non videatur ullo modo ad rem facere, cujus tempe comparatio in omnibus vacillat. In quarto libro agit de harmonicis radiorum ſyderalium in terra eorumque effectu in ciendis meteoris.

In quinto de harmonia perfectiſſima motuum cœleſtium; quæ omnia ſunt & obſcurè dicta & ſine fundamento; ita ut ne una quidem niſi forſitan dum de corporibus ſolidis, occurrat demonſtratiò.

Hic liber ſuperioribus ſæculis in quibus obſcuritas ut ſignum reconditioris doctrinæ ſumebatur, magni factum fuiſſet; in hoc verò in quo authorem parvi pendimus ſi obſcurè loquatur non ita à pleriſque æſtimabitur.

1623 Galilæus Galilæi tractatum edidit Italicum, *Il Saggiatore*, in quo nempe expenduntur ea quæ continentur in libra aſtronomica & philoſophica Lotarii Sarſi Sinueſſani. Controverſia eſt de cometis tam de loco quàm de motu.

Hic modus ſcribendi per diſputationes eſt valde fuſus, multáque continet inutilia.

1623 Jacobus Capreolus Moderator ſcholæ Harcurianæ & profeſſor philoſophiæ ſphæram, ſeu tractatum de ſphera edidit, in quo breviter & ſatis clarè tradit circulos cœleſtes, communeſque quæſtiones de cœlo breviter perſtringit. Multa in hoc Opere continentur minuta, & non benè demonſtrata. Multa item dicta ſine figuris atque adeò quæ nullam ideam relinquant. Pariſiis in octavo 1623.

1624 Antonius de Villon profeſſor Philoſophiæ in Univerſitate Pariſienſi, uſum Ephemeridum Gallicè compoſuit, cum methodo erigendi thematis cœleſtis, modumque judicandi de conſtitutionibus tempeſtatum anni & reliquorum inde conſequentium, ut bellorum, peſtis, famis & aliorum eventuum qui homini accidere poſſunt ſalva libertate; repetit ea quæ ab aliis Aſtrologis dicta ſunt. Pariſiis in octavo duobus tomis 1624.

1625 Adrianus Metius Almarlanus profeſſor Matheſeon in Academia Friſiorum tractatum compoſuit de genuino uſu utriuſque globi.

In primo libro agit de omnibus circulis eorumque uſibus.

In ſecundo de ſitu cujuſlibet ſtellæ conſtituendo, de ortu & occaſu, de themate conſtituendo per globum.

In tertio variorum inſtrumentorum aſtronomicorum fabricam & uſum, methodum item deſcribendi horologia ex globo.

Hic tractatus optimus eſt. Amſtelodami in octavo 1625.

1625 Joannes Keplerus Mathematicus Imperatoris, Tychonis Hyperaſpiſten elucubravit, ſeu defenſionem adverſus Scipionis Claromontij Cæſennatis Itali Doctoris & Equitis Antetychonem.

Occaſio ſcribendi hujus libri fuit Claromontii liber in quo oſtendere conatur, nequaquam ex Tychonis obſervationibus concludi cometas, aut ſtellas novas ſupra lunam exiſtere. Huic in hoc Opere reſpondet Keplerus, ſuique Tychonis doctrinam tuetur, oſtenditque bene ex eo concludi cometas cœleſtes eſſe.

Referuntur in utroque Opere quamplurimæ obſervationes, eo tamen res deductæ, (ut Pater Ricciolius concludit) in ancipiti diſputationem poſitam eſſe. Francofurti in quarto 1625.

1625 Adrianus Metius Almarianus uſum globi terreſtris tradidit nimis brevem. Item inſtitutionem navigationis marinæ, in quo multa optima habet, non tamen omnia ſatis practica. Non bene tradidit doctrinam loxodomiorum. Amſtelodami in octavo 1625.

1626 Henrion profeſſor Matheſeon, Coſmographiam compoſuit Gallicè, ſeu tractatum univerſalem rerum cœleſtium, & elementarium. Item de proprietatibus & accidentibus earum; libris quinque.

In

In primo agit de principiis univerſalibus, de ſitu terræ.

In ſecundo de circulis.

In tertio de ortu, & occaſu ſyderum.

In quarto de tempore & de obſervationibus cœleſtibus. Item de problematibus. Hoc eſt doctrina primi mobilis.

Quintus geographicus eſt.

Hoc Opus non eſt abſolutum nec ſatis ordinatum, Pariſiis in octavo 1626.

1626 Henrion profeſſor Matheſeon Pariſiis in libro quinto ſuæ Coſmographiæ geographiam tradit, ſupponit autem principia jam ſupra tradita. Quare pauca tantum addit, exinde ad particulares deſcriptiones regnorum & provinciarum deſcendit. Pariſiis in octavo 1626.

Anno 1626 Lotharius Sarſius reſpondet tam Galilæo quam Stelluto in Opere cui titulus, ratio ponderum libræ & ſimbellæ, in qua è Lotharij Sarſiij libra aſtronomica, quidque è Galilæi Galilæi ſimbellatore de cometis ſtatuendum ſit, collatis utriuſque rationum momentis philoſophorum arbitrio proponitur.

Repetit ea omnia quæ ab aliis & à ſe dicta fuerant. Lutetiæ in quarto 1626.

1626 Godefridus Vendelinus Belga Loxium ſeu tractatum parvum de maxima obliquitate eclypticæ edidit, in quo conſtituitur hypotheſis obliquitatis eclypticæ rem tamen non perfectè conſtituit. Antuerpiæ in quarto 1626.

Anno 1627 Prodierunt Rudolphinæ tabulæ operâ Joannis Kepleri ex Tychonianis monimentis extructæ; nullas enim tabulas reliquit Tycho Brahe. Occaſio autem iſtarum tabularum ea fuit quòd Prutenicæ ex obſervationibus & placitis Copernici à Reynoldo concinnatæ jam ab initio fint reprehenſæ; decurſu vero temporis adhuc clariùs, anno enim 1626. ſex gradus Mars ulteriùs quàm tabulæ Prutenicæ ferrent, progreſſus eſt deprehenſus; quodque jam fuerat obſervatum à Tycho-Brahe cùm Tabulas meditaretur; ſed cùm morte præventus eas perficere non potuiſſet, huic Operi Keplerus præfectus fuit. In prima parte tradit Logiſticen, præcipuè vero uſum logarithmorum & doctrinam primi Mobilis. In ſecunda parte tradit methodum ininveniendorum mediorum motuum ex tabulis proſtaphæreſeon, & determinandorum verorum motuum. In tertia parte dat methodum etiam ſuppurandi motus in ordine ad aſtrologiam judiciariam. Tabulæ ſunt bonæ, non tamen bene explicatæ nec ordinatæ, deficit etiam hic author, quòd loco geometriæ & circulorum ſeu hypotheſeon; ſubſtituat cauſas phyſicas, ita ſæpè à communi philoſophorum ſenſu alienas, ut demonſtrationum mathematicarum vim omnem infringat & tenebris involvat. Poſſet tota harum tabularum doctrina meliùs compingi & ad meliorẽ uſum aptari.

1628. Scipio Claromontius Cæſenas ſcripſit de tribus novis ſtellis annorum 1572. ad 1600. 1604. libros tres, quibus demonſtrare conatur eas ſtellas fuiſſe ſublunares, & non cœleſtes, adverſus Tychonem, Gemmum, Meſtlinum, Digeſſeum, Hagecium, Sanctreium, Keplerum alioſque quorum rationes ſolvuntur.

Argumentum operis ſatis per ſe patet. Rem autem ita in omnem partem verſat ut vel demonſtret, vel ſaltem dubiam reddat. Cæſenæ in quarto 1628.

Idem Scipio Claromontius anno 1636. edidit Examen cenſuræ Joannis Camilli Glorioſi in librum de tribus novis ſtellis ejuſdem Claromontii.

Hic Joannes Camillus Glorioſus compoſuerat Cenſuram libri præcedentis, cui in hoc examine reſpondet Claromontius. Peccavit graviter Claromontius quòd in eum injurioſis verbis agat, nullis talibus laceſſitus. In quarto Florentiæ 1636.

Anno 1634. Joannes Camillus Glorioſus caſtigationem edidit examinis Claromontii, oſtenditque eum mentemſuam non intellexiſſe. Neapoli in quarto 1637.

1628. Frater Hilarius Attobellus Senior de Montechio Nobilis Auximanus Ordinis Minimorum, tabulas Regias edidit diviſionum duodecim partium cœli ſeu domorum cœleſtium ſecundùm mentem Ptolemæi pro latitudinibus à 37 gradu ad 84. quas putat Jatromathematicis eſſe pernéceſarias. Adjuncta eſt doctrina Ptolemæi de ſyderum occurſu illuſtrata. Habet quidem aliquot tabulas motus ſolis; nullas aliorum planetarum. Opus hoc aſtrologiam judiciariam ſpectat & ad hanc utile eſt. Maceratæ 1618.

1630. Idẽ Keplerus edidit Ephemerides ab anno 1621 ad 1628. ex tabulis Rudolphinis quæ antea edi non potuerant. His acceſſit his annis utpote jam exactis Hiſtoria mutationum auræ perpetuæ, ejuſque cum motibus ſtellarum comparatio ſubſidium inſtaurandæ meteorologicæ & profligandis ex ea nugis.

Hoc conſilium mihi videtur optimum in quo ſi multi Mathematici quique in ſuis regionibus laborarent aliquid certi circa aëris mutationes forſitan poſſet conſtitui. Sagavi Sileſiorum in quarto 1630.

1630. Philippus Lansbergius Opuſculum edidit cum titulo Commẽtationes in motum terræ diurnum & annuum, & in verum aſpectabilis cœli Typum; in quibus oſtenditur diurnum annuumque motum qui apparet in ſole & cœlo, non deberi ſoli & cœlo; ex Belgico in Latinum verſæ à Martino Hortenſio Delfenſi. In hoc opere potius explicat circonſtantias Copernicani ſyſtematis quàm illud probet & ſtabiliat.

1631. Idẽ Uranometriæ libros tres edidit in quibus lunæ & reliquorum planetarum & fixarum diſtantiæ à terra & magnitudines hactenus ignoratæ demonſtrantur. Primus liber diſtantiam lunæ à terra conſtituit minimam ſemidiametrorum 51. maximam 66. quæ non omnino quadrant cum diametris apparentibus poſtea obſervatis. Secundus metitur ſolis ſtiſtantias. Tertius reliquorum planetarum & fixarum, in quibus multa ſunt non ſatis ſolidè dicta.

1630. Prodiit Joannis Kepleri Mathematici Cæſarei admonitio ad aſtronomos, rerúmque cœleſtium ſtudioſos, & variis anni 1631 phænomenis, Veneris puta & Mercurii, in ſolem incurſu, excerpto ex Ephemeride anni 1631. à Jacobo Bartſchio Lauba Pauſato Medico.

In hoc Opere multa habentur de maculis ſolaribus, de refractionibus, ſpecillis &c.

1630. Dyoniſius Petavius Aurelianenſis Societatis Jeſu Uranologiam edidit, ſeu Syſthema variorum Authorum, qui de ſphæra eorúmque motibus Græcè commentati ſunt, quos ferè omnes Latinos fecit. Sunt autem ſequentes.

Gemini Iſagoge ad Arati Phænomena Interprete Hilderico.

Ptolomæus de apparentiis inerrantium.

Ejuſdem ſignificationes fixarum.

Kalendarium vetus Romanum cum ortu & occaſu ſyderum ex Ovidio, & Columella à P.Petavio confectum.

Kalendarium Romanum à Joanne Georgio Heruvart editum.

Achillis Statii Iſagoge ad Arati phænomena, libri tres Interprete Petavio.

Hipparchi Bithyni ad Arati phænomena cum ejuſdem fragmentis Interprete Petavio.

Theodonis Baza de menſibus,Interprete Perello.

Maximi computus,Interprete Petavio.

Fragmentum Græcum de Paſchate.

Notæ Petavii ad Geminum Ptolomæum & Hipparchum. Additi ſunt variarum diſſertationum libri octo.

In libro primo agit de ortu & occaſu ſyderum cum tabulis ad eos inveniendos.

In ſecundo de æquinoctiis, ſolſtitiis, aliiſque punctis Cardinalibus, & octava ſphæra.

In tertio confutat Scaligeri Opus Poſthumum circa motum octavæ ſphæræ, & æquinoctiorum anticipationem, defenditque veteres Authores.

Quartus liber eſt de anno Græcorum, præſertim Atticorum, contra Diatribam Alphonſi à Caranza Juriſconſulti Hiſpani.

Quintus de annis Judaïco, Ægiptiaco, Romano vetere contra eundem & Claudium Salmaſium.

Sextus contra Salmaſium de menſibus atticis.

Septimus contra eundem circa caniculæ ortum & aliis.

Octavus de Græcorum æris computis.

Totum Opus miram habet eruditionem & ſoliditatem.

1631. Martinus Hortenſius Delphenſis reſponſionem edidit ad additiunculam Joannis Kepleri Cæſarei Mathematici præfixam ephemeridem in annum 1624. in qua cùm de totius aſtronomiæ reſtitutione tum in primis de obſervatione diametri ſolis, fide tubi dioptrici, & de eclypſibus utriuſque luminaris luculenter agitur.

1631. Libertus Fromundus in Academia Lovanienſi Profeſſor Ordinarius Antariſtarchus, ſive Orbis terræ immobilis librum unicum edidit.

In quo decretum S. Congregationis 1616. adverſus Pythagorico-Copernicanos editum defenditur. In hoc Opere multa affert argumenta contra Copernicanos, quæ nullius ſunt roboris, eo excepto quod à Scriptura ſumitur. In quarto Antuerpiæ 1631.

Idem anno 1634. Librum edidit cui titulum appoſuit Ant-Ariſtarchi vindex adverſus Jacobum Lansbergium Philippi filium Medicum Milderburgenſem; in quo decretum Sanctæ Congregationis 1616. & 1633. iterum defenditur. Multa affert argumenta è Phyſicis petita quæ nullius ſunt roboris, & procedunt ex non ſatis intellectis rebus mathematicis. Unum legitimum tantum profert ex ſacra Scriptura petitum. Antuerpiæ in quarto 1634.

1631. Joannes Baptiſta Morinus Francopolitanus Doctor Medicus, & Regius Mathematum Profeſſor, edidit Opuſculum cui titulum appoſuit, Famoſi & antiqui problematis de telluris motu vel quiete hactenus optata ſolutio. Qui titulus potius jactabundè, quam verè appoſitus. Quamvis enim multa habeat optima nihil tamen demonſtrat, licet contraria argumenta ſolvat. Refellit autem argumenta à Keplero, Lansbergio, aliiſque prolata. Pariſiis in quarto 1631.

Idem author reſponſionem compoſuit ad Jacobi Lansbergij Doctoris Medici apologiam pro telluris motu. Pariſiis in quarto 1634.

Idem aliud Opuſculum edidit contra Gaſſendi Opuſculum de Motore tranſlato, cui titulum appoſuit Alæ telluris fractæ, cum phyſica demonſtratione quòd opinio Copernicana de telluris motu ſit falſa, & novo conceptu de oceani fluxu & refluxu adverſus Petri Gaſſendi Dinienſis Eccleſiæ Præpoſiti libellum de motu impreſſo.

In his omnibus ſæpè Morinus hallucinatur, nec ſatis benè percipere oſtendit naturam motus.

1631 Prodiit in lucem Opuſculum Galilæi Italicè & Latinè, cui titulus Nova antiqua ſanctiſſimorum Patrum & probatorum theologorum doctrina de ſacræ Scripturæ teſtimoniis in cõcluſionibus merè naturalibus quæ ſenſata experientia, & neceſſariis demonſtrationibus evinci poſſunt, temerè non uſurpandis, à Galilæo Nobili Florentino, Primario Ducis Etruriæ Mathematico. Hoc Opus non dedit in lucem Galilæus, ſed Robertus Rolentinus Boruſſus allatum ex Italia manuſcriptum Italicè Berneggero tradidit in linguam Latinam vertendum, an fideliter nec ne dubitatur.

1631 Adrianus Metius Matheſeos profeſſor ordinarius in Academia Friſiorum primum mobile aſtronomicè, ſciographicè, geometricè & hydrographicè, explicuit quatuor tomis.

Primum tomum in quinque libros dividit.

Primo libro poſt Aſtronomiæ definitionem Sphæram ſtellarum deſcribit, originem decem circulorum in quatuor hypotheſibus oſtendit, dierum ac noctium vices, ortus, zonas, aliaque ad Geographiam ſpectantia exponit.

Secundo ſitus ſtellarum per longitudines & latitudines, aſcenſiones rectas, & declinationes, ortus earumdem, circulos verticales, elevationum directiones, aliaque ſimilia explicat.

Tertio agit de obſervationibus ſyderum, per aſtrolabium, radium, & globum.

Quarto nova methodo horologia ſciaterica per ſphæram & tangentium tabulas conſtruit.

Quinto orbem terreſtrem deſcribit novamque navigandi artem, per globum & canonem rumborum, ab authore ſupputatum.

Secundus tomus habet tres partes, Prima habet deſcriptionem aſtrolabii particularis in plano ſcilicet tropici Capricorni.

Pars ſecunda quatuor libros habet, Primo aſtrolabium generale conſtruit.

Secundo problemata primi Mobilis in eodem aſtrolabio oſtendit.

Tertio domicilia cœleſtia & directiones in triangulis ſphæricis proponit.

Quarto problemata geographica eodem aſtrolabio ſolvit.

Pars tertia trigonometriam complectitur.

Tertius tomus dicitur hiſtoria aſtronomica tribus libris comprehenſa.

Primus hiſtoriam de ſitibus aſtrorum & per aſtrolabium & per triangula tradit.

Secundus Gnomonicus qui in aſtrolabio & in angulis ſphæricis horologia demonſtrat.

Tomus quartus Geometrica aſtrologia.

Primâ parte problemata primi Mobilis geometricè ſolvit.

1632 Claudius Berigardus in Academia Piſana Philoſophiæ profeſſor Dubitationes edidit in Dialogum Galilæi Lyncei in eodem Gymnaſio

Mathematici,

Mathematici, in quibus notatur vel Simplicii prævaricatio vel ſimplicitas, quod nullum efficax ſuper eſſe peripateticis argumentum ad probandam terræ immobilitatem tam facilè conceſſerit.

Occaſio ſcribendi quod Dialogum Galilæus inſtituerit de Syſtemate mundi, introduxeritque ſimplicium qui partes Ariſtotelicas & communem ſententiam tueatur. Cum autem in hoc dialogo Galilæus non ea omnia dicat pro hypotheſi communi, quæ videbantur poſſe dici, jure Berigardus eam reprehendit, affertque alia paulò meliora. Florentiæ in quarto 1638.

In tertia doctrinam primi Mobilis in ſuperficiebus planis per ſciaterica deſcribit tres tabulas geographicas, & rumborum totámque artem navigandi tradit. Opus optimum & clarum. Amſtelodami in quarto.

Anno 1631. Petrus Gaſſendus duabus Epiſtolis oſtendit, & refert apparentiam Mercurii ſub diſco ſolis tranſeuntis, quæ quatuor horis fuit tardior quam exhiberent Kepleri tabulæ.

Secunda tabula oſtendit Venerem ſub ſole non apparuiſſe, & conſequenter Kepleri vaticinium vanum fuiſſe, ita parum exactè conſtitutus eſt horum ſyderum motus.

Anno 1632 Philippus Lansbergius Gandavenſis tabulas motuum cœleſtium perpetuas ex omnium temporum obſervationibus conſtitutas, temporumque omnium obſervationibus conſentientes edidit; cum theoricis novis & genuinis motuum cæleſtium; & theſauro aſtronomicarum obſervationum, in confirmationem ſuarum tabularum. Hoc Opus bonum eſt & ab omnibus plurimi æſtimatur. Voluiſſem tamen primò ut conſenſum tabularum ad theoricas paulò meliùs, & clariùs oſtendiſſet: theorias enim nimis breviter explicat, tabularum item uſum ita tradit, ut in multis ſit difficile animadvertere theoricas in tabulis ad praxin eſſe revocatas.

Secundo ſequitur methodum Alphonſinam & tempus in dierum ſexagenas mutat, quæ methodus quidquid dicat longior eſt, cum æquè operoſa ſit iſta converſio, ac ipſa inquiſitio immediata motus qui quæritur.

Tertio varietas præceſſionis æquinoctiorum, mutatio excentricitatis in ſole, & declinationis maximæ in eclyptica, ſunt valdè dubia, quibus tamen ſuum calculum implicat operoſum que reddit, cætera benè procedunt.

Initio in præfatione ponit progreſſum aſtronomicum.

1633 Antonius Rocco Philoſophus peripateticus exercitationes philoſophicas Italicè compoſuit, in quibus conſiderat poſitiones, & objectiones contentas, in dialogo Galilæi Galilæi, Lincei, contra Ariſtotelis doctrinam.

In prima agit de perfectione mundi.

In ſecunda de centro univerſi & motu circulari & acceleratione.

In tertia de differentia inter cœlos & elementa.

In quarta de corruptibilitate cœlorum, cometis, maculis ſolaribus, teleſcopio.

In quinta comparatio lunæ cum terra.

In ſexta argumenta & ſolutiones pro terræ motu.

In ſeptima de quiete terræ.

In octava an terra ſit magnetica.

Hoc Opus ſcholam ſapit habétque multa non probata & malè explicata.

1633 Joannes Baptiſta Morinus Francopolitanus Doctor Medicus & Regius Pariſiis Mathematum profeſſor, trigonometriæ canonicæ libros tres edidit, quibus planorum & ſphæricorum triangulorum theoria, atque praxis accuratiſſimè breviſſimeque demonſtrantur.

Adjungitur liber quartus pro conſtructione tabulæ logarithmorum, & uſu.

Opus optimum & clariſſimum; rectilineam enim trigonometriam ad quinque theoremata revocat, ſphæricam ad undecim. Nihilominus non habet omnes praxes quæ in hac materia haberi poſſunt. Pariſiis in quarto 1633.

1633 Melchior Inchofer è Societate Jeſu Auſtriacus tractatum ſyllepticum edidit, in quo quid de terræ ſoliſque motu vel ſtatione ſecundum ſacram ſcripturam & ſanctos Patres ſentiendum, quáve certitudine alterutra ſententia tenenda ſit oſtenditur. Romæ in quarto 1633.

1634 Laurentius Eichſtadius Medicus, & Phyſicus ordinarius in veteri Sedino Pomeranorum Ephemeriden conſcripſit ab anno 1636 & 1650. pro ſolis & lunæ motibus ex tabulis Danicis, in reliquis planetis ex tabulis Rudolphinis cum pædia ſeu inſtructione circa utendi methodum.

Secunda pars habet inſtructionem aſtronomicam ſeu praxin trigonometricam per Logarithmos quorum etiam tabulam tradit.

Tertia pars continet annos à 1651. ad 1655. cui acceſſerunt centum aphoriſmi de judiciis genethliacis. Prima pars & ſecunda impreſſæ ſunt Stetini; tertia Dantiſci 1644. Omnes in quarto.

1634. Prodiit Joannis Kepleri Mathematici olim Imperatoris ſomnium ſeu Opus Poſthumum de aſtronomia lunari, nempe in eo diſſerit de iis quæ acciderent lunaribus incolis; quam luminis & dierum diverſitatem experirentur; aliáque aſtronomica accidentia.

Idem Keplerus Appendicem edidit Selenographicam & notas ad appendicem, item libellum Plutarchi de facie in orbe lunæ, ex plurimis fragmentis collectum latinè reddidit & notis illuſtravit. In hoc Opere demonſtrat in luna montes eſſe & valles, multaque alia ad ejus naturam ſpectantia. Opus curioſum & facile.

1634. Ægidius Bucherius Atrebas Societatis Jeſu, de doctrina temporum Commentarium edidit in Victorium Aquitanum, qui floruit circa annum 450 poſt Chriſtum, & cujus lucubrationes lucem adhuc non viderant, refert item alios antiquos Canonum Paſchalium ſcriptores.

Continetur igitur in hoc Opere Canon annorum 532. ſcriptus anno Chriſti vulgari 457. nunc primum in lucem editus, & uberiore Commentario illuſtratus quo dies paſſionis Chriſti, multaque tam veterum Latinorum placita Paſchalia, quàm hiſtorica & Chronologica eruuntur & illuſtrantur.

Additus eſt laterculus Latinorum ab anno 312. quo Conſtantinus vicit Maxentium ad 411. nondum editus. Accedunt nonnulla Faſtorum Conſularium fragmenta, nondum viſa, item vetus Kalendarium tempore Conſtantij Imperatoris & Liberij Papæ ex vetuſtiſſimo Manuſcripto.

Hippoliti Canon paſchalis cum brevibus notis Judæorum tempore Chriſti & Machabæorum Cyclus Paſchalis 84. annorum, tum ex Epiphanio tum ex Chronico Proſperi manuſcripto. Additus item alius Cyclus paſchalis totidem annorum.

Item Anatolii Laodicenſis Canon Paſchalis nunc primum de manuſcripto editus.

Denique Paſchales veterum aliquot Philippi de Cæſarienſi Conſilio, Ambroſij, Innocentii Primi, Leonis V. Theophili Alexandrini, Cyrilli, Proterij, Paſchaſini, Dyoniſij Exigui abbatis Notis illuſtrati.

Opus hoc ad Kalendarium reformandum fuiſſet ſummè utile, & Chronologiæ ſtabiliendæ non parum conferre poteſt.

1655. Petrus Crugerus Mathematicus Dantiſcanus doctrinam aſtronomiæ ſphæricam edidit præceptis per globum, tabulas, trigonometriam veterem, & logarithmica cum tabulis ad eam pertinentibus.

Liber primus agit de circulis cœleſtibus & angulis eorum, nempe de doctrina primi Mobilis.

Liber ſecundus de ortu & occaſu ſyderum, aſcenſionibus, declinationibus, cæteriſque accidentibus.

Totus hic tractatus trigonometriam ſupponit, cujus praxes refert, & non tamen demonſtrat. Dantiſci in Octavo. 1635.

Galilæus Galilæi Academiæ Piſanæ Mathematicus extraordinarius, ſyſtema coſmicum, ſeu dialogum de ſyſtemate mundi edidit quadripartitum; in quo de duobus maximis mundi ſyſtematibus Ptolemaïco & Copernicano, utriuſque rationibus philoſophicis ac naturalibus indefinitè propoſitis diſſeritur.

Primo conatur oſtendere omnia experimenta quæ in terra fieri poſſunt ad inferendam ejus mobilitatem eſſe inſufficientia, deinde phæmomena cœleſtia corroborando Copernicanam hypotheſin. Tertio conatur explicare æſtum maris per motum telluris.

Reprehenſus fuit Galilæus à Sacra Inquiſitione quaſi nimis inclinaſſet in Copernicanam opinionem majuſque pondus argumentis dediſſet, ex qua reprehenſione ita indoluit ut mortuus fuerit.

Hic dialogus Italicè fuit ſcriptus ſed in Latinum converſus à Mathia Berneggero qui addidit præfationem quæ & decretum Congregationis reprehendit, & alia multa habet quæ nunquam fuere Galilæi. Addit & appendicem geminam qua ſanctæ Scripturæ loca cum terræ mobilitate conciliantur.

Liber Galilæi ſi præcisè ſpectemus Copernicanam doctrinam in ratione hypotheſis, optimus eſt & tanto viro dignus. Latinè in quarto Auguſtæ Trobec 1635.

1655. N. Durret Gallus Profeſſor Pariſienſis Gallicè novas planetarum theorias protulit, quas aſſerit conformes obſervationibus Ptolomæi, Copernici, Tychonis, Lansbergij & aliorum aſtronomorum, cum tabulis quas Richelianas vocat, quibus & loca planetarum & ſtellarum fixarum facilè inveniuntur, & eclypſes ſolis & lunæ ſupputantur.

In hoc Authore Aſtronomiam non addiſces; incipit enim à praxibus, nulla præmiſſa theoria, qui modus eas reddit intellectu difficiles, cum earum ignoretur ratio. Hypotheſes item profert difficiles utpote plerumque duplici epicyclo conſtantes. Pariſiis in quarto 1635.

1636. Joannes Schonerus Caroloſtadius Profeſſor Mathematum Norimbergæ tabulas aſtronomicas edidit quas Reſolutas vocat, eo quod ſint facillimæ quibus loca planetarum & fixarum ad quodlibet tempus calculari facilè poſſunt. Opus hoc nihil continet aliud niſi tabulas & uſum.

Idem aliud opus edidit cujus titulus Æquatorium aſtronomicum, in quo per ſingulos Chartaceos & quaſi aſtrolabia, loca planetarum ad quodlibet tempus inveniuntur. Praxis quidem commoda ſed non præciſa.

Idem ſcripſit nonnulla Geographica.

1636. Scipio Claromontius Cæſenas Opuſcula tria edidit, de ſede ſublunari cometarum in ſupplementum Antitychonis.

Primo, Conſideratio obſervationum Judaïcarum cometæ anni 1618. Goæ, & in tractu Malabarico.

Secundo, Solutio rationum pro cœleſti cometarum ſede. Sunt autem de cometis

Ann.
- 1576 Antonij Santutij.
- 1582 Ejuſdem.
- 1585 Chriſtophori Rothmani.
- 1597 Santutii & Joannis Kepleri.
- 1618 Kepleri, Villebrordi, Snellii, & Fromondi.

Tertio Libellus Apologeticus. Amſtelodami 1636. in quarto.

1637 P. Carolus Malapertius Belga Montenſis è Societate Jeſu, Opus aſtronomicum edidit cui titulum poſuit Auſtriaca ſydera Heliocyclia aſtronomicis hypotheſibus illigata. Primo dat methodum obſervandarum macularum ſolarium. Secundo hypotheſin motuum conſtituit. Duaci in quarto 1637.

1637 Jacobus Humius Scotus tractatum Gallicum edidit ſphæræ Copernici & Ptolomæi cum uſibus & conſtructionibus tabularum ſphæricarum Regiomontani, nempe primi mobilis.

Quæ habentur in hoc Opere ut plurimum communia ſunt ſine ordine prolata. Sunt item multa de Morini diſputatione circa longitudines. Pariſiis in octavo 1637.

1638 Joannes Barenchius Opuſculum edidit Italicum cujus titulus eſt, *Conſiderationi ſopra il dialogo de duoi maſſimi Syſtemi Tolemaico & Copernicano.* In hoc Opere defendit Ariſtotelicum in libris de cœlo, ejúſque ſententiam pro motu recto elementorum, & quiete terræ in centro & motu orbium cœleſtium. Habet philoſophiæ communis peripateticæ placita ſatis benè explicata, quibus eam vim omnem tribuere conatur quam poteſt. Ea tamen, quæ dicit, ſunt communia. Piſæ in quarto 1638.

1639 Philolaus ſuppreſſo ſuo nomine diſſertationem edidit de vero ſyſtemate mundi libris quatuor. Primo libro ſyſtemata antiquorum Ptolemæi ſcilicet & Alphonſinorum proponit, explicat, & confutat tam phyſicè quàm geometricè ſeu ex motibus, præcipuè verò latitudinis planetarum.

Secundo libro Syſtema Tychonicum proponit & impugnat.

Tertio aliqua theoremata neceſſaria ad conſtitutionem opinionis Copernicanæ præmittit.

In quarto verum ſyſtema inveſtigat, opinionemque Copernicanam conſtituit quidem, in nonnullis tamen reprehendit.

Opus breve, bonum tamen licet ea omnia quæ affert non ſint demonſtrativa ut putat author. Amſterodami in quarto 1639.

Anno 1639 Vincentius Renerius Genuenſis Olivetanus Tabulas Mediceas edidit univerſales, ſcilicet ſecundorum mobilium, quibus poſt unicum proſtaphæreſeon orbis canonem planetarum calculus

calculus exhibetur. Juxta Rudolphinas Danicas, Lansbergianas, Prutenicas, Alphonſinas, & Ptolemaicas. Tabulis autem præfixit uſus ſimpliciter ſine hypotheſibus, quare qui jam aliunde hypotheſes ſciret, in hoc authore praxin addiſcere poſſet. Habet item praxin ſupputandarum eclypſeon. Quæ omnia nimis breviter, ſunt indicata. Quæ videbantur paulo uberiorem explicationem requirere.

Anno 1640 Chriſtianus Longomontanus profeſſor Mathematum in Academia Hafnienſi Aſtronomiam Danicam edidit, in duas partes diviſam.

Prima pars de diurna ſyderum revolutione doctrinam ſuper ſphæra armillari duobus libris explicat.

Poſterior duobus item libris ſecundum obſervationes Tychonis Brahe & proprias motuum planetarum Theorias complectitur, cum appendice de ſtellis novis & cometis. His præmiſit præcognitionum tractatum in duas partes diviſum; quarum prior triangulorum analyſin compendioſam habet. Hæc pars nimis eſt brevis, habet tamen multa bona circa proſtaphæreſin, nempe ſolutionem triangulorum per additionem, & ſubtractionem etiam independenter à Logarithmis. Poſterior de materia cœlorum diſſerit. Prioris partis Aſtronomiæ Danicæ liber primus habet diviſionem circulorum ſphæræ, in quo nihil niſi commune invenies. Secundus liber problemata primi Mobilis ſolvit trigonometricè, tabulaſque ex iis conficit, habet item tabulam mediationum centum ſtellarum, ibidem exhibet præcipua inſtrumenta aſtronomica. Item agit de parallaxi & refractione.

In aſtronomiæ parte ſecunda theorias planetarum duobus libris reſtituit: Quorum prior primò profert triplex Syſtema Ptolemaïcum, Copernicanum, Tychonicum, tum de motu fixarum, item ſolis & lunæ cum doctrina eclypſium & uſu lunæ peculiari. Poſterior de motibus reliquorum quinque planetarum ſuper triplici illa hypotheſi.

Opus iſtud perfectum eſt, quamvis enim quæ dicit initio, ſint ſatis communia, reſtituit tamen in decurſu aſtronomiam totam, & ad particularia deſcendit conſtitutis etiam tabulis, novus ille uſus lunæ eſt in longitudinibus inveniendis qui adhuc non eſt ſufficienter exactus. Circa cometas nihil habet novi.

1640. Guillelmus Blaeu Inſtitutionem aſtronomicam de uſu globorum & ſphærarum cœleſtium & terreſtrium duabus partibus comprehendit. Unam ſecundum hypotheſin Ptolemaïcam terræ quieſcentis. Alteram juxta mentem Copernici. Prima duos continet libros; primũ de adornatione globorum in quo agitur de circulis circa globos, & de circulis in ipſis globis, tum de diſtributione regionum, de ſtellis, & motu earum circa axem, de motu ſolis & horizonte. Secundus agit de ortu & occaſu ſyderum, de horologiis ſciatericis, de loxodromiis totus liber 79 problematis conſtat.

Secunda pars duobus pariter libris conſtat. Primus agit de ordine ſphærarum cœleſtium, de conſtructione, de triplici motu terræ, ejuſque exhibitione. Item de conſtructione ſphæræ particularis ſtellarum. Secundus agit de ortu & occaſu, & horologiis ſciatericis.

In prima parte continentur tantum quæ ſunt vulgaria, exceptis iis quæ de horologiis per globum concinnandis tradit.

Secunda pars habet multas praxes peculiares in opinione Copernicana.

Latinè donata à M. Hertenſio. Amſterodami Matheſeon profeſſore. Amſterodami in octavo 1640.

1640 Joannes Baptiſta Morinus Francopolitanus Doctor Medicus & Regius Mathematum profeſſor, Opus edidit cui titulum appoſuit; Aſtronomia à fundamentis integrè & exactè reſtituta.

Hoc Opus novem partes complectitur.

Prima Iſagogen complectitur ad longitudinum ſcientiam, & ad tabulas aſtronomicas condendas.

Secunda nonnulla problemata aſtronomica proponit, ad longitudinum ſcientiam neceſſaria.

Tertia ſcientiam longitudinum per lunam demonſtrat.

Quarta contra invidos ſua placita defendit.

Quinta Commiſſariorum judicium profert.

Sexta varias epiſtolas profert quibus à multis authoribus ejus inventum comprobatur. Affert item aliquos modos reſtituendarum tabularum.

In ſeptima temporis æquandi ratio demonſtratur, & Galilæi atque Herigonij methodus de longitudinibus captandis per Jouis ſatellites ventilatur.

Octava demonſtrat veram parallaxium doctrinam.

Nona de refractionibus cœleſtibus agit.

Huic operi alius titulus apponendus eſſet. Eſt enim tractatus de longitudinibus terreſtribus inveniendis, multa complectens aſtronomica, non tamen nova. Petierat hic author judices ut præmium de ſcientia longitudinum inventa adipiſceretur, ſed cauſâ cecidit. Hinc tot querimoniæ in judices, præcipuè verò in Herigonium qui cum aliis judicarat problema practicè non eſſe ſolutum, eò quod inniteretur obſervationibus lunæ, cujus motus hactenus ad eam præciſionem conſtitutus non eſt, qui in tali negotio requiritur. In quarto Pariſiis 1640.

Idem anno 1634 quinque hujus Operis partes jam dederat quas auxit, aliáſque adjunxit.

Anno 1648 prodiit gallicè Apologia ſeu expoſtulatio contra Morinum quaſi contra uſurpatorem ſcientiæ longitudinum, à Reverendo Patre Leonardo Duliris ex Ordine Recollectorum. In quo oſtendit ſe Morino oſtendiſſe eas praxes quas in ſuo Opere vulgavit. Videtur autem in hoc Opere innuere tale problema etiam practicè ſolutum eſſe; immo etiam ad captum nautarum eſſe accommodatum. Sed quàm longè abſit ab eo declararunt judices dati Morino qui etiam hanc apologiam viderunt. Fuerunt autem illi DD. Paſchalius, Mygdorgius, Boulangerius, Beugran & Erigonius omni exceptione majores. In quarto Pariſiis.

1641 Natalis Durret Coſmographus regius Ephemerides motuum cœleſtium Richelianas compoſuit ab anno 1637 & 1649. Sex primi anni ſunt ex tabulis Lansbergianis, reliqui è Keplerianis.

In priori parte habetur Iſagoge in aſtrologiam.

In ſecunda tractatus de aëris mutatione.

In tertia doctrina primi mobilis ſeu trigonometria ſphærica, in qua potius praxes quam demonſtrationes traduntur.

In ſecunda parte habetur uſus tabularum aſtronomicarum pro rebus omnibus ad aſtronomiam ſpectantibus inſtituendis.

2. De criſium myſterio.

3. Gnomonice;

3. Gnomonices liber unus, in quo traditur methodus delineandi horologia ſciaterica. Hæc methodus omnia horologia ad horizontalia revocat & per trigonometriam elevationem poli ſupra tale planum aliáſque circumſtantias quærit. Habet multa bona ſed methodus difficilior eſt. Pariſiis in quarto 1640.

1642 Annibal de Spadacine Aſtrologus Mediolanenſis, Speculum aſtrologiæ naturale edidit, in quo agit de hominis inclinationibus, de nativitate, de omnibus menſibus anni. Item de morbis, mulierculatum inclinationibus &c. gallicè.

Opus nullius momenti, habet & chiromantiam. Pariſiis 1654 in octavo.

1642 Petrus Gaſſendus Eccleſiæ Dinienſis Præfectus, tractatum edidit de apparente magnitudine ſolis, humilis & ſublimis, quatuor Epiſtolis comprehenſum, in quibus complura phyſica opticaque problemata proponuntur & explicantur. Occaſio ſcribendi eſt difficultas, cur ſol horizonti vicinus major appareat, cùm tamen refractio limborum ſolis eos extra circulos ſuos verticales non abducat, ſed tantum altiùs evehat, ideoque minor apparere deberet; hoc tribuitur ampliationi pupillæ. In quarto Pariſiis 1642.

Idem alium tractatum edidit de motu impreſſo à motore tranſlato, Epiſtolis duabus comprehenſum, in quibus aliquot præcipuè tum de motu universè, tum ſpeciatim de motu terræ attributo difficultates explicantur. Doctrinam continet ſolidam. In quarto Pariſiis 1642.

1643. Antonius Deuſigius Medicus diſſertationem edidit de vero ſyſtemate mundi, quâ Copernici ſyſtema reformat ſublatis multis orbibus, & epicyclis, quibus in Ptolemaico ſyſtemate humana mens diſtrahitur; Telluri autem motum tantum diurnum relinquit. Alios item motus terræ tribuit, ut explicet inæqualitatem præceſſionis æquinoctiorum, mutationem eccentricitatis & declinationis eclypticæ, quæ omnes inæqualitates modo pleriſque rejiciuntur. Quare hæc hypotheſis non eſt ſemicopernicana pura.

Opus hoc multa habet de motu gravium quæ faciliùs & graviùs conſtitui poterant. Amſterodami in quarto 1643.

1643. P. Reyta Capucinus ad Puteanum ſcripſerat à ſe obſervatos novem Jovis ſatellites.

Petrus Gaſſendus ſcripſit ea de re ſuum judicium, & hallucinatum eſſe Reytam.

1630. Scripſit item quid judicaret de quatuor parheliis eo tempore apparentibus.

1643. Scipio Claromontius Cæſenas Antiphilolaum edidit, in quo Philolao redivivo de motu terræ ac ſolis ac fixarum quietè pugnatur, rationeſque ejus quas pro demonſtrationibus affert fallaces deteguntur. Poſitio eadem de re Copernici confutatur, & Galilœi defenſiones rejiciuntur.

Utrumque Opus lectione dignum. Cæſenæ in quarto 1643.

1644. Joannes Caramuel Benedictinus Opuſculum edidit ſub hoc titulo Solis & artis adulteria. In prima parte oſtendere conatur ſphæram aliter tradendam eſſe quàm hactenus tradita fuerit ob refractiones, quæ tamen conſideratio eſt exigui momenti, & jam à pluribus notata. Immo quæ conſtitui non poſſit ob varias aëris & atmoſphæræ diſpoſitiones. Modus ab ipſo traditus ad inveniendum altitudinem poli fallax eſt. Quod verò de gnomonica promittit intra paucas horas tradenda. Id non præſtat in ſuo Operè in quo nullam affert demonſtrationem ſufficienter explicatam. Horologiorum deſcriptiones variè deformat ob ſtyli tranſpoſitionem, decurtationem, motum alternum, candelam, item ſolis vicariam in horis indicandis adhibet. Totum opus eſt exigui momenti. In folio.

1644 Andreas Argoli Eques ſancti Marci Primum Mobile edidit, ſeu tabulas ad primum Mobile ſpectantes. Totum ferè Opus obtinent tabulæ aſcenſionum obliquarum pro ſingulis latitudinibus. Opus immenſi laboris. Patavii in quarto 1644 duobus tomis.

Idem Andreas Argoli Philoſophus & Medicus, & in Gymnaſio Patavino profeſſor Matheſeon, Tabulas ſecundorum Mobilium edidit juxta hypotheſes Tychonicas, & cœlo deductas obſervationes.

Idem 1653 edidit Pandoſium ſphæricum, in quo ſingula in elementaribus regionibus atque æthetea mathematicè pertractantur. Hoc eſt loquitur de meteoris omnibus, proprietatibus maris terræ breviter tamen, & ferè nihil demonſtrando ſed tantum judicando. Profert item hypotheſes planetarum, quarum primam ideam exhibet. In quarto 1653 Editio ſecunda.

Anno 1645 Iſmaël Bullialdus Pariſienſis edidit aſtronomiam Philolaicam, in qua motus planetarum per novam ac veram hypotheſin demonſtrantur, mediique motus aliquot obſervationum authoritate ſtabiliuntur. Quæ ex manuſcripto Bibliothecæ Regiæ deſumptæ ſunt & hactenus ignotæ fuerunt. Tabulas item facillimas ſecundum eam hypotheſin adjunxit, methodumque ſolares eclypſes ſupputandi ſine ulla ſolutione triangulorum ſphæricorum. Addita eſt hiſtoria ortus & progreſſus aſtronomiæ. Suam Aſtronomiam in libros duodecim diſtribuit. In quorum primo de cœlo, ſole, & planetarum motu diſſerit, & eclypticæ hypotheſeos fundamenta jacit.

In ſecundo de anni magnitudine, cæteriſque ad motum terræ annuum ſeu ſolis apparentem pertinentibus, præcipuéque de vera dierum æquatione agit, & Ptolemæi errorem detegit.

In tertio de lunæ motibus ejuſque hypotheſi.

In quarto continentur ea quæ ſpectant ad determinandam magnitudinem ſolis, terræ & lunæ, & utriuſque luminaris eclypſes.

In quinto fixarum motum & obliquitatem Zodiaci determinat.

Liber ſextus Saturni motum conſiderat etiam latitudinis & Aphelii, & nodorum epochaſque conſtituit.

Liber ſeptimus idem præſtat circa Jovem.

Liber octavus Martem intuetur.

Liber nonus Venerem.

Liber decimus eſt de Mercurio.

In undecimo continentur varia problemata circa motus planetarum præcipuè circa eccentricitates, & figuras orbium.

In duodecimo tabulæ motuum continentur, earumque uſus traduntur.

Opus iſtud maximi facio cum hypotheſin Copernicanam aduſque minimas circonſtantias perſecutus ſit vir iſte apud exteros quàm apud ſuos notior. Quem Ricciolius noſter vocat virum profundæ indaginis & meritò, multáque ex eo in ſuis Tabulis conficiendis mutuatus eſt. Videtur ab ejus tempore hypotheſis ellyptica perfectior evaſiſſe, & faciliùs ad praxin eſſe revocatam adjectis nempe

de æſtu maris & cauſis motuum. Hunc P. de Roberval Mathematicus Regius notis illuſtravit.

Franciſcus Montebrunii Patritius Genuenſis ephemerides motuum cœleſtium elucubravit ad longitudinem Bononienſem ab anno 1650. ad annum 1660. cum catalogo inſigniorum fixarum ad annum 1650. earumque ortu & occaſu pro altitudine poli 44. ex Philippi Lansbergij Mathematici celeberrimi obſervationibus.

Præmiſſis etiam nonnullis ad conſtructionem & dijudicationem cœleſtis figuræ neceſſariis. Bononiæ in quarto 1650.

1650. Joannes de Monte regio tabulas directionum & profectionum edidit; tabulas item aſcenſionum obliquarum cum tabulis ſinuum per ſingula minuta univerſam trigonometriam complectentibus. In quo opere datur uſus talium tabularum.Tubingæ in quarto 1650.

1651. Pater Joannes B.Ricciolius Ferrarienſis Societatis Jeſu, Almageſtum novum edidit aſtronomiam veterem & novam complectens, obſervationibus aliorum & propriis promotam, in tres tomos diſtributam.

Libro primo de ſphæra mundi in communi.
Secundo de ſphæra elementari.
Tertio de ſole ejuſque motibus.
Quarto de luna.
Quinto de ecclypſibus.
Sexto de ſtellis fixis.
Septimo de planetis minoribus.
Octavo de cometis & ſtellis novis.
Nono de ſyſtematibus. Præcipuè impetitur Copernicanum.

10. Trigonometriam exponit etiam logarithmicam per compendium & problemata primi mobilis,geographica item & coſmographica de parallaxibus item & refractionibus.

Hoc Opus inſtar bibliothecæ integræ haberi poteſt. Collegit enim omnia quæ alicujus erant momenti in anterioribus aſtronomis.

Videtur tamen non ſequi ordinem ſcientiæ nec ſatis indicare ejus progreſſum. Inſuper diverſa nonnunquam profert, nec ſatis determinat cui parti ſe addicat; ita ut perplexum reddat lectorem & confuſum.

Idem compoſuit Chronologiam reformatam anno 1669, in duos tomos diviſam. In primo tomi primi libro agit de menſibus & annis præcipuarum Nationum præcipuè Hebræorum, Ægyptiorum, Perſarum, Græcorum, Romanorum, tum aliarum minus præcipuarum Nationum.

Secundus habet connexionem præcipuarum epocharum cum epocha Chriſti. Libro tertio de Græcorum epochis. Quarto de Latinorum epochis. Libro quinto de annis Regum Aſiæ cum epocha Chriſti. Sexto de annis Hebræorum. Septimo de annis mundi ad Chriſtũ.Octavo de anno nativitatis Chriſti. Nono de annis poſt paſſionem.

Secundus tomus tria Chronica complectitur.

1653. P. Petrus Courcier Societatis Jeſu aſtronomiam practicam compoſuit,ſive motuum cœleſtium praxes per aſtrolabia quædam quibus ſyderum loca,motus, defectus pro quolibet tempore facile cognoſcuntur.

Sunt autem hæc aſtrolabia circuli chartacei coaptati, ſeu potius tabulæ motuum cœleſtium in circulos digeſtæ, quæ omnia præciſionem habere non poſſunt perfectam. Sufficerent tamen ad pleraſque operationes aſtrologiæ. Nancei in octavo 1653.

1653 Sethus Vvardus Aſtronomiæ profeſſor Savilianus Opuſculum de cometis edidit, in quo de cometarum natura diſſeritur, nova cometarum theoria & noviſſimi cometæ hiſtoria proponitur prælectione Oxonii habita nimis compendiosè.

Idem Inquiſitionem edidit in Iſmaëlis Bullialdi aſtronomiæ Philolaicæ fundamenta, oſtenditque hypotheſin ellypticam à Bullialdo aliiſque propoſitam laborare ageometria.

In hoc Opuſculo nonnulla profert ad hanc hypotheſin promovendam idonea.

Idem ideam trigonometriæ demonſtratæ edidit ſed nimis breviter, ita ut in ea trigonometriam non addiſcas niſi aliunde ſcias. Bononiæ in quarto 1653 & 1654.

1653 Andreas Argolus in Patavino Gymnaſio Matheſeon profeſſor, Brevem diſſertationem edidit de cometa 1652. 1653. ubi de aliis meteorologicis impreſſionibus agit. In Romano Collegio habitæ ſunt diſputationes de cometis 1619.

Anno 1654 Yvo Capucinus Aſtrologiæ novam methodum tradidit ſub nomine Franciſci Allæi Arabis Chriſtiani. In pluribus præcipuè circa revolutiones habet praxes à reliquis differentes, quarum ſublevatur labor ope circulorum charteaceorum. Nullum peculiare de hac re judicium fero, nec utra praxis alteri ſit præferenda, cùm enim omnia hæc arbitraria exiſtimem, puto utramque æqualiter ſe habere, nihil in utraque eſſe ſoliditatis. In præfatione profert aliquam fabulam quaſi hæc placita ab Arabe acceperit.

1654 Petrus Gaſſendus Dinienſis Eccleſiæ præpoſitus, Regius Matheſeos profeſſor, Romanum Kalendarium compendiosè expoſuit, cui acceſſit corollarium de Romano Martyrologio.

Opus breve & clarum, & utile. Pariſiis in quarto 1654.

1656 Athanaſius Kircher è Societate Jeſu, Iter extaticum compoſuit, quo mundi opificium ſyderumque tam errantium quàm fixorum natura, vires, proprietates, ſingulorumque compoſitio, & ſtructura ab infimo telluris globo uſque ab ultima mundi confinia per ficti raptus integumentum exponitur.

Opus hoc potius philoſophicum eſt quam mathematicum. In quarto Romæ 1656.

1656 Jacobus de Billy Compendienſis Societatis Jeſu, Tabulas Lodoiceas edidit, ſeu univerſam eclypſeon doctrinam, tabulis, præceptis, ac demonſtrationibus explicatam. Adjectus eſt calculus aliquot ecclypſeon ſolis & lunæ quæ proximè per totam Europam videbuntur.

Dividitur hic tractatus in duas partes. In prima agit de hypotheſi ſolis & lunæ, modumque tradit conficiendarum tabularum. Agit de ſemidiametris ſolis, lunæ, & umbræ. Item de parallaxibus & refractionibus.

In ſecunda parte agit de eclypſi, & modum tradit inveniendorum noviluviorum, & pleniluniorum tam mediorum quàm verorum. Cæteras eclypſeon circumſtantias perſequitur. Deinde profert calculum viginti eclypſeon.

Opus hoc clariſſimum eſt & optimum, optimè praxin docens & demonſtrans. In quarto Divione 1656.

1657 Pater Jacobus de Billy è Societate Jeſu, Opus gallicum edidit contra Aſtrologos cui titulum poſuit, *Le tombeau de l' Aſtrologie judiciaire.* In hoc ſingula percurrit Aſtrologorum placita, eorum inanitatem planè demonſtrat. Opus perfectum in hac materia.

Idem P. Jacobus de Billy Compendienſis Societatis Jeſu, librum gallicum edidit. Nempe tumulum aſtrologiæ judiciariæ. In quo ſingula placita illius doctrinæ profert clariſſimè ſolidéque refellit, ita ut nihil amplius requiri videatur. Pariſiis in quarto 1657.

1657 Joannes Baptiſta Morinus Doctor Medicus & Regius Pariſiis Mathematum profeſſor, Tabulas Rudolphinas ad Meridianum Uraniburgi ſupputatas in compendium redegit, ideo quia Tabulæ Rudolphinæ à Keplero ſupputatæ ſunt cœleſtibus apparentiis conformiores, ſed earum uſus eſt intricatiſſimus, ut ſunt pleraque quæ à Keplero prodierunt. Quare Morinus inſiſtendo eidem doctrinæ deductæ ab obſervationibus Tychonis Brahe, eaſdem tabulas ad praxin faciliores reddit.

Opus utile & facile. Eſſet Opus abſolutum ſi præter praxin addidiſſet breviter hypotheſes & cùm praxibus comparaſſet. In quarto Pariſiis 1657.

1655 Comes de Pagan ſatis apud Gallos notus, Opuſculum edidit de theoria planetarum in quo omnes orbes cœleſtes geometricè ordinantur contra ſententiam communem Aſtronomorum, hoc eſt pro epicyclis aut eccentricis communibus, ellypſes invehit. Quamvis autem primus non ſit qui tales ellypſes in planetarum theoriis admiſerit, doctrinam tamen ellypſium ita promovit ut ad faciles calculos ejus inventis revocari poſſit. Quare hoc Opuſculum eſt maximi momenti. Pariſiis in quarto 1657.

Idem anno 1658. Tabulas edidit facillimas ad uſum, in quibus ſcilicet novas methodos adhibet per ſolam additionem aut ſubtractionem logarithmorum. Opus non contemnendum. Habet item nonnulla de longitudinibus. Pariſiis in quarto 1658.

1659 Chriſtianus Hugenius Zulochimij Conſt. Fr. Syſtema Saturnium ſive de cauſis mirandorum ejus phænomenon & comite ejus planeta novo.

In hoc Opere ſyſtema proponit quo explicentur omnes apparentiæ Saturni & ejus comitum. Nempè exhibet Saturnum diſco aliquo lato quaſi faſciatum, ex cujus vario ad oculum obverſo ſitu variæ ſequantur apparentiæ, quod inventum ingenioſum, remque feliciter oculis ſubjicit. Hagæ Comitis in quarto 1659.

1659 Comes de Pagan Opuſculum Gallicum edidit nempe Aſtrologiam naturalem, in quo nempe principia hujus ſcientiæ traduntur. Probat autem hanc artem prohibitam non eſſe, modo infallibiliter non prædicet actiones hominum liberas, affertque Authorum etiam ſacrorum teſtimonia, quæ aſtrologiæ faveant. Exinde tradit principia illius univerſalia Pariſiis. in Octavo.

1659 Andreas Argoli Divi Marci Eques, & in Patavino Lycæo Matheſeos Profeſſor, Ptolemæum parvum in Genethliacis junctum Arabibus, auctum, & mendis expurgatum. In hoc Opere breviter colligit omnia placita indiciariæ aſtrologiæ. Lugduni in quarto 1659.

1660 Joannes Baptiſta Du Hamel Aſtronomiam phyſicam edidit libris duobus comprehenſam. In priori agit de lumine & coloribus. Primo triplicem de lumine ſententiam, Peripateticorum qualitatem, Epicureorum ſubſtantiam, Carteſij æthereæ ſubſtantiæ motum eſſe exiſtimantium expendit, & primæ inhæret. Tum de luminis motu, refractione, & reflexione earumque legibus,

Digitized by Google

bus, exinde de natura perſpicui, , & cauſa luminis. Denique de colorum diverſitate, omnes à luce dimanare oſtendit & alia ſimilia.

In libro ſecundo agit de materia cœli & ſyderum de diſtinctione planetarum & fixarum in natura, tum de ſolis natura, maculis cometarum, loco & generatione, de motu diurno, an tellus moveatur, de circulis qui in ſphæra delineari ſolent. Tum de ſolis theoria, & emendatione anni Juliani, de lunæ theoria, ejuſque natura in fluxibus, de reliquorum planetarum theoria & ſtellarum fixarum. Denique ad praxin deſcendit, & methodos obſervandi uſum globi, , horologium ſolare deſcribendi, vera ſiderum loca ex tabulis eruendi, modos & alia ſimilia.

Omnia idiomate eleganti & erudito. Non inhæſit difficilioribus aſtronomiæ tricis quæ ad inſtitutum ſuum non faciunt. Acceſſerunt Petri Petiti Obſervationes aliquot eclypſium ſolis & lunæ, cum diſſertatione de latitudine Lutetiæ, declinatione magnetis, nec non de ſyſtemate mundi quod Anonymus propoſuit. In quarto Pariſiis 1660.

1660 P. Gaſpar Schotus Regiſcurianus in Panormitano & Herbipolitano collegio mathematum profeſſor, P. Athanaſij Kircher Iter extaticum prælusionibus & ſcholiis illuſtravit & figuris exornavit. In quo opere ex occaſione totam cœleſtium orbium doctrinam tradit. Hoc Opus habet omnia curioſa quæ de cœlo & ſyderibus dicuntur; Aſtronomiæ tamen difficiliora non explicat. Herbipoli in quarto 1660.

1661 P. Jacobus Grandamicus Societatis Jeſu Quæſtionem Evágelicam edidit de Natali Chriſti, in qua aſſeritur perfecta conſenſio annorum Chriſti & æræ communis in Eccleſia à mille & amplius annis uſu recepta. Hoc Opus potius eſt hiſtoricum quam mathematicum. Fixæ Andegavorum 1661.

1660 Pater Joannes François ex Societate Jeſu Tractatum gallicum edidit de influentiis cœleſtibus, in quo aſtrologiam indiciariam refellit.

Videtur eſſe fuſior in rebus etiam facilioribus. Redonis in quarto 1660.

Anno 1661 Joannes Baptiſta Morinus Francopolitanus Medicus & Mathematicus Regius Aſtrologiam judiciariam ſub titulo Aſtrologiæ gallicæ edidit. In quo Opere placita illius doctrinæ non tantùm proponit, ſed etiam probare nititur, eorumque omnium rationes reddere. Primò igitur in Oratione apologetica judiciariam aſtrologiam à calumniis vindicare ſatagit, exinde viginti ſex libris totum ſuum opus comprehendit. Primo agit de cognitione. Secundo de creaturis, rebúſque phyſicis. Tertio de diviſione mundi. Quarto de quantitate, & extenſione. Quinto de ſpatio, & loco. Sexto de motu, & tempore. Septimo de cauſa efficiente. Octavo de alteratione. Nono de principiis & elementis. Quæ omnia quàm parùm ad inſtitutũ, f ciant, quódque ad aſtrologiam non pertineant facilè patet. Decimus liber de aſtrologiæ experimentis. Undecimus de virtutibus cœlorum, præcipuè de lumine. Duodecimus de influentiis. Decimus tertius de viribus ſingulorum planetarum & fixarum. Decimus quartus de duodecim ſignis. Decimus quintus de planetarum dignitatibus eſſentialibus. Decimus ſextus de aſpectibus. Decimus ſeptimus de domibus. Decimus octavus de planetarum fortitudinibus & debilitatibus. Decimus nonus de principio aſtrologiæ judiciariæ. Vigeſimus de diviſione telluris per ſigna. Vigeſimus primus de erroribus Aſtrologorum. Vigeſimus ſecundus de directionibus. Vigeſimus tertius de nativitatum revolutionibus. Vigeſimus quartus de progreſſionibus & tranſitibus. Vigeſimus quintus de conſtitutionibus cœli univerſalibus. Vigeſimus ſextus de interrogationibus & reſponſionibus aſtrologicis.

Opus hoc phyſica habet multa quæ ad rem non pertinent. Suntque minoris roboris quàm paſſim habeantur in reliquis Philoſophis. Eruditionem tamen habent majorem. Aſtrologiæ judiciariæ præcepta ſatis clara reddit. Illiſque probabilitatem aliquam daret, ſi hæc materia probabilitatis eſſet capax. Inanitatis hujus aſtrologiæ in ipſo Morino factum eſt experimentum, referente Gaſſendo. Horoſcopum enim rogatus ex ſuis principiis erexit aliquando Morinus in omnibus fere punctis fallacem.

1661 P. Jacobus de Billy Compendienſis edidit Opus aſtronomicum, in quo ſyderum omnium hypotheſes, eorum motus tum medii, tum veri tabularum condendarũ ratio, eclypſeon ſupputandarum methodus, obſervationum praxes, cæterorumque omnium quæ ab aſtronomis pertractantur, ſcientificus calculus, brevi ac facili via exponuntur libris novem. Liber primus de ſole, primò habet doctrinam primi Mobilis, lineæ meridianæ, Azimuti ſolis, altitudinis polaris inventionem complectitur, æquationem temporis, obliquitatem eclypticæ, declinationem ſingulorum punctorum, tum apogæum ſolis, excentricitatem, conſtitutionem totius motus ſolaris. Liber ſecundus eſt de luna, ejuſque inæqualitate prima & ſecunda & utramque conſtituit. Tertius de eclypſibus. Quartus de ſtellis fixis. Quintus de Saturno. Sextus de Jove. Septimus de Marte. Octavus de Venere. Nonus de Mercurio. Adiicit omnium tabulas. Opus benè ordinatum, perſpicuum, & ſolidum. In quarto Pariſiis 1661.

1661 P. Gaſpar Schotus Regiſcurianus, Societatis Jeſu, in ſuo Curſu Mathematico aſtronomiam elementarem tradit, in qua explicat communes notiones aſtronomiæ, habet item aſtronomiam theoricam, in qua planetarum Theorias explicat, ſed nimis breviter, & quaſi in genere, neque enim ad particularia deſcendit. Tradit item breve Kalendarium in quo habetur prima cognitio difficultatum quæ in Kalendario inveniuntur.

1665 P. Petit Intendens munitionum regiarum Opus gallicum edidit. (*Diſſertation ſur la nature des cometes.*) In qua diſſertatione refert varias opiniones de natura cometarum. Item exponit lineam trajectionis cometarum, habet item in eodem aliqua de prognoſticis. In quo cœleſtes cometas nihil mali efficere contendit. Habet item ſermonem de eclypſeon, prognoſticis & in fine refert obſervationes cometæ 1664.

Satis clarè refert opiniones communes circa cometas, non tamen ſatis validè eas impugnat.

1665 Prodiere tabulæ longitudinum & latitudinum ſtellarum ex obſervatione Ulach. Reich. Tamerlanis magni nepotis, ex tribus manuſcriptis Perſicis, quas latinitati donavit Thomas Hyde.

In calce libri acceſſerunt Mahommediſtezini tabulæ delineationum, & rectarum aſcenſionum. Additur denique elenchus nominum ſtellarum. Opus utile aſtronomis. In quarto Oxonii 1665.

Pater Jacobus de Billy Compendienſis Societatis Jeſu, Criſin aſtronomicam de motu cometarum

Digitized by Google

rum edidit. In qua refellitur ſyſtema lineæ rectæ. Traditurque hypotheſis nova ad motus cometarum, nempe per circulum qui terram non comprehendat. Hancque hypotheſin videtur demonſtrare ex regreſſu cometarum. Quæ demonſtratio bene concludit ſi verè regrediuntur. Divione in octavo 1666.

1668 P. Jacobus Grandamicus è Societate Jeſu Tractatum edidit de eclypſibus ſolis & lunæ.

Praxis ejus eſt difficilior conſuetâ. Pariſiis in quarto 1668.

1669 Aſtronomia Patris Andreæ Tacquet Antuerpienſis è Societate Jeſu, in lucem prodiit octo libris comprehenſa.

Libro primo agit de motu ſolis. Incipit à definitionibus & principiis univerſalibus circa figuram cœli, terræ, locum, quietem. Tum explicato duplici ſolis motu explicat, accidentia ſphæræ rectæ, obliquæ & parallelæ, tum agit de parallaxi, & refractione. Hypotheſin ſolis explicat, datque praxes ad inveniendos motus ſolis medios & veros, excentricitatem, epochas, cæteráque in hunc modum.

Libro ſecundo conſiderat motum lunæ in longitudine & obſervationes tradit, ex quibus prima, ſecunda, immo & tertia ejus inæqualitas concluditur. Hypotheſes lunæ proponit, tum quantitates menſium, cæteraque accidentia determinat & utramque inæqualitatem ad æqualitatem reducit, de motu item, & latitudine, in quibus progreſſum aſtronomiæ oſtendit.

Liber tertius ſolis & lunæ parallaxes, refractiones, diametros apparentes, diſtantias, magnitudines determinat.

Quartus agit de eclypſi ſolis, & lunæ, eclypſi item terræ, ſeu in quibus terris ſit apparitura eclypſis independenter à parallaxi, modos item obſervandarum eclypſeon.

Quintus ſtellas fixas earumque motum, & accidentia conſiderat.

Sextus motum in longitudine quinque minorum planetarum ex obſervationibus determinat cum utraque inæqualitate.

Septimus motum in latitudine eorumdem quinque planetarum exequitur.

Octavus varios tractatus complectitur. Primo hypotheſin terræ immotæ, Tractatum de novis ſtellis & cometis, tractatum de maculis ſolis, & lunæ.

Tractatus hic eſt perfectiſſimus procedens ſecundum ordinem ſcientiæ, & progreſſum aſtronomiæ oſtendens, ſi tamen exempla vera aſſumpſiſſet, & addidiſſet, & non tantũ indicaſſet ex quibus obſervationibus in genere concludantur motus quilibet cœleſtes, ſed particulares uſurpaſſet, & inſuper tabulas concinnaſſet, nihil potuiſſet melius.

1672 Jacobus de Graindorge Prior de Culey & in Abbatia de Fontenay prope Cadomum Religioſus, Opuſculum edidit cum titulo, Compendium phyſicæ aſtronomicæ, ſeu Introductionem in phyſicam aſtronomicam, hoc eſt, non tam ad judiciariam eventuum liberorum, quàm ventorum, pluviarum, &c.

In eo multa ſunt bona, licet vix putem hæc certo prædici poſſe. Cadomi in quarto 1672.

1673 Prodiere Hieremiæ Herroccii Liverpolienſis Angli ex Palatinatu Lancaſtriæ Opera poſthuma, nempe Aſtronomia Kepleriana defenſa, & promota, excerpta ex epiſtolis ad Crabtræum.

Obſervationum cœleſtium Catalogus.

Lunæ theoria nova.

Item Guillelmi Crabtræi Manaſtrienſis obſervationes cœleſtes.

Denique Joannis Flamſtedii Derbienſis, de temporis æquatione diatriba, & numeri ad lunæ theoriam Horoccianam.

Hoc Opus inordinatum eſt, quamvis multa contineat ſcitu digna; in planetis loco epicyclorum admittit tantum librationes aliquas. An hæc nova lunaris hypotheſis ſatisfaciat phænomenis longius requirit examen. In quarto Londini 1673.

TRACTATUS

Digitized by Googl

TRACTATUS I.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBROS XIII. COMPLECTENS,

AD FACILIOREM CAPTUM ACCOMMODATOS.

LIBER PRIMUS.

Definitiones.

1. Punctum eſt cujus pars nulla.

HÆC definitio ita debet intelligi, ut illa quantitas vocetur punctum quam ſic concipimus, ut ab ejus partibus abſtrahamus, ſive re vera ſit indiviſibilis, ſive non; neque enim puncta mathematica ſunt eadem ac puncta zenonica, de quorum poſſibilitate jure dubitatur à multis: cum de noſtris probè intellectis, nemo dubitare poſſit.

2. Linea eſt longitudo cujus nulla latitudo.

Eodem modo intelligatur quo ſuperior, concipitur autem produci linea fluxû puncti.

3. Lineæ extrema ſunt puncta.

4. Linea recta eſt quæ ex æquo ſua interjacet puncta.

Vel eſt minima linearum eoſdem terminos habentium, vel eſt ea cujus extrema obumbrant omnia media.

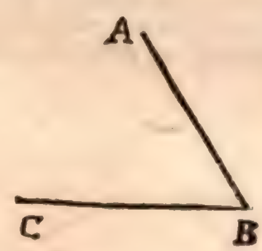
5. Superficies eſt quantitas longitudinem & latitudinem habens ſine profunditate.

6. Superficiei extrema ſunt lineæ.

7. Superficies plana, eſt quæ ex æquo ſuas interjacet lineas.

Vel eſt ea cujus omnibus partibus accommodari poteſt recta linea.

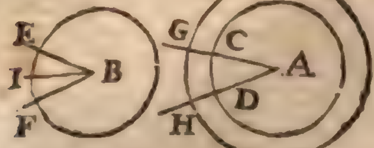
8. Planus angulus eſt duarum linearum ſe tangentium, & non in directum jacentium; alterius ad alteram inclinatio.



Ut inclinatio quam habent, ad invicem lineæ AB. BC. quæ non jacent in directum: id eſt non conſtituunt unam rectam lineam.

9. Angulus rectilineus, eſt inclinatio duarum linearum rectarum.

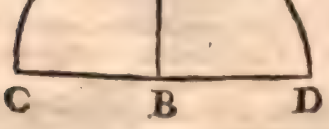
De hoc potiſſimum hîc agimus: & quia in hunc lapidem ut plurimùm tyrones impingunt; qui angulorum quantitatem ex linearum longitudine metiuntur; ideo aliquid explicationis adhibendum eſt.



Angulus cenſetur alio major, quò major eſt linearum apertura, id eſt quò illius lineæ magis ab invicem diſcedunt, in eâdem diſtantiâ ab apice anguli, ut angulus A, eſt minor angulo B; licet lineis conſtet longioribus; quia ſi ſumantur in utriſque angulis puncta æqualiter diſtantia ab apicibus angulorum A & B, verbi gratia C,D,E,F, puncta E,F, magis diſtant ab invicem, quàm puncta C,D, quod ſi continuarentur lineæ BE, BF, idem tamen eſſet angulus: quia puncta E, F, eandem haberent inter ſe diſtantiam; vel ille angulus erit minor, cujus apex erit acutior, ille major cujus apex eſt obtuſior. Communiter tres literas adhibemus, dum angulum appellare volumus; apex autem ſemper, eſt in littera media: ut ſi dicerem angulus CAD eſt angulus quem efficiunt lineæ CA, DA, in puncto A.

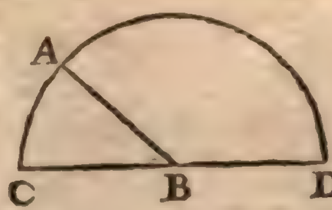
Angulorum menſura eſt circulus, ut ſi ſit exploranda quantitas anguli CAD, ex puncto A, apice anguli ut centro, circulum deſcribimus; & quo plures inter lineas anguli, circuli partes intercipientur, eo major erit angulus: parum autem intereſt, utrum circulus ſit major, aut minor; nam ſi eſſent plures circuli, ex eodem apice anguli A, deſcripti: arcus GH inter lineas anguli interceptus, tot partes majoris circuli continet, quot arcus CD continet minoris: quia autem uſu receptum eſt ut circulus dividatur in 360 partes quas vocant gradus, dicimus angulum unius, duorum, 20 graduum, quando arcus inter duas lineas anguli contentus, unum, duos, 20 gradus continebit. Ille igitur angulus major erit quoties inter ejus lineas plures gradus continebuntur; Ille minor quoties pauciores, ut angulus EBF major eſt angulo GAH, quia arcus EF plures partes ſui circuli continet quàm arcus GH: linea IB dividit angulum EBF, biſariam quidem ſi arcus EI, IF ſint æquales; ita angulus EBI eſt pars anguli EBF; quia arcus EI ejus menſura eſt pars arcus EF menſura anguli EBF.

10. Quando recta ſupra rectam conſiſtens æquales utrinque angulos fecerit: Rectus eſt uterque angulorum, & linea perpendicularis dicitur.



Ut ſi linea AB, conſiſtens ſupra lineam CD, faciat hinc inde angulos ABC, ABD æquales, hoc eſt facto in puncto B circulo, ſi arcus AC fuerit æqualis arcui AD, tunc anguli ABC, ABD vocantur recti, & linea AB perpendicularis, & quia ut oſtendam totus arcus CAD eſt ſemicirculus; arcus AC, AD, erunt quadrantes circuli continentes ſinguli quartam partem 360 graduum, id eſt 90. gradus. Ille igitur angulus rectus eſt cujus arcus continet 90 gradus.

11. Angulus obtuſus eſt qui major recto.



Ut angulus ABD obtuſus eſt: quia ejus arcus AD, plures gradus quàm 90 continet.

12. Angulus acutus eſt qui minor recto.

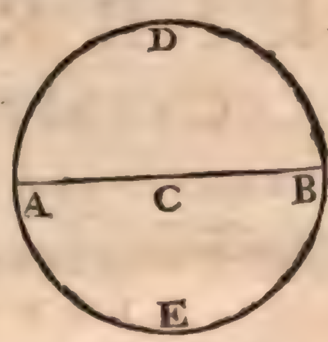
Ut angulus ABC eſt acutus, quia ejus arcus AC eſt pauciorum quam 90 graduum.

13. Terminus eſt quod alicujus eſt extremum.

14. Figura eſt quantitas quæ ſub uno, aut pluribus terminis continetur.

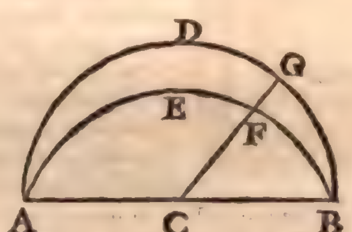
Debet autem quantitas eſſe undique clauſa.

15. Circulus eſt figura plana, unius lineæ circuitu comprehenſa, quæ circumferentia dicitur, à qua omnes lineæ, ad unum punctum intrà poſitum ductæ, ſunt æquales.



16. Hoc verò punctum, centrum vocatur.

17. Diameter circuli eſt linea quæcumque per centrum ducta, & in circuli circumferentia utrinque terminata: circulum & peripheriam biſariam ſecans.



Ut linea AB per centrum C tranſiens & terminata utrinque in peripheria in punctis AB, eſt circuli diameter.

Quia tamen dubitare quis poſſet utrum diameter dividat circulum biſariam; ita oſtendemus partem ABD eſſe æqualem parti AEB. Intelligatur enim ei ſuperponi; dico quòd in tali caſu circumferentia AEB, cadet ſupra circumferentiam ADB. Si enim illi non congrueret, caderet, aut intra illam, aut extra; cadat primò intra, ducatúrque linea CG. Quia per definitionem circuli lineæ ductæ à quibuſlibet punctis circumferentiæ ad centrum, ſunt æquales; ſequeretur lineas FC, CG eſſe æquales, cum tamen FC ſit pars lineæ CG. Idem abſurdum ſequitur ſi caderet extra. Igitur circumferentia AEB cadit ſupra circumferentiam ADB, & illi eſt æqualis ſicut pars AEB æqualis eſt parti ADB.

18. Semicirculus

18. Semicirculus eſt figura quæ continetur ſub diametro, & ſemicircumferentiâ.

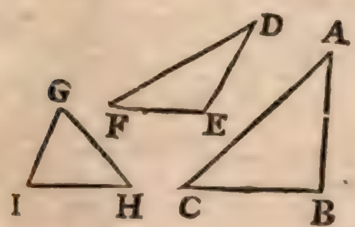
19. Rectilineæ figuræ ſunt quæ rectis lineis continentur, trilateræ quæ tribus, quadrilateræ quæ 4. multilateræ quæ pluribus.

Duplicem hic tradit Euclides triangulorum diviſionem, unam per latera aliam per angulos.

20. Triangulum æquilaterum eſt quod tria latera habet æqualia.

21. Iſoſceles, ſeu æquicrurum, illud eſt quod duo latera habet æqualia.

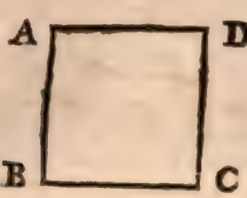
22. Scalenum quod omnia latera habet inæqualia.



23. Triangulum rectangulum eſt quod habet unum angulum rectum, *ut ABC, cujus angulus B rectus eſt.*

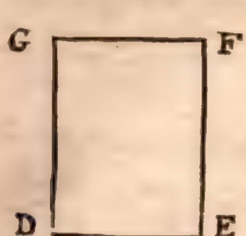
24. Amblygonium, ſeu obtuſangulum, cujus unus angulus eſt obtuſus, *ut DEF.*

25. Oxygonium ſeu acutangulum cujus omnes anguli ſunt acuti *ut GHI.*

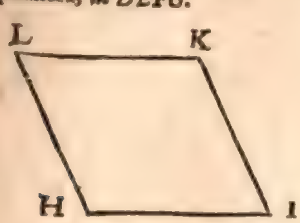


26. Rectangulum eſt figura quadrilatera cujus omnes anguli ſunt recti.

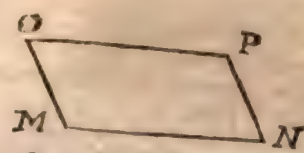
27. Inter quadrilateras quadratum eſt quod æquilaterum eſt, & rectangulum, *Id eſt cujus omnia latera æqualia ſunt: & anguli recti, ut ABCD.*

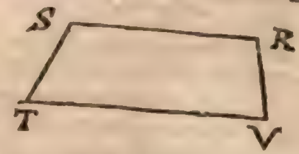


28. Altera parte longior eſt figura rectangula ſed non æquilatera, *ut DEFG.*



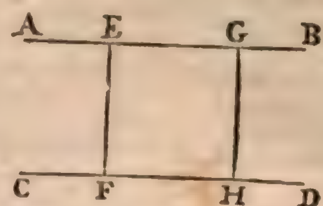
29. Rhombus eſt qui æquilaterus eſt, ſed non rectangulus, *ut HIKL.*





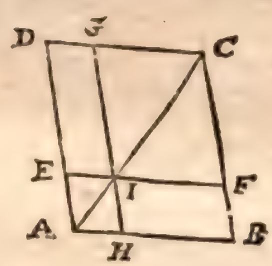
30 Rhomboides eſt figura quæ adverſa latera, & angulos habens æquales, nec eſt æquilatera, nec æquiangula, *ut MNOP.*

31 Aliæ verò figuræ quadrilateræ quæ irregulares ſunt vocantur trapezia, *ut RSTV.*



32 Parallelæ lineæ ſunt quæ in eodem plano exiſtentes quantumvis producantur, neutram in partem coincident; ſed pari ubique ſpatio inter ſe diſtant.

Æqualia intervalla deſumuntur in perpendicularibus; ut ſi lineæ EF, GH ſint æquales & perpendiculares, lineæ AB, CD erunt parallelæ, nam generantur parallelæ; ſi linea perpendicularis, verbi gratia EF, intelligatur moveri ſupra rectam AB, ita ut ſit ſemper perpendicularis, ejus punctum F deſcribet lineam CD æquali intervallo diſtantem, Addidimus definitioni Euclidis ut pari intervallo illæ lineæ diſtent, quia ſunt aliquæ lineæ non quidem rectæ; quæ licet ſemper minus diſtent ab invicem, nunquam tamen concurrunt, & non ſunt parallelæ.



33 Parallelogrammum eſt figura quadrilatera cujus adverſa latera ſunt parallela, *ut ABCD, cujus latera AB, CD ſunt parallela, ſicut AD, BC.*

34 Diameter eſt parallelogrammi, linea adverſos angulos conjungens, *ut linea AC.*

35 Complementa ſunt duo parallelogramma intra aliud majus exiſtentia, per quæ diameter non tranſit, *ut ductis lineis EF, GH, in puncto I, ſe interſecantibus duo parallelogramma EIGD, HIFB, per quæ non tranſit diameter AC, vocantur complementa.*

Poſtulata.

Poſtulantur concedi,

1 A quovis puncto ad quodvis punctum duci poſſe lineam rectam.

2 Rectam

Digitized by Google

2 Rectam lineam terminatam, poſſe continuari quantùm volueris.

3 Quovis centro ad quodvis intervallum circulum deſcribi poſſe.

Axiomata.

1 Quæ eidem ſunt æqualia, & inter ſe ſunt æqualia, & quod uno æqualium majus eſt aut minus, majus etiam eſt aut minus altero aqualium.

2 Si æqualibus æqualia addas, tota ſunt æqualia.

3 Si ab æqualibus æqualia auferas, quæ reſtant ſunt æqualia.

4 Si inæqualibus addas æqualia, tota erunt inæqualia.

5 Si ab inæqualibus æqualia auferas, quæ reſtant ſunt inæqualia.

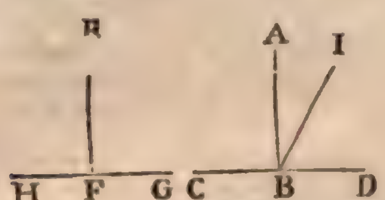
6 Quæ ejuſdem aut æqualium dupla ſunt, tripla, quadrupla; dimidia; inter ſe ſunt æqualia.

7 Quæ mutuò ſibi congruunt, æqualia ſunt.

8 Si rectæ aut anguli æquales fuerint, mutuo ſibi congruent.

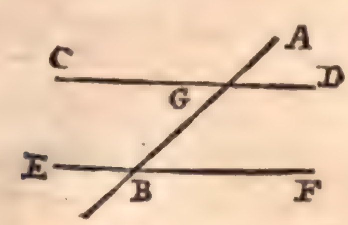
9 Totum ſua parte majus eſt.

10 Omnes anguli recti inter ſe ſunt æquales.



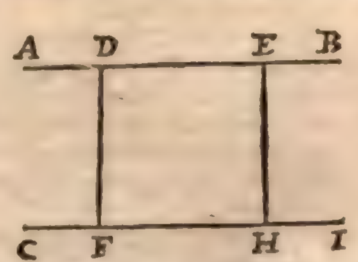
Sit angulus rectus ABD & alius EFG item rectus, neceſſario æquales ſunt; nam intelligatur linea HG ita ſuperponi lineæ CD, ut punctum F ſit in puncto B, tunc linea EF cadet ſupra lineam AB; ſi enim non cadat ſupra illam deflectat in unam partem, verbi gratia, ſupra lineam BI angulus ABC, eſt æqualis angulo ABD per defin. 10. ſed angulus ABD major eſt angulo IBD, ſcilicet parte ſua: igitur angulus ABC eſt major angulo IBD: ſed quia angulus IBD etiam rectus eſt (nam eſt idem ac EFG,) angulus IBC eſt etiam illi æqualis (per defin. 10.) igitur angulus ABC eſſet major angulo IBC, pars ſcilicet toto. Igitur hoc fieri non poteſt; ſed linea EF cadit ſupra AB, atque adeo anguli ABD, EFG ſibi congruunt & æquales ſunt.

11. Si in duas rectas recta incidens angulos interiores ad eaſdem partes minores fecerit duobus rectis; illæ duæ rectæ ſi producantur, concurrent ad eam partem in qua ſunt illi anguli.



Ut recta AB incidens in duas rectas CD, EF, faciat angulos internos ex eadem parte, nempe FBG, DGB, minores duobus rectis: dicit eſſe lumine naturali notum fore ut linea CD, EF producta ad partes D & F concurrant, quod licet verum ſit, non eſt tamen ita clarum ut axiomatis locum mereatur, ideoque ejus loco ſubſtituimus aliud notius.

11 Si duæ lineæ parallelæ fuerint, omnes perpendiculares inter eas interceptæ æquales erunt.

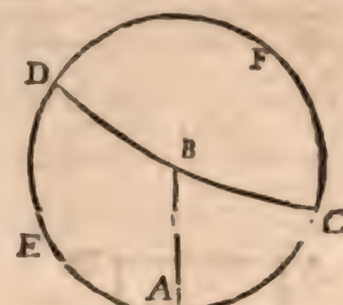


Ut ſi lineæ AB, CI ſint parallelæ, ducanturque duæ perpendiculares DF, EH; illæ æquales inter ſe erunt, quod in ipſa parallelarum definitione includitur; quæ habet illas æquali ſemper intervallo inter ſe diſtare: intervalla autem metiri debemus per lineas breviſſimas, & perpendiculares.

12. Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

Hoc eſt ſpatium non claudunt undique, ſed opus eſt ſaltem tribus.

13. Duæ rectæ lineæ non habent ſegmentum commune.



Hoc eſt duæ rectæ non coaleſcunt in unam lineam; ut lineæ AB, CB, ſi producantur, non coincident in lineam BD: nam facto circulo ex puncto B, ut centro, ſequeretur circulum dividi bifariam à linea ABD, & item bifariam à linea CBD quod eſt impoſſibile, quia AED eſſet ſemicirculus, & CED item, & ita pars & totum æqualia eſſent.

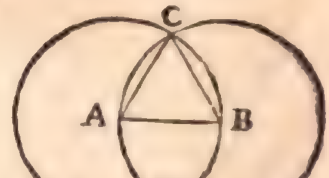
Propoſitionum aliæ proponunt aliquid faciendum vocanturque problemata, aliæ in ſola contemplatione ſiſtunt dicunturque theoremata.

In citationibus primus numerus propoſitionem deſignat, ſecundus verò librum, ut (per 4.2.) ſignificat per quartam propoſitionem libri ſecundi, ubi verò unus tantum numerus apponitur, deſignat propoſitionem illius libri in quo verſamur.

PROPOSITIO PRIMA.

Problema.

Super datâ rectâ lineâ terminatâ triangulum æquilaterum conſtituere.



Sit data recta AB terminata (id eſt determinatæ longitudinis) ſuper quam conſtruendum ſit triangulum

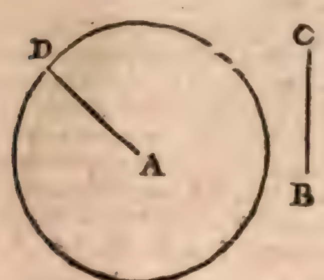
triangulum æquilaterum, ex puncto A ut centro, intervallo AB fiat circulus BCD, & ex B intervallo BA deſcribatur alius circulus ACD, priorem ſecans in puncto C, ducantur lineæ CA; CB: dico factum eſſe triangulum ABC æquilaterum.

Demonſtratio, lineæ BA, AC ductæ ex eodem centro A ad circumferentiam ejuſdem circuli BCD; ſunt æquales, (*per defin. circuli*) lineæ AB, BC ductæ ex centro B, ad circumferentiam circuli ACD, ſunt etiam æquales: lineæ item CA, CB eidem AB oſtenſæ æquales inter ſe ſunt æquales, igitur fecimus triangulum ABC tribus conſtans lateribus æqualibus, quod faciendum erat.

PROPOSITIO II.

Problema.

Ad datum punctum ponere lineam æqualem datæ lineæ.



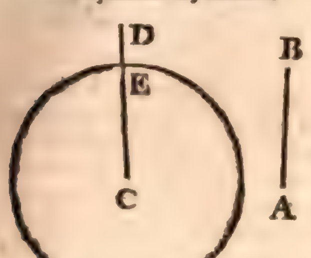
Sit datum punctum A, ex quo ducenda eſt linea æqualis lineæ BC ſume circino intervallum BC, & eo intervallo ex puncto A deſcribatur circulus: duc ex puncto A quamcunque lineam AD, manifeſtum eſt hanc eſſe æqualem lineæ BC.

Licet alius vulgo aſſignetur modus, in praxi tamen, iſto ſemper utimur: videturque æquè facilè ſumendo intervallum BC deſcribere circulum ex puncto A, ac illum deſcribere ex puncto B.

PROPOSITIO III.

Problema.

Datis duabus rectis inæqualibus, de majori, lineam minori æqualem abſcindere.

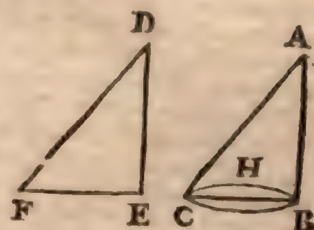


Sint datæ rectæ AB minor, CD major, ex qua abſcindenda eſt linea æqualis minori AB, ſume circino intervallum AB, ad quod ex puncto C deſcribes circulum aut partem eius ſecantem lineam CD in puncto E, clarum eſt lineam CE æqualem eſſe lineæ AB.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si duo triangula duo latera ad invicem æqualia habuerint alterum alteri; & angulos inter illa duo latera contentos æquales: erunt & baſes, & ſinguli anguli ſingulis æquales, & tota triangula æqualia.



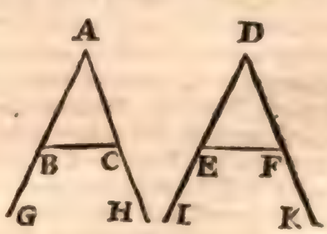
Sint duo triangula ABC, DEF, ſitque latus AB lateri DE æquale: & latus AC, lateri DF, & angulus A angulo D. dico baſes BC, FE eſſe æquales & angulos B, & E, ſicut C, & F. denique triangula eſſe æqualia.

Demonſtratio. Intelligatur ſuperponi linea DE ſupra lineam BA, quia illi æqualis eſt, illi congruet (*per axioma* 8.) ejuſque punctum E erit ſupra punctum B, & punctum D ſupra punctum A. Tunc linea DF cadet ſupra lineam AC, alioquin angulus D eſſet major aut minor angulo A, cum tamen ſupponatur æqualis, & quia linea DF eſt æqualis lineæ AC, punctum F cadet in punctum C. cum igitur lineæ EF punctum E ſit ſupra punctum B, lineæ BC, & punctum F ſupra punctum C, baſes BC, EF congruent. Neque enim baſis EF poteſt tangere lineam BC in punctis B & C, & cadere infrà aut ſupra illam ſicut facit linea BHC, alioquin contra (11. pronunciatum) duæ rectæ ſpatium clauderent: igitur & baſes, & anguli B & E, item C & F, & tota triangula congruunt: igitur hæc omnia æqualia ſunt.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Iſoſcelium triangulorum anguli ſupra baſin poſiti, ſunt æquales, & productis lateribus, anguli ſub baſi ſunt æquales.



Sit triangulum ABC iſoſceles, id eſt ejus latera AB, AC ſint æqualia, dico angulos ABC, ACB eſſe æquales, item productis lateribus AB, AC, in G & H: dico angulos GBC, HCB infra baſin eſſe æquales; intelligatur enim aliud triangulum DEF cujus latera DE, DF ſint æqualia lateribus AB, AC, atque adeo 4. lineæ AB, AC DE, DF ſint æquales, item angulus A ſit æqualis angulo D.

Demonſtr. Quandoquidem latus AB lateri DE eſt æquale, & latus AC lateri DF & angulus A angulo D: *(per 4.)* ſi ſuperponerentur triangula congruerent, & angulus ABC eſſet æqualis angulo DEF. Tunc autem quia DE caderet ſupra AB reliqua EI caderet ſupra BG alioquin lineæ BG, EI, haberent idem ſegmentum AB commune (*contra pronunc.* 13.) igitur anguli GBC, IEF ſunt æquales. Si verò ſitu contrario compararentur ita ut punctum F cadat in B, & punctum E in C, quia linea DE eſt æqualis lineæ AC, & linea DF lineæ AB, & anguli A & D ſemper ſunt æquales, in eo ſitu (*per* 4.) congruerent, & angulus ACB congrueret angulo DEF, ſicut HCB, ipſi IEF, quare anguli ABC, ACB eidem DEF æquales, inter ſe æquales erunt ſicut anguli GBC, HCB, eidem angulo IEF æquales oſtenſi inter ſe æquales erunt, igitur in triangulis iſoſcelibus, anguli ſupra baſin ſunt æquales: ſicut & anguli infra baſin.

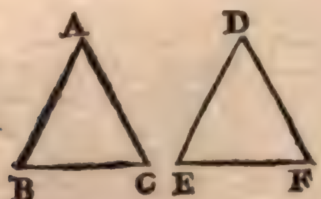
COROLLARIUM.

Sequitur triangula æquilatera eſſe æquiangula.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si trianguli duo anguli fuerint æquales, & latera iis oppoſita erunt æqualia.



Sint trianguli ABC, anguli B & C æquales: dico latera AB, AC eſſe æqualia: ſit enim aliud triangulum DEF, cujus baſis EF ſit æqualis baſi BC, & anguli E, F, æquales angulis B, & C atque ita 4 anguli B, C, E, F ſunt æquales.

Demonſt. Intelligatur baſis EF ſuperponi baſi BC quia æqualis eſt, congruet (*per axiom.* 8.) tunc neceſſario linea ED cadet ſupra lineam BA, alioquin angulus E eſſet major, aut minor angulo B; cum tamen ſupponatur æqualis; eodem modò linea FD cadet ſupra lineam CA: igitur punctum D cadet in A. Neque enim lineæ ED, FD recedere poſſunt à lineis, BA, CA alioquin duæ rectæ haberent commune ſegmentum (*contra* 13. *pronunc.*) quare lineæ ED, BA, æquales erunt. Tum verò ſi contrario ſitu comparentur triangula, ita ut punctum E cadat in C, & F in B, cum anguli E & C ſint æquales, ſicut F & B linea ED cadet ſupra CA, & FD ſupra BA, & pariter punctum D in A: quare lineæ ED, CA, congruent, & erunt æquales, unde lineæ AB, AC, eidem DE æquales oſtenſæ, inter ſe æquales erunt.

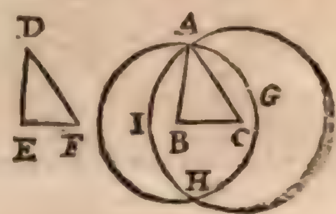
PROPOSITIO VII.

Eſt tantum propter octavam quæ ſine illâ demonſtrari poteſt.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si duo triangula ſingula latera ſingulis lateribus æqualia habuerint, etiam angulos æqualibus lateribus oppoſitos æquales habebunt.



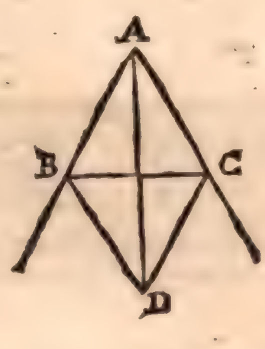
Sit triangulorum ABC, DEF latus AB lateri DE æquale, latus AC lateri DF, latus BC lateri EF, dico angulum A angulo D eſſe æqualem, & angulum B angulo E, & angulum C angulo F. Ex puncto B, ut centro, intervallo BA fiat circulus AGH, item ex puncto C intervallo CA fiat alius circulus AIH.

Demonſt. Intelligatur linea EF ſuperponi lineæ BC; quia illi æqualis eſt congruet, tunc autem punctum D cadet in A, non enim cadere poteſt niſi ſupra circumferentiam circuli AGH, alioquin lineæ BA, ED non eſſent æquales, debet etiam cadere ſupra circumferentiam AIH alioquin lineæ FD, CA non eſſent æquales: cadit igitur in interſectionem A. Quare congruunt triangula, & anguli A & D, B, & E, C & F ſunt æquales.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Datum angulum rectilineum biſariam ſecare.



Sit angulus rectilineus A dividendus in duos angulos æquales: abſcindantur duæ lineæ AB, AC æquales, & ſupra lineam BC fiat (*per* 1.) triangulum æquilaterum BCD, ducaturque linea AD, dico angulos BAD, CAD eſſe æquales.

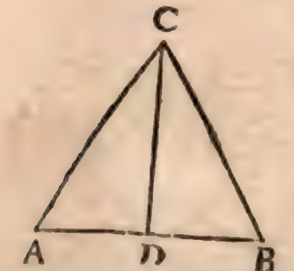
Demonſtrat. Triangula ABD, ACD, habent ſingula latera æqualia, nempe AB ipſi AC, AD commune utrique triangulo, & BD æquale ipſi DC propter triangulum æquilaterum BDC: igitur (*per* 8.) anguli BAD, CAD ſunt æquales.

PROPOSI

PROPOSITIO X.

Problema.

Lineam terminatam biſariam ſecare.



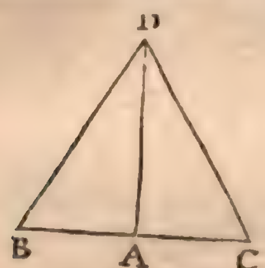
Sit recta terminata AB dividenda bifariam, ſupra illam conſtitue triangulum æquilaterum ABC (*per* 1.) cujus angulus C (*per* 9.) dividatur bifariam lineâ CD. dico lineam AB eſſe diviſam bifariam in D.

Demonſt. in triangulis ACD, BCD, latera AC, CB ſunt æqualia, latus CD utrique commune & anguli ACD, BCD facti ſunt æquales, cum angulus C ſit diviſus bifariam; ergo (*per* 4.) baſes AD, DB ſunt æquales quod erat propoſitum.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Ex puncto in linea dato perpendicularem excitare.

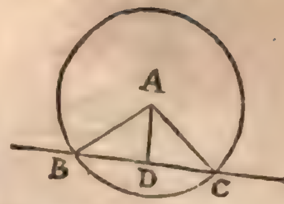


Sit punctum A in linea BC, ex quo excitanda eſt perpendicularis ad eandem BC abſcindantur hinc inde lineæ æquales AB, AC: & ſuper lineam BC fiat triangulum æquilaterum BDC, (*per* 1.) ducaturque linea DA. hanc dico eſſe perpendicularem.

Demonſt. Triangula BAD, DAC habent ſingula latera æqualia, cum AD ſit commune, & linea BA, facta ſit æqualis lineæ AC, & BD ſit æqualis lineæ DC, cum triangulum PDC ſit æquilaterum, ergo (*per* 8.) anguli DAC, DAB ſunt æquales: atque adeo linea AD (*per defin.*10.) eſt perpendicularis.

PROPOSITIO XII.

Ex dato extra lineam infinitam puncto, ad eam perpendicularem ducere.



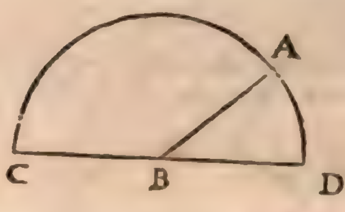
Sit datum punctum A, ex quo ad lineam BC infinitam, (id eſt quam producere liceat ſi ſit opus) duci debet perpendicularis. Ex puncto A, ut centro, fiat circulus ſecans lineam BC in punctis B, & C. Dividatur linea BC bifariam in D, (*per* 10.) ducaturque linea AD: hanc dico eſſe perpendicularem. Duc lineas AB, AC.

Demonſt. In triangulis ADB, ADC ſingula latera ſunt æqualia nempè AD commune, BD æquale lateri DC, (cum linea BC ſit diviſa bifariam) & AB ipſi AC (*per defin. circ.*) ſunt ergo anguli ADB, ADC æquales (*per* 8.) quare [per defin.10.] linea AD eſt perpendicularis.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Recta ſupra rectam conſiſtens; aut duos rectos angulos facit, aut duobus rectis æquales.



Recta AB, conſiſtat ſupra lineam CD; dico angulos ABD, ABC aut rectos eſſe, aut eos ſimul ſumptos duobus rectis æquivalere. Ex puncto B ut centro fiat ſemicirculus CAD.

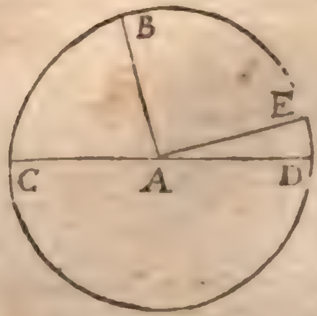
Demonſt. Si anguli ABC, ABD ſint æquales, erunt recti (*per defi.*10.) ſi vero ſint inquales, ſemper arcus AD, AC ſimul ſunt æquales ſemicirculo DAC. Arcus autem duorum rectorum ſunt duo quadrantes circuli, id eſt ſemicirculus; ergo duo arcus angulorum ABD, ABC ſimul ſumpti, ſunt æquales arcubus duorum rectorum, quod eſt æquivalere duobus rectis. Capacitatem enim angulorum metimur per arcus (*per def.*9.)

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Si duæ rectæ in idem punctum alterius coëuntes, cum illâ faciant duos angulos, duobus rectis æquales, illæ component unam lineam.

Digitized by Google



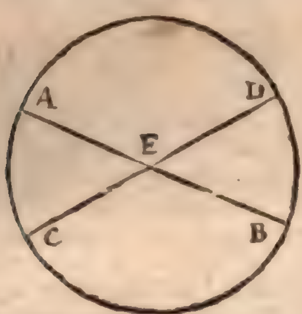
Concurrant in idem punctum A lineæ AB, duæ rectæ CA, AD, faciantque cum illa angulos BAC, BAD duobus rectis æquales, dico lineas CA, AD, efficere unam lineam, id eſt ſi linea C A continuaretur congrueret cum A D, ſi enim non congruit, cadet aut ſupra aut infra illam; ita ut CAE ſit una recta linea. Ex puncto A ut centro deſcribatur circulus C B D.

Demonſt. Quia anguli BAC BAD ſupponuntur æquales duobus rectis, arcus DB, BC æquivalebunt duobus quadrantibus circuli, ſeu erunt ſemicirculus, ſed dicitur CAE eſſe linea recta; ergo (*per def.* 17.) circumferentia C B E eſt ſemicirculus, ergo circumferentiæ C B E, C B D eſſent æquales quod eſt abſurdum, non igitur C A continuata cadit niſi in lineam A D.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si duæ rectæ ſe invicem ſecuerint, angulos ad verticem, ſeu oppoſitos æquales facient.



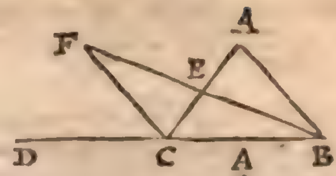
Duæ rectæ AB, CD ſe invicem ſecent in puncto E, dico angulos AED CEB oppoſitos, eſſe æquales: item angulos AEC, DEB. Fiat enim ex centro E circulus quicumque.

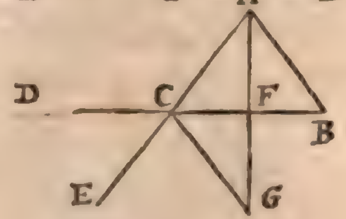
Demonſtr. quia linea AB tranſit per centrum E, erit arcus A D B ſemicirculus (*per def.* 17.) & pariter quia linea DC tranſit per centrum arcus DBC erit ſemicirculus: ergo arcus ADB, DBC ſunt æquales, ex quibus ſi eumdem arcum auferas DB reſtabunt arcus AD CB æquales & conſequenter (*per def.* 9.) anguli CEB, AED, æquales, eodem modo probabis angulos DEB, AEC, eſſe æquales.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Cujuſcumque trianguli uno latere producto, angulus externus quolibet interno, & oppoſito major eſt.





Trianguli ABC latus B C producatur in D. dico angulum extremum A C D eſſe majorem quolibet interno, & oppoſito, nempe A aut B; & primo oſtendo eſſe majorem angulo A. Dividatur linea AC bifariam in E, ducaturque linea BEF ita ut lineæ BE, EF ſint æquales, ultimo ducatur linea CF.

Demonſtr. In triangulis BEA, CEF duo latera ſunt æqualia ſingula ſingulis, nempe EC ipſi EA; & EF ipſi EB, & anguli AEB, CEF oppoſiti (*per.* 15.) ſunt æquales, ergo (*per.* 4.) anguli A & ECF oppoſiti lateribus æqualibus EB, EF ſunt æquales; ſed angulus DCA eſt major angulo FCA, nempe ſua parte, ergo angulus DCA eſt major angulo A.

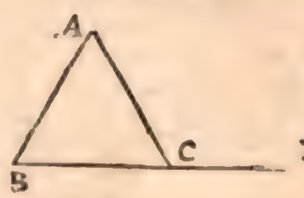
Repetatur idem triangulum ABC, oſtendo angulum externum ACD eſſe majorem angulo B oppoſito, producatur latus AC in E, diviſóque latere BC bifariam in F ducatur AFG, ita ut lineæ AF, FG ſint æquales conjungatúrque linea GC.

Demonſtr. In triangulis AFB, CFG duo latera ſunt ſingula ſingulis æqualia; nempe BF ipſi FC, FA ipſi FG & anguli BFA, GFC ad verticem oppoſiti (*per* 15.) ſunt æquales: ergo (*per.* 4.) anguli B, & FCG oppoſiti lateribus æqualibus AF, FG ſunt æquales: ſed angulus ECF, & (*per* 15.) illi æqualis DCA eſt major angulo FCG nempe ſua parte; igitur angulus externus DCA eſt major angulo B.

PROPOSITIO XVII.

Thereoma.

Cujuſcumque trianguli duo anguli ſimul ſumpti minores ſunt duobus rectis.



Sit triangulum ABC; dico duos ejus angulos ſimul ſumptos verbi gratia A & ACB eſſe minores duobus rectis. Producatur latus BC in D.

Demonſtr. angulus A internus minor eſt angulo externo ACD (*per* 15.) quare ſi utrique addas angulum ACB, erunt anguli A & ACB minores angulis ACB, ACD. qui cum ſint æquales duobus rectis (*per* 13.) erunt anguli A & ACB minores duobus rectis.

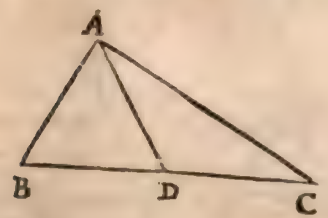
Eodem

Eodem modo probares angulos B & A C B eſſe minores duobus rectis, ſicut A & B producto alio latere.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

In omni triangulo majus latus majori angulo opponitur.



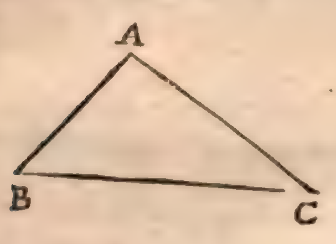
In triangulo ABC, latus BC ſit majus latere BA, dico angulum A oppoſitum lateri BC, eſſe majorem angulo C. Abſcindatur ex BC linea BD æqualis lineæ AB, ducatúrque linea AD.

Demonſtr. In triangulo BAD latera BA, BD facta ſunt æqualia; quare (*per* 5.) anguli BAD, BDA ſunt æquales: ſed angulus ADB externus reſpectu trianguli ADC (*per* 16.) major eſt angulo C, igitur angulus BAD eodem C major erit; ergo totus BAC multo major erit angulo C.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

In omni triangulo major angulus majori lateri opponitur.



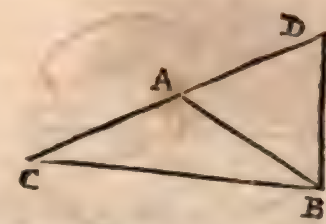
In triangulo ABC angulus A ſit major angulo C. dico latus BC oppoſitum angulo A majori, majus eſſe latere A B oppoſito angulo C minori.

Demonſtr. Si enim latus BC non eſt majus latere AB, erit vel æquale vel minus: non æquale quia (*per* 5.) anguli A & C eſſent æquales cum tamen A ſupponatur major. Nec etiam latus BC poteſt dici minus latere AB, quia (*per* 18.) angulus C eſſet major angulo A cùm tamen A ſupponatur major; reſtat ergo ut latus BC ſit majus latere AB.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Cujuſcumque trianguli duo latera ſimul ſumpta reliquo ſunt majora.



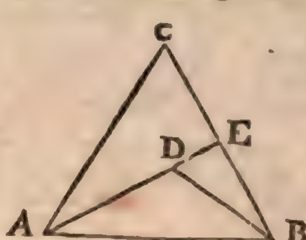
Sit triangulum ABC, dico latera AB, AC ſimul ſumpta reliquo BC eſſe majora. Producatur latus CA, ita ut linea AD æqualis ſit lateri AB, jungaturque linea BD.

Demonſt. Quoniam lineæ AB, AD, ſunt æquales, anguli D & ABD (*per* 5.) ſunt æquales, ſed angulus ABD minor eſt angulo CBD, cum ſit ejus pars: ergo angulus D minor eſt angulo CBD. Ergo in triangulo DBC (*per* 19.) latus DC oppoſitum majori angulo B majus erit quàm BC oppoſitum minori angulo D; ſed latus DC, eſt æquale lateribus BA, AC, igitur latera BA, AC majora ſunt latere BC.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Si ſupra eandem baſin intra triangulum, aliud fiat, illius latera prioris lateribus minora erunt: continebunt autem majorem angulum.



Suprà eandem baſin AB intra triangulum ABC, fiat triangulum ABD. Dico primò latera AD, DB eſſe minora lateribus AC, CB. Producatur enim latus AD in E.

Demonſtr. Quia latera AC, CE ſimul majora ſunt reliquo AE, (*per* 20.) ſi utriſque addatur latus EB, erunt latera AC, CE, EB, hoc eſt AC, CB, majora lateribus AE, EB, ſed hæc majora ſunt lateribus BD, DA; cum enim BE, ED majora ſint latere DB, addito communi DA, erunt BE, ED, DA, ſeu BE, EA, majora lateribus BD, DA. Igitur latera CA, CB multò majora erunt lateribus AD, DB.

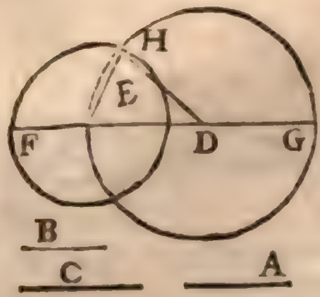
Secundò dico angulum A D B eſſe majorem angulo C, angulus ADB eſt major angulo DEB (*per* 16.) cum ſit externus reſpectu trianguli DEB, angulus DEB eſt major angulo C (*per eandem*) igitur angulus ADB eſt major angulo C.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

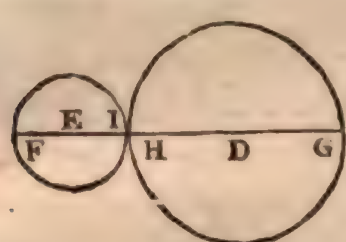
Ex tribus datis lineis, quarum duæ reliquâ ſint majores, triangulum conſtruere.

Sint



Sint tres datæ lineæ A, B, C, ex quibus conſtruendum eſt triangulum. Sumatur linea D E æqualis majori A, & linea EF æqualis lineæ B, & linea DG æqualis lineæ C. Et ex puncto D intervallo DG fiat circulus GH, & ex E intervallo EF alius circulus EH priorem ſecans in H. Ducantur lineæ DH, HE. dico factum eſſe triangulum cujus tria latera ſunt æqualia lineis A, B, C.

Demonſtr. Linea D E facta eſt æqualis lineæ A, linea DH (*per def. circuli*) eſt æqualis lineæ GD quæ facta erat æqualis lineæ C, & EH eſt æqualis lineæ EF, ſeu B. igitur latera trianguli æqualia ſunt lineis A, B, C.

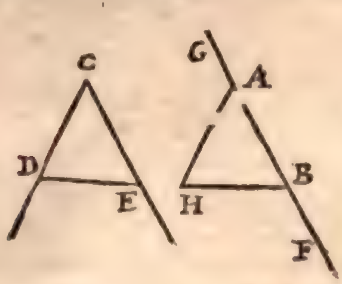


Quòd ſi circuli non ſe interſecarent oſtenderem lineam DE, hoc eſt A, eſſe majorem duabus EF, DG ſimul ſumptis, hoc eſt duabus B & C, contra ſuppoſitionem; nam linea DE continet lineam DH æqualem ipſi GD,& EI æqualem ipſi E F & inſuper HI. igitur ſola D E, ſeu A major eſſet lineis B & C.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

In dato puncto rectæ lineæ, angulum efficere æqualem alteri dato.



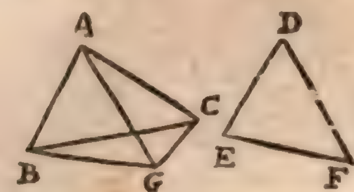
Sit datum punctum A lineæ AB, in quo conſtruendus eſt angulus æqualis angulo C. Ducatur utcumque linea D E, & linea AB abſcindatur æqualis lineæ EC. item linea BF lineæ DE, ſic et linea AG lineæ CD, & factis centris in punctis A & B adintervalla AG, BF, conſtruatur triangulum ABH ex lineis AB,BF, AG, (*per* 22.) dico angulum A eſſe æqualem angulo C.

Demonſtr, Quia triangula BAH,DCE,habent omnia latera æqualia ſingula ſingulis nempe AB ipſi EC, & AH lateri CD, & BH ipſi DE, (*per* 8.) anguli A & C æquales erunt.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Si triangulum duo latera habeat æqualia duobus lateribus alterius trianguli, angulum vero baſi oppoſitum majorem habeant: & baſin majorem habebit.



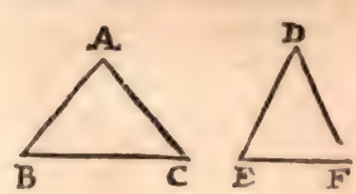
Sit trianguli ABC latus AB æquale lateri DE trianguli DEF, & latus AC lateri DF, angulus verò BAC ſit major angulo D. dico baſin BC. majorem eſſe baſi EF. Fiat angulus BAG æqualis angulo D, (*per* 23.) & linea AG lateri DF, ducantúrque lineæ BG, CG.

Demonſtr. Quia triangula ABG,DEF, habent latera AB, DE,AG,DF, æqualia, & angulus BAG factus eſt æqualis angulo D, erunt (*per* 4.) baſes BG, EF æquales; quia vero lineæ AC, AG,eidem DE ſunt æquales, erunt æquales inter ſe, quare (*per* 5.) anguli ACG, AGC ſunt æquales,ſed angulus AGC eſt minor angulo BGC, cum ſit illius pars, ergo angulus ACG eodem BGC minor erit, ſed adhuc angulus BCG minor eſt angulo ACG, cum ſit illius pars: ergo angulus BCG multò minor erit angulo BGC, quare in triangulo BGC cum angulus BGC ſit major angulo BCG, (*per* 19.) latus BC majus erit latere BG, ſed BG eſt æqualis baſi EF, ut vidimus, igitur baſis BC major eſt baſi EF.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Si triangulum duo latera habeat æqualia, duobus lateribus alterius trianguli: habeat & baſin, baſi majorem: angulum quoque baſi oppoſitum majorem habebit.



Sit trianguli ABC latus AB æquale lateri DE trianguli DEF, & latus AC, lateri DF, ſed baſis BC ſit major baſi EF. dico angulum A eſſe majorem angulo D.

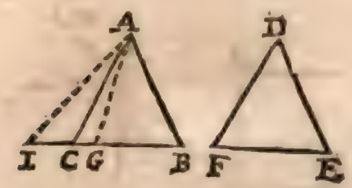
Demonſtr.Non enim angulus A æqualis eſt angulo D, quia (*per* 4.) baſes eſſent æquales; nec minor quia (*per* 24.) baſis BC eſſet minor baſi EF, ſupponitur tamen major: ergo reſtat ut angulus A, ſit major angulo D.

PROPOSI

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Si duo triangula habeant duos angulos æquales alterum alteri; & unum latus æquale, ſunt æqualia triangula.



Trianguli ABC angulus B ſit æqualis angulo E, trianguli D E F & angulus C angulo F, item latus B C, quod ſitum eſt inter utrumque angulum ſit æquale lateri EF, dico reliqua latera eſſe æqualia & angulum A angulo D.

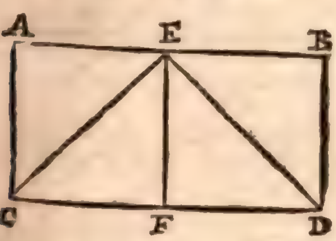
Intelligatur enim baſis E F ſuperponi baſi BC quia æquales ſunt congruent, ita ut punctum E cadat ſupra B, & F ſupra C. tunc linea F D cadet ſupra lineam AC; non enim cadere poteſt extrà; quia alioquin angulus F eſſet major angulo C; nec intra quia minor eſſet; igitur ſupra illam cadet: idem dico de linea E D reſpectu lineæ BA, igitur punctum D cadet ſupra punctum A & totum triangulum toti triangulo æquale erit.

Si verò ponatur latus A B eſſe æquale lateri DE. Intelligatur iterum ſuperponi latus D E, ſupra latus AB, ita ut D cadat in A; & E in B; quia anguli B & E ſupponuntur æquales, linea EF cadet ſupra lineam BC, dico etiam punctum F cadere in C alioquin aut cadet intra, aut extra? non intra ut in G, alioquin angulus AGB, id eſt DFE eſſet major angulo C (*per* 16.) non extrà ut in I quia angulus C eſſet major angulo AIB, hoc eſt angulo F contra ſuppoſitionem: igitur punctum F cadit in C totumque triangulum congruit, ergo & anguli & latera ſunt æqualia.

Quia ſequentes propoſitiones ut demonſtrantur ab Euclide ſupponunt axioma XI. quod, tamen ita lumine naturali notum non eſt: ut nomen axiomatis mereatur: ideo paulo aliter, eamdem propoſitionem ſine illo demonſtrabimus, quare hæc duo lemmata præmittimus.

LEMMA PRIMUM.

Perpendicularis ad unam parallelarum eſt etiam perpendicularis ad aliam.

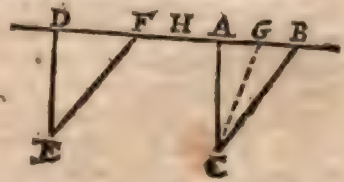


Sint lineæ AB, CD parallelæ, ſitque linea E F perpendicularis ad AB, ita ut anguli FEA, FEB ſint recti, dico eandem lineam EF eſſe perpendicularē ad lineam CD. Abſcindantur lineæ EA, EB æquales, ducantur (per 11.) *ad lineam AB perpendiculares AC, BD, junganturque lineæ EC, ED,*

Demonſtr. Cum in triangulis EAC, EBD latera AE, BE ſint æqualia, item latera AC, BD (per def. paral.) *& anguli A, & B ſint recti ideòque æquales; & baſes EC, ED æquales erunt; item anguli AEC, DEB qui ablati ex angulis æqualibus nempe rectis AEF, BEF; relinquunt angulos CEF DEF æquales. In triangulis autem CEF, DEF cum latera CE, ED ſint æqualia; latus FE commune, & anguli CEF, DEF æquales:* (per 4.) *anguli CEF, DFE æquales erunt: & conſequenter recti.*

LEMMA SECUNDUM.

Si duo triangula rectangula, habeant duo quæcumque latera æqualia: & reliquum latus æquale; reliquoſque angulos æquales habebunt.



Sint duo triangula ABC, DEF quorum anguli A & D ſint recti, & latera AC, DE, item CB, EF ſint æqualia, dico & latera AB, DF eſſe æqualia anguloſque B, & F, item C & E eſſe æquales. Sit enim ſi fieri poteſt latus AB majus latere DF ſumatur linea AG æqualis lateri DF, ducaturque linea CG.

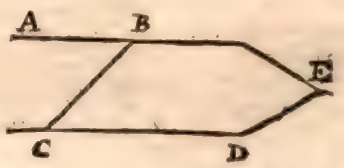
Demonſtr. Quia triangula CAG, EDF habent duo latera AC, DE; & AG, DF, æqualia & angulos A, & D æquales, nempe rectos; baſes CG, FE æquales erunt; quia verò in triangulo CAG producto latere BA angulus externus HAC, major eſt interno AGC, (per 16.) *AGC autem major eſt angulo B, angulus HAC qui rectus eſt utroque B & AGC major erit, atque adeo uterque minor recto id eſt acutus erit. & quia* (per 13.) *anguli AGC, CGB ſunt æquales duobus rectis, & AGC eſt recto minor reliquum CGB major erit recto, & conſequenter major erit angulo B acuto quare* (per 19.) *latus CG, minus erit latere CB, ſed CG eſt æquale lateri FE: igitur BC, FE non erant æquales, contra ſuppoſitionem; quare AB, DE æquales ſunt &* (per 4.) *reliqui anguli ſunt æquales.*

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Si in duas lineas alia incidens, angulos alternos æquales fecerit, illæ parallelæ erunt.

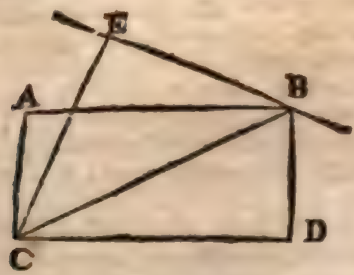
In lineas AB, CD incidat linea BC, faciatque angulos alternos ABC, BCD æquales, dico primò lineas AB, DC quantumlibet productas non convenire. *Hoc enim tantū demonſtravit Euclides;*



Demonſtr. Conveniant enim (ſi fieri poteſt) in puncto E, eſt igitur triangulum BCE, cujus latus E B productum eſt in A. quare angulus externus ABC major eſſet) *per* 16. angulo interno BCE, quod eſt contra ſuppoſitionem.

Quia tamen poſſet quis concedere lineas AB, CD non convenire, negare tamen eſſe parallelas, id eſt æquali ſemper intervallo diſtare ab invicem, ut accidit in conchoide, ut perfecta ſit propoſitio probandum eſt eas eſſe parallelas.

Sint



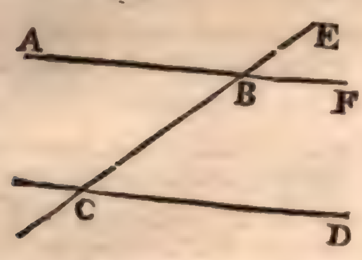
Sint igitur lineæ AB, CD, in quas incidens linea BC faciat angulos alternos ABC, BCD æquales; dico, illas eſſe parallelas. Si enim non ſint parallelæ, intelligatur per punctum B eſſe ducta linea BE, ipſi CD parallela; in quam ex puncto C ducatur perpendicularis CE, & ex puncto B ad lineam CD perpendicularis BD, item & ex puncto C ad lineam AB perpendicularis CA.

Demonſtr. Quia linea CE eſt perpendicularis ad EB, eſt etiam perpendicularis ad illi parallelam CD (*per lemma primum*) quare (*per def. parall.*) lineæ CE, BD æquales erunt; ideoque quia in triangulis rectangulis EBC, DCB, cum latus CB ſit commune, & latera CE, BD æqualia (*per lemma ſecundum*) anguli EBC, BCD, erunt æquales; ſed angulus ABC, ſuppoſitus eſt æqualis angulo BCD, igitur anguli ABC, EBC eſſent æquales pars & totum, quod eſt abſurdum, non igitur alia per punctum B duci poteſt parallela lineæ CD, quam AB, ideoque hæc eſt parallela.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Si in duas lineas incidens alia linea fecerit angulum externum æqualem interno oppoſito: vel duos externos ad eaſdem partes æquales duobus rectis, parallelæ ſunt illæ lineæ.



In duas rectas AB, CD incidat linea BC, & faciat angulum externum EBF, æqualem angulo BCD, interno oppoſito ex eâdem parte: dico primò lineas AB, CD eſſe parallelas.

Demonſtr. cum anguli EBF, BCD ſint æquales & angulus ABC ſit æqualis angulo EBF oppoſito ad verticem (*per* 15.) erunt anguli alterni ABC, BCD æquales; ergo (*per* 27.) lineæ AB, CD ſunt parallelæ.

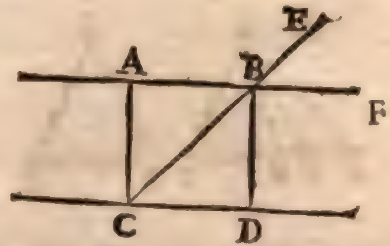
Secundò anguli interni ex eâdem parte nempe FBC, DCB ſint duobus rectis æquales: dico lineas AB, CD eſſe parallelas.

Dem. anguli ABC, FBC, (*per* 13.) ſunt duobus rectis æquales: ſed etiam anguli DCB. FBC ſupponuntur duobus rectis æquales: igitur anguli ABC, FBC, ſunt æquales duobus angulis DCB, FBC, unde ablato communi angulo FBC reſtant anguli ABC, BCD æquales; qui cum ſint alterni lineæ AB, CD (*per* 27.) parellelæ erunt.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Si recta in parallelas incidat, anguli alterni erunt æquales; & externus interno oppoſito ex eâdem parte, duo interni ad eaſdem partes æquales duobus rectis.



In parallelas AB, CD, incidat linea BC, dico primo angulos alternos ABC, BCD eſſe æquales, ducantur enim ex B & C perpendiculares BD, CA, quæ (*ex def. paralli.*) ſunt æquales.

Demonſtr. In triangulis BAC, BDC, anguli A, & D recti ſunt, latera AC, BD, ſunt æqualia, & latus BC commune, igitur (*per lemma* 2.) triangula ſunt æqualia, & anguli ABC, BCD oppoſiti lateribus æqualibus AC, BD, ſunt æquales.

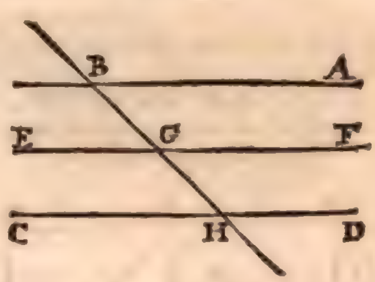
Secundò angulus externus EBF eſt æqualis angulo ABC oppoſito ad verticem (*per* 15.) ſed hic oſtenſus eſt æqualis angulo BCD: igitur idem angulus externus EBF æqualis eſt angulo BCD interno oppoſito ex eâdem parte.

Tertiò cum anguli CBA, BCD ſint æquales addito communi CBF erunt anguli BCD, CBF, æquales duobus CBA CBF; ſed iſti (*per* 13.) ſunt duobus rectis æquales: ergo anguli BCD, CBF qui ſunt interni, ex eâdem parte, ſunt duobus rectis æquales.

PROPOSITIO XXX.

Theorema.

Quæ eidem lineæ ſunt parallelæ; inter ſe ſunt parallelæ.



Sint rectæ AB, CD, eidem lineæ EF parallelæ, dico illas, inter ſe eſſe parallelas, incidat linea BH in tres illas lineas.

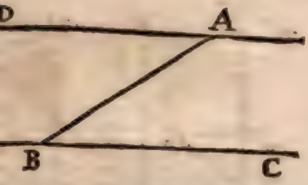
Demonſtr. Quoniam lineæ AB, EF ſunt parallelæ, erunt anguli alterni ABG, BGE æquales (*per* 29.) & quia lineæ EF, CD, ſunt parallelæ, erit angulus externus BGE æqualis interno oppoſito ex eâdem parte, nempe angulo GHC; ergo anguli ABG, BHC ſunt æquales, qui cum ſint alterni lineæ AB, CD, (*per* 27.) parallelæ erunt.

PROPO

ROPOSITIO XXXI.

Problema.

...tum punctum ducere parallelam lineæ datæ.

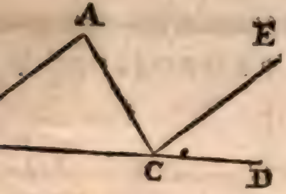


...um A per quod ducenda eſt parallela
... C. Ducatur utcumque linea A B, &
... (*per* 23.) fiat æqualis angulus BAD.
... AB. BC eſſe parallelas.
...t. Cum enim anguli DAB, ABC
...ales, & ſint alterni (*per* 27.) lineæ
...t parallelæ.

POSITIO XXXII.

Theorema.

...angulo, uno latere producto externus ...bus internis oppoſitis ſimul ſumptis ..., item trianguli tres anguli æquales ... rectis.



...um ABC, cujus unum latus B C
...D. Dico angulum externum ACD
...s oppoſitis A & B æqualem eſſe,
... ducatur linea CE parallela lineæ

...uia lineæ AB, CE ſunt paralle-
...ni ECA, CAB (*per* 29.) ſunt
...ia in eaſdem parallelas AB, CE
..., angulus externus DCE æqua-
... oppoſito B (*per eandem*) ſed
... eſt æqualis angulis ACE, DCE
... ſuis partibus; ergo idem angu-
...lis eſt angulus A, & B, ſimul

...res angulos trianguli ABC æqui-
...ctis.
...gulus A C D cum angulo ACB
...ivalet duobus rectis: ſed anguli
... ſunt angulo ACD, (*per primam*
...rgo anguli A & B cum angulo
...int duobus rectis.

Corollaria.

... anguli unius trianguli æquales
... angulis alterius trianguli.
...gulo unus rectus eſt, alij duo

...ianguli duo anguli æquales ſunt
..., reliquus angulus reliquo erit

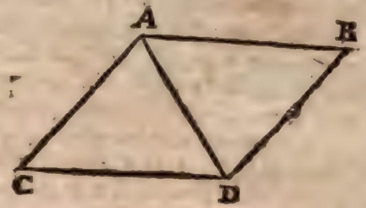
...uncto ad aliquam lineam unica tantum cadit perpendicularis, quia alioquin triangulum haberet duos rectos angulos.

5. Perpendicularis eſt breviſſima quæ à puncto ad lineam cadere poteſt, quia reliquæ opponuntur angulo recto, alij autem anguli ſunt acuti quibus illa perpendicularis opponitur.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Si duas æquales, & parallelas conjungant aliæ duæ lineæ; illæ æquales erunt, & parallelæ.

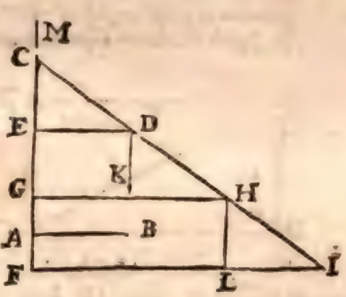


Duas parallelas AB, CD & æquales conjungant lineæ AC, BD non tamen tranſverſim, dico lineas AC, BD eſſe æquales, & parallelas. Ducatur linea AD.

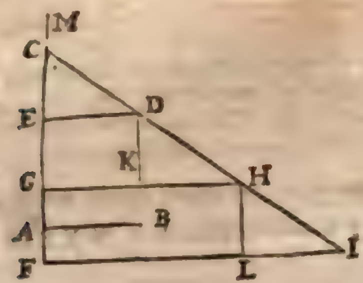
Demonſtr. Quia lineæ AB, CD ſunt parallelæ, erunt (*per* 29.) anguli alterni BAD, ADC æquales, in triangulis autem BAD, ADC, latera AB, CD ſunt æqualia, latus AD commune & anguli BAD, ADC ſunt oſtenſi æquales, quare baſes AC, BD æquales erunt (*per* 4.) & anguli BDA, DAC oppoſiti lateribus æqualibus A B, D C æquales erunt; ſed illi alterni ſunt reſpectu linearum AC, BD, ergo (*per* 27.) ſunt etiam parallelæ.

Poteſt hic facilè probari axioma Euclidis undecimum quod ita habet.

Si in duas lineas alia incidens, angulos internos ex eâdem parte, duobus rectis minores faciat: concurrent illæ lineæ ex eadem parte.



In duas lineas AB, CD, incidens linea CA, faciat angulos internos BAC, ACD minores duobus rectis, dico fore ut illæ lineæ concurrant ſi producantur ad partes B, & D. Cum enim anguli BAC, ACD ſint minores duobus rectis alteruter ſaltem acutus erit. Sit ACD acutus, ex puncto D ducatur (per 31.) *linea DE parallela lineæ AB; quæ neceſſario cadet inter A & C. non enim cadere poteſt in punctum C aut in M, quia cum anguli BAC, BAF* (per 13.) *ſint æquales duobus rectis, majores erunt angulis BAC, ACD; & ablato communi BAC angulus BAF major eſt angulo ACD. ſi igitur parallela DE caderet in C, aut etiam in M, angulus DEF internus minor eſſet angulo BAF externo:* (contra 29.) *ſumantur lineæ EG, GF, æquales lineæ CE, & hoc donec perveniatur*

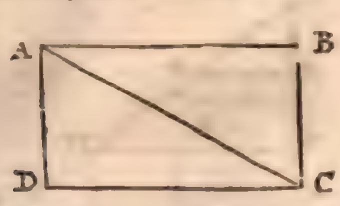


niatur infra punctum A, Sumantur etiam in linea CD producta totidem lineæ DH, HI ipſi CD æquales, & ex punctis E & H (per 31.) *ducantur lineæ DK, HL parallelæ ipſi CF, & æquales lineæ CE. Ultimo ducantur lineæ GK, HK, FL, IL.*

Demonſtr. Quia lineæ ED, GK conjungunt lineas EG, DK eidem CE æquales, & parallelas; (per 33.) *æquales erunt & parallelæ, quare* (per 29.) *anguli GKD, KDE erunt duobus rectis æquales, quia autem lineæ CA, KD ſunt parallelæ in quas incidit linea CD, erit* (per 29.) *angulus externus KDH æqualis interno ECD; quare in triangulis ECD, KDH, cum anguli ECD, KDH ſint æquales, & latera EC, DK; item CD, DH reliqui anguli E & K æquales erunt, ſed propter parallelas AC, DK, angulus E,* (per 29.) *æqualis eſt alterno EDK: ergo anguli EDK, DKH ſunt æquales, ſed EDK, GKD oſtenſi ſunt duobus rectis æquales: igitur GKD, DKH erunt æquales duobus rectis, &* (per 14.) *GKH una erit linea, quam oſtendimus eſſe parallelam lineæ ED, & quia ED facta eſt parallela lineæ AB; GH erit etiam parallela lineæ AB,* (per 30.) *ita oſtendam lineam FI eidem AB eſſe parallelam quare ſi producatur linea AB cum ſecare non poſſit lineas GH, FI, ſibi parallelas; neceſſario lineam HI ſecabit in aliquo puncto inter H & I poſito.*

PROPOSITIO XXXIV.

In parallelogrammo oppoſiti anguli, & latera æqualia ſunt; & ipſum diameter biſariam dividit.



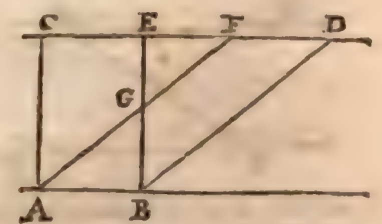
Sit parallelogrammum ABCD, dico latus AB eſſe æquale lateri CD, latus AD lateri BC, angulum A, angulo C, & angulum B angulo D.

Demonſtr. Cum lineæ AB, CD ſint parallelæ, & linea AC in illas incidat; erunt (*per* 29.) anguli alterni BAC, ACD æquales, pariter cum eadem AB incidat in lineas AD, CB, parallelas anguli alterni DAC ACB æquales erunt, quare cum triangula ABC, ADC habeant duos angulos ſingulos ſingulis æquales, & latus AC commune; erunt (*per* 26.) æqualia & anguli B & D oppoſiti eidem lateri AC æquales, & latera AB, CD oppoſita æqualibus angulis ACB, CAD æqualia, ſicut & latera AD, BC. item angulus totalis A, æqualis erit angulo totali C. patet etiam diametrum AC dividere parallelogrammum in duo triangula æqualia.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema.

Parallelogramma ſuper eâdem baſi, & inter eaſdem parallelas conſtituta ſunt æqualia.



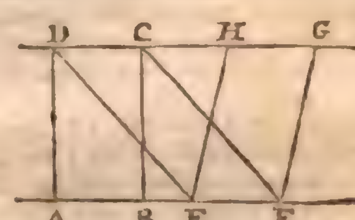
Super eâdem baſi AB, & inter eaſdem parallelas AB, CD, ſint conſtituta duo parallelogramma ABEC, ABDF, dico illa eſſe æqualia.

Demonſtr. Cum triangula FCA DEB, habeant omnia latera æqualia [nam CA, EB (*per* 34.) ſunt æqualia, ſicut FA, DB, & cum lineæ CE, FD, eidem AB ſint æquales, erunt inter ſe æquales, & additâ communi EF; erunt lineæ CF, ED æquales] quare triangula FCA, DEB (*per* 8.) ſunt æqualia; ex quibus ſi auferas triangulum EGF utrique commune; erunt trapezia CAGE, FGBD æqualia; igitur ſi utrique trapezio, addas triangulum AGB erunt parallelogramma ABEC, ABDF æqualia.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus & inter eaſdem parallelas conſtituta ſunt æqualia.



Sint duo parallelogramma ABCD, EFGH, inter eaſdem parallelas AF, DG, quorum baſes AB, EF ſint æquales, dico illa eſſe æqualia. Ducantur lineæ ED, FC.

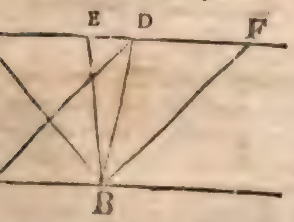
Demonſtr. Lineæ AB, EF ſupponuntur æquales, ſed lineæ AB, CD ſunt æquales (*per* 34.) igitur lineæ CD, EF ſunt æquales, ſupponuntur etiam parallelæ quare lineæ DE, CF eas connectentes (*per* 33.) ſunt parallelæ, eſt igitur parallelogrammum DEFC, cui eſt æquale ABCD, (*per* 43.) cum eandem habeant baſin DC, & etiam EFGH eidem æquale eſt cum eandem habeant baſin EF, igitur parallelogramma ABCD, EFGH æqualia uni tertio, ſunt æqualia inter ſe.

PROPO

OPOSITIO XXXVII.

Theorema.

*ſuper eâdem baſi,& inter eaſdem paral-
lelas conſtituta, ſunt æqualia.*

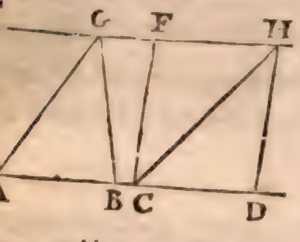


i A B, & inter eaſdem parallelas A B,
onſtituta duo triangula A B C, A B D.
er ſe eſſe æqualia.lateribus AC, AD.
arallelæ B E, BF.
it parallelogramma ABEC, ABFD,
qualia, ſed triangula ABC, ABD,
dimidia (*per* 34.) igitur ſunt etiam
alia.

POSITIO XXXVIII.

Theorema.

*per æqualibus baſibus, & inter eaſdem
llelas conſtituta, ſunt æqualia.*

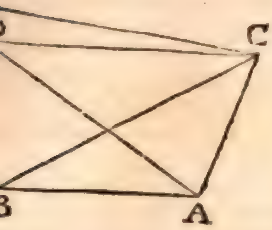


us æqualibus AB, CD, & inter eaſ-
s AD, EF ſint conſtituta duo trian-
DH, dico illa eſſe æqualia. AE, CF
llelæ lateribus BG, DH. (*per* 31.)
arallelogramma A B G E, CDHF,
æqualia,ſed triangula ABG, CDH,
um ſunt dimidia; ergo ſunt inter

POSITIO XXXIX.

Theorema.

*alia ſuper eâdem baſi conſtituta,ſunt
ter eaſdem parallelas.*



angula æqualia ABC, ABD ſuper
neam CD eſſe parallelam lineæ AB.

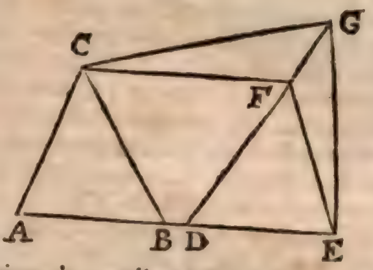
Si negas, ſit linea C E parallela lineæ A B; producatur linea A D in E; jungaturque linea B E.

Demonſtr. Triangula C A B, A B E ſuper baſi A B & inter eaſdem parallelas (*per* 37.) ſunt æqualia,ſed triangulum ABD, ſupponitur æquale triangulo ABC, igitur triangula ABD, ABE inter ſe eſſent æqualia, pars & totum,quod eſt abſurdum, igitur nulla alia duci poteſt parallela lineæ AB, præter C D.

PROPOSITIO XL.

Theorema.

Triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus, in eâdem lineâ conſtituta, ſunt inter eaſdem parallelas.



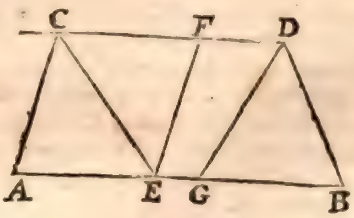
Sint triangula æqualia ABC,D E F ſuper baſibus A B, D E æqualibus; & in eâdem lineâ AE, dico lineam C F eſſe parallelam lineæ A E. Si enim non eſt, ſit linea C G parallela lineæ A E, producatur latus D F in G, connectaturque linea E G.

Demonſt. Triangula A B C, DGE inter parallelas AE, CG, (*per* 38.) ſunt æqualia, ſed triangulum D E F ſupponitur æquale triangulo ABC, igitur triangula DEF, DEG eſſent æqualia, pars & totum, non igitur alia parallela lineæ AE duci poteſt præter C F.

PROPOSITIO XLI.

Theorema.

Si parallelogramum, & triangulum eandem, aut æqualem baſin habeant, & ſint inter eaſdem parallelas; parallelogrammum eſt duplum trianguli.



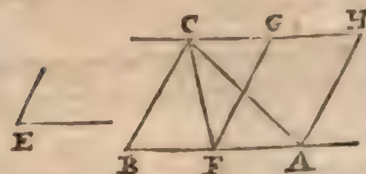
Inter parallelas AB CD ſit parallelogrammum A E F C, & triangulum G B D; quorum baſes AE, GB ſint æquales, dico A E F C eſſe duplum trianguli G B D. Ducatur linea C E.

Dem. Triangulum AEC eſt media pars parallelogrammi AEFC (*per* 34.) ſed triangulum G B D (*per* 38.) eſt æquale triangulo A E C; igitur triangulum G B D eſt media pars ipſius AEFC.

PROPOSITIO XLII.

Problema.

Dato triangulo, æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

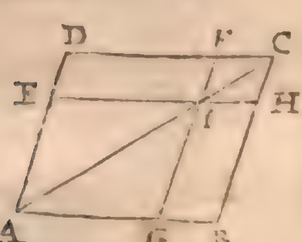


Sit triangulum A B C, cui æquale faciendum eſt parallelogrammum, quod habeat unum angulum æqualem angulo E. Ex puncto C duc lineam CH parallelam lineæ AB (*per* 31.) divide lineam AB bifariam in F, fiatque angulus AFG æqualis angulo E, (*per* 23.) & lineæ F G ducatur parallela AH. dico factum eſſe quod jubetur.

Demonſtr. Primo parallelogrammum A F G H habet angulum A F G æqualem angulo E. Secundo eſt duplum trianguli AFC (*per* 41.) ſed ejuſdem trianguli A F C duplum eſt triangulum ABC, cum triangula AFC, FCB baſes AF, FB æquales habentia, ſint æqualia : igitur parallelogrammum A F G H, eſt æquale triangulo A B C.

PROPOSITIO XLIII.

Cujuſlibet parallelogrammi, duo complementa inter ſe ſunt æqualia.



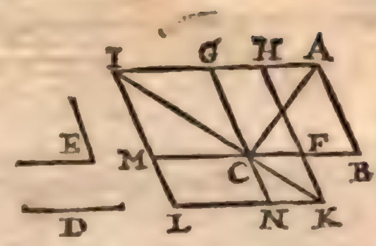
In parallelogrammo ABCD. dico complementa E F, GH eſſe æqualia.

Demonſtr. Cum enim (*per* 34) triangula ACD, ACB ſint æqualia, ex iis ſi auferas triangula E I A, A I G item triangula F C I, I H C, quæ per eandem ſunt æqualia : reſtabunt parallelogramma EF, GH æqualia, hæc autem, ex def. 35. ſunt complementa.

PROPOSITIO XLIV.

Problema.

Super datam rectam dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo.



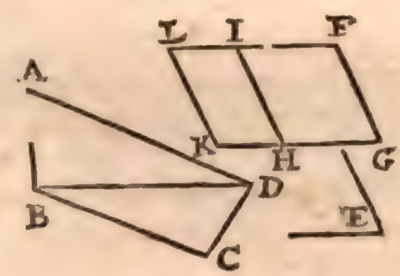
Sit triangulum A B C cui æquale parallelogrammum conſtruendum eſt, cujus unum latus ſit æquale lineæ D, & unus angulus æqualis angulo E. (*Per* 42.) triangulo A BC fiat æquale parallelogrammum F C G H; habens angulum C F H æqualem angulo E. Sumatur linea G I, æqualis lineæ D, ductáque linea I C, producatur linea H F eam ſecans in K; ducantur lineæ I L, K L, C M, parallelæ ſuis oppoſitis. dico parallelogrammum C M L N eſſe id quod quæritur.

Demonſtr. Primo C M L N, eſt æquale ipſi FCGH (*per* 43.) ſed F C G H factum eſt æquale triangulo ABC, igitur CMLN eſt æquale triangulo A B C. Deinde quia lineæ G N, KH, ſunt parallelæ; & in eas incidit F C, erunt anguli alterni HFC FCN (*per* 29.) æquales, item anguli FCN, CNL æquales quia lineæ N L, C M ſunt parallelæ. igitur anguli CNL, HFC ſunt æquales, ſed C F H factus eſt æqualis angulo E, igitur parallelogrammum C M L N unum angulum habet æqualem angulo E, deinde linea C M æqualis eſt lineæ G I, G I autem æqualis facta eſt lineæ D; igitur parallelogrammum C L habet lineam C M æqualem lineæ D.

PROPOSITIO XLV.

Problema.

Dato rectilineo, æquale parallelogrammum conſtituere habens angulum æqualem angulo dato.



Sit datum rectilineum A B C D, cui æquale parallelogrammum conſtruendum eſt; habens unum angulum æqualem angulo E. Reſolve rectilineum in triangula ductâ lineâ BD; tum triangulo A B D (*per* 42.) fac æquale parallelogrammum F G H I, cujus angulus G ſit æqualis angulo E. item triangulo B C D (*per* 44.) In linea I H, æquale fiat parallelogrammum IHKL habens angulum I H K æqualem angulo E. dico G K L F eſſe parallelogrammum æquale rectilineo A B C D.

Dem. Primò quidem patet parallelogrammum eſſe æquale rectilineo; cum enim G H I F ſit æquale triangulo A B D, & I H K L ipſi BCD: erit totum GKLF æquale toti ABCD. quod vero ſit unicum parallelogrammum GKLF oſtendo;

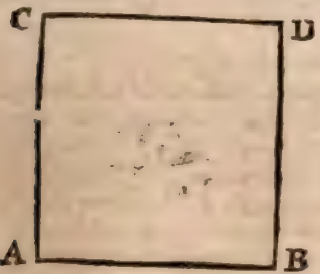
nam

nam cum anguli G & I H G ſint æquales duobus rectis (*per* 29.) cum lineæ F G, I H ſint parallelæ, & angulus I H K ſit æqualis angulo G; [cum uterque ſit factus æqualis angulo E] erunt anguli IHK, IHG æquales duobus rectis; & (*per* 14.) lineæ GH, HK, unam lineam conſtituunt; atque adeo unicum eſt parallelogrammum GKLF.

PROPOSITIO XLVI.

Problema.

Super datâ rectâ quadratum conſtruere.



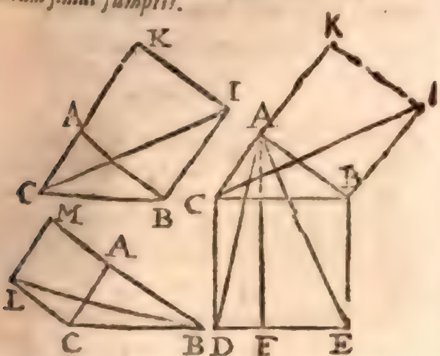
Sit data recta AB, ſupra quam conſtruendum eſt quadratum in punctis A, & B (*per* 11.) excitentur duæ perpendiculares A C, BD ipſi AB æquales, ducaturque linea DC. dico factum eſſe quadratum.

Demonſtr. cum enim lineæ AC. BD ſint æquales, & parallelæ (*per* 28.) propter angulos A, & B rectos; lineæ AB, DC eas conjungentes (*per* 33. erunt æquales & parallelæ: ſunt igitur 4. lineæ æquales, & anguli A & C, item B & D oppoſiti (*per* 34. erunt recti. igitur ABCD eſt quadratum.

PROPOSITIO XLVII.

Theorema.

In triangulo rectangulo, quadratum lateris oppoſiti recto angulo, æquale eſt quadratis reliquorum laterum ſimul ſumptis.



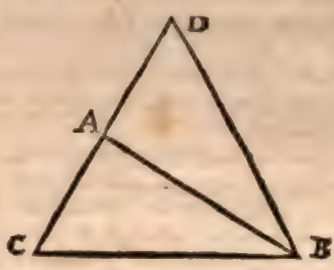
Sit triangulum ABC cujus angulus A rectus, dico quadratum B D, lateris ſcilicet B C oppoſiti angulo recto A, eſſe æquale duobus quadratis BK, AL, reliquorum ſcilicet laterum AC,AB; ducatur linea A F parallela lineis BE, CD. ducanturque lineæ A E, AD, & ne ſit confuſio repetatur triangulum B A C bis, factiſque quadratis reliquorum laterum ducantur I C L B.

Demonſtratio. In triangulis ABE, IBC, latera A B, I B ſunt æqualia, cum ABIK ſit quadratum, item B E B C. anguli item A B E, I B C, ſunt æquales; cum enim anguli IBA, EBC ſint recti, ſi illis addas communem angulum ABC, erunt anguli ABE, IBC æquales; igitur (*per* 4.) triangula ABE, IBC ſunt æqualia, ſed parallelogrammum B F, (*per* 41.) eſt duplum trianguli A B E, cum eandem baſin B E habeant, & ſint inter eaſdem parallelas BE, FA, item quadratum B K eſt duplum trianguli I B C (*per eandem*) igitur parallelogrammum BF, & quadratum BK ſunt æqualia, eodem modo oſtendam quadratum CM, eſſe æquale parallelogrammo CF: ergo totum quadratum BEDC eſt æquale quadratis B K. C M. ſimul ſumptis.

PROPOSITIO XLVIII.

Theorema.

Si quadratum unius lateris trianguli eſt æquale duobus quadratis reliquorum laterum: angulus ijs oppoſitus rectus eſt.



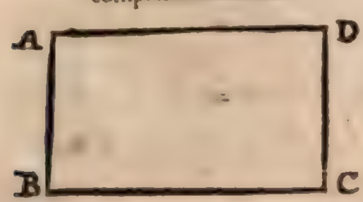
In triangulo A B C quadratum lateris C B, ſit æquale quadratis laterum A B, AC; dico angulum BAC eſſe rectum. ducatur ad B A perpendicularis A D æqualis lineæ A C, conjungatúrque linea B D.

Demonſtratio. Cum angulus B A D ſit rectus erit (*per* 47.) quadratum lateris BD æquale quadratis laterum B A, A D, vel AC; cum AC ſit æqualis ipſi AD, ſed quadratis laterum BA, AC, jam ponebatur æquale quadratum lateris B C, igitur quadrata laterum BC, BD ſunt æqualia; & conſequenter lineæ B C, BD æquales. Cum igitur in triangulis BAD, BAC latera AD, AC ſint æqualia, A B commune & baſes BD, BC æquales (*per* 8.) anguli B A D, BAC æquales erunt; ſed BAD factus eſt rectus igitur BAC rectus eſt.

EUCLIDIS ELEMENTORVM LIBER SECVNDVS.

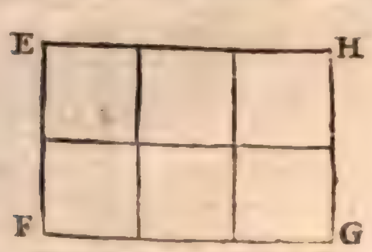
Definitiones.

1. Parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub duabus lineis rectum angulum comprehendentibus.

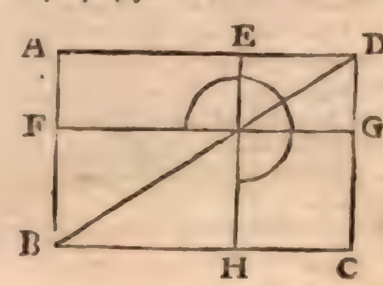


Notandum primò nos per vocem rectanguli deinceps intellecturos parallelogrammum cujus omnes anguli ſunt recti, ſufficienter autem determinamus rectangulum, dum ejus longitudinem, & latitudinem aſſignamus; duas ſcilicet lineas vicinas appellantes, ut in rectangulo ABCD ſi determinemus lineas AB, BC; aliæ enim iſtis ſunt æquales, quare ſi duo rectangula duas vicinas lineas æquales habeant, illa æqualia erunt.

Intelligitur autem generari rectangulum ABCD ſi linea AB ſtans ſemper perpendiculariter, ad lineam BC, eam percurrat, qui ductus reſpondet multiplicationi arithmeticæ, ita ut ſicut ducendo lineam AB ſupra lineam BC, producitur rectangulum ABCD, ita multiplicando latus BC per BA idem rectangulum producitur, quod ita explico



Sicut ad determinandam longitudinem alicujus lineæ utimur menſura nobis nota ut cum dicimus lineam 4. 5. pedum, ita dum aream aut capacitatem alicujus ſuperficiei determinare volumus, eam metimur per quadrata nobis nota; v.g. per pedem quadratum, hoc eſt, per quadratum cujus ſingula latera ſint unius pedis. Utimur autem potius quadrato quàm aliis menſuris; quia cum ejus longitudo ſit æqualis latitudini, facilius exhibetur aſſignatâ unicâ eius dimenſione. Cognitâ vero longitudine alicujus rectanguli facilè innoteſcit per multiplicationem numerus quadratorum, quæ in eo continentur. Sit enim rectangulum EFGH cujus linea EF ſit duorum pedum, & FG trium; dico ſi multiplices FG, per EF, dicaſque bis tria, invenies 6. numerum quadratorum unius pedis, quæ continentur in rectangulo EFGH. Ratio clara eſt ſi figura cum longitudine FG trium pedum haberet tantum altitudinem unius; fieret ſolum unus ordo trium quadratorum, ſed EF eſt duorum pedum quare duo ordines fieri poſſunt, unde multiplicando unum latus per aliud, exurgit area rectanguli totius, cum igitur per multiplicationem hoc modo fiant rectangula, aliquæ propoſitiones in numeris exhibentur.

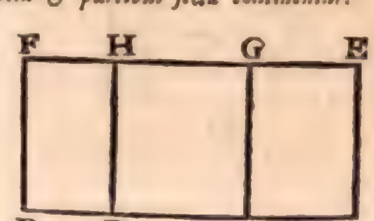


Secunda in rectangulo, ductâ diametro, unum rectangulorum per quæ diameter tranſit cum duobus vicinis complementis vocatur Gnomon. Ut in rectangulo ABCD ſi ſumas rectangulum EG unà cum complementis EF, GH, hæ[illegible] quia figuram Gnomonis ſeu ſquadræ, e[illegible] vocantur Gnomon.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Si fuerint duæ lineæ quarum una ſecetur in quotcumque ſegmenta, alia verò inſecta maneat: rectangulum ſub illis duabus lineis contentum æquale eſt omnibus ſimul rectangulis, quæ ſub inſecta & partibus ſecta continentur.



Sit linea AB ſecta in quotcumque ſegmenta AC, CD, DB, & alia AE inſecta, dico ſi ex his duabus fiat rectangulum ABFE, illud eſſe æquale rectangulis omnibus ſimul ſumptis, quorum primum comprehendetur, hoc eſt, habebit

bit unum latus æquale lineæ A E , & aliud ſegmento A C. Secundum habebit unum latus æquale eidem lineæ AE, & aliud ſegmento CD. Tertium habebit unum latus æquale lineæ AE aliud ſegmento D B. ducantur enim lineæ CG. DH parallelæ lineis AE , FB. ita ut ſint tria rectangula AG, CH, DF.

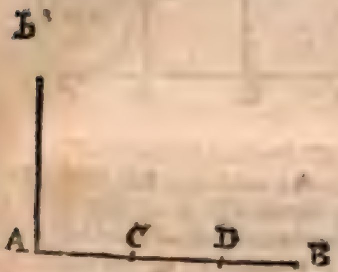
Demonſtr. Rectangulum A F ſolum , æquale eſt tribus rectangulis AG, CH, DF omnibus ſcilicet ſuis partibus ; ſed rectangulum AF comprehenditur ſub lineis AB, AE ; & rectangula AG, CH, DF habent pro uno latere aut ipſam AE aut illi æquales CG, DH, *(quod perinde eſt)* & pro aliâ lineâ ſegmenta AC, CD, DB. Igitur rectangulum ſub AB, AE, comprehenſum, æquale eſt rectangulis omnibus comprehenſis ſub AE & ſingulis ſegmentis.

Idem in numeris. ſit linea AB 9 pedum, ſitque ſegmentum A C trium , CD 4. DB duorum pedum, & linea AE ſit 5 pedum. dico rectangulum A F hoc eſt quinquies novem ſeu 45. æquale eſſe quinquies tribus, ſeu 15. & quinquies 4. ſeu 20. & quinquies duobus, ſeu 10. nam 15. 20. & 10. faciunt 45.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si recta ſecetur in quotcumque ſegmenta, rectangula comprehenſa ſub totâ, & ſingulis ſegmentis, æqualia ſunt quadrato totius.



Recta AB ſecetur utcumque in C & D. dico rectangula comprehenſa ſub tota A B , & ſingulis ſegmentis AC, CD, DB, eſſe ſimul ſumpta æqualia quadrato lineæ A B. Sit linea A b æqualis lineæ A B.

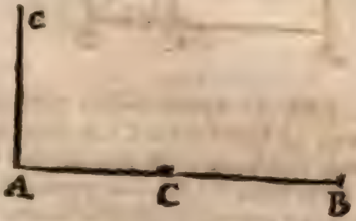
Demonſtr. Per ſuperiorem rectangulum comprehenſum ſub AB, A b, æquale eſt rectangulis comprehenſis ſub Ab, AC ; CD ; AB, DB. igitur rectangulum ſub AB , Ab (quod eſt quadratum lineæ AB, cum AB , Ab ſint æquales) eſt æquale rectangulis ſub AB , AC ; AB, CD ; AB, DB comprehenſis.

Idem in numeris ſit AB novem, AC 3. GD 4. DB 2. dico novies novem ſeu 81. æqualia eſſe novies tribus, hoc eſt 27. novies 4. ſeu 36. & novies duobus hoc eſt 18. nam 27. 36. & 18. efficiunt 81.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si recta ſecetur utcumque, rectangulum comprehenſum ſub tota, & uno ſegmentorum, æquale eſt, quadrato prædicti ſegmenti ; & rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis.



Recta A B ſecetur in C , dico rectangulum comprehenſum ſub AB, & AC , æquale eſſe quadrato lineæ AC & rectangulo comprehenſo ſub AC, CB. Repetatur enim linea AC.

Demonſtr. *(Per 1.)* rectangulum comprehenſum ſub AB, AC æquale eſt & rectangulo comprehenſo ſub AC AC, & alteri comprehenſo ſub AC, CB; ſed comprehenſum ſub AC; AC eſt quadratum ſegmenti A C , ergo rectangulum comprehenſum ſub AB, AC æquale eſt quadrato lateris AC ; & rectangulo comprehenſo ſub AC, CB hoc eſt ſub ſegmentis.

In numeris AB ſit 7. AC 3. CB 4. dico ter 7. ſeu 21. æqualia eſſe ter tribus ſeu 9. & ter quatuor ſeu 12. nam 12. & 9. efficiunt 21.

Ne deterreantur tyrones etiamſi propoſitiones hujus libri minus benè concipiant.

PROPOSITIO IV.

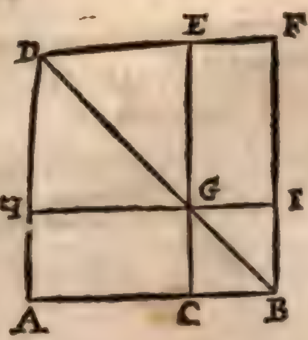
Theorema.

Si recta ſecta ſit utcumque ; erit quadratum totius lineæ, æquale quadratis ſegmentorum & rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis bis ſumpto.



Recta AB ſecta ſit in C, dico quadratum ejus AF æquale eſſe quadratis ſegmentorum AC , CB, & duobus rectangulis comprehenſis ſub AC, CB. Ducta diametro DB, per C ducatur C E parallela lineis AD, BF, ſecans diametrum in G, & per G ducatur G H parallela lineis AB, FD.

Demonſtr. Primo quidem C I eſt quadratum lateris C B ; nam cum latera A B , A D ſint æqualia *(per defin. quadr.)* erunt *per 5. 1.)* anguli ADB , ABD æquales , ſed cum lineæ A D, C E ſint parallelæ in quas incidit D G , angulus



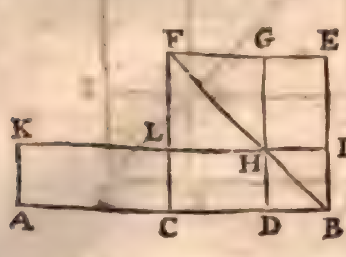
externus CGB erit æqualis angulo ADB interno (*per* 29. 1.) Igitur anguli CGB, CBG æquales erunt & dimidia pars recti cum angulus C ſit rectus. Igitur latera CB,CG ſunt æqualia;& quia angulus C B I erat rectus ablato ſemirecto CBG reſtabit G B I ſemirectus, item I G B ſemirectus erit,igitur (*per* 16.1.) triangula GIB, GCB habebunt latera æqualia: igitur 4. latera CG, GI,CB, I B ſunt æqualia. eſt igitur G I quadratum lateris C B. eodem modo oſtendam H E eſſe quadratum lateris A C. & rectangulum A G comprehendi ſub A C, C B, cum C B, CG ſint æquales, & rectangulum CF ſub CB, AC comprehenditur, aut illi æquali GE. nam cum lineæ A B, C E ſint æquales, ablatis æqualibus C B, C G. reſtant æquales A C, G E. ſed patet quadratum AF eſſe æquale quadratis C I, HE, & rectangulis A G, G E. igitur quadratum lineæ A B eſt æquale quadratis ſegmentorum A C, C B, & duobus rectangulis comprehenſis ſub ſegmentis A C, C B.

In numeris A B ſit 7. A C 5. & CB 2. dico ſepties 7. ſeu 49. æqualia eſſe quinquies 5. ſeu 25. & bis duobus ſeu 4. & duobus rectangulis id eſt quinquies duobus bis, ſeu 10. & 10. nam 25.4.10. & 10. efficiunt 49.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si recta ſecetur æqualiter, & inæqualiter; erit rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis contentum, una cum quadrato partis intermediæ: æquale quadrato dimidiæ.



Sit linea A B æqualiter diviſa in C & inæqualiter in D. dico quadratum C E, dimidiæ C B, æquale eſſe rectangulo comprehenſo ſub A D, D B, & quadrato intermediæ C D. ducta diametro F B, & D G parallela lineis C F, BE; item I K parallelâ lineæ A B, & A K parallelâ ipſi C F.

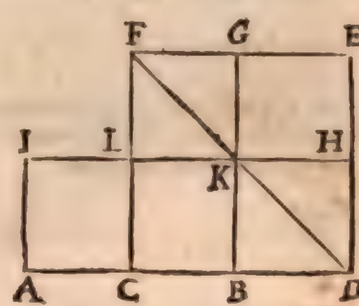
Dem. Oſtendam ſicut in priori D I eſſe quadratum. lineæ D B: item L G eſſe quadratum lineæ CD. cum LH ſit illi æqualis. item rectangulum A L eſſe æquale rectangulo D E, nam lineæ AC, BE, eidem lineæ CB ſunt æquales, igitur inter ſe ſunt æquales: latus L C æquale eſt lateri D H, & hoc lateri D B. quibus rectangulis A L. D E ſi addas rectanctulum C H, erit totum A H æquale tribus G I, D I, CH, ſed tria G I, I D, C H una cum quadrato L G æqualia ſunt quadrato CE, igitur AH (quod comprehenditur ſub AD, DB) unâ cum quadrato L G ſcilicet quadrato lineæ CD, æquale eſt quadrato lineæ CB.

In numeris ſit AB. 10. AC 5; C D 3. DB 2. dico quadratum dimidiæ C B hoc eſt quinquies 5. ſeu 25. æquale eſſe rectangulo ſub A D 7. & D B 2. hoc eſt bis ſeptem ſeu 14. & quadrato C D 3. hoc eſt ter tribus, ſeu 9. nam 14. & 9. efficiunt 25.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si recta linea biſariam ſecetur eique recta quædam adjiciatur erit rectangulum comprehenſum ſub lineâ compoſitâ ex totâ & adjectâ, & ſub adjectâ, unâ cum quadrato dimidiæ æquale quadrato compoſita ex dimidiâ & adjecta.



Linea AB dividatur biſariam in C, eique addatur BD. dico quadratum CE, lineæ CD [compoſitæ ex dimidiâ CB, & adjecta BD.] æquale eſſe rectangulo comprehenſo ſub AD [compoſitâ ex AB, & adjecta B D] & ſub adjecta B D & quadrato lineæ C B. ducta diametro FD, ducantur parallelæ BG, H I.

Demonſtr. Rectangula AL, KE, ſunt æqualia eidem C K, igitur & inter ſe: quare ſi illis addas commune C H, erit totum A H æquale ipſis KE, C H: ſed K E G H una cum quadrato L G æqualia ſunt quadrato C E; igitur A H una cum quadrato L G æquale eſt quadrato C E, ſed A H comprehenditur ſub A D compoſita ex A B, & adjecta B D, & ſub B D, aut illi æquali D H, nam B H eſt quadratum. igitur rectang. ſub A D & BD comprehenſum, una cum quadrato lineæ intermediæ CB, æquale eſt quadrato lineæ C D compoſitæ ex C B, & B D.

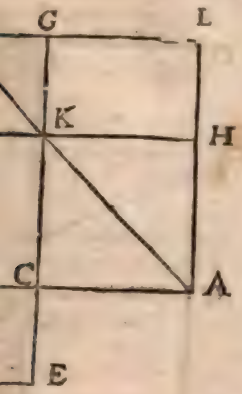
In numeris ſit A B 6. CB 3. BD 4. dico rectangulum A H id eſt quater 10. & quadratum lineæ C B ſeu L G quod eſt ter tria ſeu 9. æqualia eſſe quadrato lineæ C D ſeu 7. id eſt ſepties 7. quod eſt 49.

PROPO

…POSITIO VII.

Theorema.

…utcumque, erunt quadrata totius, & …gmenti, æqualia duobus rectangulis …ſub totâ, & dicto ſegmento, unà …o alterius ſegmenti.



…datur in C, dico quadratum AD …n quadrato ſegmenti CB, id eſt …l, æqualia eſſe duobus rectangu- …& dicto ſegmento CB compre- …quadrato reliqui ſegmenti AC. …c duo quadrata AD, CF æqua- …gulo HD [comprehenſo ſub HI …& linea ID æquali ipſi KI, ſeu …ulo KF [comprehenſo ſub KE, …ſub EF æquali ipſi CB.] item …l eſt quadrato lineæ AC, om- …partibus; igitur quadrata linea- …ualia ſunt quadrato ſegmenti …rectangulis comprehenſis ſub

…AB 5. CB. 2. dico quinquies 5. …id eſt 4. quæ faciunt 29. æqua- …5. ſeu 10. bis ſumpto & qua- …er tria. ſeu 9. nam 10. 10. & 9.

…OSITIO VIII.

Theorema.

…umque, erunt 4 rectangula com- …, & uno ſegmento unà cum qua- …menti, æqualia quadrato lineæ …i & dicto ſegmento.



…ecta in C, dico 4 rectangula comprehenſa ſub AB, BC, unà cum quadrato ſegmeenti AC, æqualia eſſe quadrato AE lineæ AD, compoſitæ ex AB & ſegmento BC, nam BC, BD ſunt æquales, ducta diametro AE, ducantur parallelæ CF, BG, HI, LM.

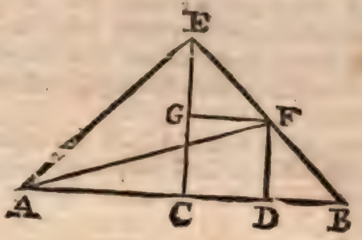
Demonſtr. In quadrato AE invenitur quadratum AO, ſcilicet quadratum lineæ AC, & rectangula HR, LG, BM, quæ omnia unam lineam habent æqualem lineæ AB, aliam lineæ CB. Inveniuntur item CP, & GM quæ duo ſimul æquivalent rectangulo LP. & nihil aliud. Cum ergo quadratum AE ſit æquale omnibus ſuis partibus, erit quadratum AE æquale quadrato ſegmenti AC, & 4 rectangulis comprehenſis ſub AB, BC.

In numeris ſit AB 7. AC, 4. & CB tria; dico quadratum totius AD 10. id eſt decies decem ſeu 100. æquale eſſe quadrato lineæ AC 4. id eſt quater 4. ſeu 16. & rectangulo ſub AB 7. & BC tribus ſeu 21. quaterſumpto; nam 21. 21. 21. 21. & 16. faciunt 100.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si recta ſecetur biſariam, & non biſariam erunt quadrata partium inæqualium dupla & quadrati dimidiæ lineæ, & quadrati intermedij ſegmenti.



Sit linea AB diviſa biſariam in C, & non biſariam in D, dico quadrata ſegmentorum inæqualium AD, DB ſimul, dupla eſſe quadrati dimidiæ lineæ hoc eſt AC, & intermediæ ſeu CD. Ducatur perpendicularis CE æqualis ipſi CA, junganturque lineæ AE, EB. & perpendicularis DF, & FG parallela lineæ AB; ultimò ducatur linea AF.

Demonſtr. Quia lineæ AC, CE ſunt æquales; anguli EAC, CEA æquales erunt (*per* 5.1.) & quia angulus C rectus eſt, erunt ambo ſemirecti, ſemirecti item ſunt CEB, CBE; & quia angulus D rectus eſt, erit reliquus DFB ſemirectus: unde (*per* 6.1.) lineæ DB, DF ſunt æquales, & pariter GF, EG æquales ſunt lineæ CD. quadratum AE propter angulum rectum C (*per* 47.1.) æquale eſt quadratis laterum æqualium AC, CE, & conſequenter duplum quadrati lateris AC: pariter quadratum lineæ EF duplum eſt quadrati lineæ GF, hoc eſt CD; ſed quia anguli AEC, CEF ſunt ſemirecti totus AEF rectus eſt & (*per* 47. 1.) quadratum lineæ AF eſt æquale quadratis laterum AE, EF; igitur ſolum quadratum lineæ AF eſt duplum quadratorum AC, CD, ſed quadrata AD, DF (*per* 47. 1.) æqualia ſunt quadrato lineæ AF, cum angulus D rectus ſit; igitur quadrata AD, DF, aut AD, DB, ſunt dupla quadratorum BC, CD.

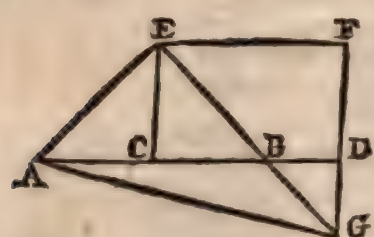
Digitized by Google

In numeris ſit linea AB 10. AD 8. DB 2. dico quadratum lineæ AD 8. hoc eſt 64. & lineæ DB 2. hoc eſt 4. eſſe dupla quadratorum lineæ AC 5. hoc eſt 25. & CD 3. ſeu 9. nam 64. & 4. ſunt dupla 25. & 9.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si recta biſariam ſecetur, eique alia adjiciatur, erit quadratum lineæ compoſita ex totâ, & adjunctâ, cum quadrato adjunctæ: duplum quadrati dimidiæ & quadrati lineæ compoſita ex dimidiâ & adjunctâ.



Linea AB ſit diviſa biſariam in C, eique addatur BD, dico quadratum lineæ AD [compoſitæ ex totâ AB & adjuncta BD cum quadrato adjunctæ BD,] eſſe duplum & quadrati lineæ CD [compoſitæ ex dimidia CB & adjuncta BD] & quadrati lineæ, A C, dimidiæ ſcilicet lineæ AB. Ducatur enim perpendicularis CE æqualis lineæ A C & CB, alia item perpendicularis DF lineæ CE æqualis. Ducaturque linea EB uſque in G, & linea EF, item linea AG.

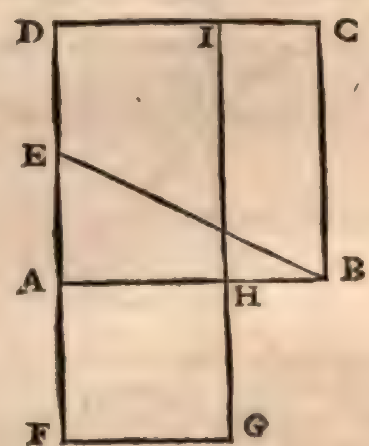
Demonſtr. Cum lineæ A C, CE ſint æquales; anguli CAE CEA æquales erunt, & quia angulus C rectus eſt, illi erunt ſemirecti; item anguli CEB, CBE ſemirecti ſunt; & angulus GBD oppoſitus ad verticem ſemirecto CBE ſemirectus eſt, & cum angulus D ſit rectus reliquus BGD ſemirectus erit (*per* 32. 1.) & (*per* 6. 1.) latera BD, DG ſunt æqualia, lineæ item EF, FG ſunt æquales (*per eandem*) cum anguli GEF, EGF ſint æquales, nempe ſemirecti, lineæ EF CD conjungentes lineas CE, DF æquales & parallelas (*per* 33. 1.) ſunt æquales; quia autem angulus C rectus eſt, quadratum lateris AE æquale eſt quadratis AC, CE, (*per* 47. 1.) quæ cum æqualia ſint inter ſe, quadratum AE erit duplum quadrati AC. Item quia angulus F rectus eſt quadratum EG duplum erit quadrati EF, aut CD; & quia angulus AEG conſtans duobus ſemirectis, rectus eſt, quadratum AG eſt æquale quadratis AE, EG, igitur ſolum quadratum AG eſt duplum quadratorum AC, CD; ſed quia angulus D rectus eſt, quadrata AD, DG, ſeu DB, ſunt æqualia quadrato AG: igitur quadrata AD, DB. Dupla quadratorum AC, CD.

In numeris AB ſit 6. AC, 3. BD 4. quadratum AD 10. erit 100. & BD 4. erit 16. dico 100. & 16. eſſe dupla quadrati AC 3. hoc eſt 9. & CD 7. ſeu 49. nam 49. & 9. ſeu 58. ſunt media pars 116.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Datam lineam ita ſecare, ut rectangulum comprehenſum ſub illâ & uno ſegmento, æquale ſit quadrato alterius ſegmenti.



Sit linea AB ita dividenda, ſupra illam fiat quadratum AC (*per* 46. 1.) cujus dividatur biſariam latus AD, in E; ducta lineâ EB; ſumatur illi æqualis EF, fiatque quadratum ſupra AF, cujus latus GH producatur in I. dico rectangulum HC, comprehenſum ſub BC, hoc eſt AB (*cum ſint æquales*) & ſub ſegmento HB æquale eſſe quadrato ſegmenti AH, nempe quadrato AG.

Demonſtr. Cum linea DA ſit diviſa biſariam in E, eique adjuncta ſit AF, erit rectangulum DG comprehenſum ſub DF compoſita ex linea DA & adjuncta AF, & ſub FG ſeu adjuncta AF (*nam ſunt æquales*;) una cum quadrato AE æquale quadrato lineæ EF, aut EB illi æqualis (*per* 6.) ſed quadratum lineæ EB eſt æquale quadratis AB, AE, (*per* 47. 1.) igitur quadrata linearum AB, AE æqualia ſunt rectangulo DG, & quadrato AE, quod quia commune eſt, ſi utrinque auferatur, reſtant rectangulum DG, & quadratum lineæ AB, ſeu ABCD æqualia, habent autem commune rectangulum DH, quod ſi utrinque auferatur: erit quadratum AG æquale rectangulo HC.

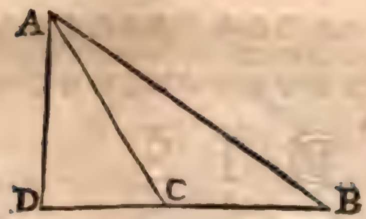
PROPOSITIO XII.

Theorema.

In triangulo obtuſangulo, quadratum lateris oppoſiti angulo obtuſo, erit æquale quadratis reliquorum laterum, & inſuper duobus rectangulis comprehenſis ſub uno latere (in quod demiſſa eſt perpendicularis) & ſub lineâ quæ reſtat uſque ad perpendicularem.

Sit

Digitized by



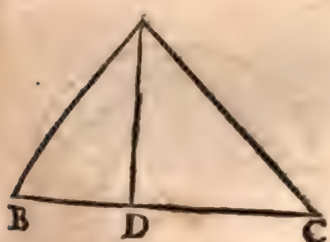
Sit rectangulum A B C, cujus angulus A C B obtuſus. dico quadratum lateris A B eſſe æquale quadratis AC, CB, & duobus rectangulis comprehenſis ſub B C, & lineâ C D, quæ reſtat uſque ad perpendicularem A D.

Demonſtr. In triangulo A B D cujus angulus D rectus, (*per* 47. 1.) quadratum A B, eſt æquale quadratis AD, BD; & quia linea BD diviſa eſt in C (*per* 4.) erit ejus quadratum æquale quadratis BC, CD, & duobus rectangulis comprehenſis ſub B C, CD, quæ omnia loco quadrati BD poni poſſunt, igitur quadratum A B eſt æquale quadratis A D, DC, CB, & duobus rectangulis ſub BC, CD comprehenſis. Loco autem quadratorum A D, D C poteſt poni ſolum quadratum AC illis æquale (*per* 47. 1.) igitur quadratum A B eſt æquale quadratis AC, CB & duobus rectangulis comprehenſis ſub BC, CD.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

In triangulo quocumque, quadratum lateris oppoſiti angulo acuto; unà cum duobus rectangulis comprehenſis ſub illo latere in quod cadit perpendicularis & ſub linea poſita inter angulum acutum, & perpendicularem, æquale eſt quadratis reliquorum laterum



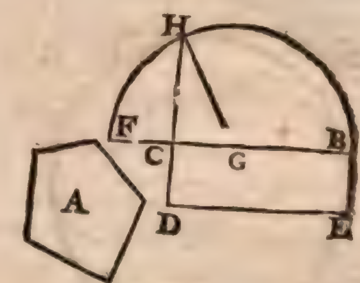
Sit triangulum A B C cujus angulus C acutuſ. demiſsâ perpendiculari A D, dico quadratum lateris A B oppoſiti angulo C acuto unâ cum duobus rectangulis comprehenſis ſub B C, CD, æquale eſſe quadratis laterum, A C, C B.

Demonſt. Quia linea BC diviſa eſt utcumque in D, erit (*per* 7.) quadratum totius BC, & ſegmenti D C, æquale duobus rectangulis ſub B C, C D, & quadrato lineæ B D; addatur commune AD, erunt quadrata BC, DC, AD æqualia duobus rect. ſub BC, CD, & duobus quadratis B D, A D, pro quibus duobus quadratis BD, AD poteſt poni quadratum AB illis æquale (*per* 47. 1.) ſicut loco quadratorum D C, A D poteſt poni quadratum AC: igitur erunt quadrata BC, AC; æqualia duobus rectangulis ſub BC, DC, & quadrato A B, quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Dato rectilineo æquale quadratum conſtruere.



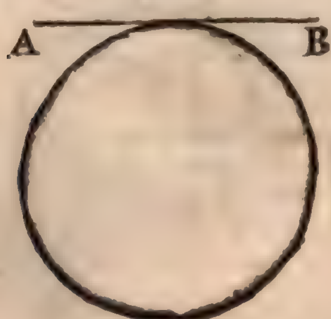
Sit datum rectilineum A, cui æquale quadratum conſtruendum eſt. Fiat (*per* 45. 1.) parallelogrammum rectangulum æquale rectilineo A; ſitque B D, cujus ſi latera B C, CD æqualia ſint, factum eſt quod jubetur; ſi verò ſint inæqualia; ſit BC majus quàm CD, producaturque linea BC; ita ut CF ſit æqualis ipſi CD. Dividatur bifariam B F in G, factoque ex G ut centro intevallo BG; aut GF, ſemicirculo B H G producatur linea DC, uſque in H, dico quadratum lineæ C H ſi fieret; eſſe æquale parallelogrammo BD, & conſequenter rectilineo A. Ducatur enim linea G H.

Demonſtr. Quoniam linea B F diviſa eſt bifariam in G, & non bifariam in C, erit (*per* 5.) quadratum dimidiæ, ſcilicet G F, aut GH, illi æqualis, æquale rectangulo comprehenſo ſub BC, CF, aut CD, hoc eſt rectangulo BD, & quadrato GC; ſed quadrato G H (*per* 47. 1.) æqualia ſunt quadrata G C, CH: igitur quadrata GC, CH æqualia ſunt rectangulo BD, & quadrato G C, quod quadratum G C commune utrique, ſi auferatur: reſtabit quadratum C H æquale rectangulo B D; & conſequenter rectilineo A.

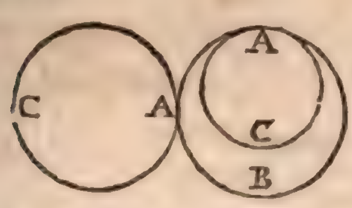
EUCLIDIS ELEMENTORVM LIBER TERTIVS.

Definitiones.

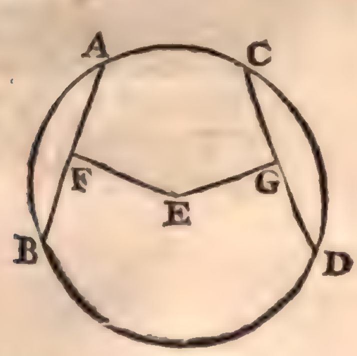
1. Æquales circuli ſunt quorum diametri, aut ſemidiametri ſunt æquales.



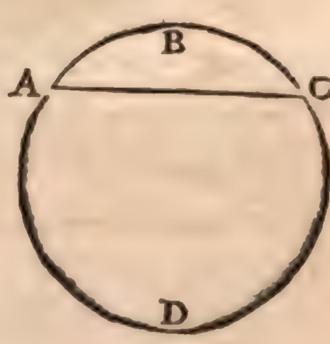
2. Linea circulum tangit, quæ circulo occurrens, cum tamen ulterius producta non ſecat. ut linea A B.



3. Circuli ſe tangunt qui ſibi mutuo occurrentes ſe tamen invicem non ſecant. Tales ſunt circuli AB, AC.

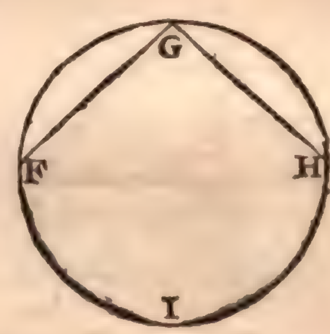


4. Lineæ in circulo æqualiter à centro diſtant, cum perpendiculares ad ipſas à centro ductæ, ſunt æquales; ut lineæ AB, CD, nam perpendiculares EF, E G ſunt æquales.



5. Segmentum circuli eſt figura comprehenſa peripheriâ circuli, & lineâ rectâ; ut figurâ ABC vel ADC.

6. Angulus ſegmenti eſt angulus mixtus quem facit peripheria, cum linea recta; ut angulus BAC, vel ADC.



7. Angulus in ſegmento eſſe dicitur, in quo lineæ eum comprehendentes continentur; ut angulus FGH dicitur eſſe in ſegmento FGH.

8. Angulus inſiſtere dicitur peripheriæ cui opponitur ut angulus F G H inſiſtit peripheriæ F I H.

9. Sector

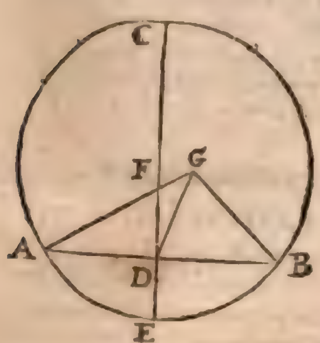


Sector eſt figura comprehenſa duabus ſemidiametris & arcu inter illas intercepto; *talis eſt figura K L M.*

PROPOSITIO I.

Problema.

Dati circuli centrum reperire.



Sit inveniendum centrum circuli A B C. Ductâ lineâ AB, & diviſa bifariam in D, agatur perpendicularis D C; dividatur linea C E bifariam in puncto F, hoc dico eſſe centrum circuli.

Demonſt. Si centrum eſt in lineâ C E non poteſt eſſe aliud quam punctum F, alioquin omnes lineæ à centro ad peripheriam non eſſent æquales. ſed centrum non eſt extra lineam C E, nam ſit extra illam ſitque punctum G, ducantur lineæ G A, GB, GD. in triangulis G D A, G D B cum latera, A D, D B ſint æqualia, item D E ſit commune & lineæ G A, GB (*per def.circ.*) ſint æquales anguli GDA GDB (*per* 8. 1.) æquales erunt, & conſequenter recti, ſed iam F D A, erat rectus; igitur anguli F D A, G D A æquales eſſent, pars & totum, quod eſt abſurdum.

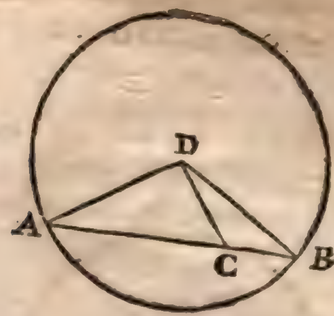
COROLLARIA.

Ex hoc patet ſi in circulo una linea aliam bifariam, & perpendiculariter ſecat, in ea eſſe centrum.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si in circuli circumferentiâ duo puncta ſumantur; linea recta illa connectens tota intra circulum cadit.



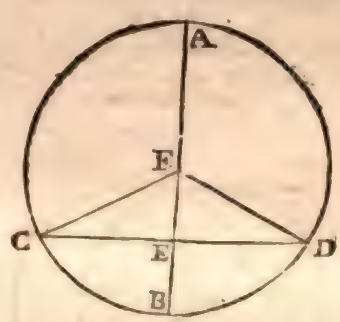
Duo puncta circumferentiæ A & B connectat linea A B, dico totam eſſe intra circulum. Si enim dubitetur de aliquo eius puncto utrum ſit intra circulum, ſit illud C. Ex centro D ducantur lineæ DA, DB, DC.

Demonſtr. In triangulo A D B, latera D A, D B ſunt æqualia igitur (*per* 5. 1.) anguli A & B ſunt æquales. ſed (*per* 16. 1.) angulus D C B eſt major angulo A, ergo & angulo B major erit, igitur (*per* 19. 1.) latus D B oppoſitum majori augulo D C B, majus erit latere D C oppoſito minori angulo B. Igitur ex centro D uſque ad C non invenitur peripheria. quare punctum C eſt intra circulum, idem de aliis punctis lineæ A B oſtendi poteſt, tota igitur eſt intra circulum.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si diameter lineam non per centrum ductam bifariam ſecet, perpendicularis ad illam erit. Si verò fuerit perpendicularis eam bifariam ſecat.



Diameter A B lineam C D non tranſeuntem per centrum, dividat bifariam in E. dico primò angulos F E D, F E C eſſe æquales.

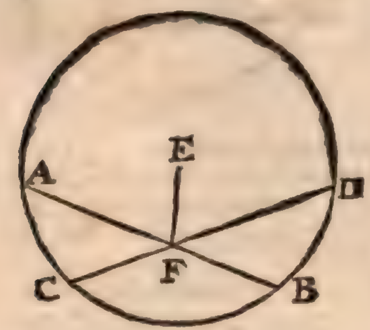
Demonſt. Triangula FED, FEC habent latera ED,EC æqualia, EF eſt commune & baſes FC, FD (*per def.cir.*) ſunt æquales: igitur (*per* 8. 1.) anguli FED, FEC ſunt æquales & recti.

Viciſſim ſi anguli FED, FEC, ſint æquales dico lineas CF, ED eſſe æquales, nam cum lineæ CF, FD, ſint æquales; (*per* 5. 1.) anguli C & D ſunt æquales, quare triangula F D E, F C E habent angulos C, & D, F E D, F E C, æquales, & latus FE commune; igitur (*per* 26.1.) latera EC,ED æqualia erunt.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si duæ rectæ in circulo ſe ſecent extra centrum; non ſe mutuò bifariam ſecabunt.



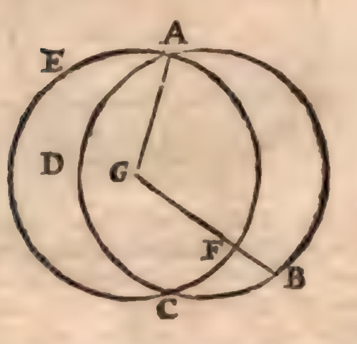
Duæ lineæ A B, C D ſe mutuo ſecent in F, quod non ſit centrum: dico illas non ſe mutuò bifariam ſecare: & primò ſi una per centrum tranſiret certum eſt eam non ſecari bifariam, ſi verò neutra tranſeat per centrum, ex centro E, ducatur linea E F.

Demonſtr. Si linea C D bifariam ſecatur in F (*per 3. hujus*) anguli E F D, E F C erunt recti; ſi linea A B etiam bifariam ſecatur in F, anguli EFA, EFB recti erunt: igitur anguli EFA, EFC ambo recti, & æquales eſſent, pars & totum, quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Duo circuli ſe mutuò ſecantes, non habent idem centrum.



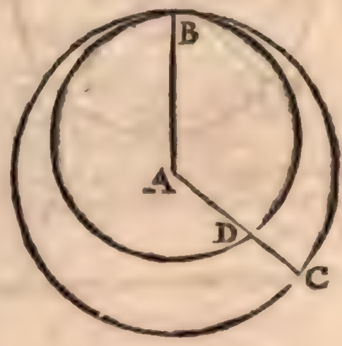
Duo circuli ABCD, A F C E ſe ſecent in A, dico illos non habere idem centrum, habeant enim idem centrum G, ſi fieri poteſt. Ducantur lineæ G A, G B.

Demonſtr. Lineæ G A, G B ductæ ex eodem centro ad circumferentiam circuli A B C D eſſent æquales, æquales item eſſent GA, GF; igitur GB, GF, eidem G A æquales, inter ſe æquales eſſent; pars & totum, quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Duo circuli interius ſe tangentes non habent idem centrum.



Sit enim ſi fieri poteſt, idem centrum A circulorum ſe tangentium in B. Ducantur lineæ A B, A C.

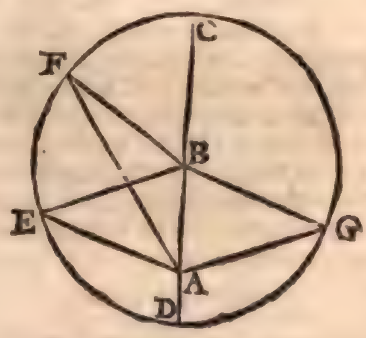
Demonſtr. Sequeretur lineas A C, A D eidem A B eſſe æquales: ergo & inter ſe; pars & totum; quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si intra circulum ex alio puncto quàm centro, plurimæ lineæ ducantur ad circumferentiam.

1. *Maxima erit quæ per centrum tranſit.*
2. *Reliqua ejuſdem, erit minima.*
3. *Reliquarum ea major eſt, quæ maximæ propinquior.*
4. *Duæ tantum duci poſſunt æquales.*



Ex puncto A quod non ſit centrum, cadant plurimæ lineæ in circumferentiam, AC, AF, AE, AD, & AC quidem per centrum.

Dico primò A C eſſe maximam.

Demonſtratio. In triangula A B F latera A B, B F ſunt majora reliquo A F, (*per* 20. 1.) ſed linea A C eſt æqualis lineis A B B F, (cum B F, B C ſint æquales; & A B communis; igitur A C eſt major quàm A F. idem oſtendiſſem de B E.

Dico ſecundò reliquam A D eſſe omnium minimam.

Demonſtratio.

Demonſtratio. In triangulo E A B latera EA, AB, (*per* 20. 1.) ſunt majora reliquo EB, ſed BD eſt æqualis ipſi EB, igitur EA, AB ſunt majora quam BD, habent autem communem AB, quæ ſi ab utráque auferatur, reſtabit EA, major quàm A D.

Dico tertiò, AF propiorem maximæ AC, majorem eſſe quàm A E remotiorem.

Demonſtr. In triangulis ABF, ABE latus AB eſt commune, latera BF, BE ſunt æqualia, angulus FBA major angulo EBA, igitur (*per* 24. 1.) baſis FA, major erit baſi EA.

Dico quartò, duas tantum ex puncto A duci poſſe æquales. Fiat angulus ABG æqualis angulo ABE, ducatúrque AG.

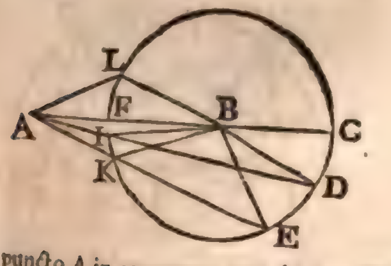
Demonſtr. Quia in triangulis ABE, ABG latus A B eſt commune, & latera BE, BG ſunt æqualia, item anguli A B E, A B G facti ſunt æquales, (*per* 2. 1.) baſes AE, AG erunt æquales, neque alia duci poteſt æqualis lineæ E A, quia quæcumque ducatur, aut magis recederet, aut magis accederet ad maximam AC, quam A E, aut A G: ergo illis aut major, aut minor eſſet.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si ex puncto extra circulum accepto, ad eum plures rectæ ducantur,

1. *Earum quæ in cavam peripheriam cadunt, maxima eſt quæ per centrum tranſit.*
2. *Reliquarum ea major eſt quæ maximæ propior.*
3. *In convexam peripheriam cadentium, ea minima eſt, quæ producta per centrum tranſit.*
4. *Quæ minimæ propior eſt, remotiore minor eſt.*
5. *Non plures quàm duæ æquales, ſive in cavam ſive in convexam peripheriam ducentur.*



Ex puncto A in concavam peripheriam CDE cadant lineæ AC, AD, AE, dico AC per centrum B tranſeuntem maximam eſſe, ducatur enim linea BD.

Demonſtr. Latera AB, BD (*per* 20. 1.) ſunt majora reliquo AD, ſed linea A C æqualis eſt ipſis AB, BD, (*cum BD, BC ſint æquales,*) igitur AC major eſt quàm A D. idem dicendum de A E.

Dico ſecundò, AD, propiorem ipſi AC maximæ, quam ſit AE, ipſa AE majorem eſſe. Nam ducatur linea EB.

Demonſtratio. In triangulis A B E, A B D, cum latus A B ſit commune, & latus B D æquale lateri B E, & angulus A B D major, angulo ABE, erit (*per* 24. 1.) baſis AD, major baſi AE.

Dico tertiò, linearum cadentium in convexam peripheriam K I F; A F quæ producta tranſit per centrum minimam eſſe; ducatur enim linea I B.

Demonſtr. In triangulo ABI, latera AI, I B, latere AB ſunt majora (*per* 20. 1.) ergo ablatis lineis æqualibus B I, B F, reſtabit F A minor quam A I.

Dico quartò, AI, propiorem minimæ A F, quàm ſit AK, ipſa A K minorem eſſe.

Demonſtratiò. Cum enim lineæ AI, IB, lineis A K, K B (*per* 21. 1.) ſint minores; ablatis lineis æqualibus B K, B I, linea A I reſtat minor lineâ A K.

Dico quintò, non plures quàm duas æquales cadere in circulum; fiat enim angulus ABL æqualis angulo ABK, & ducatur linea AL, hanc ſolam dico eſſe æqualem lineæ AK.

Demonſtr. In triangulis A B L, A B K, latus AB eſt commune, & latera BK, BL ſunt æqualia, item angulus ABL factus eſt æqualis angulo ABK, igitur (*per* 4. 1.) baſes AK, AL ſunt æquales, nulla autem alia poteſt duci æqualis ipſi AK, quàm AL, quia quæcumque duceretur magis accederet ad AF, aut ab illa magis recederet quàm AL; quare minor eſſet aut major quám AL atque adeo quam AK. Eodem modo oſtendam duas tantum duci poſſe æquales ad concavam peripheriam.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

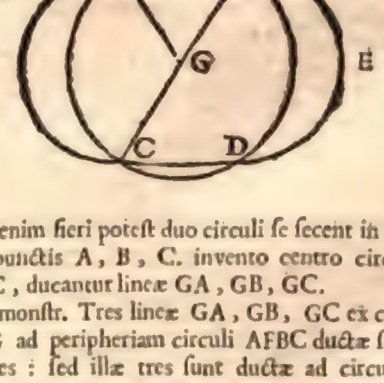
Si ab uno intra circulum puncto, tres lineæ cadant in peripheriam æquales, illud punctum centrum eſt.

Si enim illud punctum eſſet aliud à centro; duæ tantum lineæ æquales caderent in peripheriam (*per* 7. 3.) ſed ſupponuntur cadere tres æquales, igitur punctum illud non eſt diverſum à centro.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Duo circuli non ſe ſecant, in pluribus quàm duobus punctis.



Si enim fieri poteſt duo circuli ſe ſecent in tribus punctis A, B, C. invento centro circuli AFBC, ducantur lineæ GA, GB, GC.

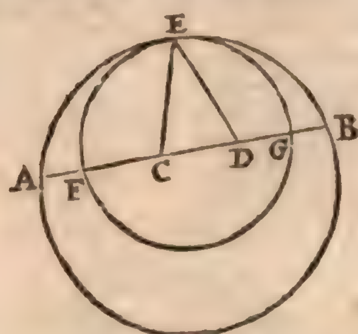
Demonſtr. Tres lineæ GA, GB, GC ex centro G ad peripheriam circuli AFBC ductæ ſunt æquales: ſed illæ tres ſunt ductæ ad circumferentiam circuli ABCE, quare per præcedentem, G erit centrum illius: igitur duo circuli ſe ſecantes

ſecantes idem haberent centrum *(c ontra propoſitionem 5. 3.)*

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Si duo circuli ſe interiùs tangant, linea ducta per eorum centra tranſit per contactum.



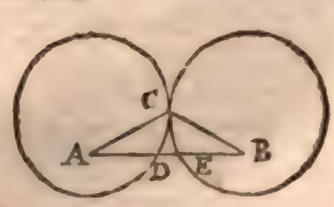
Si enim fieri poteſt linea A B per centra eorum tranſiens in contactum non cadat, ſit centrum parvi circuli C, & majoris D, ſitque contactus B; ducantur lineæ CE, ED.

Demonſtr. Lineæ CF, CE ſunt æquales; igitur additâ communi C D, tota D F eſt æqualis lineis C E, C D, ſed CE, ED (*per* 20. 1.) reliqua E D ſunt majores; igitur linea D F, eſt major quàm D E, ſed quia D eſt centrum majoris circuli, lineæ D E, D A ſunt æquales: igitur linea D F eſt major quam D A; pars quàm totum quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Si duo circuli ſe exteriùs tangant, recta centra conjungens per contactum tranſit.



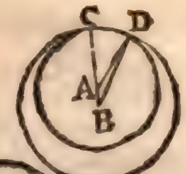
Sit enim ſi fieri poteſt recta A B conjungens duo centra A & B circulorum exteriùs ſe tangentium, quæ non tranſeat per contactum C. Ducantur lineæ A C, B C.

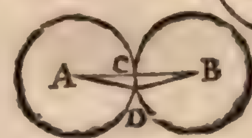
Demonſtr. Sequeretur in triangulo A C B duo latera A C, C B reliquo A B eſſe minora (*contra prop.*20. 1.) nam A C, A D ſunt æquales, ſicut BC, BE, ſed linea A B eſt major quàm A D, BE: igitur linea A B major eſſet quam A C, C B.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Circuli ſe tangunt in uno tantum puncto.





Primò ſi duo circuli ſe interiùs tangant; dico ſe tangere in uno tantum puncto, & non in toto arcu. Ducatur enim per eorum centra A & B linea A B quæ in contactum C cadet. Si dicantur ſe tangere adhuc in puncto D, ducantur lineæ A B, B D.

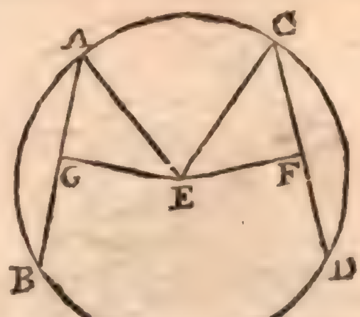
Demonſtr. Lineæ A D, AC, ex eodem centro A ductæ ſunt æquales, & additâ communi A B, tota B C eſt æqualis lineis B A, A D, ſed B D eſt minor (*per* 20. 1.) lineis B A, A D: igitur linea BD eſt minor quàm BC, igitur linea BD non pervenit ad circumferentiam circuli majoris alioquin æqualis eſſet. Si verò circuli ſe tangant exteriùs, ſit linea A B conjungens centra A & B quæ (*per* 12.) tranſit per contactum C; ſi dicantur ſe tangere adhuc in puncto D ducantur lineæ A D, B D.

Demonſtr. Sequeretur lineas B D, D A eſſe æquales toti A B, quia B C, B D ſunt æquales; ſicut AC, AD. & tamen duo latera BD, DA reliquo AB majora eſſe debent (*per* 20. 1.)

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

In circulo æquales rectæ, æqualiter à centro diſtant, & quæ æqualiter diſtant à centro æquales ſunt.



Sint æquales AB, C D, ad quas ex centro ducantur perpendiculares E F, E G, dico illas eſſe æquales, hoc eſt enim æqualiter diſtare à centro. Ducantur lineæ E A, EC.

Demonſtr. Lineæ perpendiculares E G, E F, lineas A B, BD bifariam dividunt (*per* 3.) quare cum A B, C D ſint æquales, eorum dimidiæ A G, C F æquales erunt; in triangulo E G A rectangulo quadratum lineæ E A æquale eſt quadratis linearum A G, G E; (*per* 47. 1.) & pariter quadratum lineæ E C, æquale eſt quadratis linearum C F, F E; ſed quadrata linearum æqualium E A, E C ſunt æqualia; igitur quadrata A G, G E; æqualia ſunt quadratis CF, FE, quare ſi ex iis auferas quadrata æqualia A G, C F,

[cum

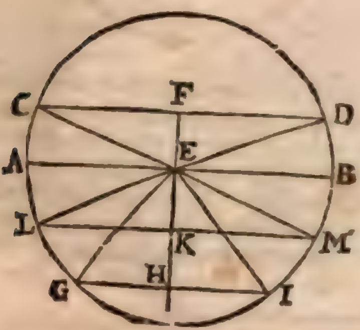
[cum lineæ ſint æquales] quadrata linearum GE, EF erunt æqualia & conſequenter lineæ EG, EF, æquales.

Viciſſim verò ſi lineæ EG, EF, ſint æquales [hoc eſt ſi lineæ AB, CD, æqualiter diſtent à centro] dico lineas AB, CD eſſe æquales, nam pariter oſtendam quadrata AG, GE, æqualia eſſe quadratis CF, FE, quare auferendo quadrata æqualia EG, EF, reſtant quadrata AG, CF æqualia, & conſequenter lineæ GA, FC æquales, & eorum duplæ AB, CD æquales.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Linearum circulo inſcriptarum maxima eſt diameter; cæterarum quæ centro propior, ea major eſt.



Primò dico diametrum AB eſſe omnium linearum in circulo inſcriptarum maximam. ſit enim alia quævis CD, ducantur lineæ EC, ED.

Demonſtr. In triangulo CED duo latera CE, ED, reliquo CD ſunt majora (*per* 20. 1.) ſed linea AB eſt æqualis duabus CE, ED ut patet; igitur AB major eſt quàm CD.

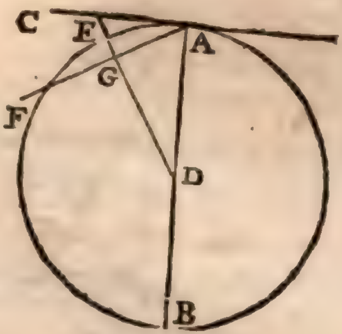
Secundò linea GI magis diſtet à centro quàm CD, hoc eſt perpendicularis EH, ſit major quàm EF, dico CD majorem eſſe. Abſcindatur ex EH; linea EK æqualis lineæ EF, & per K agatur perpendicularis LM, ducanturque lineæ EL, EM, EG, EI.

Demonſtr. In triangulis LEM, GEI, cum latera EM, EL, ſint æqualia lateribus EG, EI, (*per def. circ.*) & angulus LEM major angulo GEI, erit (*per* 24. 1.) baſis LM, major baſi GI, ſed lineæ LM, CD æqualiter à centro diſtantes ex ſuppoſitione, ſunt (*per* 14.) æquales, igitur linea CD eſt major quàm GI.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Perpendicularis ad extremitatem diametri tota extra circulum cadit, eumque tangit: neque inter ipſam, & circulum alia recta ad contactum ducetur, quin circulum ſecet.



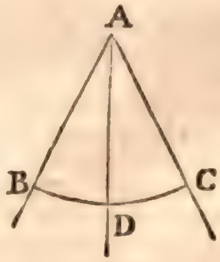
Sit diameter AB, ad quam ſit perpendicularis AC; dico primò lineam AC totam cadere extra circulum; dubitetur enim de illius aliquo puncto utrum ſit intra circulum aut in ipſa circumferentia ſitque punctum E, ex centro ducatur recta DE.

Demonſtr. In triangulo DAE angulus DAE, rectus eſt, igitur angulus DEA acutus eſt alioquin tres anguli trianguli ſuperarent duos rectos (*contra prop.* 32. 1.) quare linea DE oppoſita majori angulo DAE major erit quàm DA, ſed DA pertingit ad circumferentiam: ergo DE ultra circumferentiam perveniet, & punctum E extra circulum poſitum erit.

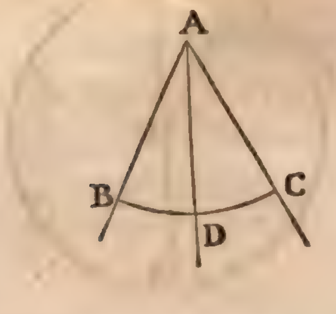
Dico ſecundò, nullam infra AC duci poſſe lineam ad contactum A quæ circulum non ſecet, ſit enim hæc AF, quia angulus DAF eſt acutus, ſi ad eam ducatur perpendicularis, hæc cadet ad partes AF, ſit igitur perpendicularis DG.

Demonſtratio. Quia angulus DGA rectus, major eſt angulo DAF; (*per* 19. 1.) latus DA majus erit latere DG, ſed DA pervenit ad circumferentiam circuli; igitur DG ad illam non pervenit, & punctum G invenitur intra circulum.

Reliqua quæ deducuntur ex hac propoſitione, nempe quod angulus contingentiæ compoſitus ex circumferentia circuli & tangente, ut angulus EAC, ſit minor quocumque angulo rectilineo acuto, nam quantuluſcumque accipiatur angulus CAF, ſemper circumferentia videbitur comprehendere cum tangente angulum mixtum minorem. Hæc inquam corollaria ſunt fallacia ut bene notat Tacquetus; oriunturque præcisè ex eo quòd loqui videamur de angulo quaſi de vera ſpecie quantitatis cum tamen ſit tantum ejus proprietas nempe inclinatio linearum, quæ inclinatio etiamſi minuantur lineæ; eadem tamen manet.



Cum enim angulis attribuimus prædicata quæ videntur ſoli quantitati convenire, ut cum dicimus unum angulum eſſe majorem, minorem, duplum, triplum, dividi in duas, tres partes, dicendum eſt

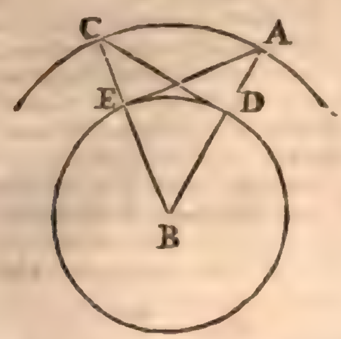


nos non tam loqui de ipſis angulis præcisè & in ſe quàm de illorum menſuris. Hoc ſenſu ſit angulus B A C quem volumus dividi biſariam lineâ A D. nolumus illam inclinationem dividi: ſed intelligimus quod quicumque arcus fiet ex puncto A ut centro, dividetur biſariam à lineâ AD, & in hoc ſenſu accipienda ſunt reliqua quæ tribui poſſunt angulis. Cum igitur menſura anguli contingentiæ non ſit eadem, ac anguli rectilinei, immò nulla ſit, ideò angulus contingentiæ incomparabilis eſt cum angulo rectilineo. Nam in figura propoſitionis ſi ex A ut centro fierent plurimi arcus: invenirentur arcus intercepti inter tangentem AC & circumferentiam A F, aliquando minores aliquando majores arcubus interceptis inter lineas AC, AF; unde concludi non poteſt angulum contingentiæ abſolutè minorem eſſe angulo rectilineo C AF, quod monere volui ne demonſtrationes mathematicæ tricis Philoſophicis & diviſibilitati partium implicentur.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

A dato puncto rectam ducere, quæ datum circulum tangat.



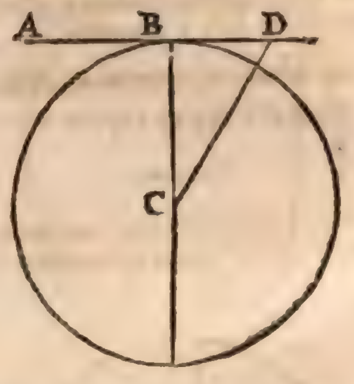
Sit punctum datum A, ex quo ad centrum circuli B ducatur linea A B. Ex centro B intervallo B A, duc circulum A C. & per punctum D duc perpendicularem D C; item lineam C B ſecantem minorem circulum in puncto E. dico lineam A E tangere parvum circulum in E.

Demonſtr. Triangulum C B D, habet duo latera BD, BC, æqualia duobus lateribus AB, B E trianguli A B E, (*per def. cir.*) & angulus B iis comprehenſus eſt communis: igitur (*per* 4. 1.) triangula ſunt æqualia, & anguli C D B, A E B oppoſiti lateribus æqualibus C B, AB ſunt æquales; ſed CDB eſt factus rectus, igitur BEA rectus erit & E A (*per* 16.) erit tangens.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si linea circulum tangat, recta à centro ad contactum ducta ad eum, perpendicularis eſt.

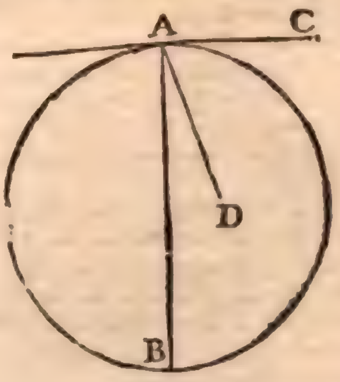


Linea AB circulum tangat in B dico lineam CB ad eam eſſe perpendicularem; ſi enim non eſt, ad eam ex centro C ducatur perpendicularis.

Demonſtr. Quia angulus CDB rectus eſt, major erit angulo C B D, alioquin tres anguli majores eſſent duobus rectis (*contr. pr.* 32. 1.) igitur (*per* 19. 1.) linea C B oppoſita majori angulo C D B, major eſſet linea C D; quod eſt abſurdum cum C D extra circulum cadat.

PROPOSITIO XIX.

Perpendicularis ad tangentem, in puncto contactus ducta, per centrum tranſit.



Sit linea A B perpendicularis, ad tangentem AC, ducta per punctum contactus A. dico in A B eſſe centrum circuli. Sit enim ſi fieri poteſt centrum D extra illam; ducatur linea D A.

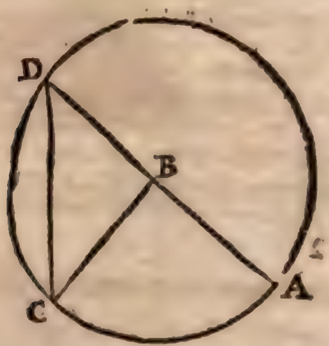
Demonſtr. (*per* 18.) linea D A eſt perpendicularis ad tangentem: igitur angulus D A C rectus erit, ſed B A C jam eſt rectus, igitur anguli BAC, D A C æquales eſſent; pars & totum, quod eſt abſurdum.

PROPO

PROPOSITIO XX.

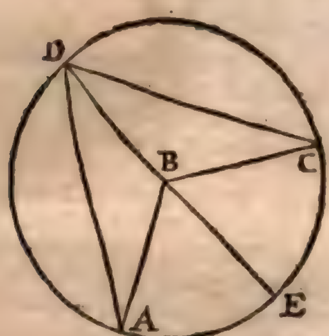
Theorema.

Angulus ad centrum eſt duplus anguli ad peripheriam; ſi eidem arcui inſiſtant.



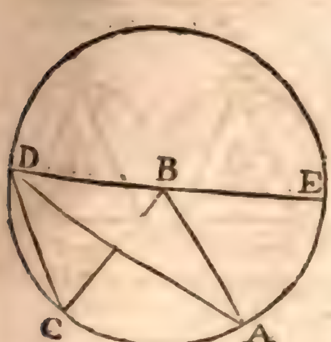
Sint anguli ABC, ADC eidem arcui AC inſiſtentes: dico angulum ABC in centro B poſitum, eſſe duplum anguli D in peripheria. Triplex caſus eſſe poteſt. In primo latera AB, AD coincidunt.

Demonſtr. In triangulo BDC latere DB producto in A, [*per* 32. 1.] angulus externus ABC æqualis eſt duobus internis D & C, qui cum ſint æquales [*per* 5. 1.] nam lineæ BD, BC ſunt æquales, angulus ABC erit duplus anguli D.



In ſecundo caſu latera non coincidunt. Ducatur linea DBE.

Demonſtr. Per partem præcedentem, angulus ABE eſt duplus anguli ADB, item angulus EBC anguli BDC, ergo totus ABC eſt duplus totius ADC.



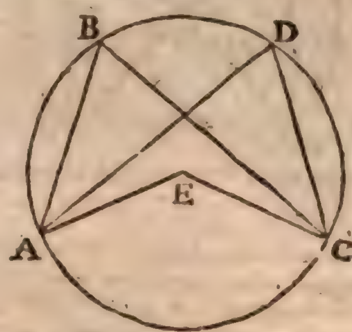
In tertio caſu latera ſe ſecant. Ducatur linea DBE.

Demonſtr. Per primam partem totus angulus EBC eſt duplus anguli EDC, & EBA anguli EDA, qui ſi auferantur ex ſuis totis, reſtabit reliquus ABC reliqui ADC duplus.

PROPOSITIO XXI.

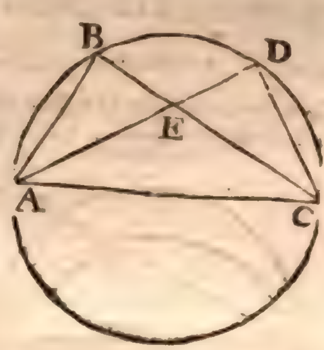
Theorema.

In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt anguli, ſunt æquales & qui eidem arcui inſiſtunt, etiam ſunt æquales.



Sint primò duo anguli ABC, ADC in eodem ſegmento ABDC quod ſuperet ſemicirculum: dico illos eſſe æquales; ducantur enim ad centrum circuli E lineæ AE, CE.

Demonſtr. Anguli B & D in peripheria ſunt uterque dimidia pars anguli E ad centrum [*per* 20.] ergo ſunt inter ſe æquales.



Secundò ſint anguli ABC, ADC in eodem ſegmento circuli ABDC, quod non ſuperet ſemicirculum, dico illos adhuc eſſe æquales.

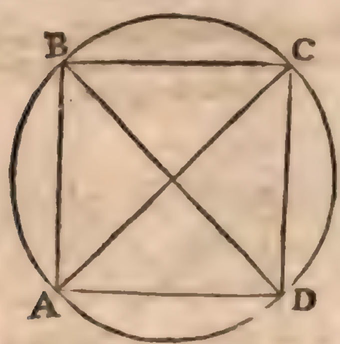
Demonſtr. Omnes anguli trianguli BEA ſunt æquales omnibus angulis trianguli DEC, hoc eſt duobus rectis (*per* 32. 1.) ſed anguli BEA, DEC ad verticem oppoſiti (*per* 15. 1.) ſunt æquales: ergo reliqui duo ABE, BAE, ſimul ſunt æquales reliquis duobus CDE, DCE ſed (*per primam partem huius*) anguli BAE, DCE, in eodem ſegmento BACD ſuperante ſemicirculum, ſunt æquales; ergo reliqui ABC, CDE ſunt æquales.

Vides angulos ABC ADC, in eodem ſegmento ABDC exiſtentes, inſiſtere eidem arcui AC; ideoque patet angulos eidem arcui inſiſtentes eſſe æquales.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Quadrilaterorum circulo inſcriptorum oppoſiti anguli duobus rectis ſunt æquales.



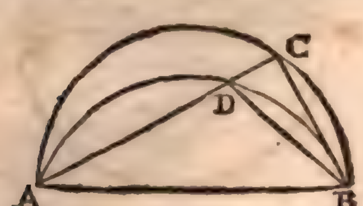
Sit quadrilaterum ABCD circulo inſcriptum, dico angulos A & C oppoſitos, duobus rectis eſſe æquales. Ducantur enim lineæ AC, BD.

Demonſtr. Trianguli ABD omnes anguli ſunt æquales duobus rectis [*per* 31. 1.] igitur ſi loco A B D ponas A C D illi æqualem [*per* 21.] cum eidem arcui A B inſiſtant ; & loco ADB ; ponas ACB illi æqualem ; cum eidem arcui A B inſiſtant, angulus A, cum angulis ACD & ACB hoc eſt cum angulo totali C duobus rectis æqualis erit.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Super eâdem rectâ; conſtituta ad eaſdem partes duo ſegmenta circulorum ſimilia, æqualia ſunt.



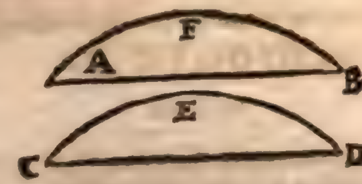
Super rectâ AB; dico ad eaſdem partes conſtiſtituta duo ſegmenta ſimilia, hoc eſt quæ contineant angulos æquales, æqualia eſſe ; ſint enim ſi fieri poteſt ita conſtituta ACB & ADB, dico illa congruere, ſi enim non congruunt, ducatur linea AC utrumque ſecans in C & D, & ducantur lineæ BD, BC.

Demonſtr. Patet angulum ADB externum, majorem eſſe angulo C interno [*per* 21. 1.] igitur non continent angulos æquales : ergo non ſunt ſimilia ſegmenta : contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Super æqualibus rectis ſimilia circulorum ſegmenta ſunt æqualia.



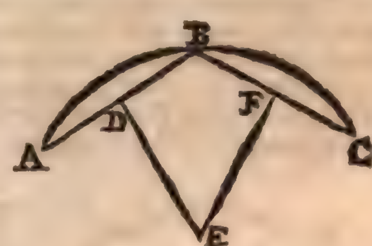
Sint ſuper lineis AB, CD æqualibus, conſtituta duo ſegmenta circulorum AFB, CED, ſimilia; dico illa eſſe æqualia.

Demonſtr. Intelligatur enim linea CD ſuperponi lineæ AB quia illi æqualis eſt congruet. tunc ſegmentum CED congruet cum ſegmento F A B, alioquin ſuper eâdem lineâ A B, eſſent conſtituta duo ſegmenta ſimilia, & inæqualia contra [*prop.* 23.]

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Dato arcu circuli totum circulum deſcribere.



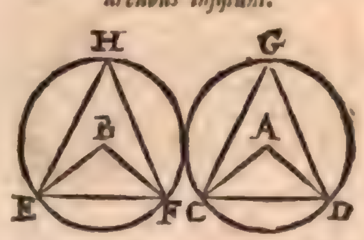
Sit datus arcus ABC perficique debeat circulus invento ſcilicet ejus centro. In arcu dato ſumo tria puncta A, B, C & duco lineas AB, BC, quibus diviſis bifariam in D, & F ; duco perpendiculares DE, EF, dico punctum E interſectionis, eſſe centrum circuli ABC.

Demonſtr. Cum enim ducta ſit linea AB, diviſa bifariam in D, & ducta perpendicularis AE, in eâ AE eſt centrum circuli [*per corollarium primæ hujus*] eſt etiam in linea EF ; quare debet eſſe in puncto E interſectionis.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

In circulis æqualibus æquales anguli, ſive ad centra, ſive ad peripheriam, æqualibus arcubus inſiſtunt.



Sint anguli æquales A & B ad centra in circulis æqualibus : dico arcus CD & EF quibus inſiſtunt eſſe æquales. Licet hæc propoſitio ſit ipſamet definitio angulorum æqualium, ut diximus initio, nihilominus ita oſtenditur. Ducantur lineæ CD, EF.

Demonſtr. Cum triangula C A D, E B F habeant

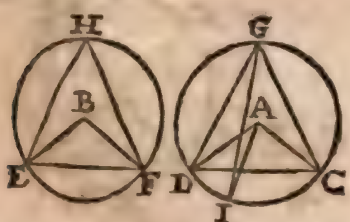
beant duo latera CA, AD æqualia duobus EB, BF, propter æqualitatem circulorum, & angulus A ſit æqualis angulo B, lineæ CD & EF ſunt æquales: factis autem angulis ad peripheriam G & H; cùm ſint dimidia pars angulorum A & B æqualium, inter ſe æquales erunt, igitur ſegmenta CGD, EHF ſunt ſimilia, ſunt etiam ſupra lineas CD, EF æquales: igitur (*per* 25.) æqualia ſunt: igitur ſi ex circulis æqualibus auferas ſegmenta CGD EHF æqualia, reliqui arcus CD, EF æquales erunt.

Vides etiam angulos G & H ad peripheriam æquales inſiſtere arcubus CD, & EF æqualibus.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

In circulis æqualibus, anguli inſiſtentes peripheriis æqualibus, æquales ſunt, ſive ad centra ſive ad peripheriam conſtituantur.



Sint anguli A & B inſiſtentes peripheriis æqualibus CD, EF: dico illos eſſe æquales, ſi enim hoc non eſt: ſit A major, fiatque CAI æqualis angulo B.

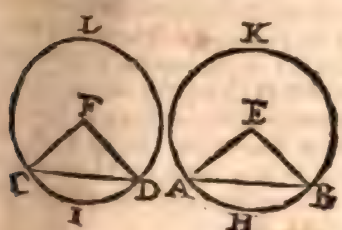
Demonſtr. Quia anguli CAI & B ſunt æquales, erunt (*per* 26.) arcus CI & EF æquales: igitur CD; EF non erant æquales.

Pariter ad peripheriam poſitis arcubus CD, EF æqualibus, ſi angulus G eſſet major angulo H; facto angulo CGI æquali ipſi H, ſequeretur per 26. arcus CI, EF eſſe æquales.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

In circulis æqualibus, æquales rectæ æquales arcus auferunt & relinquunt.



In circulis æqualibus ſint lineæ AB, CD æquales: dico arcus AHB, CID eſſe æquales, & conſequenter AKB, CLD. Ducantur enim ad centra E & F, lineæ AE BE, CF, DF.

Demonſtratio. Triangula AEB, CFD, habent latera AE, EB; CF, FD æqualia propter æqualitatem circulorum, ſupponuntur etiam baſes AB, CD æquales; ergo (*per* 8. 1.) anguli E & F æquales ſunt, & (*per* 28.) arcus AHB; CID, quibus inſiſtunt ſunt æquales, qui ablati ex circulis æqualibus relinquunt peripherias AKB, CLD, æquales.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

In circulis æqualibus, æquales peripherias æquales rectæ ſubtendunt.

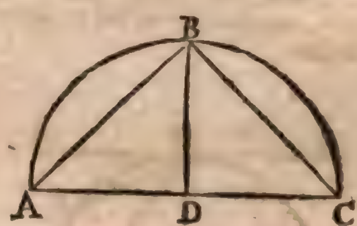
Dico ſi in circulis æqualibus arcus AHB, CID ſint æquales, rectas AB, CD eſſe æquales.

Demonſtr. Cum arcus AHB, CID ſint æquales, erunt (*per* 27.) anguli E & F æquales, & quia in triangulis AEB, CFD latera AE, EB, ſunt æqualia lateribus FC, FD, & anguli E & F ſunt æquales, erunt (*per* 4. 1.) baſes AB, CD æquales.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Datum arcum biſariam ſecare.



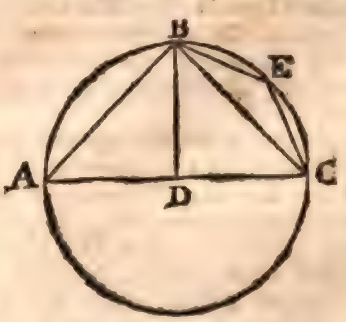
Sit data circumferentia ABC dividenda æqualiter. Duc lineam AC quam divides biſariam in D, duceſque perpendicularem DB, dico arcum ABC diviſum eſſe biſariam in B; ducantur enim lineæ AB, BC.

Demonſtratio. Triangula ADB, CDB habent latera AD, DC æqualia, [cum AC diviſa ſit biſariam in D] latus DB commune, & angulos BDA, BDC rectos & æquales: igitur (*per* 4. 1.) baſes AB, BC ſunt æquales & [*per* 28. 3.] arcus AB, BC ſunt æquales.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

Angulus in ſemicirculo rectus eſt, in ſegmento ſuperante ſemicirculum, acutus: in ſegmento vero minore, obtuſus.



Sit angulus ABC in ſemicirculo, dico illum eſſe rectum, ducatur ex centro D linea DB.

Demonſtratio. In triangulo A B D cum latera A D, B D ſint æqualia; erunt (*per* 5. 1.) anguli D A B, & D B A æquales, pariter erunt anguli D C B, & D B C æquales: igitur angulus totalis B erit æqualis duobus angulis A & C. ſed in triangulo A B C tres anguli nempe A, B, & C, ſunt duobus rectis æquales, (*per* 32. 1.) igitur angulus B eſt media pars duorum rectorum, & reliqui A & C ſimul, ſunt alia media pars, igitur eſt rectus.

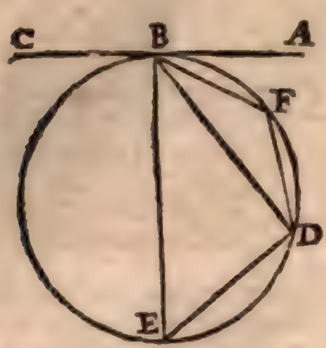
Secundò, dico angulum E exiſtentem in ſegmento B E C minori eſſe obtuſum, cum enim in quadrilatero A B E C anguli oppoſiti A & E æquivaleant duobus rectis (*per* 22. 3.) & angulus A ſit minor recto, angulus E erit major recto.

Tertiò, patet angulum A in ſegmento majori B A C eſſe acutum.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

Si linea circulum tangat, & à contactu ducatur alia circulum ſecans, anguli quos faciet cum tangente, æquales erunt iis qui in alternis ſegmentis fiunt.



Sit linea A C, circulum tangens in puncto B, à quo ducatur linea B D circulum ſecans, dico angulum A B D, eſſe æqualem angulo B E D qui fit in ſegmento alterno D E B, & angulum DBC eſſe æqualem angulo B F D.

Et primò quidem ſi linea B D per centrum tranſiret, perpendicularis eſſet (*per* 18) faceretque angulos rectos cum tangente: anguli item qui fierent in ſegmentis quæ eſſent ſemicirculi forent etiam recti (*per* 31.) igitur conſtaret propoſitio. Sed non tranſeat per centrum ducaturque linea B E per centrum, & jungatur linea D E.

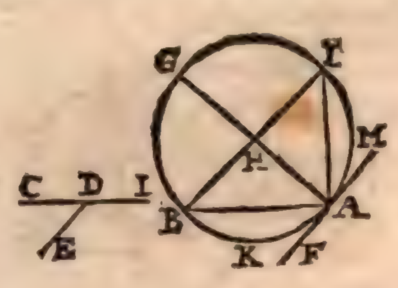
Demonſtratio. Linea B E (*per* 18.) perpendicularis eſt ad lineam A C, quare anguli A B E E B C ſunt duo recti, ſed tres anguli trianguli B D E æquivalent duobus rectis (*per* 32. 1.) igitur tres anguli trianguli B D E ſunt æquales duobus E B C, E B A, ex quibus ſi auferas angulum E B C rectum & angulum B D E in ſemicirculo item rectum (*per* 31.) reſtabunt anguli E, & D B E ſimul uni recto æquales, & conſequenter angulo A B E; ſed angulus A B E eſt æqualis duobus D B E, A B D, omnibus ſcilicet ſuis partibus; igitur anguli D B E, A B D, æquales ſunt angulis D B E & E, ergo ſublato communi DBE, remanet angulus A B D æqualis angulo E.

Secundò, quia anguli A B D, & D B C ſunt æquales duobus rectis (*per* 15. 1.) & in quadrilatero BEDF, anguli E, & F (*per* 22.) æquales ſunt duobus rectis; erunt anguli A B D, & D B C, æquales angulis E & F, ex quibus ſi auferas angulos oſtenſos æquales A B D, & E; reſtabunt anguli F. & DBC æquales.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Super datâ rectâ ſegmentum circuli deſcribere capiens angulum dato æqualem.



Sit data recta A B ſuper quam deſcribendum ſit ſegmentum circuli capiens angulum æqualem angulo C D E, ſi angulus datus eſſet rectus ſuper A B deſcribendus eſſet ſemicirculus qui caperet angulum rectum (*per* 31.) ſi verò angulus datus ut C D E non ſit rectus; fiat angulus B A F æqualis angulo C D E & lineæ A F in puncto A excitetur perpendicularis A G, & in puncto B fiat angulus A B H æqualis angulo H A B, dico; Si ex H intervallo H A fiat circulus & illum tranſire per B, & ſegmentum AGB capere angulum I æqualem angulo C D E.

Demonſtr. Primò quia anguli H A B, H B A facti ſunt æquales; (*per* 6. 1.) lineæ H A, H B, ſunt æquales; igitur circulus deſcriptus ad intervallum H A tranſit etiam per punctum B. Secundò, quia linea A F eſt perpendicularis ad lineam H A, tranſeuntem per centrum H, (*per* 16.) erit tangens circuli: & angulus F A B æqualis erit angulo I, in alterno ſegmento exiſtenti (*per præcedentem*) ſed angulus F A B factus eſt æqualis angulo C D E: igitur angulus I quem capit ſegmentum B G H eſt æqualis angulo C D E.

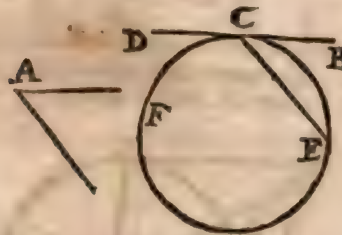
Si autem daretur angulus L D E obtuſus eodem modò operandum eſſet quaſi pro angulo CDE acuto: nam angulus qui fieret in ſegmento A K B eſſet æqualis angulo M A B, cui æqualis eſt angulus L D E.

PROPO

PROPOSITIO XXXIV.

Problema.

Ex dato circulo auferre ſegmentum capiens angulum dato angulo æqualem.



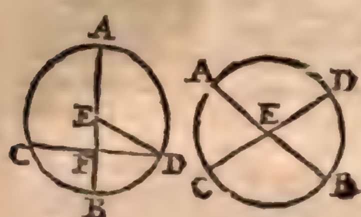
Si angulus datus eſſet rectus, ductâ diametro duo ſemicirculi caperent angulos rectos.

Si verò daretur angulus A non rectus, ducatur (*per* 17.) circulum tangens BCD, fiatque angulus BCE æqualis angulo A. ſegmentum alternum EFC capiet angulum æqualem angulo BCE (*per* 32.) & conſequenter angulo A.

PROPOSITIO XXXV.

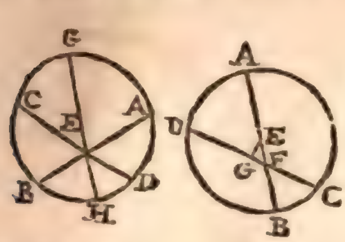
Theorema.

Si in circulo duæ rectæ ſe ſecuerint: erit rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis unius; æquale rectangulo ſub ſegmentis alterius comprehenſo.



Plurimi ſunt caſus iſtius propoſitionis Primò duæ lineæ AB, C D ſe ſecent in centro E. quandoquidem AE, EB, quæ ſunt ſegmenta unius, ſunt æqualia ſegmentis alterius CE, ED, clarum eſt rectangulum comprehenſum ſub AE, EB, ſegmentis unius, eſſe æquale rectangulo comprehenſo ſub CE, ED, ſegmentis alterius.

Secundò AB tranſeat per centrum E, dividatque lineam CD bifariam in F, & (*per* 3.) ad angulos rectos, dico rectangulum comprehenſum ſub AF, FB æquale eſſe rectangulo comprehenſo ſub CF, FD, ſeu quadrato FD cum CF, FD, ſint æquales, ducatur linea ED.



Demonſtr. Quia linea AB diviſa eſt bifariam in E, & non bifariam in F, erit (*per* 5. 2.) rectangulum comprehenſum ſub AF, FB, cum quadrato EF, æquale quadrato lineæ EB, aut illi æquali ED; ſed quadratum ED, quia angulus F rectus eſt (*per* 47. 1.) æquale eſt quadratis FD, EF, igitur rectangulum comprehenſum ſub AF, FB cum quadrato FE, æquale eſt quadratis FD, EF; auferatur commune quadratum FE; reſtat rectangulum comprehenſum ſub AF FB, æquale eſſe quadrato FD. quod erat oſtendendum.

Tertiò, linea AB per centrum E tranſiens, ſecet inæqualiter lineam DC in puncto F, dico rectangulum ſub AF, FB, æquale eſſe rectangulo ſub DF, FC. Ex centro E ducatur ad CD perpendicularis EG, eam dividens bifariam (*per* 3.) ducaturque linea CE, quæ hic omiſſa eſt.

Demonſtr. Si rectangulum ſub AF, FB, unà cum quadrato FE, eſt æquale quadrato EC, & pariter rectangulum ſub DF, FC, unà cum quadrato FE eſt æquale quadrato CE, erit rectangulum ſub AF, FB, æquale rectangulo ſub DF, FC. Probatur autem hæc ita ſe habere, & de primo quidem cum linea AB diviſa ſit bifariam in E & non bifariam in F, erit (*per* 5. 2.) rectangulum ſub AF, FB, unà cum quadrato FE æquale quadrato EB, aut illi æquali EC. Probatur de ſecundò ſeu de rectangulo ſub DF, FC, cum enim linea CD diviſa ſit bifariam in G, & non bifariam in F, erit rectangulum ſub DF, FC, unà cum quadrato FG, æquale quadrato GC, quibus ſi utrinque addas quadratum EG, erit rectangulum ſub DF, FC, una cum quadratis FG, GF, aut loco illorum cum quadrato EF, quod illis æquale eſt, (*per* 47. 1.) propter angulum rectum G, æquale quadratis CG, GE, aut quadrato CE, quod illis æquale eſt, igitur rectangulum ſub DF, FC. unà cum quadrato FE æquale eſt quadrato EC. igitur rectangula ſub AF, FB, & ſub DF, FC ſunt æqualia.

Quartò, ſi neutra CB, CD, tranſeat per centrum E, oſtendo tamen rectangula ſub AF, FB, & ſub CF, FD, eſſe æqualia. Ducatur per centrum E linea FE. de eſt F.

Demonſtr. quia lineæ GH, & CD ſe ſecant & GH per centrum tranſit, erunt rectangula ſub GF, FH, & ſub CF, FD æqualia (*per partem tertiam hujus*) pariter erunt, rectangula ſub GF, FH & ſub AF, FB æqualia: igitur rectangula ſub AF, FB, & ſub CF, FD ſunt inter ſe æqualia.

PROPOSITIO XXXVI.

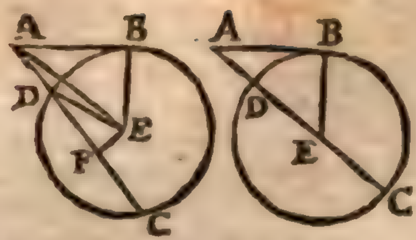
Theorema.

Si ab aliquo extra circulum puncto duæ lineæ ducantur, una circulum tangens, alia circulum ſecans, erit quadratum tangentis æquale rectangulo comprehenſo ſub tota ſecante, & exteriori lineâ.

Ex puncto A ducatur AB tangens circulum BCD, & AC ſecans quæ primò tranſeat per centrum E. dico quadratum lineæ AB æquale eſſe rectangulo comprehenſo ſub AC, AD. Ducatur linea BE.

Demonſtr.

Digitized by Google



Demonſtr. Quia linea C D diviſa eſt bifariam in E , eique addita D A , erit (*per* 6. 2.) rectangulum ſub AC , A D unà cum quadrato rectæ E D , aut EB , æquale quadrato rectæ A E , ſed etiam quadratum rectæ A B , una cum quadrato rectæ BE (*per* 47. 1.) eſt æquale quadrato A E , cum angulus B ſit rectus (*per* 16.) igitur quadratum AB eſt æquale, rectangulo ſub AC , AD.

Secundò , ſecans AC , non tranſeat per centrum E, ducantur lineæ AE , ED , & perpendicularis EF dividens (*per* 3.) lineam DC bifariam, dico quadratum A B eſſe æquale rectangolo ſub AC , AD.

Demonſtr. Quia linea C D diviſa eſt bifariam in F , eique addita AD, erit (*per* 6.2.) rectangulum ſub AC, AD una cum quadrato FD, æquale quadrato A F , utrique addatur quadratum EF, erit igitur rectangulum AC , AD, unà cum quadratis FD,EF, aut loco illorum una cum ſolo quadrato ED , aut EB (*quod per* 47. 1.) illis æquale eſt ; æquale quadratis AE , FE , aut loco illorum quadrato EA illi æquali (*per* 47. 1.) ſed pariter quadratum AB una cum quadrato BE, (*per* 47.1.) æquale eſt quadrato EA , igitur quadratum EA, eſt æquale rectangulo ſub AC, AD.

COROLLARIUM I.

Sequitur ſi plures ab eodem puncto A ducerentur ſecantes , fore ut omnia rectangula comprehenſa ſub ſecantibus & exterioribus lineis eſſent inter ſe æqualia , eſſent enim ſingula æqualia quadrato tangentis.

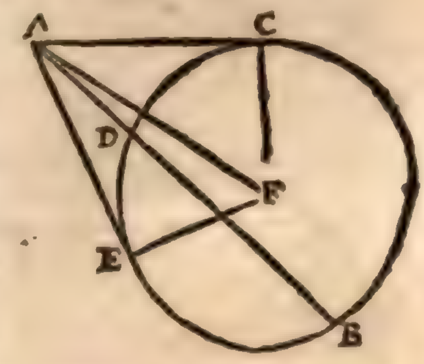
COROLLARIUM II.

Sequitur ſecundò , ſi duæ ducantur ab eodem exteriori puncto, tangentes illas eſſe æquales.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Si rectangulum comprehenſum ſub ſecante , & exteriori linea æquale fuerit quadrato lineæ in circulum incidentis , hæc erit tangens.

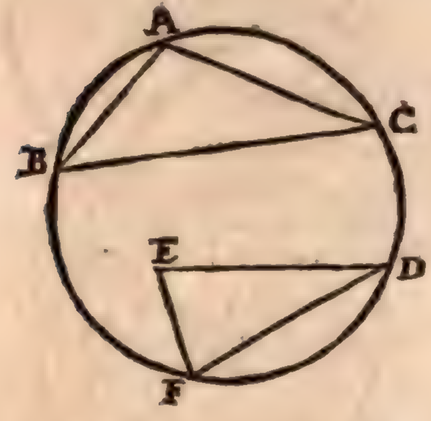


Sit ex puncto A ducta ſecans AB & alia AC incidens in circulum, ita ut rectangulum comprehenſum ſub AB , AD æquale ſit quadrato rectæ AC. dico AC eſſe tangentem ; Ex puncto A ex alia parte ducatur tangens AE, (*per* 17.) junganturque lineæ FC, FE, FA.

Demonſtr. Rectangulum comprehenſum ſub AB , AD (*per* 36.) æquale eſt quadrato rectæ AE , ſed ſupponitur æquale quadrato rectæ AC, igitur quadrata AC , AE ſunt æqualia , & conſequenter lineæ AC , AE. igitur triangula AFE, A F C , habent omnia latera æqualia , igitur (*per* 8. 1.) omnes angulos habent æquales , ſed quia A E eſt tangens (*per* 18.) angulus E eſt rectus ; igitur angulus C rectus etiam erit , (& *per* 16.) linea AC tangens erit.

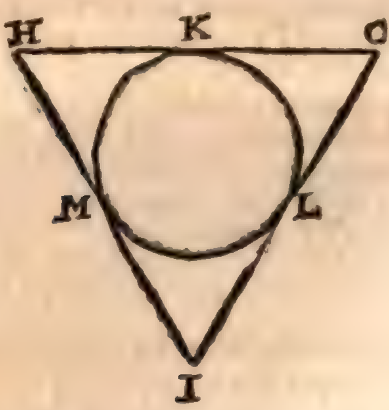
EUCLIDIS ELEMENTORVM LIBER QVARTVS.

Definitiones.



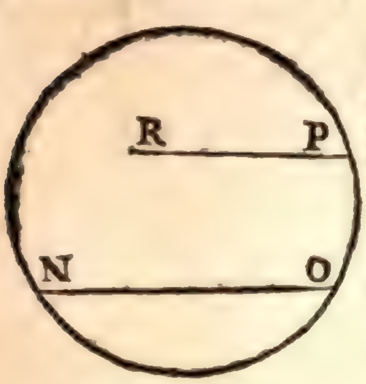
1. Figura rectilinea in circulo inſcribi & circulus figuræ circumſcribi dicitur, cum ſinguli figuræ anguli in circuli peripheria fuerint.

Ut triangulum ABC inſcriptum eſt circulo, non DEF, & circulus triangulo ABC circumſcriptus eſt.



2. Figura rectilinea circulo circumſcripta eſt; & circulus figuræ inſcriptus cùm ſingula figuræ latera circulum tangunt.

Ut triangulum CHI, cujus latera tangunt circulum in punctis K, L, M, dicitur circumſcriptum circulo, & circulus inſcriptus triangulo.



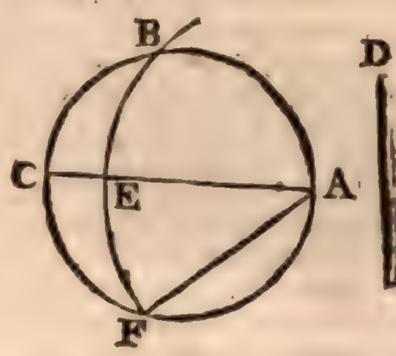
3. Linea circulo aptari aut accommodari dicitur, cujus extrema ſunt in circuli peripheriâ.

Ut linea N O, non autem P R.

PROPOSITIO I.

Problema.

Circulo rectam datam, diametro non majorem, accommodare.



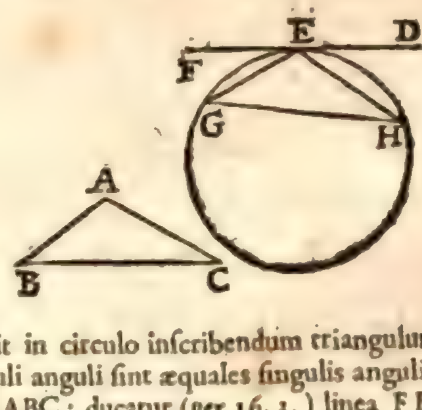
In circulo ABC ſit accommodanda linea D, ex AC abſcinde lineam AE æqualem lineæ D; & ex A ut centro, intervallo AE, fiat circulus BEF ſecans priorem in F, ducatur A F. dico lineam A F accommodatam in circulo, eſſe æqualem lineæ D.

Demonſtr. Lineæ AE, AF (*per def. circ.*) ſunt æquales: ſed AE facta erat æqualis lineæ D, igitur linea AF eſt æqualis lineæ D.

PROPOSITIO II.

Problema.

In circulo triangulum inſcribere dato triangulo æquiangulum.



Sit in circulo inſcribendum triangulum cujus ſinguli anguli ſint æquales ſingulis angulis trianguli ABC; ducatur (*per* 16. 3.) linea F E D tangens circulum in puncto E, fiatque angulus FEG

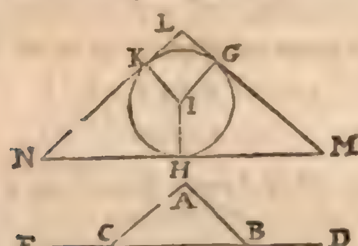
æqualis angulo C , item angulus DEH æqualis angulo B, ducatur linea GH , & factum eſt quod jubetur.

Demonſtr. angulus H eſt æqualis angulo FEG (*per* 32. 3.) ſed FEG factus eſt æqualis angulo C, igitur anguli H & C ſunt æquales, pariter angulus G eſt æqualis angulo B , & conſequenter cum cujuſcumque trianguli tres anguli ſint duobus rectis æquales (*per* 32.1.) reliqui A & GEH æquales erunt.

PROPOSITIO III.

Problema.

Circulo triangulum circumſcribere dato triangulo æquiangulum.



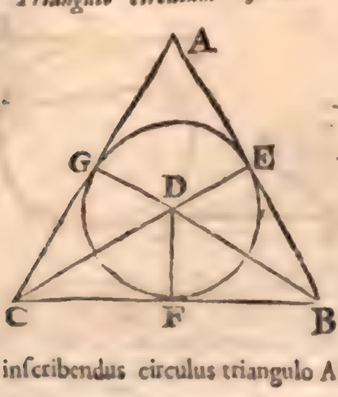
Sit datum triangulum A B C cui æquiangulum circumſcribendum ſit circulo. producatur latus BC in D & F , fiatque angulus GIH æqualis angulo DBA ; item angulus H I K æqualis angulo FCA , ducantur in punctis G, H, K tres tangentes LM , MN , LN , quæ neceſſariò convenient, nam ſi duceretur linea GH , anguli MGH, MHI, minores eſſent duobus rectis MGI , MHI , igitur HM, GM, (*per* 31. 1.) convenient, ita oſtendam alias convenire , fiet igitur triangulum quod dico eſſe æquiangulum triangulo ABC.

Demonſtr. Omnes anguli quadrilateri MGIH, æquivalent 4 rectis , poteſt enim in duo triangula dividi, ſed anguli G, & H ſunt recti , ergo reliqui M & GIH æquales ſunt duobus rectis , ſed etiam anguli DBA , ABC æquales ſunt duobus rectis , igitur anguli DBA , ABC æquales ſunt duobus GIH & M , ſed GIH factus eſt æqualis angulo DBA , ergo reliqui M & ABC ſunt æquales. eodem modo oſtendam angulum N æqualem eſſe angulo ACB.igitur cum tres anguli trianguli duobus tantum rectis ſint æquales : reliqui L & A æquales erunt ; & triangula æquiangula.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Triangulo circulum inſcribere.



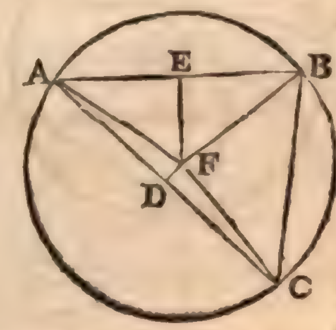
Sit inſcribendus circulus triangulo ABC. Dividantur bifariam anguli B , & C (*per* 9. 1.) & ex puncto D, concurſus linearum, duc lineas DE, DF , DG perpendiculares ad ſingula latera , quas dico eſſe æquales & ita circulum deſcriptum ex D intervallo DE , tranſire per puncta F, E, G ; & ſingula latera tangere.

Demonſtr. In trangulis DEB , DFB , cum anguli E & F ſint æquales, ſicut DBE, DBF [cum angulus B ſit diviſus bifariam] & latus DB ſit commune, erunt (*per* 26.1.) reliqua latera æqualia, ita lineæ DE, DF æquales erunt ; eodem modo ſunt DF, DG æquales. igitur poterit deſcribi ex D circulus per E , F, G ; & cum anguli E,F,G ſint recti ; lineæ AB , BC , CA ſunt tangentes, igitur triangulo inſcriptus eſt circulus.

PROPOSITIO V.

Problema.

Triangulo circulum circumſcribere.



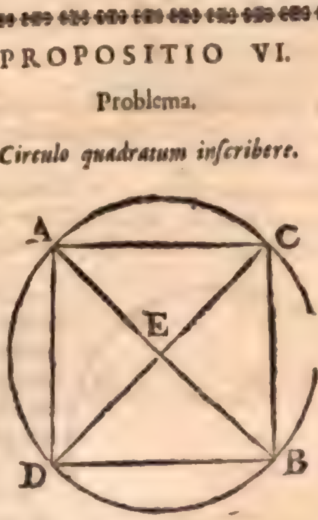
Sit circulus circumſcribendus triangulo ABC. Dividantur bifariam latera AB , AC , in D, & E, ducanturque perpendiculares EF, DF. concurrentes in puncto F : dico lineas FA , FB , FC æquales eſſe , ideóque circulum ex F ut centro deſcribi poſſe qui tranſeat per A , B , C.

Demonſtr. In triangulis FEA , FEB , latera EA E B ſunt æqualia [quia AB diviſa eſt bifariam] latus EF eſt commune , anguli FEA , FEB , ſunt facti recti , igitur æquales ; quare (*per* 4. 1.) baſes FB, FA ſunt æquales. ita lineæ FB , FC æquales erunt ut baſes triangulorum ADF , CDF.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Circulo quadratum inſcribere.



In dato circulo duc duas diametros AB , CD ſe ſecantes ad angulos rectos in centro E , ducantur item

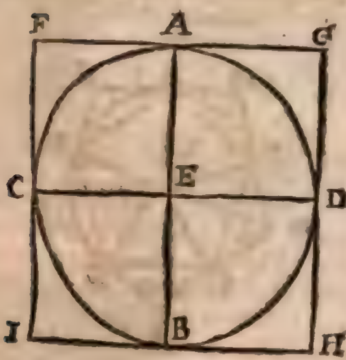
item lineæ AC, AD, DB, BC. Dico factum eſſe quadratum.

Demonſtr. In triangulis AEC, C E B cum latera AE, EB ſint æqualia (*per def. circ.*) & latus EC commune, & anguli AEC. CEB recti, æquales; (*per* 4. 1.) baſes A C, C B, æquales erunt; idem oſtendam de aliis lateribus. Deinde in triangulo A E C angulus A E C eſt rectus, igitur reliqui duo E A C, E C A ſunt æquales uni recto; ſunt autem æquales inter ſe, (*per* 5. 1.) quia latera AE, E C ſunt æqualia: igitur quilibet eſt ſemirectus. ita ſemirectus eſt angulus E C B, quare totus angulus C compoſitus ex duobus ſemirectis rectus eſt; ita oſtendam reliquos B, D, A eſſe rectos.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Circa circulum quadratum deſcribere.



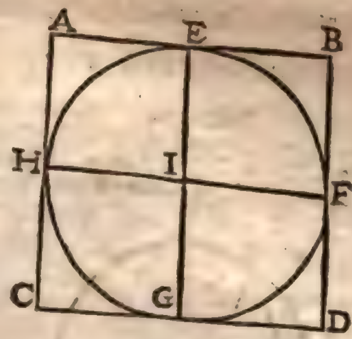
Ductis pariter duabus diametris AB, CD invicem perpendicularibus. per puncta A, B, C, D ducantur tangentes F G, G H, H I, IF. dico factum eſſe quadratum circa circulum.

Demonſtr. In quadrilatero A D lineæ AE, GD ſunt parallelæ (*per* 31. 1.) propter angulos rectos E & D, item parallelæ ſunt D E G A, quare oppoſitæ D G, E A, A G (*per* 34. 1.) ſunt æquales, & quia D E, E A, (*per def. circ.*) ſunt æquales, omnes inter ſe æquales erunt. Item anguli E & G oppoſiti (*per* 34. 1.) æquales erunt; ſed E rectus eſt: igitur G rectus erit. ita oſtendam reliquos H, I, F, rectos eſſe. & lineas B H, A G eidem E D æquales eſſe, & inter ſe; quare ſingula latera FG, GH, HI, I F compoſita ex dimidiis æqualibus, æqualia eſſe. igitur F G H I eſt quadratum.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Quadrato circulum inſcribere.



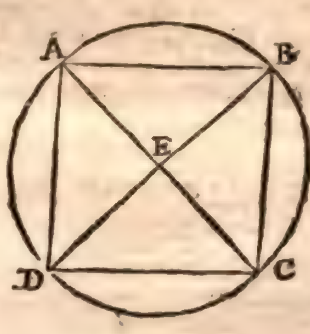
Dividantur biſariam latera AB, BD, DC, AC, in punctis E, F, G, H, ducantur lineæ E G, H F ſe interſecantes in puncto I, dico, lineas I E, I F, IG, IH eſſe æquales & perpendiculares ad ſingula latera; idcóque ex puncto I deſcriptum circulum intervallo I E, tranſire per F, G, H. & ſingula latera eum tangere.

Demonſtr. Quia lineæ BD, EG conjungunt lineas EB, BD parallelas, & æquales cum ſint dimidiæ laterum æqualium, erunt EG, BD parallelæ; (*per* 34. 1.) anguli D & E erunt æquales. Sed D rectus eſt igitur E rectus erit. ita oſtendam angulos in punctis F, G, H rectos eſſe. quare cum lineæ BD, EG ſint parallelæ, & pariter parallelæ ſint AB, HF, erit parallelogrammum E F; cujus lineæ EB, BF ſunt æquales ex ſuppoſitione, quare reliquæ IE, IF, illis oppoſitæ æquales erunt (*per* 34. 1.) ita oſtendam I F, I G æquales eſſe: ſunt igitur 4, IE, IF, IG, I H æquales. ergo deſcribi poteſt circulus per E, F, G, H, & propter angulos rectos in punctis E, F, G, H, latera A B, B D, DC, AC, illum tangent.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Circa quadratum circulum deſcribere.



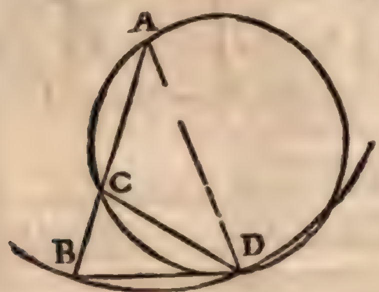
Ducantur diametri A C, B D, dico ex E deſcriptum circulum intervallo EA tranſire per puncta B, C, D, hoc eſt lineas EA, E B, E C, ED æquales eſſe.

Demonſtr. In triangulo D A B, cujus angulus D A B rectus eſt, reliqui duo æquivalent uni recto. Sunt autem æquales (*per* 5. 1.) quia latera A B, A D ſunt æqualia: igitur angulus A B E ſemirectus eſt. Eodem modò oſtendam angulum E A B ſemirectum eſſe, igitur (*per* 6.) lineæ E A, E B, ſunt æquales. ita lineæ EB, EC, EA, ED, oſtenduntur æquales.

PROPOSITIO X.

Problema.

Triangulum Iſoſceles conſtruere cujus uterque angulus ad baſim, ſit duplus reliqui.



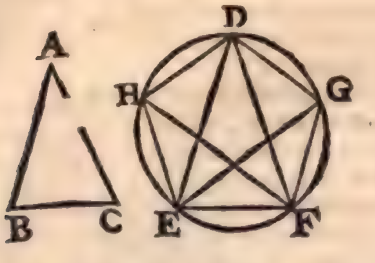
Secetur recta A B (*per* 11. 2.) ita ut rectangulum ſub A B, C B ; æquale ſit quadrato rectæ A C. Ex A ut centro intervallo A B circulum deſcribe, in quo aptetur recta B D, æqualis lineæ A C ; ducantur item lineæ A D C D dico trianguli A B D utrumque angulum A B D , A D B duplum eſſe anguli A. Circa triangulum A C D circulus deſcribatur.

Demonſtr. Quia rectangulum ſub A B , B C æquale eſt quadrato rectæ A C , aut D B illi æqualis ; linea D B (*per* 37. 3.) tanget minorem circulum, ideóque (*per* 32. 3.) erunt anguli BDC, & A æquales. quibus ſi addas angulum communem A D C , erunt duo A D C , C D B , ſeu totus A D B æqualis duobus A & A D C ſed externus D C B (*per* 32. 1.) eſt æqualis duobus internis A, & A B C, igitur angulus D C B eſt æqualis angulo D : ſed angulus D eſt æqualis (*per* 6. 1.) angulo B cum latera A D , A B , (*per def. circ.*) ſint æqualia ; ergo angulus D C B & B ſunt æquales, & (*per* 6. 1.) latera D C, DB ſunt æqualia ; ſed D B factum fuerat æquale lineæ AC, igitur lineæ A C , C D ſunt æquales & (*per* 5.) anguli A, & ADC ſunt æquales : ſed angulo A, eſt etiam æqualis CDB, igitur tres anguli A , ADC, & C D B ſunt æquales, igitur totus angulus D eſt duplus anguli A, ſicut etiam angulus B.

PROPOSITIO XI.

Problema.

In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.



Fiat per præcedentem, triangulum A B C , cujus anguli B & C, ſint dupli anguli A, & in dato circulo inſcribatur triangulum D E F , æquiangulum triangulo ABC (*per* 2.) cujus anguli E, & F dividantur bifariam lineis E G, FH , (*per* 9. 1.) ultimo ducantur lineæ DG, GF, EH, HD. Dico factum eſſe pentagonum DGFEH , æquilaterum & æquiangulum.

Demonſtr. Anguli D E G , G E F ut media pars anguli totalis D E F , ſunt æquales angulo E D F, ſicut etiam anguli D E H , H F E : quare (*per* 26. 3.) quinque arcus D G, G F, F E , E H, H D ſunt æquales ; eſt igitur æquilaterum pentagonum. quia autem patet ſegmenta HG, DF, eſſe æqualia anguli H D G, D G F ſunt æquales (*per* 27. 3.) ita omnes alij anguli probantur eſſe æquales : quare pentagonum erit etiam æquiangulum.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circumſcribere.



In dato circulo per præcedentem inſcribatur pentagonum A B C D E æquilaterum, & æquiangulum. Et in punctis A, B, C, D, E ducantur (*per* 16. 3.) tangentes F G, G H, H I, I K, K F. dico factum eſſe quod jubetur, nam ex centro L. ducantur lineæ L A , L G, L B, L H, L C.

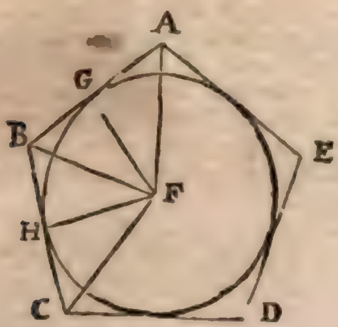
Demonſtr. Lineæ G A, G B ex eodem puncto G tangentes circulum (*per cor.* 36. 3.) ſunt æquales ; quare (*per* 8. 1.) triangula A L G , G L B, ſibi mutuò congruunt. & anguli A L G , B L G ſunt quilibet media pars anguli A L B, ita oſtendam angulum B L H eſſe mediam partem anguli B L C, qui æqualis eſt angulo A L B, (*per* 27. 3.] cum lineæ A B , B C ſint æquales : igitur anguli G L B , B L H ſunt æquales : ſunt etiam anguli L B H , L B G recti æquales , & latus L B commune triangulis G L B , B L H , quare [*per* 26. 1.] lineæ G B , B H æquales ſunt , ita oſtendam lineas F A , A G æquales eſſe, quare latera F G , G H æqualia ſunt. Eâdem methodo oſtendam reliqua latera eſſe æqualia ; igitur eſt æquilaterum pentagonum : & quia oſtendimus angulos L G B , L H B eſſe æquales qui ſunt quilibet media pars angulorum G & H erunt anguli G & H æquales. ita etiam æquiangulum erit pentagonum.

PROPO

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribere.



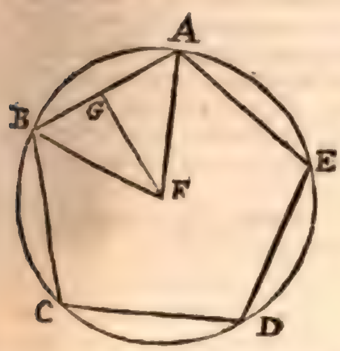
Pentagoni regularis A B C D E duos quoſlibet angulos A, & B (*per* 9. 1.) divide bifariam lineis A F, B F; ductâque perpendiculari FG deſcribatur circulus ex centro F intervallo FG, dico illum tangere ſingula latera pentagoni ABCDE. hoc eſt perpendiculares F G, F H, & aliàs eſſe æquales.

Demonſtr. In triangulis AFG, BFG, cum anguli FAG, FBG ſint quilibet media pars angulorum æqualium A & B, erunt inter ſe æquales: anguli etiam in puncto G recti ſunt & conſequenter æquales, latus autem F G eſt commune igitur lineæ AG, GB, (*per* 26. 1.) ſunt æquales; ſicut BH, HC, & quia latera AB, BC ſunt æqualia eorum dimidia GB, BH ſunt æqualia. quadratum autem lineæ FB (*per* 47.1.) eſt æquale, & quadratis GB, FG, ſicut etiam quadratis BH, HF, igitur quadrata GB, FG, ſunt æqualia quadratis BH, HF; ex quibus ſi auferas æqualia quadrata GB, BH, reſtabunt quadrata HF, FG æqualia: igitur lineæ FH, F G ſunt æquales. Ita oſtendam reliquas perpendiculares, ductas ex puncto F, eſſe æquales; & conſequenter circulum tranſire per earum extrema.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Circa datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulum deſcribere.



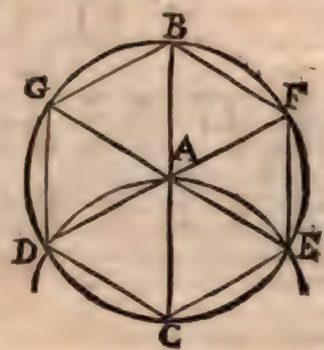
Pentagoni regularis A B C D E duo quilibet anguli A & B bifariam dividantur (*per* 9. 1.) lineis A F, B F; dico ſi ex puncto F intervallo FA deſcribatur circulus illum tranſire per puncta B, C, D, E, hoc eſt lineas AF, F B, & cæteras eſſe æquales, ducatur enim perpendicularis FG, quæ ſicut prius dividet bifariam lineam AB: triangula igitur FGB FGA habentia latus FG commune, latera AG, GB æqualia, & angulos in puncto G æquales, baſes FA, FB æquales habebunt (*per* 4.1.) ita ſi ducerentur F C, FD, FE, oſtenderentur æquales.

Coroll. Ex quibus facilè in data figura regulari, diviſis ejus angulis circulum inſcribes aut eidem circumſcribes; item ſi poſſis circulo figuram regularem inſcribere ductis tangentibus figuram ſimilem facile circumſcribere poteris.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Exagonum æquiangulum, & æquilaterum dato circulo inſcribere.



Ducatur per centrum A, diameter BAC & ex C ut centro intervallo CA deſcribatur circulus DAE; ductiſque lineis DAF, EAG, conjungantur rectæ CD, CE, EF, BF, BG, DG. dico factum eſſe quod jubetur.

Demonſtr. Primò triangulum A C E eſt æquilaterum, ſicut & A C D, igitur quilibet angulorum ut C AE eſt tertia pars duorum rectorum, ſicut & DAC; tres autem anguli DAC, CAE, EAF (*per* 16. 1.) ſunt æquales duobus rectis, ſublatis igitur angulis DAC, CAE duabus tertiis duorum rectorum reſtat angulus EAF, tertia pars duorum rectorum, & conſequenter aliis æqualis; quare tres rectæ DC, CE, EF, ſunt æquales, & quia anguli DAG GAB, BAF prioribus oppoſiti ſunt ad verticem, (*per* 15. 1.) iis erunt æquales; & conſequenter (*per* 27. 3.) lineæ DG, GB, BF æquales erunt prioribus; eſt igitur æquilaterum exagonum, ejus autem quilibet angulus componitur ex duabus tertiis duorum rectorum, igitur & æquiangulum eſt.

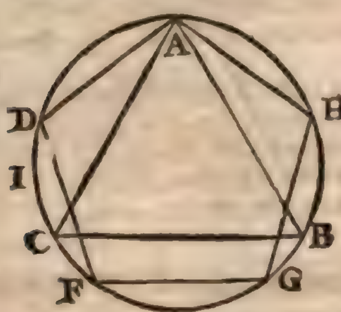
Coroll. Ex eo patet latus exagoni æquale eſſe ſemidiametro.

Digitized by Google

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Pentedecagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere in dato circulo.



In dato circulo [*per* 2.] inſcribatur triangulum æquilaterum A B C, & [*per* 11.] pentagonum regulare ADFGH. dividatur D C bifariam in I. dico ſi ducantur lineæ DI, IC, CF illas eſſe tria latera pentedecagoni. Et ſi in reliquis arcubus pentagoni tres lineæ illis æquales aptentur perfectum eſſe pentedecagonum.

Demonſtr. Quia linea AC eſt latus trianguli æquilateri arcus ADC erit 3 pars totius circuli. igitur ſi circulus ſit dividendus in 15 partes arcus ADC continebit ex iis quinque, & arcus AD continet ex iis tres, necnon arcus DF alias tres; igitur in arcu D C ſunt duæ; & ſi arcus D C bifariam dividatur habebimus tres arcus DI, IC, CF, pro tribus partibus pentedecagoni & lineas ſubtenſas pro tribus lateribus pentedecagoni.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER QUINTUS.

Definitiones.

6 E
A —— B
C · 4 D

Pars eſt minor magnitudo, comparata cum majore: ut linea C D 4 pedum, dicitur pars lineæ A B 6 pedum: licet C D verè non ſit in ipſa linea A B, ſufficit enim ad hoc, ut linea CD dicatur pars lineæ AB, lineam AE, æqualem lineæ C D, contineri in linea A B.

Parti reſpondet totum, eſtque major quantitas comparata cum minori, ſive eam contineat verè, ſive non: modò contineat quantitatem minori æqualem.

Dividitur autem pars genericè hoc modò ſumpta, in partem aliquotam, & aliquantam.

2. Pars aliquota (*quam ſolam hic definivit Euclides*) eſt magnitudo magnitudinis, minor majoris; cum minor metitur majorem. *Seu eſt minor magnitudo comparata cum majore, quam aliquoties repetita præcisè adæquat: ut linea duorum pedum eſt pars aliquota lineæ 6 pedum.*

2. Multiplex eſt magnitudo magnitudinis, major minoris, cum minor metitur majorem. *Seu eſt major quantitas comparata cum minori; à qua aliquoties repetita præcisè adæquatur. ut linea 6 pedum eſt multiplex lineæ duorum pedum; eſt enim ejus tripla.*

Pars aliquanta eſt minor quantitas, comparata cum majore, quam aliquoties repetita non adæquat præcisè; ut linea 4 pedum, eſt pars aliquanta lineæ 6 pedum.

6. 2. 3. 1.
A B C D

Sint duæ quantitates quarum una ſuam conſequentem toties contineat, quoties alia ſuam item conſequentem continet: dicuntur æquè multiplices; ut ſi A ſit tripla ipſius B, & C ſit etiam tripla ipſius D; dicuntur A, & C, æquè multiplices ipſarum B, & D.

3. Ratio eſt duarum ejuſdem generis magnitudinum mutua quædam ſecundùm quantitatem habitudo. *Dixi ejuſdem generis, nam ita habet Euclides.*

4. Rationem dicuntur habere magnitudines, quæ multiplicatæ, ſe mutuò ſuperare poſſunt. *Ad hoc autem requiritur ut ſint ejuſdem generis. ita linea rationem nullam habet cum quadrato, quia quantumlibet multiplicetur linea, quadratum tamen nunquam ſuperabit.*

Quandoquidem ratio eſt ſpecies relationis neceſſariò duos terminos requirit, quorum primus (qui à Philoſophis vocaretur fundamentum) dicitur à Mathematicis antecedens: terminus verò dicitur conſequens. ut rationis quæ eſt A ad B: A dicitur antecedens, & B conſequens. rationis verò quæ eſt B ad A, B dicitur antecedens; & A conſequens.

Dividitur ratio in rationem rationalem, & rationem irrationalem. ratio rationalis eſt inter quantitates quæ communem habent menſuram, ut inter lineam 4 pedum & lineam 6 pedum, habent enim lineam duorum pedum pro communi menſura.

Ratio irrationalis eſt inter duas magnitudines incommenſurabiles, id eſt quæ nullam habent communem menſuram; ut ratio quæ eſt lateris quadrati, ad diametrum ejuſdem: nulla enim poteſt aſſignari quantumvis parva linea, quæ utramque lineam præ-

cisè

niſi metiatur. ideoque hæc ratio numeris exprimi non poteſt.

In eâdem ratione erunt 4 magnitudines, hoc eſt, eamdem rationem habebit prima ad ſecundam, quàm habet tertia ad quartam; quando habebunt ſimilem relationem, ſecundùm quantitatem. Quid ſit autem habere ſimilem relationem non ita facilè explicatur, & in eo intelligendo tota difficultas hujus libri poſita eſt. Nam Euclides non dedit definitionem ſimilitudinis rationum, quæ illius naturam explicaret: ſed tantùm aſſignavit aliquod ſignum quo poſſemus dignoſcere, utrum 4 quantitates in eadem eſſent ratione. Quod quidem ſignum licèt ſit infallibile, non tamen ita clarum eſt, ut locum axiomatis obtinere poſſit. imò ferè nulla eſt propoſitio in toto libro quæ illo clarior non ſit; ideoque quæ potiori jure tanquam axioma proponi non poſſit. quod dedit occaſionem aliquibus eas ſimpliciter proponendi, ſine ullâ probatione; Exiſtimarunt enim eas probè explicatas nullâ demonſtratione indigere: quod quidem licet de aliquibus negari non poſſit, de omnibus tamen non auſim aſſerere ideoque mediam quandam viam inire tentabo, & relicto longo æquè multiplicium circuitu, obſcuriores ſaltem demonſtrare, quod quidem præſtitiſſent alij ſi neceſſarium judicaſſent.

5. Vult igitur Euclides 4 magnitudines in eadem eſſe ratione quoties auctis eadem multiplicatione primâ & tertiâ (*quæ ſunt antecedentes*) auctis etiam, aliâ quacumque multiplicatione, ſecundâ & quartâ (*id eſt conſequentibus*) ſemper evenit; ut ſi multiplex primæ eſt majus multiplice ſecundæ; multiplex tertiæ ſit etiam majus multiplice quartæ; & ſi eſt æquale, aliud ſit etiam æquale; & ſi eſt minus, ſit etiam minus.

A, B, C, D,
2. 4. 3. 6.
8. 8. 12. 12.
E, F, G, H

Ut ſint 4 magnitudines A, B, C, D, ſumantur autem æquè multiplices primæ A: & tertiæ C; ſintque E, & G; item ſumantur æquè multiplices ſecundæ B, & quartæ D, ſintque F & H; ſi quoties E eſt majus quàm F, toties G eſt maius quàm H; & quoties E eſt æquale ipſi F, G eſt etiam æquale ipſi H; & quoties E eſt minus quàm F: G ſit etiam minus quam H; ita ut hoc non tantùm ſemel accedat, ſed in omni multiplicatione eo modo factâ id ſemper eveniat: tunc eadem eſt ratio A ad B; quæ eſt C ad D.

Debuerat autem probare Euclides hoc eſſe verum, id eſt quoties æquè multiplicia vel unà excedunt, vel unà deficiunt, vel unà æqualia ſunt, toties 4 magnitudines in eadem ratione eſſe. quod quidem præſtaremus ſi propoſitiones hujus libri, ſine illo ſigno probari non poſſent clarius. Quare ut melius intelligatur, quid ſit 4 magnitudines proportionales eſſe; licèt poſſit dici, quoties prima eſt ſimile totum, vel ſimilis pars ſecundæ ac tertia quartæ, id eſt quoties prima ſecundam, æqualiter continet, aut in ea continetur; ac tertia quartam, id tamen non convenit rationi æqualitatis: quare ut definitionem generalem aſſignemus, ſciendum eſt quid ſit ſimilis pars aliquota.

Similes partes aliquotæ duorum totorum ſunt quarum una toties in ſuo toto continetur quoties alia in ſuo; ut binarius numeri ſenarij eſt ſimilis pars, ac ternarius novenarij, quia toties binarius in ſenario, quoties ternarius in novenario continetur. Quo poſito.

A, B, C, D.

Prima ad ſecundam eandem rationem habebit; ac tertia ad quartam, ſi prima toties contineat ſecundæ partes aliquotas quaſcumque quoties tertia quartæ ſimiles partes aliquotas continet; ut ſi magnitudo A toties continet magnitudinis B partes centeſimas, milleſimas, centies milleſimas, & quaſcumque alias aliquotas; quoties C continet magnitudinis D partes centeſimas, milleſimas, centies milleſimas & quaſcumque alias aliquoties ſimiles; ita ut nulla ſit pars magnitudinis B quæ pluries contineatur in magnitudine A, quàm ſimilis pars aliquota ipſius D contineatur in C licet in irrationalibus reſtet ſemper aliqua quantitas, tunc eſt A ad B ut C ad D. Hæc proprietas eſt generalis convenitque tam proportionibus æqualitatis quam inæqualitatis, rationalibus quam irrationalibus, aſſignatúrque à R. P. Tacquet licèt ea non utatur in demonſtrationibus hujus libri.

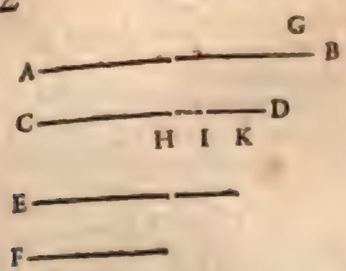
6. *Majorem autem rationem habebit prima ad ſecundam, quàm tertia ad quartam: quoties prima aliquam partem aliquotam ſecundæ pluries continebit, quàm tertia contineat ſimilem partem aliquotam quartæ; ut 101 ad 10 majorem rationem habet quàm 200 ad 20; quia 101 continet centies, & ſemel decimam partem numeri 10 & 200 centies tantùm continet binarium, quæ eſt decima pars numeri 20.*

Antequam ulteriùs progrediamur, demonſtranda nobis eſt hæc definitio, duoque probanda. Primum eſt quòd ſi fuerit eadem ratio primæ ad ſecundam, ac tertiæ ad quartam, id quod propoſui accidet, ſecundum quod ubicumque hæc proprietas invenietur; quatuor quantitates proportionales erunt, & viciſſim quoties dicentur quatuor quantitates non eſſe proportionales, toties oſtendere poſſis hujuſmodi proprietatem abeſſe.

A, B, C, D.

Quod ad primum attinet, nempe ſi fuerit A ad B ut C ad D, quod A contineat partes aliquotas magnitudinis B quoties C continet ſimiles partes aliquotas magnitudinis D. hoc inquam punctum manifeſtum mihi videtur, ſi enim A continet centies & ſemel decimam partem magnitudinis B, & C contineat tantum centies partem decimam magnitudinis D; magnitudo A erit majus totum reſpectu magnitudinis B, quam C reſpectu magnitudinis D, quare non eodem modò comparabitur, nec conſequenter eandem relationem habebit, ſeu rationem, quæ ſunt omnes voces ſynonima.

Secundum



Secundum verò punctum ita probatur, nempe forè ut magnitudines non ſint proportionales, ſi hac deſit proprietas; nam ſi AB toties continet partes aliquotas magnitudinis C D quoties E continet ſimiles partes aliquotas magnitudinis F, dico eandem eſſe rationem AB ad CD ac E ad F, ſi enim non ſit eadem ratio, ſupponamus quantitatem AB eſſe nimis magnam quam requiratur ut habeat eandem rationem ad C D, quam habet E ad F: abſcindatur ille exceſſus ita ut A G ad C D eandem rationem habeat, ac E ad F. tum dividatur CD biſariam in puncto H, pariter HD biſariam in I, & I D biſariam in K; ſi hoc modò ſemper fiat diviſio, tandem occurret quantitas minor quàm G B. ſit hac K D qua eſt pars aliquota linea C D, ut puta nata ex diviſione per medium; erit enim vel medietas, vel quadrans, vel octava, vel decima ſexta, &c. cum ergo eadem ſit ratio linea A G ad CD, qua linea E ad F, toties AG continebit K D partem aliquotam quantitatis C D, quoties E. continet ſimilem partem aliquotam quantitatis F, & cum G B major quàm KD eam ſaltem ſemel contineat, AB pluries continebit K D partem aliquotam ipſius CD, ac E continet ſimilem partem aliquotam quantitatis F. quod eſt contra ſuppoſitionem, ergo ſi A majorem rationem habet ad CD quàm E ad F; A pluries continebit aliquam partem aliquotam quantitatis C D, quàm E contineat ſimilem partem aliquotam quantitatis F.

7. Quæ ſunt in eadem ratione magnitudines proportionales vocentur.

8. Nam analogia, ſeu proportio eſt rationum ſimilitudo.

9. Proportio in tribus nimirùm terminis conſiſtit. *Hac eſt ut ſit proportio ſeu ſimilitudo rationum, debent eſſe dua rationes; qualibet autem ratio cùm ſit relatio debet habere duos terminos: ideoque in duabus rationibus deberent eſſe 4 termini. ut cum dicitur ita eſt A ad B, ſicut C, ad D: niſi unus bis repetatur, ut cum dicimus ita eſt A ad B; ſicut B, ad C.*

10. Magnitudines continuè proportionales ſunt illæ quarum quæ mediæ ſunt bis ſumuntur, ſemel ut antecedentes, & ſemel ut conſequentes *ut ſi ſit A ad B, ut B ad C, & ita C ad D.*

A, B, C, D.
1. 6. 12. 24.

11. Tunc autem dicitur A ad C, habere duplicatam rationem illius quàm habet A ad B, & A ad D habere triplicatam rationem illius quæ eſt A & B.

12. Magnitudines dicuntur homologæ antecedentes antecedentibus, & conſequentes conſequentibus. *Ut ſi prima ad ſecundam, eandem rationem habet, ac tertia ad quartam, prima & ſecunda dicuntur homologa. ſicut ſecunda & quarta.*

Sequentes definitiones ſunt modi argumentandi, ad quorum pracipuè probationem inſtitutus eſt hic liber.

A, B, C, D.
4. 2. 6. 3.

13. Alterna, ſeu permutata ratio, eſt comparatio antecedentium cum antecedentibus, & conſequentium cum conſequentibus; *ut ſi ex eo quod ſit A ad B ut C ad D ego concludam, ergo ita eſt A ad C ſicut B ad D modò tamen ſint ejuſdem generis. nam ſi A & B eſſent linea, & C & D quadrata; ratio argumentandi non valeret; quia linea non poteſt habere rationem ad quadratum. Vide prop. 16.*

14. Converſa ratio eſt quando conſequens inſtar antecedentis ſumitur. *Ut ſi ex eo quod ſit A ad B ſicut C ad D, ego concludam; ergo eſt B ad A ſicut D ad C. Vide propoſitionis 16. Coroll.*

15. Compoſitio rationis eſt cum antecedens, & conſequens inſtar unius ſumptum, ad conſequens comparatur. Ut ſi ex eo quòd ſit A ad B ſicut C ad D, concludam, ergo eſt A B ad B, id eſt 6 ad 2 ſicut C D, ad D id eſt ſicut 9 ad 3. Vide propoſ. 18.

16. Diviſio rationis eſt comparatio exceſſus antecedentis ſupra conſequens, ad ipſum conſequens, *ut ſi ex eo quòd ſit A B ad B ut CD ad D concludam: ergo eſt A ad B ut C ad D.* Vide propoſ. 17.

17. Converſio rationis eſt cum antecedens ad differentiam terminorum, velut ad conſequens, comparatur; *ut ſi ex eo quod ſit AB ad B ut CD ad D, concludam: ergo eſt AB ad A; ſicut CD ad C. Vide propoſ. 18. Coroll.*

A. B. C. D.
E. F. G. H.

18. Propoſitio ex æquo, eſt comparatio magnitudinum extremarum ſubtrahendo intermedias, *ut ſi ex eo quòd ſit ut A ad B ita E ad F; & ut B ad C ita F ad G; & ut C ad D ita G ad H, ego concludam, ergo ita eſt A ad D ſicut E ad H.*

19. Propoſitio ex æquo ordinata, eſt cum eodem ordine comparantur quantitates in utraque ſerie, *ut in allato exemplo. Vide prop. 22.*

A. B. E.
F. C. D.

20. Propoſitio ex æquo perturbata, eſt cùm non eodem ordine comparantur quantitates in utraque ſerie, *ut ſi ex eo quòd ſit ut A ad B ita C ad D: & ut B ad E ita F ad C, ego concludam; ergo eſt A ad E: ſicut F ad D. Vide prop. 23.*

A. B. C. D.
9. 3. 6. 2.

Hìc ſubjicio omnes modos argumentandi, quia eſt ut A ad B ita C ad D.

Alterna ratio.
Ergo eſt ut A ad C ita B ad D.
Converſa ratio.
Ergo eſt ut B ad A ita D ad C.
Compoſitio rationis.
Ergo erit ut A B ad B ita C D ad D.
Diviſio rationis. 12 3 8 2
Ergo ita erit 6 ad 3 ut 4 ad 2.
Converſio rationis.
Ergo erit 9 ad 6 ut 6 ad 4.

Ex æquo ordinata. *Ex æquo perturbata.*

12. 6. 3. | 8. 4. 2. || 12. 6. 2. | 24. 8. 4.

12 *ad* 3. *ut* | 8 *ad* 2. || 12. 2. | 24. 4.

Hic liber continet propoſitiones Euclidis 25. quibus acceſſerunt aliæ 10. jam apud Mathematicos recepta. 6. priores tantùm ſunt uſui, ut reliqua probentur, per æquè multiplices; quam methodum, quia non ſequimur eas reliquimus immutato tamen reliquarum propoſitionum ordine, ne in citationibus

tionibus communibus ſit aliquid difficultatis omnes propoſitiones ſunt Theoremata.

Petitio.

Datis tribus quantitatibus A, B, C petitur concedi dari poſſe quartam quantitatem D, ad quam C. eandem rationem habeat, quam habet A ad B.

PROPOSITIO VII.

Æquales ad eandem magnitudinem eandem habent rationem; & eadem ad æquales.

8.
A.C.4.
B.
8.

Sint magnitudines A & B æquales, dico illas ad eandem magnitudinem C habere eandem rationem; ſi enim A non haberet eandem rationem ad C quam B ad C; ergo A (*per def.5.*) aliquam partem aliquotam magnitudinis C, pluries continebit quàm B illam contineat: ergo A major erit contra ſuppoſitionem.

Secundò dico magnitudinem C eandem habere rationem ad magnitudines A & B æquales, niſi enim haberet eandem rationem ad utramque: ad alterutram verbi gratia ad A, magnitudo C, haberet majorem rationem, quàm ad B. ergo (*per def.6.*) aliquam partem aliquotam ipſius A verbi gratia quadrantem pluries contineret, quàm quadrantem magnitudinis B: ergo quadrans magnitudinis A minor eſſet quadrante magnitudinis B: quare & tota A minor eſſet, totâ B; contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO VIII.

Major ad eandem magnitudinem, majorem habet rationem, quàm minor: & eadem ad majorem quantitatem, minorem habet rationem, quàm ad minorem.

F
A——B
C—D
——
E G

Sit AB major quantitas, & CD minor; ſitque tertia E. dico AB ad E, majorem rationem habere, quàm CD habeat ad eandem E. Abſcindatur AF æqualis magnitudini CD, tunc AF & CD eandem rationem habebunt ad E (*per 7.*) intelligatur autem dividi magnitudo E per medium, & iſtud medium iterum bifariam, & ſic deinceps tandem fit aliqua pars aliquota EG, ipſius E, quæ minor erit quàm FB; & quia AF & CD eandem habent rationem ad magnitudinem E, (*per def.5.*) toties ejus pars aliquota EG continebitur in AF, ac in CD: ſed continetur adhuc ſemel in FB, cum EG minor ſit quàm FB: igitur EG pars aliquota ipſius E, pluries continetur in AB, quàm in CD. quare (*per def.16.*) AB majorem habet rationem ad E, quàm CD ad E.

A——B
C—D
E G F
——H

Dico ſecundò, eandem magnitudinem E ad majorem AB, habere minorem proportionem, quàm ad minorem CD. Sumatur enim quæcumque pars aliquota ipſius CD ut quadrans quæ auferatur ex E quantum fieri poteſt inveniaturque in E, verbi gratiâ quinquies, ſi nihil relinquat ſed eam metiatur, certum eſt quod quia quadrans majoris AB major eſt, quadrante ipſius CD inveniri non poterit quinquies in ipſâ E; quare E quinquies quadrantem ipſius CD contineret & non contineret quinquies quadrantem lineæ AB: quare (*per def.6.*) majorem haberet rationem ad CD, quàm ad AB. Si vero quadrans ipſius CD quinquies ſumptus in ipſâ E, relinquat FG, certum eſt quod quadrans ipſius AB qui major eſt quinquies ſumptus, aut nihil relinquet aut minùs relinquet. Relinquat igitur HG, dividaturque quadrans ipſius CD bifariam, & rurſus bifariam, donec aliqua ejus pars aliquota ſit minor quàm FH. ſit hæc pars quadrans quadrantis, ſeu 16 pars ipſius CD. Quia in EF erant quinque quadrantes ipſius CD, in eâ erunt quinquies quatuor partes 16, hoc eſt 20 16 ipſius CD; & quia in EH ſunt 5 quadrantes ipſius AB, in FH erunt 20 partes 16 ipſius AB; & quia FH major eſt unâ 16 ipſius CD ſuntque in EF 20, in EH erunt 21 partes 16 ipſius CD, & 20 tantum ipſius AB; quot autem erunt 16 ipſius AB in reliquâ HG, ſaltem totidem erunt partes 16 ipſius CD, cùm minores ſint 16 ipſius AB. Igitur tota EG pluries continet 16 partes minoris CD, quàm majoris AB. igitur (*per defin.5.*) EG majorem habet rationem, ad minorem CD, quàm ad majorem AB.

PROPOSITIO IX.

Quæ ad eandem magnitudinem habent eandem rationem, illæ æquales ſunt: & ad quas eadem habet eandem rationem.

A, B, C. Sint magnitudines A & B, quæ ad C habeant eandem rationem: dico A & B eſſe æquales.

Demonſtr. Si enim non ſint æquales, alterutra ponatur major, ſitque A; ergo (*per 8.*) major A ad eandem C majorem haberet rationem quàm B minor; contra ſuppoſitionem.

Secundò, ſi magnitudo C ad A & B eandem habeat rationem, dico A & B eſſe æquales.

Demonſtr. Si enim non ſunt æquales, ſit A major quàm B; ergo C ad majorem A, minorem habet rationem, quàm ad B (*per 8.*) quod tamen eſt contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO X.

Quæ majorem habet rationem ad eandem, ea major eſt; & ad quam eadem habet majorem rationem, ea minor eſt.

A, B, C. Magnitudo A, habeat majorem rationem ad C, quàm B habeat ad eandem C; dico A majorem eſſe quàm B.

Demonſtr. Si enim A non ſit major quàm B, aut eſſet æqualis, & tunc (*per 8.*) A & B eandem haberent rationem ad C, contra ſuppoſitionem: aut A eſſet minor, & tunc (*per 9.*) B haberet majorem rationem ad C, quàm habeat A ad eandem C, contra ſuppoſit.

Secundò, ſi C habet minorem rationem ad A quàm ad B, dico A majorem eſſe quàm B.

Demonſtr. Si enim non eſſet major; aut eſſet æqualis & tunc (*per 8.*) C ad æquales A, & B haberet eandem rationem contra ſuppoſitionem: vel A eſſet minor, & tunc (*per 9.*) C ad A minorem, majorem rationem haberet, quàm ad B. item contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XI.

Quæ eidem, eadem ſunt rationes inter ſe ſunt eadem.

A.B. C.D. E.F.
4. 2. 8. 4. 6.3.

Sit ratio A ad B; ut ratio C ad D, ſit etiam ratio E ad F; ut ratio C ad D: dico eſſe A ad B; ſicut E ad F.

Demonſtr. Quia A eandem rationem habet, ad B; quam habet C ad D, (*per def. 5.*) toties A continebit quaſcumque partes aliquotas ipſius B; quoties C continet ſimiles partes aliquotas magnitudinis D; ſed quoties C quaſcumque partes aliquotas ipſius D continet, toties (*per eandem 5. def.*) E continet ſimiles partes aliquotas ipſius F; igitur quoties A continet partes magnitudinis B, toties E continet ſimiles partes magnitudinis F. ergo (*per 5. def.*) eadem eſt ratio A ad B, quæ E ad F.

PROPOSITIO XII.

Si fuerint quotcumque magnitudines proportionales; erit ut una antecedentium ad unam conſequentium; ita omnes antecedentes, ad omnes conſequentes.

3. 9.
A. B.
C. D.
2. 6.

Sit A ad B; ut C ad D. dico ita eſſe A & C ſimul ad B & D ſimul; ut A ſola ad B ſolam.

Demonſtr. Quia A habet eandem rationem ad B; quàm C ad D; A continebit toties quaſcumque partes aliquotas magnitudinis B, quoties C continet ſimiles partes magnitudinis D. Ponamus A continere ter unam decimam quintam partem ipſius B, C pariter continebit unam decimam quintam ipſius D. Sed una 15 ipſius B, juncta uni 15 ipſius D, facit unam 15 ipſarum B, & D ſimul ſumptarum: igitur in magnitudinibus A, & B ſimul, ſunt tres 15. ipſarum B, & D; quare A & C ſimul, toties continent unam 15 magnitudinum B & D, quoties A ſola continet unam 15 ipſius B. quod probavi de una 15. Idem probabo de quibuſlibet aliis partibus aliquotis: quare (*per def. 5.*) erit A ad B; ſicut A, & C ſimul, ad B & D ſimul.

PROPOSITIO XIII

Si duæ rationes æquales inter ſe fuerint: quarum una major fuerit aliquâ tertiâ & alia æqualium eâdem tertiâ major erit.

A, B, C, D, E, F,

Sit ratio A ad B, æqualis rationi C ad D, ratio autem C ad D ſit major ratione E ad F, dico rationem magnitudinis A ad B majorem eſſe ratione magnitudinis E ad F.

Demonſtr. Cum enim C ad D majorem rationem habeat quàm E ad F, C pluries continebit aliquam partem aliquotam ipſius D, quam E contineat ſimilem partem magnitudinis F, ſed quia eſt ut C ad D, ita A ad B, A toties continebit ſimilem partem aliquotam magnitudinis B, quoties C continet ſimilem partem ipſius D, (*per def. 5.*) ergo A pluries continebit aliquam partem aliquotam magnitudinis B, quàm E contineat ſimilem partem magnitudinis F? quare (*per def. 5.*) major erit ratio A ad B quam E ad F.

PROPOSITIO XIV.

Si prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem quam tertia ad quartam: & prima major, æqualis, aut minor fuerit tertiâ, ſecunda quoque quartâ major, æqualis, aut minor erit.

6. 3. 4. 2.
A, B, C, D,

Sit A ad B, ſicut C ad D. dico primò, ſi A major ſit quam C. B quoque quàm D major erit.

Demonſtr. Quia A major eſt, quàm C, (*per 9.*) erit major ratio A ad B, quàm C ad eandem B, ſed ut A ad B, ita C ad D. quare (*per 13.*) minor erit ratio C ad B, quàm C ad D; quare (*per 10.*) B quàm D major erit.

Dico ſecundò, ſi A ſit æqualis ipſi C, B fore æqualem ipſi D.

Demonſtr. Cum enim A & C ſint æquales, (*per 8.*) eadem erit ratio A ad B, & C ad B, ſed ut A ad B, ita C ad D, igitur (*per 11.*) ita erit C ad B. & C ad D, quare (*per 9.*) B & D æquales erunt.

Dico tertiò, ſi A minor ſit quam C; B quoque minorem eſſe quàm D.

Demonſtr. Quia enim A minor eſt quàm C, (*per 8.*) erit major ratio C ad B, quàm A ad B, ſed ut A ad B, ita C ad D, igitur major erit ratio C ad B, quàm C ad D, quare (*per 10.*) B minor erit quàm D.

PROPOSITIO XV.

Æquèmultiplices in eâdem ſunt ratione, ac magnitudines quarum ſunt multiplices.

G.2. K.3
F. 2. I. 3
E.2. H.3
6. 2. 3. 9
C A B D

Sint duæ quantitates A & B, quarum C & D ſint æquè multiplices: hoc eſt C toties contineat magnitudinem A, quoties D contineat ipſam B: dico ita eſſe C ad D, ſicut A ad B. Intelligatur C dividi in partes E, F, G, æquales ipſi A, quod fieri poteſt cum ſit illius multiplex, dividatur pariter D in partes H, I, K, ipſi B æquales, tot erunt in D partes magnitudini B æquales, quot ſunt in C, partes magnitudini A æquales, cùm ſint æquè multiplices.

Demonſtr. Erit E ad H, ſicut A ad B, cùm ſint æquales, ita erit F ad I, ſicut A ad B; pariter ita erit G ad K, ut A ad B, igitur (*per 12.*) ita erunt omnes E, F, G, ſeu C, ad omnes H, I, K, ſeu D, ſicut A ad B.

COROLLA

COROLLARIUM.

Totidem partes aliquotæ duorum totorum, in eâdem ſunt ratione, ac tota. Oſtendimus in ſuperiori propoſitione, ita eſſe E ad H, ſicut A ad B, & pariter F ad I, ſicut A ad B, quare (per 11.) *licebit concludere, ita ſunt E, F, ſimul ſeu duo trientes magnitudinis C ad H, I duo trientes magnitudinis D, ſicut A, ad B, ſed oſtendimus etiam ita eſſe C ad D, ſicut A ad B, igitur duo trientes magnitudinis C, ſe habent ad duos trientes magnitudinis D, ſicut tota C ad totam D.*

PROPOSITIO XVI.

Si 4. magnitudines proportionales fuerint, & ejuſdem rationis: etiam alternatim proportionales erunt.

12. 8. 9. 6.
A. B C.D.

Sit A ad B, ut C ad D, ſintque magnitudines ejuſdem rationis, hoc eſt, vel omnes lineæ, vel omnes ſuperficies, vel omnes ſolidæ. Dico ita eſſe A ad C, ſicut B, ad D.

Demonſtr. Si enim hoc ita non eſt, ſit major ratio A ad C, quàm B ad D: quare (*per def. 6.*) A pluries continebit aliquam partem aliquotam magnitudinis C, quàm B contineat ſimilem partem aliquotam; ipſius D. Ponatur A continere quater trientem magnitudinis C; & B ter tantùm continere trientem magnitudinis D. intelligatur A dividi in quatuor quadrantes, ſicut & B. quandoquidem tota A, ſeu quatuor ejus quadrantes, continent quater trientem magnitudinis C. ſinguli quadrantes unum trientem continebunt, ſi enim ſinguli unum non continerent, in duobus triens non eſſet bis, nec in quatuor quater. Quia verò quatuor quadrantes ipſius B, ſeu tota B, non continet quater trientem magnitudinis D; nec ſinguli quadrantes unum quadrantem continebunt, quare tres quadrantes magnitudinis A, tres trientes ipſius C ſaltem continebunt; hoc eſt non erunt minores ipsâ C; tres autem quadrantes magnitudinis B, non continebunt tres trientes ipſius D, ſeu illâ erunt minores, aliunde tamen quia (*per ſuperius coroll.*) tres quadrantes magnitudinis A, ſe habent ad tres quadrantes magnitudinis B, ut tota A ad totam B; & ut tota A ad totam B, ita C ad D; erunt, ut tres quadrantes magnitudinis A ad tres quadrantes magnitudinis B; ita C ad D; quare (*per* 14.) ſi tres quadrantes magnitudinis A non minores ſunt tertiâ C, tres quadrantes magnitudinis B non minores erunt magnitudine D, quod tamen oſtenſum eſt eſſe falſum, non igitur A habet majorem rationem ad C, quàm B ad D, neque B ad D majorem habet rationem, quàm A ad C, propter eandem rationem: igitur æqualem habent.

LEMMA.

Si prima ad ſecundam fuerit ut tertia ad quartam: etiam qualibet pars aliquota prima ad ſecundam erit; ut ſimilis pars aliquota tertia ad quartam.

16. 3. 32. 6.
A. B. C. D.
E. F.
4. 8.

Sit A ad B; ut C ad D. dico quamcumque partem aliquotam E, magnitudinis A verbi gratia quadrantem; ita eſſe ad B, ſicut quadrans F ipſius C, eſt ad D.

Demonſtr. Si enim hoc ita non eſt, ſit major ratio E ad B; quàm F ad D, igitur (*per 6. def.*) E aliquam partem ipſius B pluries continebit quàm F contineat ſimilem partem ipſius D. E contineat quater trientem ipſius B; & F ter tantum contineat trientem ipſius D, ſi fieri poteſt. igitur magnitudo E bis ſumpta octies continebit trientem ipſius B, & F bis ſumpta non contineret octies trientem ipſius D. & E quater ſumpta, ſeu A contineret decies ſexies trientem ipſius B, & F quater ſumpta, ſeu C, non contineret decies ſexies trientem ipſius D, igitur (*per 6. def.*) non eſſet A ad B, ſicut C ad D; contra ſuppoſitionem, ſequitur eodem modo, etiam ita eſſe duos quadrantes ipſius A ad B, ſicut duos ipſius C ad D.

COROLLARIUM.

Quod in Euclide eſt poſt 4 propoſitionem. Converſa ratio, ſi prima ad ſecundam fuerit ut tertia ad quartam: erit ſecunda ad primam ut quarta ad tertiam.

4. 8. 6. 12.
A.B. C. D.
E. F.
1
—
1. 1 2.

Si ſit A, ad B: ſicut C, ad D: dico convertendo ita eſſe B ad A: ſicut D ad C, nam (*per ſuperiorem*) erit A ad C, ſicut B ad D, (*per eandem*) erit ut B ad A, ita D ad C.

Quia tamen hic modus argumentandi ſupponit 4 quantitates eſſe ejuſdem rationis; licet hoc Coroll. ſit univerſale, demonſtrari debet alio modo.

Sit igitur A ad B: ut C ad D. dico ita eſſe B ad A, ut D ad C. Sit enim ſi fieri poteſt major ratio B ad A, quam D ad C, quare (*per def. 6.*) B pluries continebit aliquam partem aliquotam ipſius A, quàm D ipſius C. B contineat octies quadrantem E, ipſius A: & D tantum ſepties contineat quadrantem F ipſius C ſi fieri poteſt, quia A eſt ad B ut C ad D; etiam (*per Lemma ſuperius*) quæcumque pars aliquota ipſius A, ut quadrans E, erit ad B, ut F quadrans ipſius C ad D, & (*per idem Lemma*) ita erit quadrans E octies ſumptus ad B, ut totidem quadrantes F ad D. hoc tamen falſum eſſet niſi eſſet B ad A ſicut D ad C. nam 8 quadrantes E non ſuperarent ipſam B. cum quadrans E octies contineatur in B, & 8 quadrantes F lineæ C, ſuperarent lineam D, cum in D quadrans F ſepties tantùm contineatur: igitur B ad A, non habet majorem rationem, quàm D ad C.

PROPOSITIO XVII.

Diviſio rationis.

Si compoſitæ magnitudines proportionales fuerint; & diviſæ proportionales erunt.

B 3. 6. D
A 5. 10. C

Sit A B ad B: ſicut C D ad D; dico ita eſſe dividendo A, ad B ſicut C ad D.

Demonſtr. Quia eſt AB ad B: ſicut CD ad D: A B (*per def.5.*) toties continebit quaſcumque partes aliquotas magnitudinis B, quoties C D, continet ſimiles partes ipſius D. ponamus in A B eſſe 8. trientes magnitudinis B, totidem in C D erunt trientes magnitudinis D. auferendo ipſam B auferuntur tres ipſius trientes & totidem trientes magnitudinis D, dum aufertur ipſa D. igitur reſtabunt quinque trientes in A, ipſius B; & in C ipſius D. & quod dixi de trientibus de aliis quibuſcumque partibus aliquotis oſtendi poteſt, igitur (*per def. 5.*) ita eſt A ad B, ſicut C ad D.

PROPOSITIO XVIII.

Compoſitio rationis.

Si diviſæ magnitudines proportionales fuerint; & compoſitæ proportionales erunt.

B 3. 6. D
A. 5. 10. C

Sit A, ad B: ut C, ad D: dico componendo ita eſſe A B, ad B: ut CD, ad D.

Demonſt. Quia eſt A ad B ut C ad D toties A continet quaſcumque partes aliquotas ipſius B: quoties C continet ſimiles ipſius D. B autem toties continet eaſdem partes aliquotas ſuas; quoties D ſuas ſimiles continet: quare ſi utrinque addantur partibus in A & C contentis: tot erunt partes aliquotæ magnitudinis B, in A B: quot ſunt ſimiles partes magnitudinis D, in CD: quare (*per def.5.*) erit AB ad B: ut CD ad C.

COROLLARIUM.

Converſio rationis.

Ex his demonſtrari poteſt converſio rationis.

B 3. 6. D
A 5. 10. C

Sit ut A B ad B, ita C D ad D. dico ita eſſe A B ad A ſicut C D ad C.

Demonſtratio. Quia eſt A B ad B, ut C D ad D, erit dividendo (per 17.) *ut A ad B: ita C, ad D & convertendo* (per cor.16.) *ut B ad A, ita D ad C. & componendo* (per 18.) *ut A B ad A; ita C D, ad C.*

PROPOSITIO XIX.

Si fuerit ut tota ad totam: ita ablata ad ablatam, & reliqua ad reliquam erit, ut tota ad totam.

B 4. 2. D
A. 12. 6. C

Sit ut A B ad CD, ita B ad D. dico ita eſſe reliquam A ad C, ut A B ad C D.

Demonſtr. Quia eſt ut AB ad CD, ita B ad D: erit permutando (*per 16.*) ut AB ad B, ita C D, ad D, & (*per cor.18.*) per converſionem rationis ut AB ad A, ita CD ad C, & rurſus permutando ut AB, ad CD, ita A ad C.

PROPOS. XX. & XXI.

In hoc modo argumentandi non ſunt neceſſariæ, continenturque in 22. & 23.

PROPOSITIO XXII.

Ordinata ratio.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ totidem, quæ bina & bina in eâdem ordinatâ ratione ſumantur, ex æquo extrema in eadem ratione erunt.

12. 6. 2. 6. 3. 1.
A, B, C, D, E, F

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ totidem D, E, F, binæ in eâdem ratione ordinatâ, hoc eſt ſit A ad B: ut D ad E, & B ad C, ut E, ad F; dico eſſe extremas in eadem ratione, hoc eſt ut A ad C ita D ad F.

Demonſtr. Si hoc non ita ſit: ponatur eſſe major ratio A ad C, quam D ad F; igitur (*per def.6.* A continebit pluries aliquam partem aliquotam ipſius C, quam D ipſius F: ſit hæc pars dimidia ita ut A contineat 12 partes dimidias ipſius C, & D tantum 11 partes dimidias ipſius F ſi fieri poteſt, & quia eſt ut B ad C, ita E ad F, B tot continebit partes dimidias magnitudinis C, quot E continet dimidias magnitudinis F, ſint utrobique 6. quare A continens 12 dimidias ipſius C majorem habebit rationem ad B, continentem 6. dimidias ejuſdem C, quam D continens tantùm 11. dimidias magnitudinis F: ad E continentem 6. dimidias ejuſdem F: quod eſt contra ſuppoſitionem; igitur eſt A ad C: ut D ad F.

PROPOSITIO XXIII.

Perturbata ratio.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ totidem in eâdem ratione perturbatâ; etiam extremæ in eâdem ratione erunt.

A B C; D.E.F.G
12.6.3. 8.4.4.1.

Sint tres magnitudines A, B, C: & aliæ totidem D, E, F, in eâdem ratione perturbatâ: hoc eſt ſit A ad B: ut E ad F, & B ad C, ut D ad E. dico ita eſſe A ad C, ut D ad F.

Demonſtr. Addatur quantitas G, ita ut ſit ut B ad C; ita F ad G. quia igitur eſt ut A ad B, ita E ad F: & ut B ad C: ita F ad G; erit (*per 22.*) ut A ad C, ita E ad G. Rurſus quia eſt ut B ad C, ita D ad E, & F ad G, eadem erit ratio (*per 11.*) D ad E, quæ F ad G, & permutando (*per 16.*) ut D ad F: ita E ad G, ſed ut E ad G, oſtendimus ita eſſe A ad C, igitur ut A ad C ita erit D ad F.

PROPO

PROPOSITIO XXIV.

Si prima ad ſecundam habeat eandem rationem, ac tertia ad quartam : ſit autem quinta ad ſecundam ut 6 ad quartam : erit prima cum quinta ad ſecundam ut tertia cum ſexta ad quartam.

E F
4. 6.
6. 2. 9. 3.
A.B.C.D

Sit A ad B, ut C, ad D, & E, ad B ut F, ad D : dico totam AE ad B, ita eſſe ; ut totam CF ad D.

Demonſtr. Quia eſt E ad B, ut F ad D : erit convertendo ut B ad E, ita D ad F, quia igitur eſt ut A ad B, ita C ad D, ut B, ad E, ita D, ad F, erit [*per* 22.] ut A, ad E : ita C, ad F, & componendo [*per* 18.] ut AE, ad E, ita CF ad F : quare cum ſit ut AE ad E ita CF ad F : & ut E ad B, ita F ad D : erit ex æquo (*per* 22.) ut AE, ad B : ita CF ad D.

PROPOSITIO XXV.

Si 4 magnitudines proportionales fuerint, maxima & minima reliquis duabus majores erunt.

B D.
8. 6.
4. 3. 4. 3.
A. C. E. F

Sint magnitudines AB, CD, E & F proportionales : ſitque AB maxima ; F minima. dico duas AB, & F reliquis duabus majores eſſe.

Demon. Quia eſt AB ad CD, ut E ad F, & AB eſt major quam E, CD etiam major erit quam F (*per* 14) quare ex CD abſcindatur C, æqualis ipſi F, & ex AB, abſcindatur A ; æqualis ipſi E ; erit igitur ut AB, ad C D ; ita A ad C & (*per* 19.) ita erit reliqua B, ad D ; ut tota AB ad CD ; ſed AB major ſupponitur quam CD, igitur B major erit quam D. quia autem A & E ſunt æquales, ſi illis addantur F, & C item æquales, erunt A, & F ſimul ; æquales ipſis E & C ſimul ſumptis. quare ſi primis addatur B, major, & poſterioribus D minor, erunt AB & F majores ipſis CD & E : quod erat oſtendendum.

Reliquæ 9 propoſitiones hujus libri, non ſunt Euclidis, quia tamen à pleriſque authoribus citantur quaſi eſſent Euclidis: ideo illas non prætermiſimus.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Si prima ad ſecundam majorem rationem habeat ; quam tertia ad quartam : habebit convertendo quarta ad tertiam majorem rationem : quam ſecunda ad primam.

9. 4. 6. 3.
A,B,C.D.
E
8.

Sit major ratio A ad B, quam C, ad D. dico convertendo majorem D, ad C eſſe rationem ; quam B ad A. ponatur enim eſſe E ad B, ſicut C ad D.

Demonſtr. Quia A ad B habet majorem rationem quàm C ad D, ut autem C ad D: ita E ad B : major quoque erit ratio A ad B, quàm E ad B, & (*per* 10.) A major eſt quam E. Quia autem eſt E, ad B, ſicut C ad D : convertendo (*per cor.* 10.) erit B ad E, ſicut D, ad C, ſed B habet minorem rationem ad majorem A, quam ad minorem E (*per* 8.) igitur major eſt ratio D ad C, quam B ad A.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Si prima ad ſecundam majorem rationem habeat quam tertia ad quartam permutando, prima ad tertiam majorem rationem habebit, quàm ſecunda ad quartam.

9. 4. 6. 3.
A, B, C, D
E.
8.

Habeat A ad B, majorem rationem quam C ad D : dico permutando majorem rationem eſſe A ad C, quam B ad D ; ſit enim ut C ad D, ita E ad B.

Demon. Erit rurſus major ratio A ad B : quàm E ad B, & [*per* 10.] A major erit quam E : cum igitur A ſit major quam E ; erit major ratio A ad C quam E ad C. & quia eſt E ad B ut C ad D, erit permutando ut E ad C ita B ad D [*per* 16.] igitur erit major ratio A ad C quam B ad D.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Si prima ad ſecundam majorem rationem habeat quam tertia ad quartam : prima quoque cum ſecunda ad ſecundam majorem rationem habebit, quàm tertia cum quarta ad quartam.

9. 4. 6. 3.
A, B, C, D
E.
8.

Sit major ratio A ad B, quàm C ad D : dico majorem eſſe rationem AB ad B, quàm CD ad D, ſit enim ut C ad D, ita E ad B.

Demonſtr. Quia eſt major ratio A ad B ; quàm E ad B : E minor, erit quàm A (*per* 10.) & additâ communi B, AB major erit quàm EB. quia autem eſt ut E, ad B, ita C ad D erit componendo (*per* 18.) ut EB ad B, ita CD, ad D, & quia AB major eſt, quàm EB : erit (*per* 7.) major ratio AB, ad B : quàm EB, ad B : igitur major eſt ratio AB ad B, quàm CD. ad D.

PROPOSITIO XXIX.

Si prima cum ſecunda ad ſecundam majorem rationem habeat quam tertia cum quarta ad quartam : etiam dividendo prima ad ſecundam majorem rationem habebit ; quam tertia ad quartam.

9. 4. 6. 3.
A. B. C. D.
E.
8.

Habeat AB majorem rationem ad B, quàm CD ad D : dico A ad B, majorem rationem habere quam C ad D. ſit enim ut CD, ad D, ita EB ad B.

Demonſtr. Major erit ratio AB ad B, quàm EB ad B : & (*per* 10.) AB major erit, quam EB, & auferendo communem B, A major erit, quàm E, quia autem eſt ut EB ad B, ita CD ad D, erit dividendo (*per* 17.) ut C ad D ; ita E ad B. ſed quia A major eſt quàm E, erit (*per* 8.) major ratio A ad B : quàm E ad B : ergo major erit ratio A ad B : quàm C ad D.

V iij PROPO

PROPOSITIO XXX.

Si prima cum ſecunda ad ſecundam, majorem rationem habeat quàm tertia cum quarta ad quartam: habebit per converſionem rationis prima cum ſecundâ ad primam; minorem rationem, quam tertia cum quartâ ad tertiam.

9. 4. 6. 3.
A. B. C. D.

Sit major ratio A B ad B, quàm CD ad D. dico minorem eſſe rationem AB ad A, quàm CD ad C.

Demonſtr. Quia eſt major ratio AB ad B, quàm CD ad D, erit (*per* 29.) major ratio A ad B quàm C ad D, ergo convertendo (*per* 26.) major erit ratio D ad C, quàm B ad A: & (*per* 28.) componendo major erit ratio C D ad C quàm AB ad A.

PROPOSITIO XXXI.

Si ſint tres magnitudines quæ in majori ſint ratione quàm aliæ tres: prima priorum majorem rationem habebit ad tertiam, quam prima poſteriorum ad ſuam tertiam.

16. 10. 3. | 9. 6. 2.
A. B. C. | D. E. F.

Sit major ratio A ad B, quàm D ad E: item ſit major ratio B ad C, quàm E ad F, dico majorem eſſe rationem A ad C, quam D ad F.

Demonſtr. Quia eſt major ratio A ad B, quàm D ad E erit permutando (*per* 27.) major ratio A ad D, quàm B ad E: & quia eſt major ratio B ad C, quàm E ad F, major quoque ratio erit B ad E quàm C ad F: ergo multo major eſt ratio A ad D quàm C ad F, igitur permutando (*per* 27.) erit, major ratio A ad C, quam D ad F.

PROPOSITIO XXXII.

Si ſint tres magnitudines in majori ratione, quam aliæ tres in perturbatâ ratione illis reſpondentes: erit ex æquo major ratio prima priorum ad tertiam: quàm prima poſteriorum ad ſuam tertiam.

B F
12. 5.
13. 6. 2. 4. 2. 1.
A, C, E : H, I, K,

Sit major ratio A ad C, quàm I ad K, item ſit major ratio C ad E quàm H ad I. dico majorem eſſe rationem A ad E: quàm H ad K.

Demonſtr. Sit enim B quæ eandem rationem habeat ad C, quàm habet I ad K, & quia A ad C habet majorem rationem quam I ad K, A ad C majorem rationem habebit quam B ad I: quare (*per* 10.) A major erit quam B, ſit etiam ut H ad I, ita C ad F, & quia C ad E habet majorem rationem quam H ad I, major erit ratio C ad E, quàm C ad F; unde (*per* 10.) F major erit, quàm E: quia autem eſt ut B ad C, ita I ad K & ut C ad F ita H ad I, erit (*per* 23.) ut B ad F, ita H ad K; ſed A major quàm B, majorem habet rationem ad F; quàm B (*per* 8.) igitur eſt major ratio, A ad F quàm H ad K, & quia E minor eſt quàm F; (*per* 8.) multo major erit ratio A ad E, quàm A ad F; igitur major eſt ratio A ad E, quàm H ad K.

PROPOSITIO XXXIII.

Si ſit major ratio totius ad totum quàm ablati ad ablatum, erit reliqui ad reliquum major ratio quàm totius ad totum.

13. 4. 6. 2
A. B. C.D

Sit major ratio totius A B ad totam C D, quàm ablatæ B ad ablatam D. dico majorem eſſe rationem reliquæ A ad reliquam C; quàm totius A B ad totam C D.

Demonſtr. Quia major eſt ratio A B ad C D quàm B ad D erit convertendo (*per* 26.) major ratio A B ad B quàm C D ad D, & (*per* 30.) per converſionem rationis minor erit ratio A B ad A, quàm C D ad C, & rurſus convertendo (*per* 26.) minor erit ratio AB ad CD, quàm A ad C.

PROPOSITIO XXXIV.

Si ſint quotcumque magnitudines, & alia totidem; ſitque major ratio prima priorum ad primam poſteriorum, quàm ſecunda priorum ad ſecundam poſteriorum & hæc major quàm ratio tertia priorum ad tertiam poſteriorum, & ita deinceps: major erit ratio omnium ſimul priorum, ad omnes ſimul poſteriores, quam omnium priorum relictâ primâ, ad omnes ſimul poſteriores relictâ primâ, minor tamen quam ſit ratio prima priorum ad primam poſteriorum, major denique quam ſit ratio ultima priorum ad ultimam poſteriorum.

12. 8. 4. 4. 2. 2.
A. B. C. E. F. G

Sit major ratio A ad E, quàm B ad F, & hæc major quàm C ad G, & ita conſequenter ſi eſſent plures. dico primò, rationem omnium antecedentium A, B, C ad omnes conſequentes E, F, G, majorem eſſe ratione ultimæ antecedentium ad ultimam conſequentium ſcilicet C ad G.

Demonſtratio. Cum ſit major ratio A ad E quàm B ad F, erit permutando (*per* 26.) major ratio A ad B, quàm E ad F; & (*per* 28.) componendo eſt major ratio A B ad B, quàm E F ad F, & permutando (*per* 26.) major erit ratio AB ad EF; quàm B ad E, ſed ratio C ad G, eſt adhuc minor ratione B ad F: igitur ratio A B ad E F major eſt ratione C ad G, & componendo (*per* 28.) major eſt ratio A B C ad E F G, quàm C ad G. quod eſt primum.

Dico ſecundò, rationem omnium priorum ad omnes poſteriores, ſcilicet ABC ad EFG, majorem eſſe, ratione omnium priorum relictâ primâ, ad omnes poſteriores relictâ primâ, ſcilicet ratione B C ad F G.

12. 8. 4. 4. 3. 2.
A. B. C.E.F.G.

Demonſtr. Quia eſt major ratio A ad E, quàm B ad F: erit permutando major ratio A ad B, quàm E ad F: & componendo, major ratio AB ad F: quàm EF ad F: & permutando major ratio AB ad EF, quàm B ad F: quia igitur major eſt ratio totius A B ad totam E F quàm ablatæ B ad ablatam F: major erit ratio reliquæ A, ad reliquam E, quàm totius A B ad totam E F, & per eandem rationem; major erit ratio B ad F, quàm B C, ad F G: multo ergo major eſt ratio A ad E: quàm B C ad F G: & permutando

major

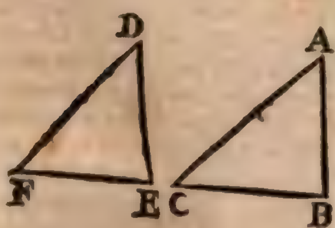
major eſt ratio A ad B C ; quàm E ad F G : & componendo major erit ratio A B C ad E F G, quàm BC ad F G : quod eſt ſecundo loco propoſitum.

Dico tertiò, majorem eſſe rationem A ad E : primæ ſcilicet priorum, ad primam poſteriorum, quàm omnium priorum ad omnes poſteriores, id eſt quam ratio A B C ad E F G.

Demonſtr. Quia major eſt ratio ut oſtendimus totius ABC ad totam E F G, quàm ablatæ BC ad ablatam FG, erit (*per 33.*) major ratio reliquæ A ad reliquam E, quàm totius ABC ad totam EFG: quod erat demonſtrandum.

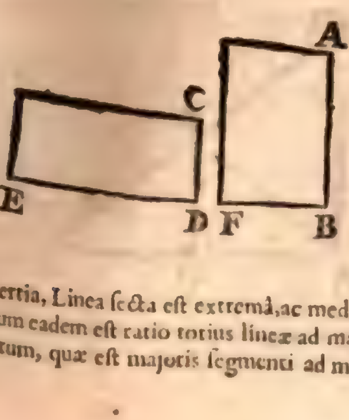
EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEXTUS.

Definitiones.

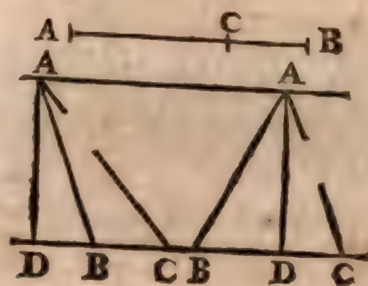


Prima, Similes figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos ſingulos ſingulis æquales habent : & latera circa æquales angulos proportionalia. *Vt triangula ABC, DEF erunt ſimilia ſi angulus A fuerit angulo D æqualis, & angulus B angulo E, & conſequenter angulus C angulo E. Sitque ut AB ad BC: ita DE ad EF, & ut EF ad FD: ita BC ad CA.*

Secunda, Reciprocæ figuræ ſunt illæ quæ ita ſe habent ut in utrâque & antecedentes termini rationum fuerint & conſequentes. *Hoc eſt tunc figuræ ſunt reciprocæ cum in una figura eſt antecedens proportionis cujus conſequens eſt in alia : & viciſſim in ſecundâ eſt antecedens alterius proportionis cujus conſequens eſt in prima : vel dum comparatio deſinit in figurâ, in quâ inceperat. ut in duobus parallelogrammis, ſi eſſet ut AB ad CD : ita DE ad BF, ea eſſent reciproca.*



Tertia, Linea ſecta eſt extremâ, ac mediâ ratione, cum eadem eſt ratio totius lineæ ad majus ſegmentum, quæ eſt majoris ſegmenti ad minus. *Vt ſi linea A B ita ſecetur in C, ut ſit eadem ratio AB ad AC, quæ eſt AC ad CB.*



Quarta, Altitudo figuræ eſt linea perpendicularis à vertice figuræ ad baſin ducta. *Vt in triangulis ABC linea A D, ſive cadat intra figuram ſive extra; triangula autem, & parallelogramma eandem habentia altitudinem, inter eaſdem parallelas collocari poſſunt, ut baſes BC collocētur in eadem linea, ſi altitudines ſeu perpendiculares A D, A D ſint æquales, cum propter duos angulos rectos in punctis D, D ſint parallelæ, lineæ B C, A A illas conjungentes* (per 33. 1.) *parallelæ erunt; pariter triangula ABD, ABC, quorū baſes BD, BC ſunt in eadem linea BC, & habent eundem verticem ſunt inter eaſdem parallelas & habent eandem altitudinem AD.*

Quinta, Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter ſe multiplicatæ aliquam rationem effecerint.

Sciendum eſt quamcumque rationem, ſeu proportionem unius quantitatis, ad aliam habere ſuum nomen, quod nomen ſumitur ab aliquo numero ſignificante quomodo ſe habeat antecedens ad conſequens, nam ita ſe habet ut numerus à quo ſumitur denominatio ſe habet, ad unitatem, quod intelligendum eſt de proportionibus rationalibus, nam in irrationalibus major eſt difficultas, ita ſi proponantur duæ magnitudines, una duodecim pedum, alia 6 pedum, dicimus rationem primæ ad ſecundam, eſſe duplam, ita ut à binario ſumatur nomen indicans, quod prima ſit ad ſecundam, ut binarius ad unitatem quod ſi proponeretur pro prima 4. & pro ſecunda 12. diceremus eſſe proportionem ſubtriplam, ita ut triens

eſſet

eſſet denominator rationis 4 ad 12. indicans 4 ad 12 ita ſe habere ut triens ad unitatem, quando autem ſunt plurima continuo quantitates, verbi gratia tres 12. 6. 2. denominator rationis 12 ad 6 quæ eſt dupla, eſt binarius: denominator rationis 6 ad 2 quæ eſt tripla, eſt ternarius, ſi velis habere denominatorem rationis 12 ad 2. multiplica denominatores rationum 12 ad 6, & 6 ad 2, id eſt binarium per ternarium, & fient 6. ratio igitur 12 ad 2. eſt ſextupla, quæ componi dicitur ex rationibus 12 ad 6, & 6 ad 2, id eſt ex dupla, & tripla, quia ejus denominator fit ex multiplicatione denominatorum, ſcilicet binarij & ternarij. eſt enim proportio ſextupla, bis tripla. quando igitur dicimus rationem componi ex aliis rationibus, nihil intelligimus aliud, quàm denominatorem illius, fieri per multiplicationem denominatorum aliarum rationum.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Triangula & parallelogramma quorum eadem fuerit altitudo ſe habent ut baſes.



Sint duo triangula ABC, DEF quorum altitudo ſit eadem. Dico primò eandem eſſe rationem trianguli ABC ad triangulum D E F, quæ eſt baſis BC ad baſim E F.

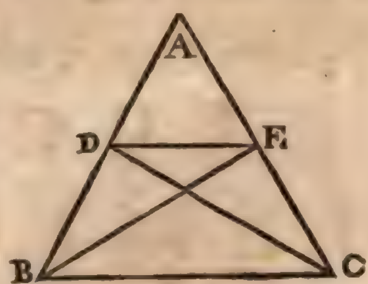
Demonſtr. Intelligatur baſis E F diviſa in quotcumque partes æquales, verbi gratia in 4; & ex puncto D ducantur lineæ D G, D H, D I, & linea BC quadrantem lineæ EF contineat ter. ſintque lineæ C M, M L, L K, quæ ſint ſingulæ æquales lineis EG, GH, HI, I F. ducanturque lineæ A K, A L, AM, triangula D E G, D G H, DHI, DIF. ſingula ſunt æqualia (*per* 38. 1.) quia ſunt ſupra baſes æquales, & in eiſdem parallelis: igitur ſunt quadrantes trianguli D E F: & quia triangula ABC, D E F habent altitudines æquales (*per def.*4.) etiam in iiſdem parallelis erunt, & triangula A K L, A L M, A M C, habentia baſes æquales cum triangulis EDG, EGH, DHI, DIF. illis æqualia erunt: ergo quot erunt quadrantes lineæ E F, in linea B C, tot erunt quadrantes trianguli DEF, in triangulo ABC, & quod oſtendi de quadrantibus, poteſt etiam oſtendi de quibuſlibet partibus aliquotis: igitur (*per def.*5. 5) ut baſis BC ad baſin EF, ita triangulum ABC ad triangulum DEF.

Quia verò parallelogramma ABCN, DEFO ſunt dupla triangulorum ABC, DEF, (*per* 41. 1.) ſe habebunt ut triangula, (*per* 5. 5.) ſed triangula ſunt ut baſes; igitur parallelogramma A B C N, D E F O inter eaſdem parallelas, ſeu eandem habentia altitudinem ſe habent ut baſes.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si in triangulo ducatur linea uni lateri parallela, hæc ſecabit latera proportionaliter; quod ſi linea duo trianguli latera ſecet proportionaliter, hæc erit alteri lateri parallela.



Sit in triangulo ABC, ducta linea D E, lateri BC parallela. dico latera AB, AC ſecta eſſe in D & E proportionaliter: hoc eſt ita eſſe AD ad DB, ut A E ad EC. Ducantur lineæ BE, DC.

Demonſtr. Triangula DBE, DEC eandem baſin DE habentia, & inter eaſdem parallelas D E, BC, (*per* 38. 1.) æqualia ſunt. igitur (*per* 7. 5.) ita erit triangulum ADE ad DBE, ſicut ad DEC, ſed ut triangulum ADE ad DBE, ita baſis AD ad baſin DB (*per* 1. [*cum eumdem habeant verticem, & conſequenter una eademque eſſet utrique altitudo quam oſtenderet perpendicularis quæ poſſet duci ex puncto E ad lineam A B*] & ut triangulum ADE, ad triangulum DEC, ita baſis A E ad baſin EC. igitur ut linea AD ad lineam D B, ita linea AE, ad lineam EC.

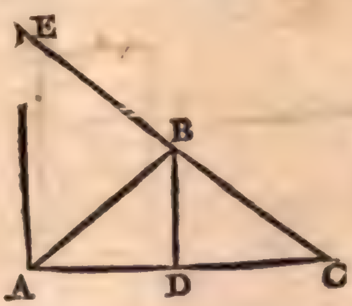
Secundò, ſi ſit ut AD ad DB, ita AE ad EC, dico lineam DF eſſe parallelam lineæ BC.

Demonſtr. Eſt enim ſicut priùs ut AE ad EC, ità triangulum ADE ad triangulum DEC, & ut AD ad DB, ita idem ADE ad DBE: igitur idem triangulum ADE eandem habet rationem ad DBE & DCE, quare (*per* 9.5.) triangula DBE DEC ſunt æqualia, quæ cùm eandem baſin DE habeant (*per* 39.3.) erunt inter eaſdem parallelas DE, BC.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si linea angulum trianguli biſariam dividens, baſin ſecet, eam in ſegmenta reliquis lateribus proportionalia dividet. Si verò linea angulum dividens ſecuerit baſin in ſegmenta reliquis lateribus proportionalia; eum biſariam dividet.



Trianguli angulus A B C, dividatur biſariam linea B D. dico eſſe ut A B ad BC, ita AD ad D C

DC. producatur linea BC; ita ut BE ſit æqualis lineæ AB. ducaturque linea AE.

Demonſtr. Angulus ABC externus reſpectu trianguli AEB eſt æqualis angulis AEB, BAE; (*per* 32. 1.) qui cum ſint æquales (*per* 5. 1.) quilibet eorum erit media pars anguli ABC, ſed etiam anguli ABD, DBC ſunt ejuſdem anguli ABC media pars cum ſit diviſus bifariam: ergo angulus ABD eſt æqualis angulo BAE, qui cum ſint alterni; lineæ AE, BD erunt parallelæ (*per* 29. 1.) & (*per* 2. 6.) erit ut EB aut AB illi æqualis ad BC, ita AD ad DC. quod erat demonſtrandum.

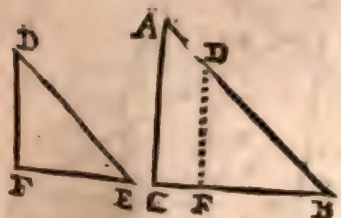
Secundò, linea BD dividat baſin AC, in ſegmenta AD, DC proportionalia lateribus AB, BC, hoc eſt ſit ut AD ad DC. ita AB ad BC. dico angulum ABC diviſum eſſe bifariam, factâ eâdem conſtructione; quia lineæ AB, EB ſunt æquales, erit ut EB ad BC, ita AD ad DC, igitur (*per* 2. 6.) lineæ AE, DB ſunt parallelæ, & conſequenter (*per* 30. 1. anguli EAB, ABD æquales erunt. Eſt autem totus ABC, (*per* 32. 1.) æqualis duobus angulis internis BAE, BEA, qui æquales ſunt (*per* 5. 1.) ergo reliquus DBC eſt æqualis angulo E. ſunt igitur anguli ABD, DBC æquales, ergo diviſus eſt angulus ABC bifariam.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Triangula æquiangula habent latera circa æquales angulos proportionalia; & oppoſita æqualibus angulis homologa.

Sint duo triangula ABC, DFE æquiangula, id eſt angulus, B ſit æqualis angulo E, & angulus A angulo D, angulus C, angulo F. Intelligatur angulus E ſuperponi angulo B æquali, congruent.



Demonſtr. In illa ſuperpoſitione quia angulus F externus ſupponitur æqualis angulo C oppoſito; erunt (*per* 29. 1.) lineæ AC, DF, parallelæ, ergo erit ut BD ad DA; ita BF, ad FC, & componendo per converſionem rationis (*per corol.*18. 5.) erit ut BA, ad BD, ita BC, ad BF, & permutando (*per* 16. 5.) erit ut AB ad BC; ita DB ad FB. eodem modo, applicando angulum F ſupra C ſibi æqualem oſtenderem ita eſſe AC ad CB ſicut DF ad FE. vides autem latus AB, quod eſt antecedens in ratione AB ad BC, opponi angulo C. & latus DE, quod eſt antecedens in ratione DE, ad EF opponi angulo F æquali angulo C. quod eſt eſſe homologa.

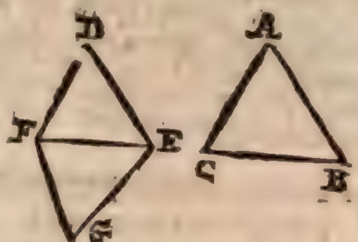
COROLLARIUM.

Ex hoc patet quod ſi ducatur in triangulo ut in ABC linea DF. parallela lateri AC; ſiunt duo triangula ABC, DEF æquiangula, & ſimiliæ.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si triangula habeant latera proportionalia, erunt æquiangula; & anguli oppoſiti lateribus homologis, erunt æquales.



Sit in triangulis ABC; DEF, ut AB ad BC ita DE ad EF, ut BC, ad AC; ita EF ad DF. dico angulos A & D, B & E, C & F eſſe æquales, fiat angulus FEG æqualis angulo B, & angulus EFG æqualis angulo C; reliquus G reliquo A æqualis erit; quia omnis trianguli tres anguli æquivalent duobus rectis (*per* 32.1.) & ita triangula ABC, EFG, ſunt æquiangula.

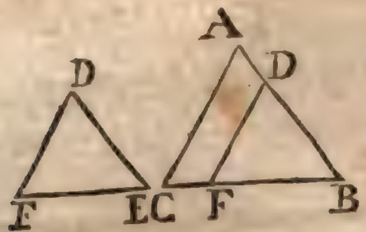
Demonſtratio. Quia triangula ABC, EFG, ſunt æquiangula, erit (*per* 4.) ut EF ad EG, ita BC, ad AB, ſed ut BC ad AB, ita ſupponitur EF ad ED, igitur ita eſt EF ad ED ut EF ad EG; igitur (*per* 7. 5.) ED & EG ſunt æquales. ita FG & FD erunt æquales. quia autem triangula DEF, EFG habent omnia latera æqualia (*per* 8. 1.) ſibi invicem congruent, & ſingulos angulos habebunt æquales ita angulus D angulo G erit æqualis, ſed angulus G erat æqualis angulo A, igitur anguli A & D erunt æquales; ita reliqui anguli B & E, C & F æquales erunt.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si duo triangula unum angulum æqualem habeant, circa quem latera ſint proportionalia: æquiangula erunt triangula.

Digitized by Google



Triangula ABC, DEF habeant angulos B, & E æquales, ſitque ut AB ad BC; ita D B ad EF. dico triangula ABC, DEF eſſe æquiangula. intelligatur enim angulus E ſuperponi angulo B; quia æquales ſunt, congruent.

Demonſtr. Quia ita eſt AB ad BC, ut DE ad EF, erit permutando (*per* 17. 5.) ut AB ad DE ita BC ad EF, & dividendo (*per* 18. 5. ut AD ad DE; ita CF ad FE, igitur (*per* 2.) DF, AC, ſunt parallelæ, & anguli F & C, D & A oppoſiti ad eaſdem partes (*per* 29. 1.) æquales erunt, igitur æquiangula ſunt triangula ABC, DEF.

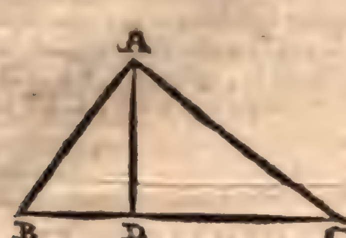
PROPOSITIO VII.

Relinquatur.

PROPOSITIO VIII.

In triangulo rectangulo perpendicularis ducta ab angulo recto, ad latus oppoſitum dividit triangulum in duo triangula, toti triangulo ſimilia.

Sit triangulum ABC, cujus angulus A ſit rectus à quo ad latus B C oppoſitum ducatur perpendicularis A D. dico facta eſſe duo triangula ABD, ADC ſimilia toti triangulo ABC, ad quod, ſufficit eſſe æquiangula, quia (*per* 4.) habebunt latera proportionalia, ſi ſint æquiangula.



Demonſt. Cum triangula ABC, ABD habeant angulos BAC, BDA rectos æquales, & angulum B communem reliqui BAD & C æquales erunt (*per* 32. 1.) & erunt æquiangula, eodem modo triangula ABD ADC, toti ABC æquiangula, inter ſe æquiangula erunt.

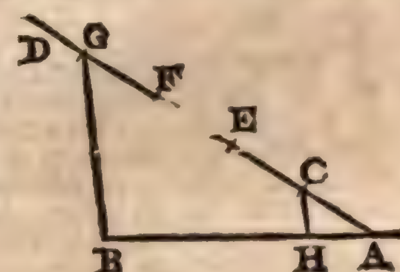
COROLLARIUM.

Ex eo ſequitur lineam AD eſſe mediam proportionalem inter lineas BD, DC, nam quia triangula ADB, ADC ſunt æquiangula, erit ut BD latus oppoſitum angulo BAD, ad A D latus oppoſitum angulo B, ita AD quod opponitur angulo C æquali ipſi BAD, ad DC latus oppoſitum angulo DAC æquali angulo B.

PROPOSITIO IX.

Problema.

A datâ rectâ imperatam partem auferre.



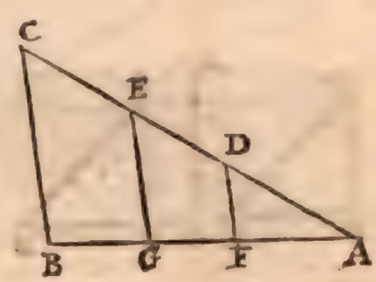
Ex linea AB ſit auferenda 4 pars, ducatur linea AD infinita componens angulum A, in qua abſcindantur 4 lineæ æquales AC, CE, EF, FG; ducaturque linea BG, & illi parallela CH, dico lineam AH eſſe quartam partem lineæ AB.

Demonſtr. Quia linea C H eſt parallela lateri GB, erit (*per* 4.) ut AC ad CG, ita AH ad HB, & componendo (*per* 18.) ut AG, ad A C; ita AB ad AH ſed AG continet quater lineam AC, igitur AH eſt quarta pars lineæ AB.

PROPOSITIO X.

Problema.

Datam lineam ita ſecare, ut alia recta ſecta fuerit.



Sit linea AB ita ſecanda ut recta AC ſecta fuerit, ducatur recta BC, & illi parallelæ EG, DF: dico factum eſſe quod requiritur.

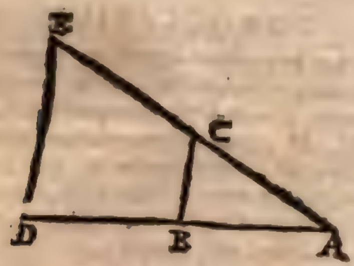
Demonſtr. Cum enim lateri EG ducta ſit parallela DF, ita erit (*per* 4.) AD ad DE, ut AF ad FG, hoc primum: & componendo ut DE, ad FG, ita AE, ad AG, & quia lateri BC ducta eſt parallela EG, erit etiam ut AE ad EC, ita FG, ad GB, ergo ex æquo (*per* 22. 5.) erit ut DE, ad EC ita FG ad GB.

PROPO

PROPOSITIO XI.

Problema.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.



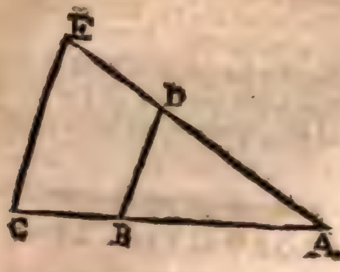
Sint datæ duæ rectæ AB, AC, quibus invenienda eſt tertia proportionalis, ita diſponantur ut angulum efficiant: abſcindatur linea BD, æqualis ipſi AC, ductæque lineæ BC fiat parallela DE, ſecans AC productam in puncto E. dico CE eſſe tertiam proportionalem.

Demonſtratio. Cum enim linea CB, ſit parallela lateri DE, erit (*per* 4.) ut AB ad BD, ita AC ad CE, & cum BD, & AC ſint æquales; ita erit AB ad AC, ſicut AC ad CE. quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Tribus datis lineis quartam proportionalem invenire.



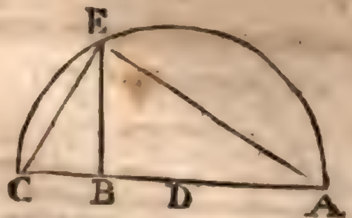
Sint tres lineæ AB, BC, AD. quarum AD angulum faciat. Iis quærenda ſit quarta proportionalis, ducatur linea DB, & illi parallela CE, occurrens lineæ AD productæ in E. dico DE eſſe quartam proportionalem.

Demonſtr. Cum enim lateri EC, lineæ DB ſit parallela: erit ut AB ad BC, ita AD ad DE, ergo DE eſt quarta proportionalis.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Duabus lineis mediam proportionalem invenire.



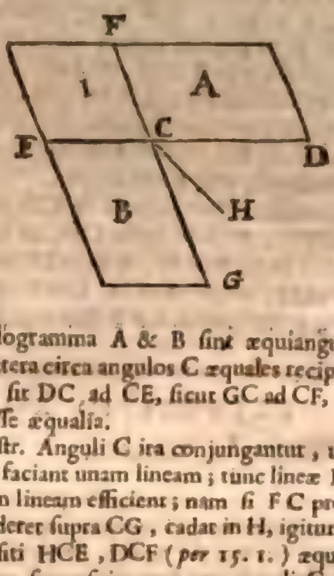
Sint datæ AB, BC, quibus quærenda eſt media proportionalis, tota AC ſecetur bifariam in D, & ex D ut centro fiat ſemicirculus intervallo DA, ducaturque BE perpendicularis. Dico ita eſſe AB ad BE, ut BE ad BC. ducantur lineæ AE, CE.

Demonſtr. Angulus AEC in ſemicirculo (*per* 31. 3.) rectus eſt & (*per corell.* 8.) perpendicularis BE media eſt proportionalis inter AB, BC, quod faciendum erat.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Parallelogramma æqualia, & æquiangula habent latera circa angulos æquales, reciproca: & parallelogramma quorum circa æquales angulos latera reciprocantur, ſunt æqualia.



Parallelogramma A & B ſint æquiangula & habeant latera circa angulos C æquales reciproca, hoc eſt ita ſit DC ad CE, ſicut GC ad CF, dico, A & B eſſe æqualia.

Demonſtr. Anguli C ita conjungantur, ut lineæ DCE faciant unam lineam; tunc lineæ FCG etiam unam lineam efficient; nam ſi FC producta non caderet ſupra CG, cadat in H, igitur anguli oppoſiti HCE, DCF (*per* 15. 1.) æquales eſſent contra ſuppoſitionem; cum anguli C & B ſupponantur æquales, perficiatur igitur parallelogrammum.

Demonſtr. Quia A & B ſunt æqualia: erit ut A ad I, ita B ad I, (*per* 7. 5.) ſed (*per* 1.) ut A ad I, ita baſis DC ad baſin CE; & ut B, ad I; ita baſis GC ad baſin CF, igitur ut DC ad CE, ita GC, ad CF. quod eſt primum.

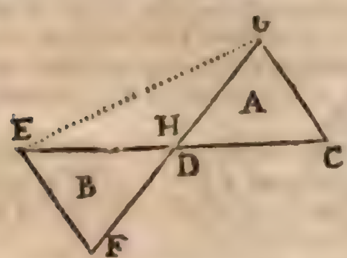
In eadem conſtructione ſi latera reciprocentur, hoc eſt ſit ut DC ad CE; ita GC, ad CF; dico A & B æqualia eſſe. nam (*per* 1.) ut DC ad CE, ita A ad I, & ut GC ad CF, ita B ad I; ergo ut A ad I, ita B ad I; quare (*per* 9. 5.) A, & B æqualia ſunt.

Digitized by Google

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Æqualia triangula, & unum angulum æqualem habentia, habent reciproca latera circa angulum æqualem. Et triangula quorum reciproca ſunt latera circa angulum æqualem, æqualia ſunt.



Sint triangula A & B æqualia, quorum anguli in puncto D ſint æquales, dico latera circa æquales angulos eſſe reciproca; hoc eſt ita eſſe CD ad DE, ſicut DF, ad DG. Conjungantur anguli æquales, ita ut ſint oppoſiti, & ſicut prius CDE erit una linea, & GDF alia, ducaturque linea GE.

Demonſtr. Quia triangula A, & B ſunt æqualia, ita erit (*per* 7. 5.) A ad H, ut B ad H, ſed quia A & H habent eundem verticem, G; (*per* 1.) erit ut A ad H; ita baſis CD, ad baſin DE: & quia B, & H eundem habent verticem E; erit (*per eandem*) ut B ad H, ita baſis DF ad DG, igitur eſt CD, ad DE; ſicut DF, ad DG.

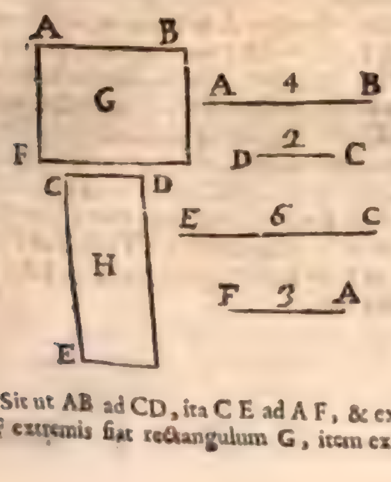
Secundò, in eadem ſuppoſitione, dico ſi latera reciprocentur hoc eſt ſi ſit CD ad DE, ut DF ad DG, triangula A & B eſſe æqualia.

Demonſtr. Cum enim ſit ut CD ad DE, ita DF ad DG, & ſicut baſis CD, ad baſin DE, (*per* 1.) ita ſit A ad H, & ſicut DF ad DG, ita ſit B ad H, ita erit A ad H, ſicut B ad H, igitur (*per* 9. 5.) triangula A & B ſunt æqualia.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Si quatuor lineæ proportionales fuerint; rectangulum contentum, ſub extremis: æquale eſt rectangulo contento ſub mediis. Et viciſſim ſi rectangula ſub extremis & ſub mediis æqualia ſint, lineæ proportionales erunt.



Sit ut AB ad CD, ita CE ad AF, & ex AB, AF extremis fiat rectangulum G, item ex CD, CE mediis fiat rectangulum H. dico G & H eſſe æqualia.

Demonſtr. Cum enim rectangula G & H ſint æquiangula, & latera ſint reciproca nempe ut AB ad CD, ita CE ad AF, (*per* 14.) G & H æqualia erunt.

Secundò, ſi G & H æqualia ſint (*per eandem*) erit ut AB ad CD; ita CE ad AF.

COROLLARIUM.

Ex hac propoſitione demonſtratur regula trium in quâ datis tribus numeris, quæritur quartus proportionalis. ſi enim dentur tres numeri AB 4, CD 2, CE 6, AF 3; qui ultimus ignoretur. multiplico 6 per 2, fit 12. rectangulum H. quod cum ſit æquale ipſi G, habetur rectangulum G, eſtque etiam 12, cujus latus AB, eſt 4. divido 12. per 4. & provenit aliud latus AF, quod eſt 3.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Si tres lineæ proportionales fuerint; erit rectangulum ſub extremis, æquale quadrato mediæ. Et viciſſim ſi quadratum mediæ, & rectangulum ſub extremis ſint æqualia; tres lineæ proportionales erunt.

A____B Sit AB ad DE, ſicut DE ad BC.
D____E dico ſi ex AB, & BC extremis fiat
D____E rectangulum illud eſſe æquale qua-
B____C drato lineæ DE. ſumatur linea DE bis.

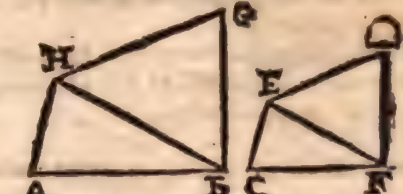
Demonſtr. Quia ita eſt AB prima ad ſecundam DE; ut ſecunda DE ad BC. (*per* 16.) rectangula ſub AB, BC, & ſub DE, DE ſunt æqualia: ſed rectangulum ſub DE, DE eſt ejus quadratum, igitur rectangulum ſub AB, BC extremis, æquale eſt quadrato mediæ DE.

Viciſſim ſi rectangulum ſub extremis. æquale ſit quadrato mediæ erit (*per* 16.) ut AB ad DE, ita DE ad BC, quod eſt eas lineas proportionales eſſe.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Super datâ rectâ deſcribere dato rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum.



Sit data recta AB, ſuper quam deſcribendum eſt rectilineum ſimile rectilineo CD. dividatur CD in triangula, ductâ ſcilicet lineâ FE: & ſupra lineam AB fiant duo anguli ABH, & A æquales angulis CFE, & C; quare (*per* 32. 1.) triangula ABH, CFE æquiangula ſunt. item fiant anguli HBG, BHG, æquales angulis EFD, FED, ſunt etiam triangula HBG, EFD æquiangula. dico rectilineum AG ſimile eſſe rectilineo CD.

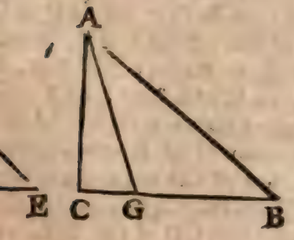
Demonſtr. Cum triangula partialia utriuſque polygoni

nt æquiangula, patet tota polygona
gula.
uia triangula ABH, CPE ſunt æquian-
per 4.6.) ut H A ad A B, ita E C
ut A B ad B H, ita C F ad F E; item
la H B G, E F D ſunt æquiangula ita
B G, ut EF ad FD. ergo (*per* 22. 5.)
o ut A B ad B G; ita C F ad F D.
eliquis lateribus: igitur duo poly-
& angulos æquales, & latera cir-
portionalia: ergo per (*def.* 1.) ſunt

OPOSITIO XIX.

Theorema.

*milia ſunt in duplicatâ ratione late-
rum homologorum.*



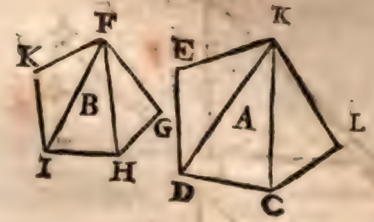
ula ABC, DEF, ſimilia. id eſt ſint
ico triangulum ABC ad D E F ha-
duplicatam illius quæ eſt baſis BC
hoc eſt ſi BC, eſſet dupla ipſius EF,
C eſſet bis duplum trianguli DEF;
ngulum A B C eſſet æqualis altitu-
gulo D E F, cum baſis B C ſit du-
; triangulum A B C eſſet duplum
F, quia vero duplo altius eſt, erit
fiat igitur ut BC ad EF, ita EF ad
dico ABC ad D E F habere ratio-
rationis B C ad E F, hoc eſt eſſe
& hoc eſt habere rationem dupli-

Quia angulus C eſt æqualis angu-
tione, & eſt ut BC ad EF, ita E F
item B C ad E F, cum triangula
la (*per* 4.) ita ſit A C ad D F. ita
D F, ſicut EF ad CG, igitur trian-
F E habent circa angulos æquales
ciproca: (*ergo per* 15.) ſunt æqua-
triangulum A B C ad triangulum
undem verticem A (*per* 1.) ut ba-
CG, igitur triangulum A B C ad
F; erit ut BC ad C G, quod erat

POSITIO XX.

Theorema.

*a in totidem ſimilia triangula, ho-
ividuntur. Et polygona ſimilia du-
nt rationem laterum homologorum.*



Sint polygona ſimilia A & B, dico ea dividi poſſe in totidem triangula ſimilia, quæ ſint ſimiles partes ſuorum totorum, ducantur enim lineæ CK, KD, HF, FI.

Demonſtr. Quia polygona A & B ſunt ſimilia (*per* 1. *def.*) anguli L & G erunt æquales, eritque ut KL ad LC, ita FG ad GH, quare (*per* 6.) triangula K L C, F G H æquiangula erunt. Ita oſtendam triangula KED, & FKI eſſe etiam æquiangula. & quia totus angulus C erat æqualis angulo H, & totus D toti I (*per eandem def.*) & anguli L C K, G H F ſunt æquales; item K D E, & F I K, cum triangula ſint oſtenſa æquiangula, erunt anguli KCD, KDC angulis F H I, F I H æquales, & triangulum KCD æquiangulum triangulo FHI. igitur omnia triangula ſunt ſingula ſingulis ſimilia.

Dico ſecundo, ea eſſe totis proportionalia, hoc eſt ut tota polygona ſunt inter ſe, ita triangula ſibi reſpondentia.

Demonſtr. Quia polygona ſunt ſimilia, ita erit LC ad CD ſicut GH ad H I; & permutando (*per* 16.5.) ratio LC ad G H eadem erit ac CD ad HI. ſed triangulum K L C ad triangulum FGB ſimile; eſt in duplicatâ ratione lateris L C ad latus GH, & triangulum K C D etiam in duplicata ratione lateris CD ad H I. igitur triangulum KLC ad triangulum FGH erit ut KCD ad F H I, & ita oſtendam etiam eſſe K E D ad F K I. quare (*per* 11. 5.) ita erunt omnia triangula polygoni A ad polygonum B, ſicut unum ex triangulis, ad triangulum ſibi reſpondens.

COROLLARIUM.

Ex eo ſequitur quæcumque rectilinea ſimilia, ſe habere in ratione duplicatâ laterum homologorum: nam ſe habent ut triangulum ad triangulum ſibi ſimile quæ (per 19.) *ſunt in ratione duplicatâ laterum homologorum.*

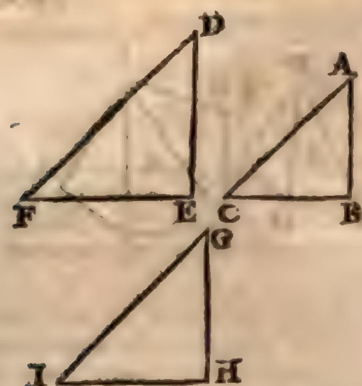
Secundò, ſi tres lineæ ſint continuè proportionales; erit ut prima ad tertiam; ita quæcumque figura rectilinea ſupra primam deſcripta, ad figuram ſimilem ſupra ſecundam deſcriptam, ſic enim erit in ratione duplicata laterum homologorum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Rectilinea eidem ſimilia inter ſe ſimilia ſunt.

Sint rectilinea A B C, D E F, eidem rectilineo GHI ſimilia: dico ea inter ſe ſimilia eſſe.

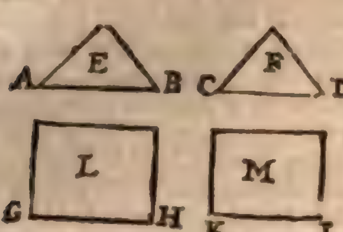


Demonſtr. Anguli A & D,eidem G ſunt æqualia: quare inter ſe æqualia ſunt, & ita de aliis, & quia eſt(*per 6 def.1.*) ut GH ad HI, ita AB ad BC, & etiam DE ad EF, ita erit AB ad BC, ſicut DE ad E F, & ita de aliis lateribus: quare rectilinea ABC, DEF (*per 6 def.1.*) ſimilia ſunt.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Si quatuor lineæ proportionales ſint, polygona ſimilia ſupra illas deſcripta,erunt proportionalia.Viciſſim ſi polygona ſimilia ſupra quatuor lineas deſcripta ſint proportionalia, lineæ proportionales erunt.



Sit ut A B ad CD ita GH ad KI. dico ſi ſupra AB, & CD ſint deſcripta polygona ſimilia E, & F; & ſupra G H, K I alia ſimilia L, & M; eſſe ut E ad F, ita L ad M.

Demonſt. E ad F (*per coroll.2.*) eſt in duplicata ratione, rationis AB ad CD, ſed eadem eſt ratio G H ad K I, ac ratio AB ad CD, igitur E ad F eſt in duplicata ratione rationis G H ad KI, ſed etiam L ad M eſt in duplicata ratione rationis GH ad KI. igitur eſt ut E ad F; ita L ad M.

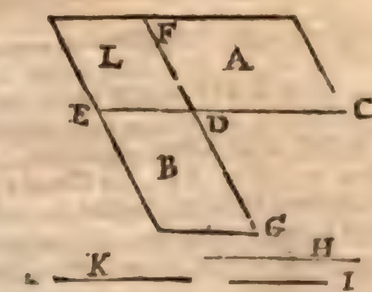
Dico ſecundò, ſi ſit ut E ad F; ita L ad M. ita etiam eſſe A B ad CD; ut GH ad KI.

Demonſtr. Cum enim ratio E ad F (*per coroll.2.*) ſit duplicata rationis AB ad CD, & ratio E ad F, ſit eadem ac ratio L ad M, ratio L ad M duplicata erit rationis A B ad CD. ſed etiam ratio L ad M (*per coroll.2.*) eſt duplicata rationis GH ad K I: igitur rationes AB ad C D, & GH ad K I ſunt eædem.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Parallelogramma æquiangula rationem habent: ex laterum rationibus compoſitam.



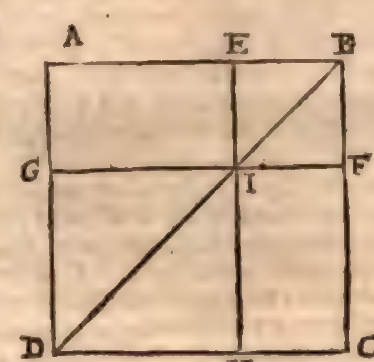
Sint parallelogramma A & B æquiangula. dico rationem A ad B componi ex ratione CD ad DE, & ratione DF ad DG. hoc eſt ſi fiat ut CD ad DE, ita H ad I, & ut F D ad DG ita I ad K. ita eſſe A ad B ut H ad K. Conjungantur enim parallelogramma prope angulos æquales,ita ut CDE,FDG componant rectas lineas.

Demonſtr. Quia (*per 1.*) eſt ut CD ad DE, ita A ad L, ut autem CD ad DE, ita eſt H ad I, ita erit A ad L ſicut H ad I; & quia etiam (*per 1.*) ita eſt L ad B, ſicut baſis FD ad D G, ut autem FD ad DG; ita eſt I ad K. erunt tres quantitates A, L, B, & aliæ tres H, I, K, ita ut ſit ut A ad L, ita H ad I, & ut L ad B; ita I ad K, igitur ex æquo (*per 22. 5.*) erit ut H ad K, ita A ad B. ratio autem H ad K componitur ex ratione H ad I, hoc eſt CD ad DE, & ratione I ad K, hoc eſt FD ad DG: igitur ratio A ad B componitur ex rationibus CD ad DE, & DF ad DG.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

In omni parallelogrammo parallelogramma quæ ſunt circa diametrum, & toti, & inter ſe ſunt ſimilia.



In parallelogrammo AC ſint circa diametrum BD parallelogramma EF, GH; dico ea & toti & conſequenter inter ſe eſſe ſimilia.

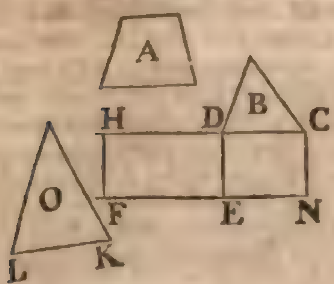
Demonſtr. Parallelogramma EF, & AC, angulum B communem habent & propter parallelas H E, D A, anguli BEI & A externus & internus (*per 29. 1.*) ſunt æquales; igitur ſunt æquiangula. Deinde in triangulo BAD, cum linea E H ſit parallela lateri AD erunt (*per coroll.4.*) triangula BEI, BAD æquiangula & (*per 4.*) erit ut BE ad EI, ita AB ad A D; igitur latera parallelogrammorum A C, E F proportionalia, alia etiam latera eodem modo ſe habent, cum (*per 34. 1.*) oppoſita latera ſint æqualia, igitur A C, & EF ſunt

ſunt ſimilia eodem modo oſtendam A C, & G H eſſe ſimilia : ergo EF, & GH ſunt ſimilia.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Conſtituere rectilineum æquale dato, & alteri ſimile.



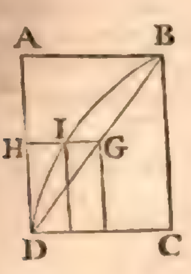
Sit conſtituendum rectilineum æquale dato; A ; & ſimile ipſi B ſupra CD, fac (*per* 34.1.) parallelogrammum CE, æquale rectilineo B, & ſupra DE in dato angulo N fiat parallelogrammum D F, æquale ipſi A. hoc eſt ita ut angulus D E F ſit æqualis ipſi N. ſic enim CDH, erit una linea; inter lineas CD, DH, quæratur (*per* 13.) media proportionalis; ſitque KL, ſupra quam (*per* 18.) fiat rectilineum O, ſimile ipſi B. dico O eſſe æquale rectilineo A.

Demonſtratio. Quia K L eſt media proportionalis inter CD & DH, erit ut C D ad KL, ita KL ad DH, & (*per corol.*2. 20.) erit polygonum ſupra primam C D, quod eſt B, ad polygonum ſimile ſupra ſecundam K L, deſcriptum quod eſt O, ut prima CD ad tertiam, ſed ut C D ad D H (*per* 1.) ita eſt C E, ad D F. igitur ut B ad O, ita eſt C E ad D F, ſed C E eſt æquale rectilineo B, & D F ipſi A, igitur ut B ad O, ita B ad A. quare (*per* 9. 5.) A & O æqualia ſunt. Sed O factum eſt ſimile ipſi B igitur O eſt æquale rectilineo A, & ſimile rectilineo B.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Si intra parallelogrammum, aliud minus, & ſimile conſtituatur, communem angulum cum illo habens: diameter majoris, tranſit per angulos minoris.



Sit parallelogrammum A C, intra quod ſit aliud ſimile D G. communem habens angulum D. dico diametrum D B tranſire per G angulum minoris.

Demonſtr. Si enim non tranſit per G, tranſeat per I, ita ut ſit diameter D I B. Ducatur linea per I, parallela lineæ H D, fiatque parallelogrammum D I quod (*per* 24.) erit ſimile toti, unde erit ut H I ad HD, ita AB ad AD, ſed ut A B ad AD ita ſupponitur HG ad HD, cum GD ſupponatur ſimile toti A C, igitur erit ut I H ad HD, ita GH ad eandem HD, quare (*per* 9.5.) GH, IH eſſent æquales non igitur tranſit D B per aliud punctum quam per G.

PROP. XXVII. XXVIII. XXIX.

Relinquantur.

PROPOSITIO XXX.

Datam lineam extremâ, ac mediâ ratione ſecare.



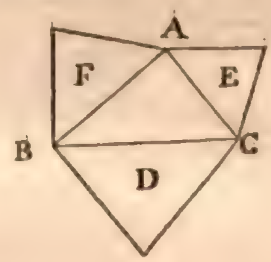
Sit ſecanda recta A B, ita ut tota A B ad majus ſegmentum A C, eandem rationem habeat, ac majus ſegmentum AC ad minus CB ita ſecetur (*per* 11.2.) ut rectangulum ſub totâ A B, & minori ſegmento CB æquale ſit quadrato ſegmenti AC, dico factum eſſe quod jubetur.

Demonſtr. Quia rectangulum ſub AB, CB; æquale eſt quadrato rectæ A C, ita erit (*per* 17.) AB ad A C, ſicut A C ad CB quod faciendum erat.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

In triangulis rectangulis rectilineum quodvis ſupra baſin deſcriptum, æquale eſt rectilineis ſimilibus ſupra latera deſcriptis.



Sit triangulum ABC cujus angulus B A C ſit rectus. dico rectilineum quodvis D ſupra baſin BC deſcriptum, æquale eſſe, duobus rectilineis ſimilibus E & F deſcriptis ſupra latera AB, AC.

Demonſtr. Rectilinea F, E, D, ſimilia, ſunt (*per* 20.) in duplicata ratione laterum BC, AC, A B. ſi autem loco illorum ſupra eadem latera deſcriberentur quadrata; eſſent etiam (*per eandem*) in duplicatâ ratione eorumdem laterum: igitur rectilinea D, E, F; ſe habent ut quadrata. Sed quadratum baſis B C, (*per* 47. 1.) eſſet æquale quadratis laterum BA, AC, igitur rectilineum D eſt æquale rectilineis E, & F ſimul ſumptis.

PROPO

Digitized by Google

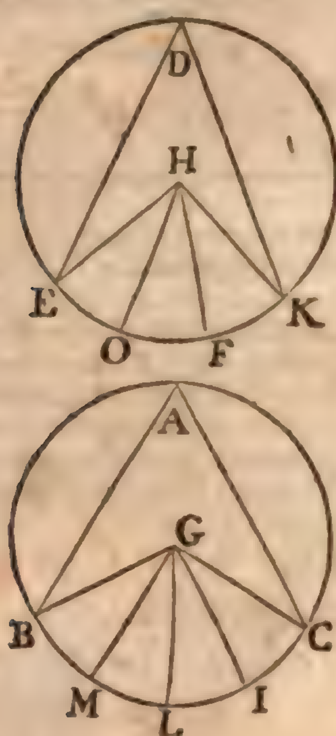
PROPOSITIO XXXII.

Relinquatur.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

In circulis æqualibus, anguli ſive ad centra, ſive ad peripheriam conſtituti eandem habent rationem; ac arcus quibus inſiſtunt, ſectores item eandem habent rationem.



Sint æquales circuli A B C, D E F, in quibus ſint anguli ad centra B G C ; E H K. dico ita eſſe arcum B C ad arcum E K ſicut angulus B G C ad angulum E H K, nam ſint arcus E O, O F, F K, quæcumque partes aliquotæ arcus E K, ſint verbi gratia tertiæ. ductis lineis H F, H O, quia arcus E O, O F, F K ſunt æquales anguli E H O, O H F, F H K (*per* 27.3.) ſunt æquales; atque adeo qualibet tertia pars arcus E H K, ponamus arcum F K quater inveniri in arcu BC, ita ut I C, L I, M L, BM ſint æquales arcui FK ductiſque lineis G I, G L, G M fient quatuor anguli B G M, M G L, L G I, I G C æquales angulo FHK; ergo quoties in arcu BC invenitur arcus F K, tertia pars arcus EK, toties in angulo B G C invenitur angulus F H K; tertia pars anguli E H K, & quod dixi de tertiis partibus idem oſtendi poteſt de quibuſlibet aliis partibus aliquotis: igitur (*per* 5. *def*. 5.) ut arcus B C ad arcum E K, ita angulus B G C, ad angulum E H K. idem dicendum de angulis A, & D, qui cum ſint mediæ partes angulorum B G C, E H K (*per* 20. 3.) eandem cum ipſis rationem habebunt.

Idem dicendum de ſectoribus A G C, E H K nam ſectores I G C, F H K æquales ſunt, cum enim ductis rectis IC, FK, quæ ductæ non ſunt; in triangulis rectilineis IGC, FHK, latera propter æqualitatem circulorum ſint æqualia, & anguli IGC, FHK ſint æquales; erunt (*per* 4. 1.) triangula æqualia, & baſes I C, F K æquales erunt, quæ ex circulis æqualibus (*per* 24. 3.) æqualia ſegmenta auferunt quæ addita triangulis æqualibus faciunt ſectores IGC, FGK æquales; idem probabo de aliis parvis ſectoribus, quare ſector totalis B G C toties tertiam partem ſectoris E H K continebit, quoties arcus B C continet tertiam partem arcus E K. quare ſectores & arcus (*per* 5. *def*. 5.) in eâdem ratione erunt. Idem intelligendum de ſectoribus, angulis, & arcubus ejuſdem circuli.

EUCLI

Digitized by Google

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEPTIMUS.

HACTENUS egit Euclides de priori Geometriæ parte quæ circa plana ſeu ſuperficies verſatur, reſtatque altera ſolidorum. Cui tamen doctrinam de commenſurabilibus, & incommenſurabilibus quantitatibus præmiſit, eo quod plurima latera regularium præſertim corporum incommenſurabiles lineas continerent. Nos alium ordinem ſequendum exiſtimavimus, experientiâ ſcilicet edocti, in his difficultatibus ita Tyrones implicari, ut in iis enodandis initiô tempus terant. Præſertim cum fere tota matheſis ab hac incommenſurabilium doctrina ita parùm pendeat; ut ſine iis ferè tota demonſtretur. Ne quid tamen in hoc noſtro opere deeſſe videatur Euclidem reſumimus, & quantùm poſſumus clarè explicamus.

Definitiones.

1 Unitas eſt ſecundùm quam unumquodque dicitur unum. Nempe ab unitate dicitur unus homo, unus leo, unus lapis. Hæc definitio dat primam tantum unitatis cognitionem, quod in præſenti materia ſufficit; unitatem enim per ſe melius cognoſcimus, quàm ex quacumque definitione.

2 Numerus eſt ex unitatibus compoſita multitudo. *Unde tot habet partes quot unitates, denominationemque habet ex multitudine unitatum. Ex quo ſequitur omnes numeros inter ſe commenſurabiles eſſe, cum eos unitas metiatur.*

3 Pars eſt numerus numeri, minor majoris cum minor metitur majorem. *Seu pars aliquota (ea enim intelligitur) quoties ita minor numerus cum majore comparatur, ut aliquoties ſumptus eum præciſè adæquet: ut 4 eſt pars numeri 12, quia numerus 4 ter ſumptus adæquat 12. Pars ſimilis aliquota; ea eſt quæ toties in ſuo toto continetur ac alia in ſuo.*

4 Partes autem cum non metitur. *Seu eſt minor numerus comparatus cum majore, quem aliquoties repetitus non adæquat, ut 5 eſt partes, ſeu pars aliquanta numeri 12.*

5 Multiplex eſt major minoris, cum minor metitur majorem. *Seu eſt major numerus comparatus, cum ſua parte aliquota, quam aliquoties ſcilicet continet exactè.*

6 Numerus par eſt qui biſariam dividi poteſt; vel quem binarius metitur.

7 Impar qui biſariam dividi non poteſt; vel qui unitate differt à pari.

8 Pariter par, eſt numerus, quem numerus par metitur per numerum parem, *ut 32, quem numerus par 4, metitur per 8 numerum parem.*

9 Pariter impar, eſt numerus par, quem numerus par metitur per imparem, *ut 20, quem 4 metitur per 5.*

Impariter impar, quem impar per imparem metitur; *ut 15 quem 3 metitur per 5.* 10

Primus numerus abſolutè dicitur is quem ſola unitas metitur, *ut 2, 3. 5. 7. 11. 13, quia nullam habent partem aliquotam unitate majorem.* 11

Numeri primi inter ſe, ſeu reſpectivè, quos ſola unitas metitur; nempe qui nullam partem aliquotam communem habent majorem unitate, ut 3 & 5. 12

Compoſitus numerus abſolute dicitur, quem non ſola unitas metitur, ſeu qui partem aliquotam habet majorem unitate, ut 4 cujus binarius eſt pars aliquota. Unde omnis numerus par ſupra binarium compoſitus eſt. 13

Compoſiti numeri inter ſe ſunt quos numerus aliquis ut communis menſura metitur, ſeu qui habent partem aliquotam communem majorem unitate; ut numeri 15 & 24; habent enim ternarium communem partem aliquotam. 14

Numerus numerum multiplicare dicitur, cum toties multiplicatus ſumitur quot ſunt unitates in multiplicante; ut numerus 3 multiplicare dicitur numerum 4, cum toties ſumitur 4, quot ſunt unitates in numero 3. Ex quo ſequitur numeri producti 12 multiplicatum, eſſe ſimilem partem aliquotam ac unitas multiplicantis; nempe quoties unitas eſt in multiplicante toties numerus 4 eſt in producto. Quare eadem eſt ratio unitatis ad multiplicantem quæ multiplicati ad productum. Ideoque in multiplicatione quærimus numerum ad quem multiplicatus eandem habeat rationem, ac unitas ad multiplicantem. Ex quo ſequitur quòd ſi uterque multiplicans & multiplicatus ſit integer, numerus productus major erit multiplicato. Si ſit fractio minor erit. 15

Dicimus item numerum in numerum ducere. Dicimus etiam A in B, aut A per B.

Plures numeri dicuntur invicem multiplicari 3. 4. 2. ſi primos duos invicem multiplices ut fiat 12 & productum 12 per 2 multiplices, ut fiat 24.

Numerus numerum dividere dicitur, cum numerus invenitur indicans quotiens diviſor eſt in diviſo. Ut numerum 12 per 3 dividimus cum aſſignamus numerum 4 indicantem per ſuas unitates, quoties numerus 3 eſt in diviſo 12, vel eſt inventio numeri qui ad unitatem ſe habeat ut diviſus ad diviſorem. Quod in numeris vocat diviſio, applicatio dicitur in quantitate continua; nempe applicatur diviſor numero diviſo, quantitas baſi ut habeatur altitudo, vel altitudini ut habeatur baſis. 16

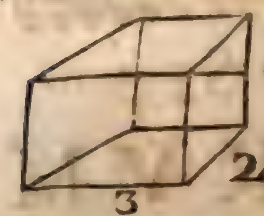
4
3 ———
12

Numerus planus eſt ille qui ex multiplicatione duorum numerorum producitur, & numeri ſe multiplicantes dicuntur ejus latera. De hac conſideratio- 17

Digitized by Google

ne multiplicationis jam diximus in ſecundo libro Euclidis, & in Arithmetica.

18 Numerus ſolidus eſt ille numerus,qui ex trium numerorum multiplicatione oritur, ut ſi tres numeri 2.3.4. ſe multiplicent nempe primo 2 & 3 ſe multiplicent, fiatque numerus 6, tum 6 & 4 ut fiant 24, numerus 24 erit numerus ſolidus,& numeri 2,3,4, dicentur ejus latera.



19 Similes plani numeri, aut ſolidi ſunt, qui proportionalia habent latera; ut numeri 6 & 24 ſunt plani ſimiles;nam latera numeri 6 ſunt 2 & 3, latera numeri 24 ſunt 4 & 6; eadem autem eſt ratio 2 ad 3 quæ 4 ad 6. Pariter ſi numeri 2.3.4. & 46. $\frac{24}{8}$ fecerint numeros 24 & 192, illi erunt numeri ſolidi ſimiles.

20 Numerus quadratus, eſt numerus planus æqualiter æqualis; Seu numerus planus cujus latera ſunt numeri æquales, hoc eſt ex multiplicatione alicujus numeri per ſeipſum. Hic numerus radix quadrata dicitur, ut 4 cujus radix quadrata 2.

21 Numerus cubus eſt æqualiter æqualis, ſeu numerus cujus tria latera ſunt numeri æquales, Seu qui fit ex multiplicatione trium numerorum æqualium. Ut hic numerus 8 qui fit ex multiplicatione binarij ter poſiti 2. 2. 2. ſi enim 2 per 2 multiplices fiunt 4. ſi rurſus 4 per 2 multiplices fiunt 8.

22 Numerus perfectus, eſt numerus qui omnibus ſuis partibus aliquotis æqualis eſt: Hoc eſt ſi ſumatur una pars aliquota ex æqualibus, ſeu ut ita dicam una ex qualibet ſpecie, & ille omnes additæ adæquent numerum, ille perfectus erit. Ut numerus 6 cujus partes aliquotæ ſunt 1. 2. 3. & illæ ſimul faciunt 6.

23 Numerus numerum metitur per numerum, per quem multiplicatus illum producit, ut numerus 3 numerum 12 metitur per numerum 4. per quem multiplicatus producit numerum 12.

24 Ratio unius numeri ad alium, eſt habitudo unius numeri ad alium, quoad quantitatem, ſuntque in omni ratione duo termini antecedens & conſequens.

25 In numeris duæ rationes ſunt æquales, eædem, aut ſimiles cum numeri fuerint proportionales, ſed iſta jam initio quinti libri expoſuimus.

26 Termini ſive radices proportionis dicuntur duo numeri,quibus in eadem ratione minores ſumi non poſſunt. Melius enim concipimus parvos numeros, quàm majores; ergo melius adhibentur ut ſint quaſi regula cæterorum.

27 Cum tres numeri proportionales fuerint, primus ad tertium duplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad ſecundum. Si quatuor numeri continuè proportionales fuerint, primus ad quartum triplicatam rationem habet illius quæ eſt primi ad ſecundum.

28 Quotlibet numeris ordine poſitis, Ratio primi ad ultimum componi dicitur ex ratione primi ad ſecundum,ſecundi ad tertium,& ita conſequenter.

AXIOMATA.

1 Numeri qui ſunt ejuſdem, aut æqualium æquemultiplices, æquales ſunt.

Quorum idem numerus æquemultiplex, aut 2
æquemultiplices ſunt æquales, illi ſunt æquales.

Æquales ſunt numeri, qui ejuſdem ſunt ſimilis 3
pars, aut partes.

Unitas omnem numerum metitur per ipſum- 4
met numerum; ita ter unum, efficiunt tria.

Omnis numerus ſeipſum metitur per unitatem. 5

Si numerus alium multiplicans tertium produ- 6
xerit, metietur productum per multiplicatum, & viciſſim multiplicatus productum metietur per multiplicantem.

Si numerus numerum metiatur per tertium, vi- 7
ciſſim tertius eundem metietur per primum.

Si pars aliquota multiplicet eum numerum per 8
quem metitur ſuum totum, illud producet.

Numerus aliquem metiens, metitur omnem nu- 9
merum quem ille metitur.

Numerus alios duos metiens,metitur & nume- 10
rum ab ipſis compoſitum.

Numerus metiens totum & ablatum metitur & 11
reliquum.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Si proponantur duo numeri, quorum minor de majore ſemper detrahatur alterna ſubtractione, ita ut reliquus præcedentem non metiatur donec ad unitatem deveniatur, Primi inter ſe erunt hi numeri.

A——E—G-B
C—F—D
H——

Proponantur numeri A B, C D, & ex majori A B detrahatur C D quoties poteſt, & relinquatur EB qui ex CD detrahatur,relinquaturque FD; qui F D detrahatur ex EB, relinquaturque unitas, hoc eſt ſemper in ſingulis detractionibus aliquid relinquatur,donec perveniatur ad unitatem GB: dico numeros AB, CD primos eſſe,ſeu non habere partem aliquotam communem majorem unitate. Sit enim pars illa aliquota communis H.

Demonſtratio. Cum H metiatur CD, metitur & A E quem CD metitur, ſed ſupponitur metiri totum AB: ergo (*per 11. axioma*) metitur & reliquum EB, item & CF, quem EB metitur. ſed metiebatur totum CD, ergo metitur reliquum FD & EG quem FD metiebatur: ſed jam metiebatur totum EB: ergo metitur unitatem: ergo H non eſt major unitate.

PROPOSITIO II.

Problema.

Numerorum compoſitorum maximam communem menſuram invenire.

A——E—B
C—F—D
G—

Sint numeri compoſiti A B, CD, ſeu non primi,quorum minor ex majore detrahatur, alternâ quâdam detractione & reliquus ex præcedente, donec perveniatur ad numerum FD majorem unitate, qui metiatur exactè præcedentem E B. dico F D eſſe maximam communem menſuram numerorum A B, C D. Primo oſtendo numerum F D metiri numeros AB, CD.

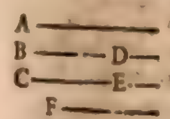
Demonſtr. Cum F D metiatur E B, & E B metiatur C F, F D metietur & C F, ſed metitur & ſeipſum; ergo F D metitur totum C D; ſed C D metitur A E, ergo F D metitur A E & E B, ergo & totum A B. addo & F D eſſe maximam communem menſuram, ſi enim non ſit maxima, ſit G maxima communis menſura. Cum G metiatur totum A B, item C D, C D metitur A E, G metietur A E, ergo & reliquum E B. item & C F, quem E B metitur, ſed metitur totum C D, ergo & reliquum F D. Non eſt ergo G major quam F D.

Coroll. Numerus G metiens numeros A B, C D metitur F D maximam eorum communem menſuram.

PROPOSITIO III.

Problema.

Trium numerorum non primorum inter ſe, maximam communem menſuram reperire.



Sint numeri A, B, C non primi inter ſe, ſitque invenienda maxima communis eorum menſura. Primò numerorum A & B, inveniatur maxima communis menſura quæ ſit D quæ ſi metitur numerum C. habetur intentum. Si verò non metitur, quæratur E, maxima communis menſura numerorum C & D. dico E eſſe maximam communem menſuram numerorum A, B, C. Primò cum E metiatur C & D, D autem metiatur numeros A & B, E metietur etiam numeros A, B, C. Quod vero ſit maxima ita oſtendo. Sit enim F maxima menſura numerorum A, B, C.

Demonſtr. Cum F metiatur numeros A & B metitur & D maximam eorum menſuram, ſed metitur etiam C, ergo per Coroll. præcedens metitur & E maximam numerorum D & C menſuram E, ergo nulla numerorum A B C communis menſura major dari poteſt quam E, quod demonſtrandum erat.

Coroll. Eodem artificio inveniemus quatuor numerorum compoſitorum maximam communem eorum menſuram.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Omnis numerus minor, majoris vel eſt pars aliquota vel aliquanta.

Demonſtr. Cum minor contineatur in majore, vel illum metietur & erit ejus pars aliquota, vel continebit aliquas partes numeri majoris, unitates ſcilicet, ex quibus coaleſcit.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si numerus numeri ſimilis pars fuerit, ac alter alterius: uterque ſimul utriuſque ſimul eadem pars erit.

Hæc propoſitio continetur (*in 12. 5. Eucl.*) quæ dicit: Si ſint magnitudines quotcumque proportionales, ut ſe habet una antecedentium ad unam conſequentium; ita ſe habent omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si numerus numeri partes fuerit; & alter alterius ſimiles partes; uterque ſimul utriuſque eadem partes erit.

Continetur in eadem.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati; & reliquus reliqui eadem pars erit ac totus totius.

Continetur (*in 19. 5.*) nempe; Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ad ablatum; & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum, ſe habebit.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati, & reliquus reliqui ſimiles partes erit.

Continetur in eadem.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si numerus numeri pars fuerit & alter alterius eadem pars & viciſſim qua pars eſt primus tertij, erit & ſecundus quarti.

Continetur (*in 16. 5.*) Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; & viciſſim proportionales erunt.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eadem partes: & viciſſim qua partes eſt primus tertij, aut eadem partes erit & ſecundus quarti.

Continetur in eadem.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Si fuerit ut totus numerus ad totum numerum, ita ablatus ad ablatum: erit reliquus ad reliquum ut totus ad totum.

(Eſt 19. 5.)

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Si ſint quotcumque numeri proportionales, erit quemadmodum unus antecedentium ad unum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

(Eſt 12.5.) Euclidis.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si quatuor numeri proportionales fuerint; & viciſſim proportionales erunt.

(Eſt 16.5.)

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Si ſint quotcumque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini ſumantur, & in eadem ratione; etiam ex æqualitate in eâdem ratione erunt.

(Eſt 22. 5.)

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si unitas ſecundi numeri fuerit ſimilis pars aliquota, ac tertius quarti, erit unitas tertij, ſimilis pars aliquota ac ſecundus quarti.

Continetur in 13 hujus.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Duo numeri ſe invicem multiplicantes æquales numeros producunt.

Unitas
1
A 6. B 4
C 24. D 24

Numerus A multiplicans B faciat C. & numerus B multiplicans A faciat D. dico numeros C & D æquales eſſe.

Demonſtr. Cum A multiplicans B faciat C, erit (*per def.15.*) ita unitas ad 6 ut 4 ad C. & (*per præcedentem*) ita erit viciſſim unitas ad B ut A ad C. Rurſus quia B multiplicans A producit D, ita erit unitas ad B ut A ad C. ergo ita erit A ad C, ſicut A ad D: ergo (*per axioma 1.*) C & D ſunt æquales. quod erat demonſt.

Coroll. Si numeri A & B ſe multiplicantes fecerint C. A metietur productum per B, & B eundem metietur per A. nempe A oſtendit per ſuas unitates, quotiens B invenitur in C. & viciſſim B oſtendit per ſuas unitates quotiens A invenitur in C.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Si idem numerus duos numeros multiplicans aliquos produxerit; producti, & multiplicati proportionales erunt.

Unitas
1
A 3
B 2 C 4
D 6 E 12

Numerus A multiplicans numeros B & C, producat numeros D & E, dico numeros B & C numeris D & E proportionales eſſe.

Demonſtr. Cum numerus A multiplicans B faciat D ita erit unitas ad A, ſicut B ad D. (*per def.15.*) pariter ita erit unitas ad A, ſicut C ad E. ergo ita erit B ad D, ſicut C ad E, & permutando ita erit B ad C; ſicut D ad E; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si quotcumque numeri eundem multiplicantes aliquos fecerint; producti & multiplicantes proportionales erunt.

A 2 B 4
C 3
D 6 E 12

Numeri A & B multiplicantes eundem numerum C, producant numeros D, E, dico numeros D, E numeris A, B proportionales eſſe.

Demonſtr. Nam cum A multiplicando C, produxerit D; viciſſim C multiplicando A eundem D producet (*per 16.*) pariter C multiplicando B producet E. quare per præcedentem A,B,D,E proportionales erunt.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, productus ex multiplicatione extremorum, æqualis eſt producto ex multiplicatione mediorum. Et viciſſim.

A 3. B 2. C 6. D 4.
A D 12. B C 12.
A C 18.

Quatuor numeri A, B, C, D ſint proportionales, dico A D productum ex multiplicatione extremorum A & D, æqualem eſſe numero B C producto ex multiplicatione mediorum B & C. Sit numerus AC productus ex multiplicatione A in C.

Demonſtr. Cùm numerus A multiplicando C & D fecerit A D & A C. Erit A C ad AD ſicut C ad D, hoc eſt ut A ad B ex conſtructione. Pariter cum C multiplicando A & C fecerit AC, BC, erit AC ad BC, ut A ad B. ergo ita eſt AD ad AC, ſicut BC ad AC. ergo A D, BC ſunt æquales quod erat demonſtrandum.

Secundò ſi productus ex A in D. ſit æqualis producto ex B in C, dico numeri A, B, C, D proportionales eſſe.

Demonſtratio. Nam cum A multiplicando C & D fecerit A C & A D, ita erit A C ad AD ut C ad D, ſed ita eſt A C ad B C, cum A D & B C ſint æquales, & ut A C ad BC ita eſt A ad B: ergo ita eſt A ad B, ſicut C ad D.

PROPO

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Si tres numeri proportionales fuerint, quadratus medij æquatur producto ex primo in tertium, & viciſſim.

A 2 B 4 64. C 8
A C. 16 B b. 16.

Sint tres numeri A, B, C proportionales. dico quadratum medij B æquari producto ex primo A in tertium C. Repetatur numerus b.

Demonſtr. Cum ſit ut A ad B, ita b ad, C numerus A C æquatur numero B b, & cum numeri B & b ſint æquales, numerus B b quadratus erit numeri B. ergo quadratus numeri B æquatur producto ex A in C.

Eodem modo probabo ſi quadratus medii B æqualis fuerit producto ex A in C, numeros A, B, C proportionales eſſe.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Minimi in ſua proportione æquè metiuntur numeros ipſis proportionales.

A... G. . B
C.. H . D
E.........
F.........

Sint numeri A & B minimi in ſua proportione; ſintque numeri majores E, F ipſis proportionales; dico numeros AB, C D eſſe ſimiles partes aliquotas numerorum E & F.

Demonſtr. Cum numeri A B, C D ſint proportionales numerorum E & F, nempe A B ſit ad C D, ut E ad F, ita erit permutando A B ad E, ſicut C D ad F, & cum A B ſit minor quam E, erit A B ſimilis pars aut partes ipſius E, ac C D ipſius F. Non eſt autem ſimilis pars aliquanta; ſi enim eſſet ſimiles partes, dividatur AB in AG, GB partes ipſius E, & C D in totidem partes ipſius F. hoc eſt A B contineret A G. partem aliquotam ipſius E, & C D contineret C H partem aliquotam ſimilem numeri F, ſed partes ſimiles aliquotæ A G, G H, & æquemultiplices E, F ſunt in eadem ratione (*per 15. 5. Eucl.*) ergo ita erit A G ad C H, ut E ad F ſeu ut A B ad C D. ergo A B C D non eſſent minimi in ſua ratione; quod eſt contra ſuppoſitionem.

Coroll. Si plures quàm duo numeri fuerint minimi in ſua ratione; totidem ſibi proportionales æquè metientur.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Si fuerint tres numeri, & alij totidem, qui bini ſumantur in eadem ratione perturbata: Ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Eſt 23 quinti.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Primi inter ſe numeri, minimi ſunt omnium ipſis proportionalium.

A 15 . B 8
C E D

Numeri A & B ſint primi inter ſe, ſeu non habeant communem menſuram niſi unitatem. dico numeros A & B minimos omnium ipſis proportionalium. Si enim dentur alij minores, & ipſis proportionales ſint C & D.

Demonſtrat. Cum numeri C & D ſint proportionales numeris A & B, eos æquè metientur, (*per 21. hujus*) ſeu per eundem numerum E. ergo numeri A & B habent numerum E communem menſuram: ergo non ſunt primi, contra ſuppoſitionem.

Coroll. Si plures quam duo numeri fuerint inter ſe primi, eódem modo oſtendentur eſſe minimi in ſua ratione.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Numeri omnium ſibi proportionalium minimi ſunt inter ſe primi.

A 15 . B 8
C E D

Sint numeri A & B minimi omnium ſibi proportionalium, dico A & B eſſe inter ſe primos. Si enim non ſunt inter ſe primi habeant communem menſuram E, quæ metiatur A per C & B per D, ergo C & D æquè metientur A & B, ergo A & B eſt ut C ad A, ita D ad B, & permutando ut A ad B; ita C ad D. ergo A & B non ſunt minimi ſibi proportionalium.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Si numeri primi inter ſe fuerint ſi numerus unum metiatur, ad alium primus erit.

A 15 . B 8
C E D

Numeri A & B ſint inter ſe primi, & numerus E metiatur numerum A. dico quod ad numerum B erit primus.

Demonſtr. Si enim E & B non ſunt primi, habebunt communem menſuram, quæ metietur numeros B & E, ſed E metitur ex ſuppoſitione numerum A, ergo hæc communis menſura metietur numeros A & B: ergo non ſunt primi; contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Si duo numeri ad tertium, primi fuerint: etiam genitus ex eorum multiplicatione, ad eundem primus erit.

A 7 B 3
C 8
A B 21
D———-F——

Numeri A & B ſint primi ad numerum C, dico numerum A B productum ex multiplicatione A in B, primum eſſe ad numerum C. Si enim A B & C non ſunt primi, ſit D communis eorum menſura, quæ metiatur numerum A B per F, hoc eſt numerus D multiplicans F faciat A B.

Digitized by Google

Demonſtr. Cum numerus A B tam fiat ex D in F, quam ex A in B (*per 19. hujus*) ita erit D ad A; ſicut B ad F. & cum A & C ſint primi & D metiatur C, (*per præcedentem*) erit D ad A primus, & (*per 23.*) erunt minimi in ſua ratione, ergo (*per 21.*) æquè metiuntur numeros B & F ipſis proportionales nempe D ipſum B, & A ipſum F. ſed jam dicitur D metiri numerum C: ergo D metitur B & C: ergo B & C non ſunt primi, contra ſuppoſitionem: ergo ſi A & B ad C primi ſint, A & C primi erunt; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Si numerus ad alium primus fuerit; etiam quadratus ejus, ad eum primus erit.

A 4 a 4
B 7
A a 16

Numerus A ſit primus ad numerum B. dico quod quadratus eius A a, ad eundem B primus erit. Repetatur numerus A.

Demonſtr. Cum numerus A ſit primus ad B, etiam numerus a ad eundem primus erit; ergo (*per præcedentem*) productus ex A in a, ſeu quadratus numeri A ad B primus erit; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Si duo numeri, ad duos numeros uterque ad utrumque primi fuerint; etiam ab iis producti, primi inter ſe erunt.

A B
AB
C D
CD

Uterque numerus A & B, ad utrumque C, & D ſint primi: dico quod AB productus ex A in B, & CD productus ex C in D primi inter ſe erunt.

Demonſtr. Cum A & B ſint primi ad C, etiam AB primus erit ad C. (*per 26.*) Pariter AB & D primi erunt. Cum ergo C & D ad AB primi ſint, etiam CD & AB *per eandem* primi erunt. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint: etiam eorum quadrati, & cubi, & quadrato-quadrati, primi inter ſe erunt.

A 2 B 3
AA 4 BB 9
AAA 8 BBB 27
AAAA 16. BBBB 81

Numeri A & B ſint primi inter ſe; dico & AA, BB eorum quadratos primos eſſe, & AAA, BBB cubos & AAAA & BBBB quadrato-quadratos etiam inter ſe primos eſſe.

Demonſtr. Cum A & B ſint primi, etiam AA & B primi erunt (*per 27.*) & cum A A & B primi ſint (*per eandem*) BB & AA primi erunt. Rurſus cum A & B primi ſint etiam BB ad A primus erit; quare cum B, & BB ad A primi ſint, etiam BBB & ad A primus erit (*per 26.*) & BBB & AA, immo BBB & AAA primi erunt.

PROPOSITIO XXX.

Theorema.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint. Eorum aggregatum, ad utrumque primum erit. Viciſſim ſi aggregatum ad alterutrum primum ſit: numeri inter ſe primi erunt.

A B
A † B
C———

Numeri A & B inter ſe primi ſint, dico utrumque ſimul, nempe A † B ad utrumque. Si enim A † B non ſit primus ad A, eos metiatur communis menſura C.

Demonſtr. Cum numerus C metiatur totum A † B, metiatur & A, (*per axioma 11.*) metietur & reliquum B: ergo A & B non ſunt primi; contra ſuppoſitionem.

Viciſſim ſi A † B ſit primus ad A. dico quod A & B ſint primi inter ſe. ſi enim non ſint primi eos metiatur C qui metietur & A † B, ergo A † B & A primi non ſunt; contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

Si numerus primus, aliquem non metiatur; ad eum primus erit.

A B
C

Numerus primus A, ſeu quem ſola unitas metitur; non metiatur numerum B. dico quòd numerus A ad B primus erit. Si enim primus non eſſet ad B, haberent communem menſuram C: ergo numerus A non eſſet incompoſitus, contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

Si numerus primus, genitum ex multiplicatione duorum, metiatur; metietur ſaltem unum ex his numeris.

A 4 B 6
A B 24
C 3 . D 2

Numerum planum AB nempe productum ex multiplicatione numeri A in B, metiatur numerus primus C per D; dico quod metietur alterutrum A aut B.

Demonſtr. Si enim C non metitur numerum A, erunt (*per præcedentem*) C & A primi inter ſe, & (*per 23.*) minimi in ſua proportione; & cum C metiatur AB per D; C in D producet AB: ſed AB producitur etiam multiplicatione A in B: ergo (*per 17 hujus*) erit C ad A ut B ad D; & cum C & A ſint in ſua ratione minimi, metientur B & D, nempe C metietur ipſum B; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Compoſitum numerum, aliquis primus metitur.

A 6
B 2 C—

Sit numerus A compoſitus, habens ſcilicet partem aliquotam majorem unitate. dico quòd aliquis numerus primus eum metiatur.

Sit numerus B minimus eorum qui metiuntur numerum B, dico numerum B eſſe primum; ſi enim primus non eſſet cum metiretur aliquis minor C, qui (*per axioma* 11.) metiretur numerum C. ergo numerus B non eſſet minimus eorum qui metiuntur numerum B. quod eſt contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema.

Omnis numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur.

Si enim primus non eſt, erit compoſitus, ergo eum aliquis primus metietur (*per præcedentem.*)

PROPOSITIO XXXV.

Problema.

Quotlibet propoſitis numeris, invenire minimos illis proportionales.

A 4 B 6. C 10
D 2
E 2 F 3 G 5
H—I—K—
L—

Proponantur numeri A,B,C. ſintque quærendi minimi in eadem ratione. Quæratur maxima communis menſura numerorum A,B,C. (*per hujus*) quæ metiatur, ſeu dividat numeros A, B, C per numeros E,F,G, dico E, F, G & numeris A, B, C proportionales eſſe, & minimos eſſe in ſua proportione.

Demonſtr. Cum numerus D, multiplicando numeros E, F, G, producat numeros A, B, C; erunt (*per* 18.) A, B, C; D, E, F proportionales; addo minimos eſſe. Si enim non ſunt minimi in eadem ratione ſint H, I, K minimi in eadem ratione, metientes numeros A, B, C: ergo (*per* 21.) metientur eos per communem menſuram L: ergo L in H facit A, ſicut D in E facit A: ergo (*per* 19.) ita erit D ad L, ſicut H ad E ſed D eſt major quàm L cum ſit maxima communis menſura: ergo H major erit quam E: non eſt igitur H minor quàm E: ergo E,F, G ſunt minimi in ea ratione.

Coroll. Maxima communis menſura numerorum quorumcumque eos metitur per minimos in ea ratione.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema.

Duobus datis numeris, reperire minimum numerorum, quem illi metiantur.

A 4 B 7
AB 28.
C——
D——E—

Sint propoſiti numeri A & B; proponitur quærendus minimus numerus, quem A & B metiantur. Vel numeri A & B ſunt primi inter ſe, vel non ſunt: ſupponantur primi, ſitque A B productus ex A in B, dico numerum A B eſſe quæſitum. Primò cùm A multiplicando B faciat AB, A metietur AB, ſicut etiam B eundem metietur. Si A B non eſt minimus omnium quos A & B metientur, ſit C minor, quem A metiatur per E, & B per D. cùm ergo idem C fit ex A primo in E quartum, & ex B ſecundum in D tertium erit (*per* 19.) ut A ad B, ita D ad E, & cum A & B ſint primi atque adeò (*per* 23.) in ſua ratione minimi A æquè metietur D ac numerus B metitur numerum E. Et quia A multiplicans A & E, facit A B & C, erit (*per* 17.) ut B ad E ita A B ad C: ſed minor eſt quàm E, ergo & A B minor eſt quàm C. non ergo dari poteſt alius minor quàm A B, quem A & B metiantur.

A 4 B 6
C 2 D 3
E 12
F——
G—H—

Secundo numeri A & B non ſint primi, atque adeò nec minimi in ſua ratione. Inveniantur numeri C,D minimi in eadem ratione; tum multiplicetur A per D, vel B per C, idem numerus E producetur, (*per* 19.) cum numeri A; B,C, D ſint proportionales: Clarum eſt autem A & B metiri numerum E. Addo numerum E eſſe minimum quem numeri A & B metiantur. Si enim non eſt minimus, ſit numerus F eo minor, quem A metiatur per H & B per G, & cùm idem numerus F producatur ex multiplicatione A primi in H quartum & ex multiplicatione B ſecundi, in G tertium, erunt A, B, G,H proportionales ergo & proportionales erunt C, D & G,H; ſed C, D dicuntur minimi; ergo D minor eſt quam H, quare cum A multiplicando D minorem faciat E, & majorem H producat F. erit F major quam C D; quod probabitur de quocumque alio: ergo E minimus eſt omnium quos A & B metiuntur.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Si duo numeri aliquem metiantur; minimus quem ipſi metiuntur, eundem metietur.

A 4 B 6
C E
C. . . I. . . D
F 12

Numeri A & B metiantur numerum C, ſitque F minimus numerus quem numeri A, & B metiantur, dico quòd numerus F metitur numerum C. Cum enim F ſit minor quàm C D, auferatur ab eo quantum poteſt, & ſi fieri poteſt relinquat E D ſe minorem.

Demonſtr. Numeri A & B, metiuntur totum C D, ſed metiuntur C E, quem F metitur: ergo per 11 axioma metiuntur reliquum E D minorem quam F; quod eſt contra ſuppoſitionem cum F dicatur minimus omnium quos A & B metiuntur: ergo F metietur totum C D & nihil relinquet: quod erat demonſtrandum.

PROPO

PROPOSITIO XXXVIII.

Problema.

Datis tribus numeris, invenire minimum numerum quem illi metiantur.

A	B	C
3	4	5
D 12	E 60	
F——		

Proponantur tres numeri A, B, & C, quæritur minimus numerus. Quæratur (*per* 36.) minimus numerus, quem A & B metiantur, ſitque D: Si numerus C eundem metitur; perfectum eſt problema. Si verò C non metitur numerum D, quæratur (*per eamdem*) numerus E, minimus quem C & D metiantur; & cum A & B metiantur numerum D metientur & numerum E. dico numerum E minimum eſſe quem A, B & C metiantur: Sit enim ſi fieri poteſt numerus F minor quam E, quem numeri A, B & C metiantur.

Demonſtr. Cum numerus D ſit minimus quem metiantur numeri A, B, ille (*per præcedentem*) metietur numerum F. ſed C ſupponitur eundem F metiri; ergo ſi F ſit minor quàm E, E non eſt minimus quem C & D metiantur: contra ſuppoſitionem. Nullus igitur erit minor quàm E, quem numeri A, B, & C metiantur.

Coroll. 1. Eodem artificio propoſitis quotcumque numeris inveniemus minimum quem illi metiantur.

Coroll. 2. Si tres numeri aliquem metiantur, etiam minimus quem illi metiuntur, eundem metietur. Oſtendimus enim D metiri numerum F; & cum C & D metiantur eundem F, & E ſit minimus omnium quos C & D metiuntur, etiam E ipſum F metietur.

PROPOSITIO XXXIX.

Problema.

Si numerus numerum per quotientem metiatur: quotiens erit pars menſi, à metiente denominata.

Unitas		
A 3	B 12	
C 4		

Numerus A numerum B metiatur per numerum C, dico quòd C erit pars numeri B denominata à numero A hoc eſt unitates numeri A oſtendent, ipſius B qualis ſit pars numerus C.

Demonſtr. Cùm numerus A metiatur numerum B per C, hoc eſt toties A invenitur in B quot ſunt unitates in C unitas ita erit ad C ut A ad B; & alternando ita erit unitas ad B ut C ad B, hoc eſt, toties C erit in B quot ſunt unitates in A. ergo A denominat ſeu indicat per ſuas unitates, qualis pars numeri B ſit numerus C. ut in hoc exemplo eſt tertia pars.

PROPOSITIO XL.

Theorema.

Si numerus partem habuerit; eum metietur aliquis numerus ab ea denominatus.

A 24	
B 3.	C 8.

Numerus A habeat partem aliquam B, dico quòd numerum A metietur aliquis numerus C à parte B denominatus.

Demonſtr. Cùm numerus B ſit pars numeri A aliquota, nempe quæ aliquoties repetita adæquat numerum A. ponatur quot ſunt unitates in C: ergo B, metietur numerum A per C: ergo per præcedentem numerus C erit pars à numero B denominata. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLI.

Problema.

Minimum numerum reperire, qui habeat partes à datis numeris denominatas.

A 2	B 3	C 4
	D 12	
E 6	F 4	G 3
	H	

Sit quærendus minimus numerus, qui partes habeat à numeris A, B, C denominatas. Inveniatur (*per* 38.) minimus numerus D quem numeri A, B, C metiantur, dico numerum D eum eſſe qui quæritur.

Demonſtr. Numeri A, B, C metiantur numerum D per numeros E, F, G; illi (*per* 39.) erunt partes numeri D à numeris A, B, C denominatæ. Quòd verò numerus D ſit minimus ita oſtendo, Sit enim alius minor H, qui dicitur habere partes à numeris A, B, C denominatas, quare (*per* 40.) numeri A, B & C: metientur numerum H: ergo D non eſſet minimus quem A, B, C metiuntur.

Coroll. Idem metiri aliquem numerum, & eum habere partes à metientibus denominatas.

EUCLI

LIDIS NTORVM OCTAVVS.

quadratum AA, faciatque cubum ſuum AAA, item BB multiplicet AB, faciatque AAB, item & BB facietque ABB. item B multiplicando AA facit AAB, & multiplicando AB facit ABB. item & BB facit BBB. Oſtendam eodem modo numeros AAA, AAB, ABB BBB, & eſſe continuè proportionales, & (*per* 26.) & *præcedentem* eſſe minimos in ſua ratione.

Coroll. Trium continuè proportionalium minimorum in ſua ratione, extremi primi ſunt & quadrati, & quatuor continuè proportionalium minimorum in ſua ratione extremi cubi ſunt & primi. Duo rationis datæ minimi A & B reliquos omnes metiuntur. Unitas A, AA, AAA ſunt continuè proportionales, ſicut & unitas, B, BB, BBB &c. Tot ſunt medii inter extremos quoſque, quot inter ipſos & unitatem.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si fuerint quotcumque continuè proportionales minimi in ſua ratione; eorum extremi primi erunt.

A, B, C, D
E, F
G H K L

Sint numeri A, B, C, D continuè proportionales, & minimi in ſua ratione, dico extremos A & D primos eſſe. Inveniantur (*per* 35. 7.) numeri E, F minimi in ea ratione, & (*per præcedentem*) totidem numeri G, H, K, L minimi in ea ratione E, F, quorum extremi G & L erunt primi per *coroll. præcedens.* ſed numeri G, H, K, L ſunt minimi ſicut A, B, C, D, ergo ſunt illis æquales: ergo A & B ſunt etiam primi.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Datas quotcumque rationes in minimis numeris diſparatas eaſdem in minimis numeris continuare.

A B C D
6. 5. 4. 3.
F 24 E 20 G 15
H K L

Sint datæ primò duæ rationes diſparatæ AB, CD datæ in minimis numeris, oportet invenire tres numeros minimos in datis rationibus, ita ut primus ad ſecundum ſe habeat ut A ad B, & ſecundus ad tertium ut C ad D. Inveniatur E minimus quem metiuntur C & B, fiatque ut B ad E ita A ad F; & ut C ad E ita D ad G: dico F, E, G eſſe minimos qui habeant datas rationes.

Demonſtr. Ita eſt ex conſtructione A ad F ut B

ad E : ergo alternando ita eſt A ad B ; ſicut F ad E. Pariter ita eſt C ad E , ut D ad G : ergo alternando ita eſt C ad D ut E ad G : ergo F, E, G ſunt in datis rationibus. Quòd verò F , E, G ſint minimi in ea ratione ſic oſtendo. Sint ſi fieri poteſt H. K. L minores in eadem ratione. Cum A,B ſint minimi in ſua ratione,metientur ipſos H & K (*per* 21. 7.) & B & C metientur K & L. Quoniam igitur B & C metiuntur K, etiam E minimus quem B & C metiuntur, metietur ipſum K (*per* 37.7.) ergo K non eſt minor quàm E, contra ſuppoſitionem.

Secundò dentur tres rationes in minimis numeris ; nempe AB, CD, EF , ſintque inveniendi quatuor numeri qui ſint minimi in dictis rationibus: ſit G minimus quem metiantur B & C ſitque ut B ad G,ita A ad H, & ut C ad D ita G ad K. Accidere poſſunt duo caſus. Vel enim E metietur numerum K, vel non metietur: ſi primum; fiat ut E ad K ita F ad L. Patet autem numeros H,G,K,L eſſe in dictis rationibus. Cum enim ita ſit A ad H ſicut B ad G,erit alternando A ad B ut H ad G.Pariter oſtendam ita eſſe G ad K ut C ad D,& K ad L ut E ad F. Quod verò ſint minimi in iiſdem rationibus,ita oſtendo. Sint enim ſi fieri poteſt alii minores M, N, O, P.

A	B ,	C	D	E	F
6	5	4.	3	3 .	2
H		G	K		L
24		20	15.		10
M		N	O		P

Demonſtr. Cùm A & B ſint minimi in ſuis rationibus,æquemetientur numeros M N (*per* 21.7.) Pariter C, D æquemetientur numeros N,O : ergo numeri B & C metientur numerum N, & cum G ſit minimus eorum quos B & C metiuntur,metietur numerum N:ergo N non eſt minor numero G: ergo neque cæteri minores erunt.

Sed numerus E non metiatur numerum K Invento numero L minimo quem E & K metiantur. Quoties K ipſum L metitur toties G ipſum O, & H ipſum M metiantur ; & quoties E ipſum L metitur; toties F metiatur numerum N:dico numeros M,O,L N eſſe in dictis rationibus minimos : nam H, G, K, numeros M , O , L metiuntur, æqualiter ſe habebunt M ad O ut H ad G ſeu ut A ad B. Pariter erit O ad L ut C ad D : & quia E & F numeros L & N æquemetiuntur erit L ad N ut E ad F. Quòd verò ſint minimi ita oſtendo. Si non ſunt minimi ſint alij minores P. R. S. T.

A	B ,	C,	D	E	F
6	5	4	3	2	3
H	G	K			
24	20	15			
M	O	L	N		
24	20	30	45		
P	R	S	T		

Demonſtr. Cum A, B ſint minimi in ſua ratione æquemetientur numeros P & R in eadem ratione exiſtentes (*per* 21. 7.) nempe B ipſum R. Pariter C & D metientur numeros R,S : ergo B & C metiuntur numerum R ; & cum G ſit minimus eorum quos metiuntur numeri B & C,numerus G metietur numerum R ; & cum G, K , R, S ſint proportionales , numerus K metietur numerum S,ſed etiam E metitur ipſum S ſicut F numerum T ; & cum E, F ſint in ſua ratione minimi & ſicut E ad F , ita S ad T , numerus L minimus quem E & K metiantur metietur numerum S (*per* 37. 7.) ergo S non eſt minor quam L : ergo neque alii P R S T : ergo M O L N ſunt minimi in ea ratione. Eodem artificio in minimis numeris continuabuntur quatuor, & quinque rationes.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Numeri plani habent rationem ex laterum rationibus compoſitam.

A	B	C	D
3	4	5.	6
A	B	C	D
	12		30
	B	C	
	20		

Sint numeri plani A B C D quorum latera A, B, C , D ; dico rationem numeri plani AB ad numerum planum C D componi ex ratione A ad C & B ad D. Numerus D multiplicet C faciatque BC.

Demonſtr. Quoniam B multiplicans C facit BC , & multiplicans A producit AB, erit AB ad BC ut A ad C (*per* 17.7.) Pariter cum C multiplicans B & D produxerit BC , & C D erit BC ad C D ut B ad D. quare AB , BC, C D ſunt deinceps proportionales in rationibus AC , & BD ; ſed ratio AB ad CD componitur ex rationibus AB ad BC,& BC ad CD (*per defin.*28.) ergo ratio AB , ad CD componitur ex ratione A ad C, & B ad D quæ ſunt latera numerorum planorum. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si numerorum deinceps proportionalium primus ſecundum non metiatur ; neque ullus ullum metietur.

A		B	C		D
16.		24.	36.		54
E	4	F 6	G	9	

Proponantur quotcumque numeri continuè proportionales; nempe ita ſit A ad B , ut B ad C, & C ad D ; & primus A non metietur ſecundum B:dico quòd nullus alium metietur. E primò quidem nullus ſequentem metietur, alioquin non eſſet ut A ad B , ita B ad C. ſed neque A metietur C, aut B numerum D. Quærantur enim tres numeri E, F, G minimi in ea ratione.

Demonſtr. Erunt extremi E & G inter ſe primi (*per* 3 *hujus*) & cum ſit ut A ad B ita E ad F, & ut B ad C ita F ad G , erit ex æquo ut A ad C , ita E ad G ; ſed E non metitur numerum G; ergo A non metitur numerum C. Eodem modo oſtendam numerum B non metiri numerum D ; & acceptis quatuor proportionalibus minimis in ſua ratione , oſtendam A non metiri numerum D nempe tertium à ſe, atque ita deinceps.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si numerorum continuè proportionalium aliquis alium diverſum à ſecundo metiatur ; etiam primus ſecundum metietur.

Si enim primus ſecundum non metiretur , nec ullum metiretur (*per præcedentem*) quod eſſet contra ſuppoſitionem.

PROPQ

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si inter unitatem & duos numeros totidem cadant medii proportionales, inter ipſos totidem exiſtent.

Inter unitatem & numerum AAA tot ſint medii, quot inter eandem unitatem, & numerum BBB; dico quod inter AAA & BBB totidem numeri medii proportionales in eadem ratione A ad B, qui ſunt minimi in ſua ratione. Sunt enim numeri propoſiti, aut ſimiliter quadrati aut ſimiliter cubi:nempe ſi fiat progreſſio propoſitionis ſecundæ exurgent hi numeri,& inter eos tot erunt medii, quot inter ſingulos, & unitatem.

Coroll. Si fuerint duo ordines continuè proportionalium ab unitate procedentes, erunt AA & BB inter ſe in duplicata ratione A ad B, & AAA,BBB in triplicata ratione,cum inter primos interiiciatur unus medius proportionalis, inter ſecundos duo. pariter erit unitas ad AA in duplicata ratione unitatis ad A & ita de reliquis.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Inter duos quadratos numeros unus cadit medius proportionalis, & ratio quadrati ad quadratum duplicata eſt rationis laterum.

A	B		
2	3		
AA	AB	BB	
4	6	9	
AAA	AAB	ABB	BBB
8	12	18	27

Proponantur duo numeri quadrati AA, BB, producti nempe ex multiplicatione A in A : & B in B;dico inter numeros AA & BB cadere unum medium proportionalem, nempe A multiplicet B & faciat A B, dico A B eſſe medium inter AA & BB.

Demonſtr. Cum A multiplicans ſeipſum, & numerum B fecerit AA & AB, erit (*per* 17. 7.) AA ad AB, ut A ad B,pariter cum B multiplicans A & ſeipſum fecerit AB & BB,ita erit AB ad BB ut A ad B. ergo ita eſt AA ad AB, ut AB ad BB, ergo AB eſt medius.

Item cum ſint tres numeri AA, AB, BB in continua ratione lateris A ad B, erit AA ad BB in duplicata ratione A ad B. *per defin. duplicatæ rationis.*

Coroll. Hic medius proportionalis eſt numerus integer, quem ſcilicet metiuntur duo numeri integri.

Ex quo poſſet probari incommenſurabilitas diagonalis quadrati cum latere ejus. Si enim ſint commenſurabiles, ſe haberent ad invicem ut numerus ad numerum nempe ut numerus A ad B, & eorum quadrati ut AA ad BB : ſed eorum quadrati (*per* 47. 1.) ſe habent ut 1 ad 2 ergo AA ad BB ſe habent ut 1 ad 2 : ſed inter 1 & 2 nullus cadit medius proportionalis, ergo inter duos numeros quadratos nullus caderet medius proportionalis,

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Inter duos cubos cadunt duo medij proportionales, & eorum ratio triplicata eſt rationis laterum.

A	B		
2	3		
AA	AB	BB	
4	6	9	
AAA	AAB	ABB	BBB
8	12	18	27

Numerus A multiplicans ſeipſum faciat quadratum ſuum AA. & iterum multiplicans ſuum quadratum faciat AAA. pariter B efficiat ſuum cubum BBB. A multiplicet AB faciatque AAB. & B eundem A B multiplicans faciat ABB. iam ſupra oſtendimus AAA, AAB, ABB & BBB eſſe continuò proportionales in ratione A ad B. ergo inter cubos cadunt duo medij proportionales, in ratione laterum. ergo ratio cuborum triplicata eſt rationis laterum.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Numerorum proportionalium quadrati, cubi &c. ſunt etiam proportionales.

A	B	C
AA	BB	CC
AAA.	AAA.	BBB

Sint numeri A, B, C proportionales; hoc eſt ita ſit A ad B, ut B ad C. dico numerorum A B C quadratos, & cubos proportionales eſſe.

Demonſtr. Ratio AA ad BB eſt duplicata rationis A ad B (*per præcedentem*) ſeu B ad C. ſed ratio BB ad CC eſt duplicata rationis B ad C ergo ratio AA ad BB eadem eſt ac ratio BB ad CC. quod eſt numeros AA,BB,CC eſſe continuò proportionales.

Idem dicito de numeris AAA, BBB, CCC. ſeu cubis.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Si quadratus numerus, numerum quadratum metiatur; radix ejus radicem alterius metietur. & viciſſim ſi radix radicem metiatur; quadratus quadratum metietur.

AA	AB.	BB
4.	12.	36.
A		B
2.		6.

Numerus quadratus AA, numerum quadratum BB metiatur: dico quòd latus ejus, ſeu radix A, radicem B metietur. A multiplicando B faciat A B.

Demonſtratio. (*Per* 11.) AA,AB,BB ſunt continuo proportionales in ratione A ad B,& cum AA metiatur BB ex ſuppoſitione, (*per* 7. 8.) AA metietur AB. ſed ut AA ad AB, ita A ad B, ergo A metietur B quod erat primum.

Viciſſim ſi A metiatur B, AA metietur AB: ut autem AA ad AB,ita AB ad BB: ergo AB metietur BB, ergo (*ex* 11 *axiomate*) AA metietur BB.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si cubus cubum metiatur; & radix ejus radicem metietur, & viciſſim.

AAA	AAB	ABB	BBB
8.	24.	72.	156.
	A	B	
	2	6	

Cubus AAA cubum B B B metiatur: dico quòd radix A radicem B metietur. inter cubos AAA & BBB duo cadunt medij proportionales AAB,ABB, in ratione A ad B (*per* 7. 7.) ſed AAA metitur BBB ex conſtructione; ergo (*per* 7. *hujus*) primus AAA, metitur ſecundum AAB. Sed ut AAA ad A B; ita A ad B: ergo A metitur B quod erat primum.

Secundò A metiatur B, ergo AAA metietur AAB. ergo *per* 6 AAA metietur AAA. quod erat ſecundum.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Si quadratus quadratum non metiatur; neque radix ejus radicem metietur, & viciſſim.

Si enim radix radicem metiretur, quadratus ejus quadratum metiretur (*per* 14.) contra ſuppoſitionem. pariter ſi radix radicem non metiatur nec quadratus quadratum, quia ſi quadratus quadratum metiretur, radix etiam radicem metiretur contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XVII.

Si cubus cubum non metiatur, nec radix radicem, & viciſſim.

Demonſtratio eſt eadem (*per* 15.)

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Inter planos numeros ſimiles unus medius proportionalis cadit, & ratio plani ad planum ſimilem eſt duplicata rationis homologorum laterum.

AB	BC	CD	
12	24	48	
A	B	C	D
3	4	6	8

Sint numeri plani ſimiles, orti ex multiplicatione numerorum proportionalium, nempe ſit A ad B, ut C ad D; & ex A in B fiat A B ſicut ex C. in D fiat CD. B multiplicando C faciat BC.

Demonſtr. Ita eſt A ad B, ut C ad D ex conſtructione: ergo ita eſt permutando ut A ad C; ita B ad D: Eſt autem A B ad B C, ut A ad C, (*per* 17. 7.) ergo ita eſt A B ad B C ut B ad D, ſed ita eſt BC ad CD ſicut B ad D per eamdem: ergo ita eſt A B ad BC, ut BC ad CD, ergo BC eſt medius proportionalis inter numeros planos A B, CD & cum ratio AB ad BC ſit ut A ad B quæ ſunt homologa latera: erit ratio numeri A B ad CD duplicata rationis A ad B homologorum ſcilicet laterum, quod erat demonſtrandum.

Digitized by Google

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Inter duos ſolidos ſimiles duo cadunt medij proportionales. Et ratio ſolidi ad ſolidum eſt duplicata rationis homologorum laterum.

ABC. BCD. CDE. DEF.
48 72 108 162

A B C DEF
2 4 8 3.6.9.

Solidos numeros ſimiles vocamus, quæ ex duplici multiplicatione proportionalium laterum oriuntur. Sint ergo tales ſolidi ABC, DEF, ſintque latera A,B,C; D,E,F proportionalia, nempe ita ſit A ad B ſicut D ad E; & B ad C ſicut E ad F. dico ſi A multiplicet B & productum ducas in C, fiatque ABC, & pariter ducas D in E, & productum in F, fiatque D E F, quod inquam inter ABC, DEF cadent duo medij proportionales in ratione laterum homologorum A ad D, fiat numerus BCD & CDE.

Demonſtratio. Ita eſt ABC ad BCD, ſicut A ad D (*per* 17. 7.) cum idem numerus B C multiplicet numeros A & B, pariter ita eſt B C D ad CDE ſicut B ad E: Eſt autem B ad E, ut A ad B; nam cum ita ſit A ad B, ut D ad E, erit permutando ut A ad D, ita B ad E & C ad F, pariter ita eſt CDE, ad DEF ut C ad F: ergo ut A ad D; ergo ABC, BCD, CDE, DEF ſunt quatuor numeri continuo proportionales in ratione A ad D, ergo inter ABC, DEF duo medij cadunt proportionales in ratione A ad D: ergo eſt ratio triplicata: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Si inter duos numeros cadat unus medius proportionalis ſimiles plani erunt.

AB BC CD
18 24 32
A B C D
3 6 4 8

Inter A B & CD cadat medius proportionalis BC, ſitque ut AB ad BC, ita BC ad CD, dico numeros AB, CD eſſe ſimiles planos. Sumantur minimi numeri A & C in ratione AB ad BC.

Demonſtr. Numeri A & C ut minimi in ratione AB ad BC (*per* 21. 7.) æquè metientur numeros AB, BC. Metiantur per B pariter A & C, erunt minimi in ratione BC ad CD, ſupponitur enim eſſe ut AB ad BC, ita BC ad CD; æquè metientur numeros B C & C D metiantur per D. quare B multiplicans A & C, facit A B & B C. Sunt igitur (*per* 17.) AB ad BC, ut A ad C. Pariter C multiplicans B & D facit BC, CD ita erit B ad D ut BC ad CD: Sed ita eſt AB ad BC, ut BC ad CD: ergo ita eſt A ad C, ſicut B ad D, & permutando ut A ad B ut C ad D: ergo ſunt plani ſimiles, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Si inter duos numeros cadant duo medij proportionales: ſimiles ſolidi erunt dicti numeri.

ABC BCD, CDE DEF
24 72 216 648
G H K
1 3 9
1 1 24. 3. 3. 72
A B C E F D

Inter numeros ABC, DEF cadant duo medij proportionales B C D, C D E Sumantur (*per* 35. 7.) tres numeri G, H, K, minimi in ratione ABC, BCD, CDE, DEF, eruntque G & K plani ſimiles (*per praecedentem*) cum mediet inter eos numerus K. Sint latera numeri G, numeri A & B, & numeri K ſint latera E F, prioribus proportionalia.

Demonſtr. G, H, K ſunt minimi in ratione ABC, BCD, CDE, ergo eos æquemetientur (*per* 21. 7.) metiantur per C, & cum iidem G, H, K ſint minimi in ratione BCD, CDE, DEF eos æquè metientur. Ponantur metiri per D, hoc eſt C multiplicans G, H, K, producit ABC, BCD, CDE, & D multiplicans G, H, K producit B C D, CDE DEF: ſed G factus eſt ex multiplicatione mutua laterum ſuorum A, B & K ex multiplicatione ſuorum laterum D E F: ergo A numerus ſolidus eſt productus ex multiplicatione laterum A B G & D E F ex multiplicatione numerorum D E F; quia verò C & D multiplicantes H faciunt BCD CDE, ita erit C ad D ut BCD ad CDE, ſeu ut G ad H, ſed ut G ad H, ita A ad E, aut B ad F, cum H ſit medius inter G & K, & A, B, E, F, ſint latera numerorum G & K; & (*hoc per* 19. *hujus.*) ergo ita eſt A ad E, B ad F, C ad D; ergo ABC, DEF ſunt numeri ſolidi ſimiles, habentes ſcilicet ſua latera proportionalia; quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Si primus trium continuè proportionalium quadratus fuerit; & tertius quadratus erit.

A B C
4 6 9
D E F G
2 2 7 7

Numerorum A, B, C continuè proportionalium, primus A quadratus ſit: dico quartum C quadratum eſſe.

Demonſtr. Cùm inter A & C cadat ex conſtructione unus medius proportionalis B, erunt (*per* 20. *hujus*) A & C plani ſimiles: nempe ſi D, E, ſint latera plani A, & F, G latera plani C, erit ut D ad F, ita E ad G, & permutando ut D ad E, ita F ad G, ſed D & E ſunt æqualia: ergo & latera F & G erunt æqualia, ergo numerus C eſt quadratus.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Si quatuor continuè proportionalium primus numerus cubus fuerit; quartus cubus erit.

A B C D
8 12 18. 27

Proponantur quatuor numeri continuè proportionales, ſitque primus

primus A cubus ; dico quartum D cubum eſſe.

Demonſtr. Cum inter A & D cadant duo medii proportionales,erunt (*per* 21 *hujus*) numeri A & D duo cubi ſimiles, ſed cum A ſit cubus : B etiam cubus erit.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Si numerus quadratus ad numerum eam rationem habeat quàm quadratus ad quadratum ſecundus quadratus erit.

A	F	B
16.	24	36
C	E	D
4	6	9

Numerus quadratus A ad numerum B eam rationem habeat quàm quadratus C ad quadratum D; dico numerum B quadratum eſſe.

Demonſtr. Inter C & D unus cadit medius C (*per* 11.8.) ergo (*per* 8. 8.) inter A & B unus cadit medius F : ergo (*per* 22.8.) numerus B quadratus erit.

Coroll. Ratio quadrati ad non quadratum exprimi non poteſt numeris quadratis ; alioquin ſecundus quadratus eſſet.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Si cubus ad numerum, eandem rationem habeat quàm cubus ad cubum, ſecundus cubus erit.

A	G	H	B
8	12	18.	27
C	E	F	D
64	96.	144.	216

Cubus A ad numerum B eandem rationem habeat,quàm cubus C ad cubum D, dico numerum B cubum eſſe.

Demonſtr. Cum A ſit ad B ut C ad D,& (*per* 12.8.) inter cubos C & D cadant duo medii proportionales E,& F ; inter A & B cadent etiam duo medii (*per* 8. 8.) ergo (*per* 23. 8.) numerus B cubus erit.

Coroll. Ratio cubi ad non cubum exprimi non poteſt numeris cubis ; alioquin ſecundus numerus, qui ſupponitur non cubus, eſſet cubus.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Similes plani eam inter ſe rationem habent, quàm quadratus numerus ad quadratum.

A	E	B
10	20	40
C	F	D
1	2	4

Numeri A & B ſint plani ſimiles; dico quod ratio A ad B eadem eſt ac quadrati numeri ad quadratum; hoc eſt dari duos numeros quadratos, quorum primus ad ſecundum eandem rationem habeat quam A ad B.

Demonſtr. Cum numeri A & B ſint plani ſimiles, inter eos cadet unus medius proportionalis E (*per* 18. 8.) Sumantur tres numeri minimi in ratione continua A, E, B, qui ſint C, F D. (*per prop.*2. 8.) erunt C & D quadrati, eſt autem ut A ad B,ita C ad D ; ſupponitur enim eſſe A ad E ut C ad F, & E ad B ut F ad D : ergo ex æquo ut A ad B ita C ad D : quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Similes ſolidi eam rationem habent quam cubus ad cubum.

A	C	D	B
10	20.	40.	80
E	G	H	F
1	2	4	8

Sint duo numeri ſolidi ſimiles A & B;dico quòd ita ſe habeant A ad B ut cubus ad cubum, ſeu poſſe inveniri duos cubos quorum primus ad ſecundum, eam rationem habeat, quàm A ad B.

Demonſtr. Cùm A & B ſint ſolidi ſimiles, cadent inter eos duo medii proportionales C & D. Sumantur quatuor minimi numeri, in continua ratione A ad C,& C ad D : (*per* 2 *hujus*) extremi E & F cubi erunt. Cum autem ſit ut A ad C ita E ad G ; & ut C ad D, & D ad B ita G ad H, & H ad F ; erit ex æquo ut A ad B ita E ad F ; nempe ut cubus E ad cubum F, quod erat demonſtrandum.

EUCLI

EUCLIDIS ELEMENTORVM LIBER NONVS.

PROPOSITIO PRIMA.

Theorema.

Duo ſimiles plani ſe invicem multiplicantes quadratum producunt.

A	C	B
6	12	24
AA	D	AB
36.	72.	144.

Duo plani ſimiles ſe invicem multiplicantes producant numerum AB, dico eum quadratum eſſe. Numerus A ſe multiplicet, producatque ſuum quadratum AA.

Demonſtr. Cùm A multiplicando A & B producat numeros AA, & AB, erit AA ad AB ut A ad B (*per* 17. 7.) & cùm A & B ſint plani ſimiles, inter eos cadit unus medius (*per* 18. 8.) ergo & inter AA & AB cadet unus medius D (*per* 8.8.) & cùm AA ſit quadratus, erit (*per* 22. 8.) AB numerus quadratus.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si duo numeri ſe invicem multiplicantes quadratum gignant; ſimiles plani erunt.

A	C	B
6	12	24
AA	D	AB
36.	72.	144.

Numeri A & B ſe multiplicantes producant numerum quadratum AB, dico A & B eſſe ſimiles planos. A ſe multiplicet, faciatque ſuum quadratum AA.

Demonſtr. (*Per* 11.8.) inter numeros quadratos AA, & AB cadit unus medius D, & cum A multiplicans A & B produxerit AA & AB, erit AA ad AB, ut A ad B (*per* 17.7.) ergo (*per* 8.8.) inter A & B cadet medius proportionalis: ergo (*per* 20. 8.) numeri A & B ſunt plani ſimiles.

Coroll. 1. Si duo quadrati ſe multiplicent, quadratum producent, cùm ſint plani ſimiles.

Coroll. 2. Si duo numeri quadratum producant, & unus fuerit quadratus, alter quadratus erit.

Coroll. 3. Si unus quadratus non ſit, nec alter quadratus erit.

Coroll. 4. Si duo numeri non quadratum producant, & unus quadratus ſit, alter quadratus non erit; alioquin quadratum producerent.

Coroll. 5. Quadratus & non quadratus non quadratum producunt.

PROPOSITIO III.

Theoremà.

Cubus ſe ipſum multiplicans cubum producit.

A·A A
AA
B A
1

Cubus A ſeipſum multiplicans producat numerum B, dico numerum B cubum eſſe. Sit latus ſeu radix cubi A A A, numerus A qui ſeipſum multiplicans producat quadratum AA.

Demonſtr. Ex (*prop.* 23. 8.) ſunt 1. A. AA, AAA continuè proportionales, ergo inter unitatem & cubum AAA cadunt duo medii. item cum AAA multiplicando ſeipſum, & unitatem fecerit numerum B & ſeipſum, ita erit (*per* 17. 7.) unitas ad AAA, ut AAA ad B: ergo inter AAA & B cadent duo medii (*per* 8. 8.) & cùm primus AAA ſit cubus, Secundus B (*per* 23. 8.) cubus erit: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Cubus multiplicans cubum producit cubum.

A	B
AA	AB

Cubus A, multiplicando cubum, B producat numerum AB, dico numerum AB cubum eſſe. A ducatur in A, fiatque AA.

Demonſtr. Cùm A ductus in A & B producat AA & AB erit (*per* 17. 7.) ut A ad B ita AA ad AB. ſed (*per* 12. 8.) inter A cubos A & B duo cadunt medii, ergo & inter AA, AB. & cum AA ſit cubus. AB (*per* 23. 8.) cubus erit.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si cubus multiplicans aliquem numerum faciat cubum; multiplicatus cubus erit.

A	B
AA	AB

Cubus A multiplicans numerum B producat numerum AB cubum, dico numerum B cubum eſſe, A ducatur in ſe faciatque AA.

Demonſtr. (*Per* 3.) AA cubus erit; erit item ut in ſuperiori A ad B ut cubus AA ad cubum AB, ſed (*per* 12. 8.) inter AA & A B cadunt duo

medij

medij proportionales: ergo (*per* 8.8. inter A & B cadunt duo medij, & cum A ſit cubus, erit (*per* 23.8.) numerus B cubus.

Coroll. Cubus non cubum multiplicans facit non cubum, alioquin multiplicatus eſſet cubus. Si cubus multiplicans numerum facit non cubum, ille non cubus erit.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si numerus in ſe ductus facit cubum; & ipſe cubus erit.

A
AA. AAA

Numerus A ductus in A faciat cubum AA, dico quòd ipſe cubus erit. A in AA producat AAA.

Demonſtr. Cum A multiplicando AA fecerit AAA, erit numerus AAA cubus *ex definitione cubi*, quare cum A in AA fecerit cubum AAA, etiam cubus AA multiplicans numerum A facit cubum AAA (*ergo per* 5.) A cubus erit.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Compoſitus numerus, multiplicans quemvis numerum, generat ſolidum.

A B C
6 11 66
D E
2 3

Numerus compoſitus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C, dico C eſſe ſolidum.

Demonſtr. Cum numerus A ſupponatur compoſitus, eum præter unitatem metietur aliquis numerus (*per defin.*13.) Sit ille D qui metiatur eum per E, quare D multiplicando E producet A, & numerus B multiplicando productum A, producit C: ergo numerus C oritur ex multiplicatione numerorum D, E, B. Ergo ex defin. ſolidus eſt: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si fuerit ſeries continuò proportionalium ab unitate incipiens, ſecundus ab unitate quadratus erit: & alternatim omnes. Tertius ab unitate cubus eſt, & duabus ſemper intermiſſis cæteri. Sextus ab unitate cubus ſimul, & quadratus eſt & quinque intermiſſis cæteri.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
A B C D E F G H K L M N O
1 2.4.8.16.32.64.128.256.512.

Sit ſeries continuè proportionalium incipiens ab unitate, dico primò numerum B ſecundum ab unitate, quadratum eſſe; Cùm enim ſit 1 ad A ita A ad B, numerus ſub A, & ex B in 1 æquatur quadrato numeri A medij (*per* 20. 7.) Sed numerus ex B in unitatem eſt ipſe numerus B cum unitas nihil immutet, ergo numerus quadratus eſt.

Secundò dico B, D, F, H quadratos eſſe, ſunt enim B, C, D continuè proportionales & B primus quadratus eſt: ergo tertius quadratus erit, nempe D, & F, & H, & L, & N.

Tertiò C cubus eſt, quia ita eſt 1 ad A ut B ad C, ſed unitas metitur A per ipſum A: ergo & B metitur C per A: ergo A multiplicando ſuum quadratum B efficit numerum C; ergo C cubus eſt: & cum C, D, E, F ſint continuè proportionales & primus ſit cubus, erit & F cubus (*per* 23. 8.) idem dico de K, N & C.

Quartò numerus F eſt oſtenſus ſimul quadratus & cubus ſicut N, intermiſſis nempe quinque terminis G, H, K, L, M.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

In ſerie continuè proportionalium ab unitate incipientium, ſi primus quadratus ſit, reliqui omnes erunt quadrati. Si primus eſt cubus reliqui erunt cubi.

1 A,B,C,D,E,F,G.

Sit ſeries continuè proportionalium, ſitque primus A quadratus; dico B etiam quadratum eſſe, & reliquos omnes.

Demonſtr. Ita eſt A 1 ad A ſicut A ad B: ergo B in 1 ſeu B, cum unitas nihil immutet æquatur quadrato numeri A: pariter cum ita ſit 1 ad A ut B ad C, A in B æquatur 1 in C, id eſt numero C, quare A multiplicat omnes numeros ut producat ſequentes. Sed A eſt quadratus, & B quadratus oſtenſus eſt: ergo & C quadratus erit. Idem oſtendam de aliis.

Secundò ſi A cubus ſit, & A ſe multiplicando facit B, erit B etiam cubus (*per* 3.9.) ita A cubus in B cubum, faciet cubum C (*per* 4.9.)

PROPOSITIO X.

Theorema.

In ſerie continuè proportionalium ab unitate incipiente, ſi primus quadratus non ſit; neque alij præter ſecundum, quartum, ſextum, quadrati erunt. Si primus cubus non ſit, nec alij præter tertium, ſextum, nonum, cubi erunt.

Sit ſeries continuè proportionalium, ab unitate incipiens, & primus numerus A non ſit quadratus; dico nullum alium præter ſecundum, quartum, ſextum, &c. eſſe quadratum. Sit enim ſi fieri poteſt nempe E; cum ita ſit E ad D ut B ad A, & E, D & B ſint quadrati, erit etiam A quadratus (*per* 18. 9.) contra ſuppoſitionem.

Secundò ſi in eadem ſerie primus A cubus non fuerit, dico quod præter tertium C ſextum F, nonum, &c. nullus alius cubus erit; ſit enim ſi fieri poteſt alius numerus G cubus, cùm ita ſit G ad F ut C ad B, & tres G, F & C dicantur cubi, erit & B cubus (*per* 25. 8). Similiter oſtendam & A cubum eſſe contra ſuppoſitionem; non eſt ergo G cubus. Similiter oſtendam E cubum non eſſe, aut alium quemcumque; exceptis iis quos ſuprà recenſui.

PROPO

PROPOSITIO XI.

Theorema.

In ſerie continuè proportionalium ab unitate incipiente; quilibet minor majorem metitur per aliquem qui eſt intra ſeriem.

Unitas A, B, C, D, E, F, G, H.
3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

Proponatur numerus G major, & C minor; dico quod C metietur numerum G per aliquem numerum qui eſt in ſerie. Inter C & G ſint tres numeri, & ſumantur totidem inter unitatem & D.

Demonſtr. Quia ita eſt unitas ad D ſicut C ad G, ut probatur ex æqualitate; productus ex C in D æquabitur producto ex unitate in G ſeu numero G (*per* 19. 7.) ergo C metietur G per numerum D.

Coroll. Quantùm metiens diſtat ab eo quem metitur nempe G, tantùm is per quem metitur nempe D, diſtat ab unitate. In eadem ſerie numerus C ſeipſum multiplicans producit numerum F tantum ab ipſo diſtantem quantùm ipſe diſtat ab unitate. Si duo numeri ſeriei ſe invicem multiplicent producent numerum qui tantum diſtet ab uno, quantùm alter diſtat ab unitate.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Si fuerit ſeries numerorum continuè proportionalium ab unitate incipiens, numerus primus metiens ultimum metietur & eum qui proximus eſt unitati.

A B C D
1. 10. 100. 1000. 10000
E H G F
5 20 200 2000

Sit ſeries continuè proportionalium A, B, C, D ab unitate incipiens; ſitque numerus E primus qui metiatur ultimum D; dico quod idem numerus E metietur primum A. Si enim non metiatur; cum A ſit primus, erunt A & E primi inter ſe primi (*per* 31. 7.) quod tamen oſtendo implicare, cum ſequatur quod E metiatur ipſum A, atque adeo non ſit primus ad A. Numerus enim E metiatur numerum D per numerum F; quare cum idem numerus D fiat ex A in C qui ex E in F, ita erit (*per* 19. 7.) primus A ad E ut F ad C. Et cum A & E inter ſe primi ſint, erunt minimi in ſua ratione, & æquemetientur numeros A quidem ipſum F, & E ipſum C. (*per* 23 *&* 21 *ſeptimi.*) E metiatur C per G, ita ut E in G producat C; ſed idem C producitur ex A in B. ergo (*per* 19. 7.) ita erit A ad E ſicut G ad B; & cum A & E ſint primi, ſeu minimi in ſua ratione, æquemetientur G & B; nempe A ipſum G, & E ipſum B. numerus E metiatur numerum B per numerum H, hoc eſt E in H producat B. ſed B producitur etiam ex A in A; ergo ita erit A ad E ſicut H ad A. Et cum A & E ſint primi, & minimi in ſua ratione, æquemetientur numeros H & A; nempe A ipſum H, & E ipſum A; ergo E metitur ipſum A: quod erat demonſtrandum.

Artificium hujus demonſtrationis hoc habet peculiare, nempe ex eo quod E & A ſint numeri primi, concludat non eſſe numeros primos.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si in ſerie continuè ab unitate proportionalium, unitati proximus primus ſit; maximum nullus metietur præter eos qui ſunt in ſerie.

A B C D
Unitas 5 25 125 625
E F H G K

Sit ſeries continuè proportionalium, ab unitate incipiens; ſitque A proximus unitati, numerus primus: dico quòd maximum D nullus numerus metietur præter eos qui ſunt in ſerie. Si enim id fieri poteſt numerus E metiatur numerum D; vel numerus E, erit primus, vel compoſitus, ſed neutrum admitti poteſt; non primus: ſi enim E eſſet primus (*per præcedentem*) metiretur numerum A, qui tamen primus ſupponitur. Non etiam eſt compoſitus ſaltem diverſus à 6 poſitis in ſerie. Si enim ſit compoſitus, eum metietur aliquis numerus primus non alius quam A. Sit enim ille F, cum F metiatur ipſum E, & E ipſum D; F quoque metietur ipſum D: ergo (*per præcedentem*) metietur numerum A quod fieri non poteſt, cum A ſit primus: ergo nullus alius metitur numerum E præter ipſum A.

Jam E metiatur D per H, & A eumdem D metitur per C; ita erit A ad E, ſicut H ad C (*per* 19 7.) ſed A metitur E, ergo H metitur C; debet autem H eſſe diverſus à numeris poſitis in ſerie; ſi enim H eſſet idem cum aliquo; ponamus cum B. Cum B metiatur D per aliquem contentum in ſerie (*per* 11. & H metiatur D per E, E eſſet contentus in ſerie; Item oſtendam ſicut oſtendi de numero E numerum H compoſitum eſſe, quem metiatur numerus A: H ergo metiatur C per G; debebit etiam G non contineri in ſerie, alioquin etiam H in ſerie contineretur. Cùm ergo H metiatur C per G, & A metiatur C per B, ita erit A ad H ſicut G ad B; ſed A metitur numerum H, ergo G metietur numerum B. Et oſtendam pariter numerum G eſſe compoſitum quem numerus A metiatur. Denique numerus G metiatur numerum B per K; ſed eundem numerum B numerus A metitur per A; ergo ita erit A ad G; ſicut K ad A ſed A metitur numerum G, ergo etiam K metitur numerum A quod eſt abſurdum cum A ſit numerus primus. Hoc autem abſurdum ſequitur ex eo quod poſitus fuerit numerus E diverſus ab iis qui ſunt in ſerie. Non ergo numerus E diverſus ab iis qui ſunt poſiti in ſerie.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Minimum numerum quem primi metiuntur; nullus alius numerus primus metietur.

A 30
B C D
2 3. 5
E F

Sit numerus A minimus quem metiantur numeri primi B, C, D dico quod nullus alius numerus primus metietur numerum A. Metiatur enim eum ſi fieri poteſt numerus E per F.

Demonſtr. E multiplicans F facit A; ergo (*per* 32. 7.) quilibet B, C, D metietur alterutrum numerorum E, F, non numerum E, qui primus ſup-

ponitur, ergo numerum F, qui minor eſt quàm A: quod eſt contra ſuppoſitionem, quæ ponit numerum A eſſe minimum quem numeri primi B,C,D metiantur.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si fuerint tres continuè proportionales in ratione ſua minimi, dico duos quoſlibet ſimul ſumptos ad reliquum primos eſſe.

A B
2 3
AA AB BB
4 6 9

Sit ratio data A ad B, & A & B minimi & conſequenter primi (*per* 24. 7.) ſintque juxta (*prop.* 2. 8.) dati tres numeri minimi in ea ratione, nempe AA, AB, BB; dico AA † AB ad BB primum eſſe: item AB † BB ad AA. denique AA † BB ad AB primum eſſe.

Demonſtr. Cum A ad B primus ſit, etiam A † B. ad A aut ad B primus erit (*per* 30. 7.) Cum igitur tam A † B quàm A ad B primi ſint, productus ex eorum multiplicatione nempe AA † AB ad B primus erit. (*per* 26 7.) item quadratus BB ad AA † AB primus erit.

Oſtendam eodem modo BB † AB ad AA primum eſſe.

Denique cùm tam A quàm B ad A † B ſint primi, genitus ex A in B, ſeu AB ad A † B, primus erit (*per* 26. 7.) & (*per* 27.) AB ad quadratum ipſius A † B primus erit. Conſtat autem (*per* 4. 2.) quadratum A † B quadratis AA & BB, & duobus AB. Et (*per* 30. 7.) erit AB primus ad duos quadratos AA † BB, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Duobus numeris primis non datur tertius proportionalis.

A B B C
2 3 3

Sint dati numeri primi A & B. dico quod iis non invenietur tertius proportionalis. Repetatur numerus B.

Demonſtr. Cum numeri A & B ſint primi, erunt minimi in ſua ratione (*per* 21. 7.) ſed dicuntur B,C eſſe in eadem ratione, ergo (*per* 21. 7.) A & B æquemetientur ipſos B & C: nempe A ipſum B, quod fieri non poteſt cum A & B ſint primi.

Vel cum A, B, C ſint continuè proportionales quadratus A æqualis erit producto ex A in C, hoc eſt A metietur quadratum B per C; quod fieri non poteſt cum (*per* 26. 7.) A ſit primus ad quadratum numeri B.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Si in ſerie continuè proportionalium primus & ultimus primi inter ſe fuerint; Non poterit ulterius continuari hæc ſeries.

A B C D E

In ſerie A, B, C, D. continuè proportionalium extremi A & D ſint inter ſe primi; dico hanc ſeriem ulteriùs continuari non poſſe; hoc eſt non poſſe alium numerum E inveniri, nempe ita ſe habeat D ad E ſicut A ad B, aut C ad D. Si enim id fieri poteſt, ſit A ad B ut D ad E; erit permutando A ad D ut B ad E; ſed A & D ſunt primi inter ſe, ergo minimi in ſua ratione (*per* 23. 7.) ergo æquemetientur numeros B & E, nempe A numerum B & D numerum E. Et cum ſit ut A ad B ita B ad C, & C ad D B metietur C, & C metietur D. ergo A metietur D; contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Determinare an, duobus datis numeris, poſſit tertius proportionalis exhiberi.

C D
A B BB E
6. 4. 16.

Proponantur duo numeri C & D, ſi fuerint C & D primi, non poterit tertius proportionalis exhiberi (*per* 16. *hujus*) intelliguntur hæ propoſitiones in numeris integris. Supponantur A & B non eſſe primi inter ſe, ſed quadratus BB talis ſit ut eum non metiatur numerus A; dico quod non poterit tertius proportionalis exhiberi. Detur enim tertius proportionalis E, ergo (*per* 20. 7.) A in E æquabitur numero BB; hoc eſt A multiplicando E producet BB, hoc eſt A metietur BB per E; quod eſt contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Conſiderare an, tribus datis numeris, poſſit quartus proportionalis inveniri.

A B C D
2. 3. 6. 9.
B C
18

Proponantur tres numeri A,B,C; inquiritur an illis quartus proportionalis reperiri poſſit; ducatur B in C, fiatque B C. Si A metitur BC, metiatur per D: dico numerum D eſſe quartum proportionalem; nam cum A in D faciat BC, erit (*per* 20. 7.) ita A ad B, ut C ad D.

Si verò A non metiatur BC, non dabitur quartus proportionalis. Si enim dicatur eſſe D, nempe ita eſſe A ad B ut C ad D: ergo (*per* 20. 7.) A in D æquabitur C D, hoc eſt A per D metietur B C; contra ſuppoſitionem.

A B C D
2 3 5
B C
18

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Primi numeri ſunt plures quâcumque propoſitâ multitudine.

A B C
2. 3. 5.
D 30. E 31

Sint propoſiti numeri A. B. C. dico & alios dari poſſe.

Sit enim numerus D minimus quem metiantur numeri A, B, C, & huic addatur unitas, ut fiat numerus E, vel numerus E primus, vel compoſitus.

Si

Digitized by Google

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Si à pari ſubtrahatur par, reliquus par erit.

A B C A numero pari A auferatur par B; dico reliquum C eſſe parem: ſi enim C eſſet impar, additus pari B, faceret ſummam A imparem contra ſuppoſitionem: dicitur enim eſſe par.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Si à pari impar ſubtrahatur, reliquus erit impar.

Ex A pari auferatur impar B, dico reliquum C eſſe imparem. Si enim eſſet par cum impari B, ſummam A imparem efficeret (*per* 22.) quod eſt contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Si ab impare ſubtrahatur impar; reliquus erit par.

Si ab impare A auferatur B impar, dico reliquum eſſe parem. Si enim C eſſet impar cum impare B faceret ſummam A parem (*per* 23.) quod tamen eſſet contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Si ab impare ſubtrahatur, par reſtabit impar.

Si enim reſtaret par, cum pare ſubtracto, faceret totum parem, qui tamen ſupponitur impar.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Si par & impar ſe invicem multiplicent producunt parem.

Cum numerus impar per parem multiplicatur, ſumitur multitudo imparium æqualis numero pari, ſed talis multitudo (*per* 22.) facit parem: ergo par & impar invicem multiplicati faciunt parem.

Coroll. Pariter impar eſt par.

Coroll. 2. Par multiplicans parem facit parem.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Impar multiplicans imparem facit imparem.

Cùm numerus impar multiplicat imparem, fit multitudo impar, numerorum imparium: ſed hæc (*per* 23.) componit imparem: ergo impar multiplicatus per imparem producit imparem.

Coroll. 1. Numerus impar metitur imparem, per imparem.

Coroll. 2. Ex his demonſtrare poſſumus numerum ita dividi non poſſe, ut totus multiplicatus per unam partem, producat numerum æquale quadrato alterius partis; ut in lineis perficitur *Prop. 11. 2. Eucl.*

Sit enim ſi fieri poteſt numerus A B, qui ita ſecetur in C, ut genitus ex A B in B C, æquetur quadrato numeri A C. Supponatur primo A C par, & CB impar, & conſequenter A B impar per B C imparem producit imparem (*per* 29.) B C autem par, per ſeipſum producet parem: ergo non poſſunt eſſe æquales; quare hic caſus implicat contradictionem.

A——C—B
D——E—
E—

2. Si A C ſit impar & CB par, A B erit impar; quare A B impar per parem BC producet parem. A C autem impar ſeipſum multiplicans producit imparem, non ergo poſſunt eſſe æquales.

3. Uterque AC, CB impar ſit, totus A C par erit, qui multiplicatus per imparem producit parem. Sed A C impar multiplicans ſeipſum facit imparem, non ergo eſt æqualitas. Denique ſi ſint AC,CB pares qui ſolus caſus examinandus reſtat: ſint duo numeri D, E minimi in ratione AC, CB, qui per 24 primi inter ſe ſunt; ergo non ſunt ambo pares, alioquin eos metiretur binarius, quare reſpectu numerorum D & E recurrunt caſus præcedentes: nam cum ſit, ut AC ad CB ita D ad E, ita erit A B ad AC, ut D † E ad D; Et cum AB, AC, CB ſint continuè proportionales, erunt D†E, D & E continuè proportionales: quare (*per* 19.7.) genitus ex D † E in E æquabitur quadrato medij D, quod fieri non poſſe probavimus, cum D & E non ſint ambo pares.

PROPOSITIO XXX.

Theorema.

Si impar metiatur parem dimidium quoque ejus metietur.

A C
12 6.
B D E
3 4 2

Numerum parem A metiatur numerus impar B, dico quod dimidium ejus C idem numerus B metietur. Numerus impar B non poteſt metiri parem, niſi per parem metiatur: ergo eum per numerum D, qui cum ſit par habebit ſemiſſem 2.

Demonſtr. Eadem eſt ratio numeri D ad A, quæ ſemiſſis E ad ſemiſſem C, ergo numerus D æque metietur numerum A, ac E metietur numerum C, ſed D metitur A per B, ergo E metietur numerum C per eumdem B, ergo viciſſim B metietur numerum C per numerum E; quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

Si impar ad aliquem primus ſit; ad illius duplum primus erit.

A B
3 5
C 10 D—

Numerus A impar ſit primus ad numerum B, dico quod primus erit ad numerum C duplum ipſius B: ſi enim A non eſt primus ad C eos metiatur D, qui neceſſario impar erit: nam ſi par eſſet, etiam multiplicaret numerum imparem, faceret tamen parem (*per* 28.) cum tamen A ſupponatur impar: eſt ergo numerus D impar, qui cum metiatur C parem; metietur etiam ejus dimidium B (*per præcedentem*) ergo A & B, habent menſuram communem D; ergo non ſunt primi contra ſuppoſitionem.

Coroll. Si numerus impar fuerit primus ad aliquem numerum, erit etiam primus ad ejus quadruplum, octuplum, &c. hoc modò progrediendo in ratione dupla.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

Si dupla proportio continuetur; habentur omnes numeri pariter pares tantum.

1 A B C D E
2 4 8. 16. 32
K H G F

Proportio dupla continuetur quantum libuerit; dico quod omnes termini erunt pariter pares tantum.

Demonſtr. Ex (*prop.* 11.9.) binarius quemlibet metitur per aliquem qui ſit in ipſa ſerie, & qui ſit par; ergo quilibet eſt pariter par.

Secundo oſtendo eos eſſe pariter pares tantum, cum enim binarius ſit numerus primus, nullus numerus metietur hos terminos præter eos qui ſunt in ſerie. (*per* 13. 8.

3. Addo nullum alium eſſe pariter parem præter eos: ſit enim ſi fieri poteſt alius pariter par præter eos qui ſunt in ſerie, nempe F, qui cum ſit pariter par, debebit ejus ſemiſſis eſſe G par; alioquin binarius per imparem ſemiſſem, ſcilicet metiretur numerum F. Addo quod ſemiſſis numeri G nempe H, ſit adhuc par; ſi enim eſſet impar numerus 4 per imparem H metiretur numerum F, qui conſequenter eſſet impariter par. Idem dico de octava parte, donec tandem deveniamus ad unitatem, atque adeò per continuam duplationem inveniemus K, H, G, F eſſe numeros ſeriei.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Si numerus dimidium habeat imparem pariter impar eſt tantum.

A 10
B 5 C 2
D—E—

Numerus A habeat ſemiſſem imparem; dico A eſſe pariter imparem tantum. Patet primò cum eſſe pariter imparem, cum binarius eum metiatur per numerum imparem.

Quod verò ſit pariter impar tantum ſic oſtendo; ſit ejus ſemiſſis B & C binarius. Si etiam numerus A eſſet pariter par, eum aliquis numerus par D metiretur per parem E. ſit ergo A tam ex D in E, quàm ex B in C; erit ergo ut C ad D, ita E ad B. Sed binarius C metitur, parem D; ergo E metietur B, par imparem quod eſt abſurdum, quare numerus A erit pariter impar tantum.

Coroll.

Digitized by Google

maximæ ſupra minimam ad reliquas omnes : quod demonſtrandum erat.

Coroll. In continuè proportionalibus ita erit exceſſus cujuſcumque ad ſequentem minorem, ut exceſſus maximæ ſupra minimam ad reliquas omnes.

Quia verò denominator rationis oſtendit rationem unius ad ſequentem minorem,ut ſi ſit proportio tripla, denominator 3 oſtendit rationem unius termini ad minorem vicinum, nempe ut 3 ad 1 ; ſi auferatur unitas ex eo denominatore fiatque 2, habebitur ratio quam habet exceſſus unius termini ad proximè minorem,nempe ut 2 ad 1.

Si fiat ergo ut hic denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita exceſſus maximi ſupra minimum, ad reliquos omnes ; & quia in hac regula trium intervenit unitas, vitatur multiplicatio. Si ergo differentiam maximi ſupra minimum dividas per denominatorem unitate mulctatum habebitur ſumma omnium terminorum,excepto maximo.

Ex hac propoſitione multa deducimus in fine Arithmeticæ, in ordine ad progreſſiones, etiam infinitas : veteres autem Geometræ & Arithmetici hæc non animadverterunt.

Coroll. 2. In proportione dupla quia denominator eſt 2 & imminutus unitate eſt 1, evaneſcit diviſio, ideoque ſi minima auferatur ex maxima, habetur ſeries tota exceptâ maximâ.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Si proportio dupla ab unitate continuetur, donec ſumma omnium terminorum ſit numerus primus ; tota ſeries in ultimum ducta, producet numerum perfectum.

1.	A	B	C	D
	2	4	8	16
E	F	G	H	K
31	62.	124.	248	496
	L	M		

Sit proportio dupla ab unitate incipiens quæ continuetur quantum libuerit donec numerus ſumma ſit numerus primus. Id autem frequenter accidit. nam duo termini 1 & 2 efficiunt 3 numerum primum. 1. 2. 4. efficiunt 7 numerum primum. 1. 2. 4. 8. efficiunt 15 qui compoſitus eſt. 1. 2. 4. 8. 16 efficiunt 31 numerum primum:dico quod ſi 31 multiplices per 16 fiatque 496, quod ille numerus erit perfectus, nempe æqualis omnibus ſuis partibus aliquotis ſimul ſumptis. quot ſunt numeri A, B, C, D, tot ſumantur dupli ipſius E, nempe F. G. H. K.

Demonſtr. Ita eſt ex æquo A ad D, ſicut E ad H : ergo idem numerus fiet ex A in H, ac ex E in D : ſed numerus genitus multiplicatione ex A in H eſt numerus K, cum A ſit binarius, & K ſit duplus numeri H. ergo productus ex E in D eſt numerus K ; & cum E, F, G, H, K ſint continuè proportionales in proportione dupla, ſi ex K auferatur E, habebitur aggregatum E F G H *per coroll. præcedens.* E autem eſt æqualis ſummæ 1. A. B. C. D. ergo K minus E, æquabitur numeris H. G, F. 1. A.B.C.D. adde utrinque E. fiet K æqualis omnibus numeris 1. A,B.C.D.E.F.G.H. qui numeri ſunt partes aliquotæ numeri K. nam cum E F G H K. ſint continuè proportionales in proportione dupla, ſinguli metientur numerum K, pariter 1 A B C metiuntur numerum D. D

autem metitur numerum K, cum ductus in E fecerit K: quare hi omnes numeri ſunt partes aliquotæ numeri K.

Reſtat probandum numerum K nullas habere alias partes aliquotas. Ponatur enim alia quævis L; hanc oſtendo unam eſſe ex recenſitis. Metiatur enim numerum K per M: ergo L in M producit K; ſed etiam E in D produxit K, ergo ita eſt E ad M ut L ad D. Et quia A unitati proximus nempe 2 eſt numerus primus, & L eſt diverſus ab omnibus A B C D, numerus L non metietur numerum D (*per* 13. 9.) ergo neque E metietur ipſum M. Et cum E ſit primus, E & M inter ſe primi erunt (*per* 31. 7.) & in ſua ratione minimi (*per* 23. 7. & (*per* 21. 7.) E metitur L & M metitur D. Et cum A primus ſit, erit M aliquis ipſorum A, B, C, D, (*per* 13. 9.) ſit idem cum B. & quot ſunt B, C, D tot ſumantur ab E dupli F. G. H. eritque ex æquo ut B ad D ita E ad H, ſit ergo idem ex B in H, qui ex D in E, nempe K. Et quia idem L metitur K per M; M in L faciet K. idem ergo K ſit ex L in M, & ex B in H; & cum M oſtenſus ſit idem cum B, erit etiam L idem cum H. Nullus igitur F habet partes aliquotas quàm prius poſitas.

Ex hac propoſitione inveniemus omnes numeros perfectos: Summa enim ex 1 & 2 eſt numerus primus; quæ ducta in 2 efficit 6 numerum perfectum ſumma 1. 2. 4 efficit 7. quæ ducta in 4 efficit 28 numerum perfectum. Summa 1.2.4.8 efficit 15 numerum compoſitum. Summa 1.2.4.8.16 efficit 31. Ex quo oſtendimus produci numerum perfectum. Facile autem habetur ſumma, ſi abiiciatur unitas ex aliquo, ſit ſumma antecedentium. Pauci autem ſunt hujuſmodi reperti nempe tantũ undecim 6.28.496.8128. 23550336. 8589869056. 137438691328. 2385843008139952128.& nulli intermedii.

Sed iſta ſunt valde inutilia, atque adeo ſufficiant.

EUCLIDIS ELEMENTORVM LIBER DECIMVS.

Definitiones.

1 Commenſurabiles magnitudines, quas eadem communis menſura metitur.

2 Incommenſurabiles, quas nulla communis menſura metitur.

3 Rectæ lineæ potentiâ ſunt commenſurabiles cùm eorum quadrata eadem communis menſura metitur.

4 Rectæ lineæ potentia ſunt incommenſurabiles cùm eorum quadrata nulla communis menſura metitur.

5 Linea cum qua comparantur reliquæ, & in ordine ad quam dicuntur commenſurabiles aut incommenſurabiles ſive longitudine, ſive potentia, dicatur rationalis.

6 Lineæ quæ ſunt rationali commenſurabiles, ſive longitudine ſive potentia tantum, dicantur rationales.

7 Quæ verò ſunt rationali incommenſurabiles, tam longitudine, quàm potentia, dicantur irrationales.

8 Quadratum lineæ rationalis dicatur rationale.

9 Omnes ſuperficies quadrato rationali commenſurabiles, dicuntur rationales.

10 Et huic incommenſurabiles ſuperficies, aut quadrata, irrationalia dicantur.

11 Lineæ verò quæ incommenſurabilium quadratorum ſunt latera, dicantur irrationales.

AXIOMA I.

Magnitudo quotcumque magnitudines metiens, metitur & ex iis compoſitum.

AXIOMA II.

Magnitudo quamcumque magnitudinem metiens, metitur & omnem quam illa metitur.

AXIOMA III.

Magnitudo metiens totam, & ablatam metitur, & reliquam.

PROPOSITIO I.

Si ex magnitudine auferatur plusquam dimidium, & ex reliquo plusquam dimidium, aut dimidium, & ita deinceps, relinquetur quantitas minor quacumque propoſitâ.

A. B

Sit quantitas A ex qua auferas dimidium, aut pluſquam dimidium, & ex reliquo pluſquam dimidium, & ita deinceps, dico id ita fieri poſſe, ut relinquatur quantitas minor quàm B. Multiplicetur quantitas B, donec ſic multiplicata excedat magnitudinem A: Ponamus B ter ſumptam, excedere magnitudinem A; dico ſi fiant tres ſubtractiones dimidij ex quantitate A relinqui quantitatem minorem quàm B.

Demonſtr. Si enim ex tripla ipſius B auferas B, aufers minus quàm dimidium, ex A minori aufertur dimidium: aut pluſquam dimidium: ergo id quod relinquitur ex A, minus eſt quàm id quod relinquitur ex tripla B; nempe quam dupla B. Iterum ex dupla B auferatur B, & ex reliquo A auferatur

Digitized by

PROPOSITIO IV.

Problema.

Trium commenſurabilium maximam communem menſuram reperire.

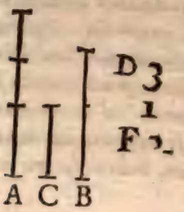
Inveniatur duarum maxima menſura, quæ ſi metiatur & tertiam: hæc erit quæſita trium communis maxima menſura. Si verò non metiatur tertiam erunt ſaltem commenſurabiles: nam quæcumque menſura communis metietur tres magnitudines, metietur & duas primas: ergo *per Coroll.* communem earum menſuram. Ergo hæc menſura, & tertia ſunt commenſurabiles. Quæratur ergo earum maxima communis menſura; dico hanc eſſe trium magnitudinum maximam communem menſuram. Sit enim alia major, hæc metietur communem menſuram duarum primarum; & cum metiatur & tertiam, metitur & communem primæ menſuræ, & tertiæ magnitudinis communem menſuram (*per Coroll. præcedens;*) major minorem, quod eſt abſurdum.

Coroll. Magnitudo, metiens tres, metitur & maximam earum menſuram.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Commenſurabiles magnitudines eandem rationem habent quam numerus ad numerum.



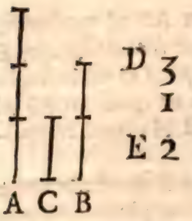
Sint magnitudines A & B commenſurabiles, dico ita eſſe A & B ut numerus ad numerum. Sit enim C maxima communis earum menſura; & quoties C invenitur in A, toties unitas inveniatur in numero D; item quoties C invenitur in B toties unitas inveniatur in numero E.

Demonſtr. Eadem eſt ratio A ad C ac numeri D ad unitatem, cum ſint æquemultiplices. Pariter eadem eſt ratio C ad B quæ unitatis ad numerum E, cum ſint ſimiles partes aliquotæ: ergo ex æquo ita eſt A ad B ut D ad E, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Magnitudines quæ ſe habent ut numerus ad numerum, ſunt commenſurabiles.



Sit A ad B ut numerus D ad numerum E, dico magnitudines A & B eſſe commenſurabiles. Sit A diviſa in tot partes quot ſunt unitates in numero D, ſitque C uni earum partium æqualis.

Demonſtr. Cùm C toties contineatur in A, ac unitas in D, eadem erit ratio C ad A ac unitatis ad D, ſed ut A ad B ita D ad E; ergo

E; ergo ex æquo ita erit unitas ad E ut C ad B. Unitas autem eſt pars aliquota numeri E: ergo & C quantitatis B. Ergo C eſt communis utriuſque menſura.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Incommenſurabiles quantitates non ſunt ut numerus ad numerum.

Quia per præcedentem eſſent commenſurabiles; contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

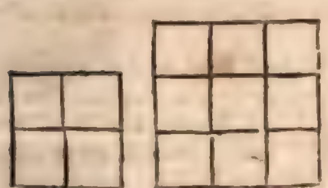
Duæ magnitudines rationem non habentes eandem quam numerus ad numerum, ſunt incommenſurabiles.

Si enim eſſent commenſurabiles, ſe haberent (*per 5.*) ut numerus ad numerum.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Quadrata linearum commenſurabilium ſe habent ut numerus quadratus ad quadratum numerum. Et quadrata ſe habentia ut quadratus numerus ad quadratum, habent latera commenſurabilia. Linearum incommenſurabilium quadrata non ſe habent ut quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata non ſe habentia ut numerus quadratus ad quadratum, habent latera incommenſurabilia.



A B C D

E 2 F 3

G 4 H 9

Sint lineæ AB, CD longitudine commenſurabiles, dico ſe habere quadratum ex AB ad quadratum ex CD ut quadratus aliquis numerus ad quadratum numerum. Cùm enim AB CD ſint commenſurabiles, ſe habebunt ut numerus ad numerum. Se habeant ut numerus E ad numerum F, quorum quadrati ſint G & H, dico quadratum ex AB ad quadratum ex CD, ſe habere ut numerus quadratus G ad numerum H.

Demonſtr. Quadratum ex AB ad quadratum ex CD eſt in duplicata ratione AB ad CD, ſeu E ad F (*per 20.6.*) ſed pariter G ad H eſt in duplicata ratione E ad F: ergo ita eſt quadr. ex AB ad quadratum ex C D ut G ad H; quod erat primum.

Secundum probatur; nempe ſi ſit quadratum ex AB ad quadratum ex CD ut quadratus numerus G ad quadratum numerum H, lineas AB, CD eſſe commenſurabiles.

Demonſtr. Tam AB ad CD eſt in ſubduplicatâ ratione quadrati AB ad CD, quàm numerus E ad numerum F eſt in ſubduplicata ratione G ad H; ergo ita eſt AB ad CD ut E ad F; ergo *per 6.* ſunt AB, CD, commenſurabiles.

Tertium probatur nempe ſi AB, CD ſint incommenſurabiles, earum quadrata non ſe habere ut quadratus numerus ad quadratum. Si alioquin lineæ ſe haberent ut radices numerorum quadratorum, ergo & ut numerus ad numerum.

Quartum probatur; nempe ſi quadrata non ſe habeant ut quadratus numerus ad quadratum numerum, habere latera incommenſurabilia. Si enim commenſurabilia eſſent, eorum quadrata ſe haberent ut quadratus numerus ad quadratum; contra ſuppoſitionem.

Coroll. Lineæ longitudine commenſurabiles, ſunt & potentia, hoc eſt cum quadrata earum ſe habeant ut numerus quadratus ad quadratum, ſe habent abſolutè ut numerus ad numerum.

Poſſunt tamen dari quadrata quæ ſe habeant ut numerus ad numerum, & non ut numerus quadratus ad quadratum. Poſſunt ergo dari lineæ incommenſurabiles longitudine, quæ tamen ſint potentia commenſurabiles. Denique ſi lineæ ſint incommenſurabiles potentia, erunt & longitudine, quia ſi eſſent longitudine, eſſent & potentia, contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO X.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & prima ſecundæ fuerit commenſurabilis aut incommenſurabilis; tertia quartæ commenſurabilis erit.

E F
4 2
A B C D

Sint 4 magnitudines proportionales, & prima A ſecundæ B ſit commenſurabilis, ſe habebit ut numerus v. g. E ad F; ſed ita eſt C ad D ut A ad B, ergo C ad D erit ut E ad F: ergo per 6 ſunt C & D commenſurabiles.

Si A & B ſint incommenſurabiles, C & D etiam incommenſurabiles erunt, alioquin A & B commenſurabiles eſſent.

L E M M A.

Invenire duos numeros planos non ſimiles & qui rationem non habeant quam quadratus ad quadratum.

AB		CD	
4.	2.	6.	4
	6		24
	F		E

Numeros planos ſimiles voco, qui producuntur ex multiplicatione numerorum non proportionalium, ut ſi A ad B non ſit, ut C ad D & F & E producantur ex multiplicatione A per B, & C per D, numeri F & E ſunt numeri plani non ſimiles, ſeu quaſi rectangula non ſimilia. Clarum eſt autem numeros quadratos eſſe numeros planos ſimiles.

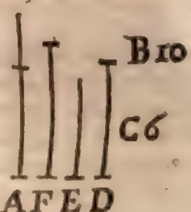
PRO PO

Digitized by

PROPOSITIO XI.

Problema.

Propoſita lineæ invenire incommenſurabilem longitudine tantum, item aliam omnino incommenſurabilem.



Sit linea A cui incommenſurabilis longitudine tantùm quæritur. Proponantur duo numeri B & C, qui non ſint plani ſimiles, fiatque ut A B ad C ita A ad D; nempe dividatur A in 10 partes æquales, & fiat D 6 partium; eritque A ad D ut numerus B ad C. Quæratur inter A & D media proportionalis E, eritque quadratum ex A ad quadratum ex E ut A ad D ſeu ut numerus B ad C. Sed B ad C non ſe habet ut numerus quadratus ad quadratum: ergo (*per 6.*) A & E ſunt incommenſurabiles. Quadrata tamen earum ſe habent ut numerus ad numerum: ergo ſunt commenſurabilia: ergo lineæ ſunt potentiâ commenſurabiles.

Sit jam invenienda incommenſurabilis omnino eidem A. Inter A & E quæratur alia media proportionalis, eritque quadratum A ad quadratum F ut A ad E; ſed A ad E non ſe habet ut numerus ad numerum cùm ſint incommenſurabiles: ergo quadratum A ad quadratum B non ſe habet ut numerus ad numerum: ergo incommenſurabilia ſunt quadrata. ergo lineæ omni ratione incommenſurabiles.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Quæ eidem magnitudini ſunt commenſurabiles inter ſe commenſurabiles ſunt.

	E 10		
A B C	F 2	K $3\frac{1}{5}$	
	G 3		
	H 5		

Magnitudines A & B eidem C ſint commenſurabiles, dico A & B inter ſe commenſurabiles eſſe. Sit enim ut A ad C ita numerus E ad F, & ut B ad C; ita G ad H. Fiat item ut 5 ad 3 ita 2 ad $3\frac{1}{5}$. Erit ex æquo ut E ad K ita A ad B: ergo (*per 6.*) A & B erunt commenſurabiles.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si duarum magnitudinum una tertiæ ſit commenſurabilis & altera eidem incommenſurabilis, incommenſurabiles erunt.

Sit A ipſi C commenſurabilis, & B eidem C incommenſurabilis, dico A & B eſſe incommenſurabiles. Si enim A & B commenſurabiles eſſent, cum C ſupponatur eſſe commenſurabilis ipſi A, eſſent B & C commenſurabiles, contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XIV.

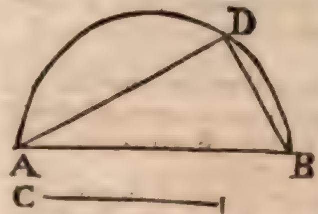
Theorema.

Si Duarum magnitudinum commenſurabilium una ſit tertiæ incommenſurabilis, & reliqua eidem erit incommenſurabilis.

Si enim ſecunda tertiæ eſſet commenſurabilis; & prima eidem foret commenſurabilis, contra ſuppoſitionem.

LEMMA.

Duabus datis lineis, invenire exceſſum quadrati majoris lineæ ſupra quadratum minoris.



Sint lineæ A B major, C minor. Circa A B deſcribatur ſemicirculus, in quo aptetur AD æqualis C; dico quadratum BD eſſe exceſſum quadrati AB, ſupra quadratum C. (*per* 47. 1.)

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si 4 lineæ proportionales fuerint, & prima quadratum ſuperet ſecunda quadratum, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, idem accidet tertiæ reſpectu quartæ; Si prima quadratum ſuperet ſecunda quadratum quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, idem accidet tertiæ reſpectu quartæ.



Sint lineæ A, B, C, D proportionales & quadratum A ſuperet quadratum B, quadrato E hoc eſt; ſint quadrata B, E quadrato A æqualia, ſicut quadrata D & F quadrato C; dico ſi A & E ſint commenſurabiles, C & F erunt commenſurabiles.

Demonſtr. Cùm ſit ut A ad B ita C ad D, erit etiam ut quadratum A ad quadratum B ita quadratum C ad quadratum D; ſeu ut quadrata BE ad E ita quadrata DF ad D; & dividendo ut quadratum B ad quadratum E ita quadratum D ad F, & ut B ad E ita D ad F; quare ita erit ex æquo A ad E ſicut C ad F. Ideoque (*per præcedentem*) ſi A eſt commenſurabilis aut incommenſurabilis ipſi E; C item ſimiliter erit reſpectu ipſius F.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Compoſita ex duabus commenſurabilibus utrique commenſurabilis eſt. Si compoſita uni partium commenſurabilis fuerit, partes inter ſe commenſurabiles erunt.

Demonſtr. Utriuſque partis facilis eſt & coincidit

cidit cum eo principio, Magnitudo quotcumque magnitudines metiens, metitur & ex iis compoſitam. Si enim partes ſint commenſurabiles habent communem menſuram, quæ cùm metiatur utramque, compoſitam ex iis metietur.

Secunda pars coincidit cum eo principio, Si magnitudo totam metiatur, & ablatam metietur, & reliquum.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Si duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, ex iis compoſita utrique erit incommenſurabilis. Si compoſita magnitudo uni componentium fuerit incommenſurabilis, erit & alteri incommenſurabilis.

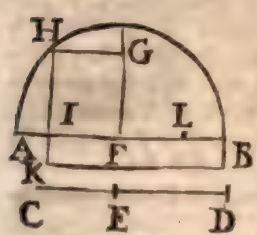
Prima pars facilè probatur. Si enim eſſet alterutri commenſurabilis partes commenſurabiles eſſent (*per præcedentem*) & per eandem utrique eſſet commenſurabilis.

Secunda non minus facilis eſt; ſi enim alteri eſſet commenſurabilis, eſſet & primæ. Omniaque forent commenſurabilia.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis unius lineæ majoris, æquale fuerit quartæ parti quadrati minoris lineæ, & ſegmenta fuerint commenſurabilia, recta linea potens exceſſum quadrati majoris ſupra quadratum minoris, erit commenſurabilis majori. Viciſſim ſi linea potens talem exceſſum fuerit majori commenſurabilis, ſegmenta majoris erunt commenſurabilia.



Primò proponantur duæ lineæ A B major, CD minor quæ dividatur bifariam in puncto E; eritque quadratum ex C E, quarta pars quadrati ex C D. Ita dividatur A B ut rectangulum comprehenſum ſub ejus ſegmentis æquale ſit quadrato ex C E, quod facillimum eſt. Dividatur A B bifariam in F, deſcriptoque ſemicirculo excitetur perpendicularis F G, æqualis lineæ C E; ducatur G H parallela F I, & H I perpendicularis ad A B; ſitque I K æqualis A I, eritque rectangulum B K (*per* 17. 6.) æquale quadrato H I, ſeu F G, hoc eſt C E.

Quâ facta ſuppoſitione; dico ſi ſegmenta B I, I A fuerint commenſurabilia, linea quæ poterit exceſſum quadrati AB, ſupra quadratum CD, erit commenſurabilis lineæ AB. Abſcindatur FL æqualis F I, eruntque AI, L B æquales. Dico I L poſſe exceſſum quadrati AB ſupra quadratum C D, & eſſe commenſurabilem lineæ A B.

Demonſtr. Supponuntur B I, I A eſſe commenſurabiles: ergo (*per* 16.) A B illis erit commenſurabilis. Sunt item A I, L B, commenſurabiles inter ſe, ergo & aliis ſegmentis, & compoſita ex A I, L B: cum ergo tota A B ſit commenſurabilis compoſitæ ex A I, L B, commenſurabilis erit & reliquæ I L (*per* 16.) cum autem linea AB, ſit diviſa bifariam in F, & non bifariam erit (*per* 5. 2.) rectangulum B I A ſeu B K, cum quadrato I F, æquale quadrato A F; ergo quadratum I F eſt exceſſus quadrati AF ſupra rectangulum B K, ſeu quadratum C E; ſed quadrata A B, C D, I L ſunt quadrupla quadratorum AF, CE, IF; ergo quadratum I L eſt exceſſus quadrati AB ſupra quadratum CD.

Secundò iiſdem poſitis ſi I L ſit commenſurabilis lineæ A B, (*per* 16.) erit reliqua ſeu compoſita ex A I, L B iiſdem commenſurabilis; eſt autem A I dimidia compoſitæ ex A I, L B, eidem commenſurabilis; ergo A I toti A B eſt commenſurabilis: ergo & (*per* 16.) A I, I B erunt commenſurabiles.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

In eadem ſuppoſitione ſi majoris ſegmenta fuerint incommenſurabilia, linea potens exceſſum quadrati majoris ſupra quadratum minoris erit incommenſurabilis majori. Viciſſim ſi linea potens exceſſum fuerit incommenſurabilis majori, ſegmenta erunt incommenſurabilia.

Fit eadem conſtructio & ſupponuntur ſegmenta A I, I B eſſe incommenſurabilia: ergo & tota A B utrique ſegmento eſt incommenſurabilis (*per* 17.) & cum compoſita ex A I, B L ſit commenſurabilis ſegmento A I, utpote dupla A B illi erit incommenſurabilis: ergo & reliquæ I L erit incommenſurabilis.

Secunda pars ſimiliter demonſtratur.

DEFINITIO I.

Rationales lineæ ſunt quæ expoſitæ rationali vel longitudine, vel potentia tantum ſunt commenſurabiles.

Rationales autem dicuntur in ordine ad aliquam lineam primo expoſitam, quæ ſe habeat tanquam regula: poſſunt tamen duæ aliæ rationales comparari inter ſe tripliciter. Primo poſſunt duæ lineæ commenſurabiles longitudine, ita ſe habere ut una ſit expoſitæ rationali æqualis, & conſequenter utraque primæ rationali erit commenſurabilis.

Secundo poteſt neutra eſſe æqualis primæ rationali æqualis, ſed tamen utraque eidem commenſurabilis, & conſequenter inter ſe.

Tertio poſſunt duæ rationales eſſe tantum potentia commenſurabiles expoſitâ rationali, inter ſe autem commenſurabiles longitudine vel potentia.

DEFINITIO II.

Spatium quod à prima rationali deſcribitur eſt primum rationale, ita ut ſpatia illi commenſurabilia dicantur rationalia. Si ergo ſit ſpatium cuicumque alteri ſpatio rationali commenſurabile, & ipſum rationale erit, hoc eſt primo rationali commenſurabile.

PROPO

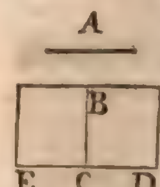
Digitized by Google

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Rectangulum contentum ſub lineis rationalibus inter ſe commenſurabilibus longitudine rationale eſt.

Supponuntur duæ lineæ B C, C D commenſurabiles longitudine inter ſe,quæ cum expoſita rationali A ita ſe habeant, aut ut una illi ſit æqualis, aut utraque illi commenſurabilis longitudine, aut utraque potentia tantum illi commenſurabilis; dico rectangulum BD ſub talibus lineis comprehenſum eſſe rationale, ſeu commenſurabile quadrato primæ lineæ rationali ſeu A. Fiat quadratum lineæ BC ſitque BE, ſintque propterea BC,CE æquales.



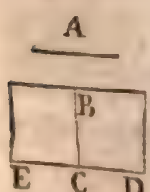
Demonſtr. Quadratum B E commenſurabile eſt quadrato A, cùm linea B C ſit rationalis, hoc eſt expoſitæ rationali ſaltem potentia commenſurabilis. Sed (*per* 1.6.) quadratum B E ad rectangulum BD ſe habet ut EC, ſeu BC ad CD, quæ ſunt commenſurabiles: ergo (*per* 10.) quadratum B E rectangulo B D erit commenſurabile. Ergo & commenſurabile quadrato A (*per* 12.) quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Si rationale ad rationale applicetur, latitudinem efficit rationalem, & ei ad quam applicatur longitudine commenſurabilem.

Supponitur rationalis A, item alia rationalis hoc eſt ei potentia ſaltem commenſurabilis B C, cujus conſequenter quadratum B E erit rationale. Sit ſpatium rationale, ſeu rectangulum BD, applicatum ad lineam B C, ita ut C D ſit ejus latitudo ſeu ut ita dicam quotiens diviſionis, qua B D divideretur per BC; dico igitur BC, CD eſſe commenſurabiles,& CD eſſe lineam rationalem.



Demonſtr. Ita eſt BC ſeu E C ad C D, ſicut rectangulum BE ad rectangulum B D (*per* 1.6.) ſed rectangula ſunt commenſurabilia: ergo & B C, C D ſunt commenſurabiles longitudine, & cum BC ſit rationalis, hoc eſt ſaltem potentia commenſurabilis cum A expoſita rationali; erit item CD rationalis.

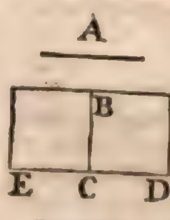
Coroll. Linea potens ſpatium irrationale eſt irrationalis. Si enim rationalis eſſet ſaltem potentia eſſet commenſurabilis, hoc eſt ejus quadratum eſſet quadrato rationalis lineæ commenſurabile, hoc eſt rationale eſſet.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

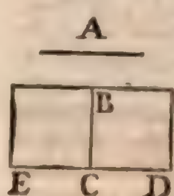
Rectangulum quod ſub rationalibus potentia tantum commenſurabilibus continetur, irrationale eſt, & recta ipſum potens irrationalis eſt, & vocatur media.

Supponitur A rationalis expoſita, ſitque rectangulum B D contentum ſub rationalibus BC, CD, longitudine incommenſurabilibus; dico rectangulum B D eſſe irrationale, & lineam quæ illud poteſt, eſſe irrationalem,& vocari mediam.



Demonſtr. Quadratum B E lineæ rationalis BC, rationale eſt; huic autem eſt incommenſurabile rectangulum BD,ſub rationalibus potentiâ tantum commenſurabilibus contentum. Si enim eſſet commenſurabile, eſſent lineæ commenſurabiles longitudine (*per præcedentem.*) Cùm ergo rectangulum B D ſit incommenſurabile quadrato B E, quod ſupponitur quadrato A commenſurabile, rectangulum B D eidem quadrato A incommenſurabile, ergo erit irrationale.

Linea quæ ipſum poteſt irrationalis erit & vocabitur media, eo quod ſit media proportionalis inter duas potentia tantum commenſurabiles. Medium eſt rectangulum ſub duabus lineis potentia tantum commenſurabilibus, vel quadratum illi æquale, aut aliud rectangulum huic æquale.



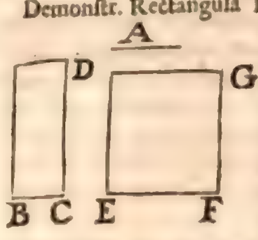
PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Medium ad rationalem applicatum, latitudinem efficit rationalem longitudine incommenſurabilem ei cui applicatur.

Supponitur linea A media, cujus quadratum medium eſt, hoc eſt æquale rectangulo comprehenſo ſub rationalibus, ſeu potentiâ, ſed non longitudine commenſurabilibus. Detur quæcumque rationalis BC, cui applicetur rectangulum BD æquale quadrato ex A; dico CD eſſe quidem rationalem, ſed BC, CD eſſe longitudine incommenſurabiles. Cùm A ſit media poterit rectangulum ſub duabus rationalibus ſed longitudine incommenſurabilibus contentum. Sit illud EG.

Demonſtr. Rectangula BD, EG ſunt æqualia cum quadrata ex A ſint æqualia: ergo ita eſt (*per* 13.6.) BC ad EF ut FG ad CD; & ita eſt quadratum BC ad quadratum EF ut quadratum FG ad quadratum C D. Sed primum ſecundo eſt commenſurabile cum lineæ



ſint rationales, ergo quadrata FG, CD ſunt commenſurabilia, & linea CD rationalis : quod erat primum.

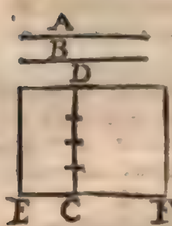
Secundo EF ad FG ſe habet ut quadratum EF ad rectangulum EG. Sunt autem EF & FG incommenſurabiles longitudine : ergo quadratum EF incommenſurabile eſt rectangulo EG, ſeu BD: ſed quadratum EF commenſurabile eſt quadrato BC cum EF, BC ſint rationales, ergo quadratum BC & rectangulum BD ſunt incommenſurabilia : ſed ut quadratum BD ad rectangulum CD ita BC ad CD (*per* 1.6.) ergo BC, CD ſunt incommenſurabiles.

Coroll. Si igitur ponantur duæ lineæ potentia tantum commenſurabiles, rectangulum ſub iis contentum medium eſt ; quod ſi dividatur per quamcumque lineam potentia tantum commenſurabilem, facit quotientem potentiâ tantum commenſurabilem.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Media commenſurabilis media eſt.



Proponatur media A, cui linea B ſit commenſurabilis ſive longitudine, ſive potentia tantum, dico lineam B mediam eſſe. Sit CD rationalis ad quam applicetur rectangulum DE æquale quadrato A, & rectangulum DC æquale quadrato B.

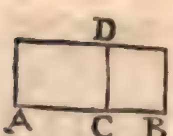
Demonſtratio. (*Per præcedentem*) erit EC rationalis longitudine cum CD incommenſurabilis, & cum A & B ſint commenſurabiles, eorum quadrata erunt commenſurabilia, & conſequenter rectangula ipſis æqualia ; ut autem ED ad DF ita EC ad CF, ergo EC, CF, ſunt commenſurabiles, quare (*per* 13.) lineæ CF, CD ſunt rationales, ſed longitudine incommenſurabiles ; quare rectangulum DF medium eſt, & conſequenter quadratum B ipſis æquale, & linea B media eſt; quod erat demonſtrandum.

Coroll. Sequitur ſpatium medio commenſurabile medium eſſe.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Spatium ſub mediis longitudine commenſurabilibus contentum medium eſt.



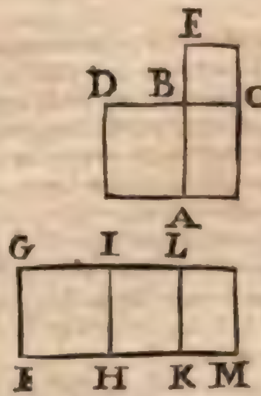
Sint mediæ AC, CD commenſurabiles; dico ſpatium AD medium eſſe. Super CD deſcribatur quadratum BD.

Demonſtr. Ita eſt AD ad BD ut AC ad CB (*per* 1.6.) quæ ſupponuntur commenſurabiles, ergo AD eſt commenſurabile quadrato BD, ſeu medio : ergo (*per* 24.) medium eſt.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Quod ſub mediis potentiâ tantum inter ſe commenſurabilibus continetur, vel rationale eſt, vel medium.

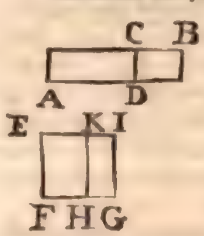


Sit rectangulum AC contentum ſub mediis AB, BC; dico illud vel rationale eſſe, vel medium. Fiant quadrata AD, CE linearum AB, BC, quæ media erunt (*per* 22.) Sit rationalis GF ad quam applicentur primò quadratum AD, rectangulum AC, & quadratum CE; ſintque illis ordine æqualia rectangula GI, HL, KM, quare FI, ML erunt media applicata ad rationalem FG, & (*per* 23.) FH, KM erunt rationales, ſed rationali FG longitudine incommenſurabiles : inter ſe verò commenſurabiles erunt quia cum quadrata AD, CE ſint media, ſunt inter ſe commenſurabilia (*per* 24.) Ut autem quadratum AD ad CE, ita rectangulum FI ad ML, & (*per* 1. 6.) ita FH ad KM & (*per* 20.) rectangulum ſub FH, KM rationale erit. Rurſus quadratum AD, rectang. AC, quadratum CE ſunt continuè proportionalia, & ipſis æqualia rectangula FH, HK, KM, & (*per* 1. 6.) lineæ FH, HK, KM quare rectangulum ſub extremis FH, KM quod oſtendimus rationale eſſe, erit æquale quadrato mediæ HK quod conſequenter rationale erit, & linea HK rationalis ſaltem potentia commenſurabilis ipſi FG ſeu HI, & ſiquidem HK fuerit etiam longitudine commenſurabilis ipſi HI, erit rectangulum HL ſeu AC illi æquale rationale. Si verò potentiâ tantum fuerit commenſurabile, erit medium ; quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Medium non ſuperat medium rationali.



Medium AB, ſuperet medium AC, rectangulo DB : dico DB non eſſe rationale. Exponatur rationalis FH ad quam applicetur AB, hoc eſt EG ſit æquale rectangulo AB, & EH ipſi AC : conſequenter reliquum KG, reliquo DB æquale erit.

Demonſtr. Rectangula EG, EH mediis æqualia media ſunt, & (*per* 23.) erunt lineæ FG, FH, rationales quidem potentia ; ſed rationali FE incommenſurabiles longitudine. Si vero dicatur DB eſſe rationale, & conſequenter HI, linea HG erit lineæ EF commenſurabilis longitudine. Sunt ergo FH, HG incommenſurabiles ; ſed ut FH ad HG, ita quadratum FH ad rectangulum ſub FH, HG;

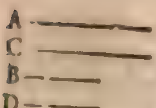
HG ; ſunt ergo hæc duo incommenſurabilia: quadrata autem FH , HG linearum rationalium ſunt commenſurabilia. Quadratum ergo HG,& rectang. ſub FH , HG ſunt incommenſurabilia. Item duo quadrata FH, HG, ſimul incommenſurabilia ſunt rectangulo bis ſub F H , H G ; quare (*per* 10.) compoſitum ex his omnibus ſeu quadratum ex F G, erit incommenſurabile quadratis F H , H G. Sed hæc duo quadrata ſunt rationalia : ergo quadratum F G irrationale erit, & linea F G irrationalis cum tamen jam oſtenſa ſit rationalis igitur medium non ſuperat medium rationali.

Coroll. Rationale ſuperat rationale rationali. Quia ſcilicet cum totum Rationale ſit commenſurabile rationali,utpote eidem quadrato expoſitæ rationalis commenſurabile ; erit reliquum & toti & alteri parti commenſurabile.

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Medias invenire potentiâ tantum commenſurabiles, quæ rationale comprehendant.



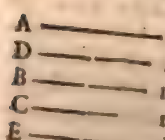
Inveniantur primò duæ rationales A , & B potentiâ tantum commenſurabiles (*per* 11.) inter quas ſit media proportionalis C , fiatque ut A ad C ita B ad D ; dico C & D eſſe duas medias potentia tantum commenſurabiles, quæ rationale comprehendant.

Demonſtr. A & B ſunt potentia tantum commenſurabiles , rectangulum ſub ipſis contentum medium eſt (*per* 22.) & quadratum C ipſi æquale medium eſt & linea C media. Item ita eſt A ad B ut C ad D , & A & B ſunt commenſurabiles potentia ; ergo C & D potentiâ commenſurabiles erunt , & (*per* 24.) D media erit ipſi C potentia tantum commenſurabilis. Item cum C ſit media , ita erit A ad C ut C ad B, & B ad D : ergo rectangulum ſub C & D, æquale eſt quadrato ex B quod rationale eſt, cum B rationali ſupponatur : ergo rectangulum ſub C & D rationale eſt : quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIX.

Problema.

Medias invenire , potentiâ tantum commenſurabiles, quæ medium contineant.

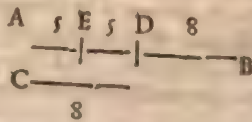


Primò quærantur tres lineæ A, B, C potentiâ tantum commenſurabiles , quod fiet ſi quærantur tres numeri primi,& quadrata linearum eam habeant rationem, ac hi numeri primi : nam in Arithmeticis oſtenditur numeros quadratos non habere eamdem rationem ac numeri primi. Inter A & B ſit media D, fiat item ut B ad C, ita D ad E ; dico D & E, eſſe medias potentiâ tantum commenſurabiles quæ medium contineant.

Demonſtr. Cum A & B ſint potentia tantum commenſurabiles : medium continebunt (*per* 22.) & D ipſum potens media erit. Item quia ita eſt B ad C ut D ad E, & B & C ſunt potentiâ tantum commenſurabiles , erunt D & E potentiâ tantum commenſurabiles ; ergo (*per* 24.) E erit media. Item ita eſt B ad C ut D ad E , & alternando ut B ad D , ſeu A ad D, ita C ad E, & ut A ad C ita D ad E ; ſed A & C continent medium cum ſint potentia tantum commenſurabiles : ergo D & E medium tantum continebunt.

LEMMA.

Duos quadratos invenire, ita ut compoſitus ex ipſis ſit quadratus.

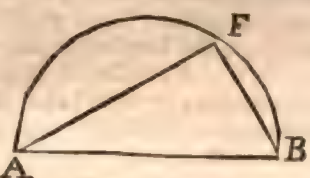


Primò inveniantur duo plani numeri ſimiles , ita ut uterque ſit par aut uterque impar ; id autem fit ſi ſumantur 4 numeri proportionales ; productus ex primo in ſecundum ſimilis eſt producto ex tertio in quartum. Sint igitur inventi duo numeri plani ſimiles AB & C, ita ut uterque ſit par vel impar, & minor de majori auferatur, reſtabit ſemper numerus par. Auferatur igitur ex AB , DB æqualis numero C , & reliquus AD biſariam dividatur in E ; dico numerum productum ex AB in BD qui (*per* 1. 9.) quadratus eſt & quadratum ex ED ſatiſfacere quæſtioni : nam cum AD dividatur biſariam in E , eique addatur DB , erit rectangulum ſub AD, DB, unà cum quadrato ED æquale quadrato EB (*ex* 14. 9.) Inventi etiam ſunt duo numeri quadrati , quorum exceſſus quadratus eſt.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Invenire duas rationales potentiâ tantum commenſurabiles , ita ut linea potens exceſſum quadratorum ſit majori commenſurabilis.



C 11. E 25. D.

Proponitur linea rationalis AB , inveniantur duo numeri quadrati C D, C E , quorum exceſſus E D quadratus non ſit. Fiat item ut numerus CD ad numerum ED ita quadratum AB ad quadratum AF, & linea AF aptetur circulo , jungatúrque BF , oſtendero AB , AF potentiâ tantum eſſe commenſurabiles , & AB , BF eſſe etiam longitudine commenſurabiles.

Demonſtr. Quadratum AB ad quadratum AF eſt ut numerus CD ad numerum CE qui quadratus non eſt , quare AB, AF (*per* 9.) potentia tantum ſunt commenſurabiles. Erit autem quadratum AB ad BF , ut CD , ad ED qui ſunt numeri quadrati ; ergo AB , BF ſunt etiam longitudine commenſurabiles , ſunt ergo inventæ duæ lineæ AB, AF potentia tantum commenſurabiles,& linea BF potens exceſſum quadratorum majori AB etiam longitudine eſt commenſurabilis.

PROPOSITIO XXXI.

Problema.

Invenire duas rationales potentiâ tantum commenſurabiles, & linea potens exceſſum quadratorum ſit majori incommenſurabilis.

A 9 B 4
C 9 E 4 D

Ad hoc requiruntur duo quadrati AB, BC qui ſimul juncti non quadratum AC efficiant; fiatque ut AC ad AB ita quadratum AB ad quadratum AF, & conſequenter erit quadratum AB ad quadratum FB ut CD ad ED, hoc eſt utrinque ut numerus non quadratus ad quadratum: ergo utraque linea eſt lineæ AB commenſurabilis tantum potentia.

PROPOSITIO XXXII.

Problema.

Invenire duas medias potentia tantum commenſurabiles quæ rationale contineant, & linea potens exceſſum quadratorum ſit majori longitudine commenſurabilis.



Sint (*per* 30.) inventæ duæ rationales A & B, potentia tantum commenſurabiles, ita ut linea potens exceſſum quadratorum ſit commenſurabilis longitudine; majori A, tum inter A & B ſit media C, fiatque ut A ad B ita C ad D; dico C & D ſatisfacere quæſtioni.

Demonſtr. Nam cum A & B, ſint tantum commenſurabiles potentia; erit (*per* 21.) C media, & cum ita ſit C ad D ut A & B quæ ſunt commenſurabiles, D erit commenſurabilis potentia ipſi C. Pariter cum A plus poſſit quàm C quadrato lineæ ſibi commenſurabilis, C plus poterit quàm D, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; cum ſit A ad C, ut C ad B, & ſit etiam ut A ad C, ita B ad D, ita erit C ad B ut B ad D; quare rectangulum ſub C & D æquale quadrato B rationalis lineæ rationale erit.

PROPOSITIO XXXIII.

Problema.

Invenire duas medias potentiâ tantum commenſurabiles quæ medium contineant, ita ut linea potens exceſſum quadratorum ſit majori longitudine commenſurabilis.

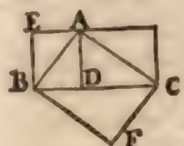


Quærantur primò tres rationales A, B, C potentiâ tantum commenſurabiles, ita ut linea quæ poteſt exceſſum quadrati A ſupra quadratum C, ſit ipſi A commenſurabilis longitudine: hoc eſt inventis A & C quæ hujuſmodi conditiones habeant, quæratur tertia B, quæ utrique A & C, ſit potentia tantum commenſurabilis (*per* 13.) ſit item D media inter A & B, fiat item ut D ad B ita C ad E.

Demonſtr. Ita eſt A ad C ſicut rectang. A B ad rectangulum A C (*per* 1. 6.) cum eadem ſit altitudo. Eſt autem rectang. A B æquale quadratum D, & rectangulo B C æquale rectangulum D E cum D, B, C, E ſint proportionales; erit ergo ut A ad B ita quadratum D ad rectangulum D E, ſeu D ad E, (*per* 1. 6.) cum eadem ſit altitudo. Sunt autem A & B potentia tantum commenſurabiles: ergo etiam D & F, quare cum D ſit irrationalis & media, erit ſimiliter E media, quare invenimus duas medias D & E potentia tantum commenſurabiles. Item rectangulum ſub BC medium eſt, eo quod B & C ſint tantum commenſurabiles potentia; ergo rectangulum D E medium. Denique quia ita eſt A ad C ſicut D ad E, & A plus poteſt quàm C quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, D pariter plus poterit quam E quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

Pariter ſi A plus potuiſſet quàm C quadrato lineæ ſibi commenſurabilis, ſervatis aliis omnibus, D plus poterit quam E quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis.

LEMMA.



Si detur triangulum rectangulum B A C, & demittatur perpendicularis A D, primo erit rectang. C B, B D æquale quadrato A B; Sunt enim triangula A B C, A B D æquiangula: ergo ita eſt C B ad A B ut A B ad B D.

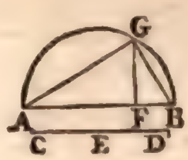
Eodem modò ſequitur rectangulum ſub B C, C D æquale eſſe quadrato A C.

Item rectang. B D C æquale quadrato A D, cum A D ſit media proportionalis; denique rectangulum ſub BC, AD æquale rectangulo ſub AB, A C, quia utrumque duplum eſt trianguli A B C.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema.

Invenire duas rectas potentia incommenſurabiles, ita ut aggregatum quadratorum ſit rationale, & rectangulum ſub ipſis contentum ſit medium.



Primò per 31 quærantur duæ rationales AB, C D potentia ſolum commenſurabiles, & major plus poſſit, quàm minor quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur C D bifariam in E, tum ita ſecetur AB (*per* 17.) ut rectangulum ſub AF, FB æquale ſit quadrato C E, deſcribatur circa AB ſemicirculus, erigaturque perpendicularis FG, junganturque AG, BG.

Demonſtr. Erit (*per* 19.) A F incommenſurabilis longitudine ipſi B F. Eſt autem ut A F ad FB, ita rectang. ſub AF, A B ad rectang. ſub F B, A B (*per* 1. 6.) cum eadem ſit altitudo; ſed rectangulum ſub AB, A F æquale eſt quadrato ex A G, & rectangulo ſub AB, FB æquale eſt quadratum GB: quare quadrata AG, GB ſunt incommenſurabilia, & lineæ A G, G B potentia incommenſurabiles. Erit tamen aggregatum quadratorum AG GB rationale,

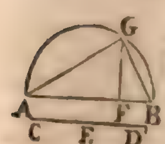
tionale, cum ſit æquale (*per* 47. 1.) quadrato lineæ A B rationalis.

Rurſus cum rectangulum AFB ſit æquale quadrato C E, & quadrato FG, illæ erunt æquales,& F G dimidia lineæ C D : quare rectangulum ſub A F, FG, erit dimidia pars rectanguli ſub A B C D ; quare ſicut hoc ultimum medium eſt, utpote contentum ſub rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, ergo & rectangulum ſub A B F G, aut illi æquale (*per lemma præcedens*) rectangulum ſub AG, GB, medium erit : invenimus ergo lineas AG,GB potentia incommenſurabiles, quarum aggregatum quadratorum rationale eſt, & rectang. ſub ipſis eſt medium.

PROPOSITIO XXXV.

Problema.

Invenire duas rectas potentia incommenſurabiles, ita ut aggregatum quadratorum ſit medium rectangulum ſub ipſis comprehenſum rationale.



Quærantur (*per* 32) duæ mediæ AB,CD potentia tantum commenſurabiles, quæ rationale contineant, & major plus poſſit quàm minor quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Fiantque cætera ut in præcedenti, oſtendemuſque ſimiliter lineas AG GB eſſe potentia incommenſurabiles.

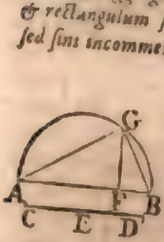
1. Cum quadratum mediæ AB ſit medium & æquale aggregato quadratorum A G, G B, illud aggregatum medium erit.

3. Rectangulum ſub AB, CD oſtenditur ut in præcedenti duplum eſſe rectangul. ſub A B, F G : quare cum primum ſupponatur rationale, ſecundum rationale erit, nempe rectangulum ſub A B, FG, quod æquale eſt rectangulo ſub A G, G B, quod proinde erit rationale : quare lineæ AG, GB ſatisfaciunt quæſtioni.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema.

Invenire duas rectas potentiâ incommenſurabiles ita ut & aggregatum quadratorum ſit medium, & rectangulum ſub ipſis contentum ſit medium, ſed ſint incommenſurabilia.



Primo (*per* 33.) inveniantur duæ mediæ AB, C D potentiâ tantum commenſurabiles, quæ medium contineant, & major A B plus poſſit quàm minor quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis : fiantque reliqua ut (*in prop.*34) oſtendemus pariter lineas A G, G B potentia incommenſurabiles eſſe ; & quia quadratum ex media A B medium eſt aggregatum quadratorum A G, GB, illi (*per* 47. 1.) æquale medium erit.

2. Cum rectangulum ſub A B, C D medium ſit, rectangulum ſub A B, F G ejus dimidium, & rectangulum ſub A G, G B huic dimidio æquale, medium erit.

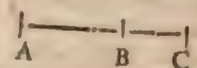
3. Cum AB, CD ſint longitudine incommenſurabiles, & C E erit ipſi A B incommenſurabilis, ut autem AB aut CE, an FG, ita quadratum AB ad rectang. A B, FG, (*per* 1. 6.) ſeu rectangulum ſub A G, GB : erit aggregatum quadratorum AG G B, incommenſurabile rectangulo ſub AG, GB.

Principium ſenariorum per compoſitionem.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Si duæ rationales potentiâ tantum commenſurabiles componantur, tota irrationalis erit. Vocetur ex binis nominibus.



Sint duæ lineæ A B, B C rationales, potentia ſolum commenſurabiles, dico totam A C eſſe irrationalem : nam cum A B ſit incommenſurabilis longitudine ipſi B C, & ut A B ad B C ita quadratum A B ad rectangulum ſub AB, B C cum eadem ſit altitudo, quadratum A B erit incommenſurabile rectangulo A B C, item rectang.ABC bis ſumpto.Sunt item quadrata AB, BC commenſurabilia ex ſuppoſitione : igitur quadrata AB, BC, rectangulo bis ABC ſunt incommenſurabilia ; ergo compoſitum ex his omnibus nempe (*per* 4. 2.) quadratum ex A C quadratis AB, BC quæ ſunt rationalia eſt incommenſurabile (*per* 14.) ergo quadratum AB eſt irrationale, & linea ipſum potens irrationalis.Vocetur autem ex binis nominibus ſeu binomium. Binomium igitur componitur ex duabus potentiâ tantum commenſurabilibus.

PROPOSITIO XXXVIII.

Theorema.

Si duæ mediæ potentiâ tantum commenſurabiles, quæ rationale contineant componantur ; Tota irrationalis erit, & vocetur ex binis nominibus prima.



Supponuntur duæ mediæ inventæ (*per* 28) AB, BC potentiâ tantum commenſurabiles quæ rationale contineant, dico totam AC irrationalem eſſe.

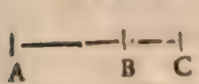
Demonſtr. Ita eſt A B ad BC ut rectangulum ſub AB, BC ad quadratum BC ; ſed AB, BC ſunt longitudine incommenſurabiles : ergo rectangulum ABC etiam bis ſumptum incommenſurabile eſt quadrato BC, immò & quadratis AB, BC inter ſe commenſurabilibus ; quare (*per* 14.) compoſitum ex his omnibus nempe (*per* 4.2.) quadratum ex AC incommenſurabile eſt rectangulo ABC quod rationale ſupponitur, ergo quadratum ex AC irrationale eſt, & linea AC irrationalis. Dicatur ex binis mediis prima ; ſeu bimediale primum.

PROPO

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema.

Si duæ mediæ potentiâ tantum commenſurabiles componantur quæ medium contineant; tota irrationalis erit, dicatur autem ex binis mediis ſecunda ſeu bimediale ſecundum.



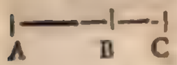
Supponuntur (*per* 29) inventæ AB, BC potentia tantum commenſurabiles, quæ medium contineant dico totam A C irrationalem eſſe.

Demonſtr. Eſt ut AB ad BC quæ ſunt incommenſurabiles longitudine; ita quadratum AB ad rectangulum ABC; quare quadratum AB rectangulo ABC etiam bis eſt incommenſurabile,& cum AB, BC ſint potentia commenſurabiles, quadrata AB, BC talia erunt. Ergo quadrata AB,BC ſimul, incommenſurabilia ſunt rectangulo bis ABC: ergo quadratum ex AC illis omnibus æquale, erit (*per* 14.) incommenſurabile quadratis AB, BC, quare erit irrationale, & linea AC irrationalis, quæ dicatur bimediale ſecundum.

PROPOSITIO XL.

Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommenſurabiles componantur quæ faciant compoſitum ex ipſarum quadratis rationale & rectangulum ſub ipſis medium, tota irrationalis erit, diceturque major.



Supponuntur duæ rectæ AB, BC, inventæ (*per* 34.) ita ut rectangulum ABC ſit medium & conſequenter bis ſumptum, medium erit; ſed aggregatum quadratorum AB, BC ſupponitur rationale, quare (*per* 17.) rectangulum ABC bis medium, incommenſurabile eſt quadratis AB,BC: ergo (*per* 14.) quadratum AC iis omnibus æquale (*per* 4.2.) erit irrationale, & linea AC irrationalis.

Vocatur autem major, quia cum quadrata AB, BC, majora ſint rectangulo ABC bis ut facile probari poſſet, & quadrata AB,BC ſint rationalia, à majori parte ſumitur denominatio. Quare huic nomen erit major.

PROPOSITIO XLI.

Theorema.

Si duæ rectæ potentiâ incommenſurabiles componantur; quarum aggregatum quadratorum ſit medium, & rectangulum ſub ipſis rationale; tota irrationalis erit, & vocabitur rationale & medium potens.

Supponuntur duæ rectæ inventæ (*per* 35.) potentiâ incommenſurabiles ita ut aggregatum quadratorum ſit medium, & rectangulum ſub ipſis rationale, ſunt ergo incommenſurabilia, & quadratum AC erit irrationale, & linea irrationalis. Vocetur rationale & medium potens.

PROPOSITIO XLII.

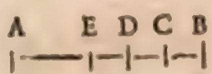
Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommenſurabiles componantur, ſitque aggregatum quadratorum medium, ſicut & rectangulum ſub ipſis, ſed ſint incommenſurabilia. Tota irrationalis erit quæ dicitur bina media potens.

Supponuntur lineæ inventæ (*per* 36.) Clarum autem eſt ſi aggregatum quadratorum & rectangul. ſub lineis ſint in commenſurabilia, totum reſultans, ſeu quadratum totius irrationale eſſe, & lineam eſſe irrationalem. Dicatur autem bina media potens.

LEMMA.

Si recta bis inæqualiter ſecetur, erunt quadrata partium magis inæqualium, ſimul majora quadratis partium minus inæqualium.

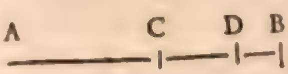


Linea AB dividatur inæqualiter in D & C. dico quadrata AC, CB ſimul majora eſſe quadratis AD,DB. Nam (*per* 5.2.) rectangulum ACB unà cum quadrato EC æquale eſt quadrato EB, cui æquale eſt rectangulum ADB, una cum quadrato ED. Et cum quadratum EC majus ſit quadrato ED, rectangulum ADB majus erit rectangulo ACB. Sed rectangulum ACB bis cum quadratis AC, CB æquantur quadrato AB (*per* 4. 2.) cui etiam æquantur rectangulum bis ſub AD, DB unà cum quadratis AD, DB.Quare ſublato minori ex una parte rectangulo bis ſub AC, CB, reſtat quadrata AC, CB majora eſſe quadratis ex AD, DB.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema.

Binomium in uno tantum puncto dividitur in nomina.



Sit A B binomium, diviſa in C in ſua nomina, ita ut AC, CB ſint rationales potentiâ tantum commenſurabiles: dico A B non poſſe in puncto D ita dividi ut AD, DB ſint rationales potentia tantum commenſurabiles. Primò conſtat neutram diviſionem dividere AB bifariam, quia ſingulæ partes eſſent etiam longitudine commenſurabiles, quare quadrata unius diviſionis inæqualia ſunt quadratis alterius; ſed aggregatum utrumque quadratorum utriuſque nempe diviſionis rationale eſt, rationale autem ſuperat rationale rationali (*per* 22.) ergo exceſſus unius aggregati quadratorum, ſupra aliud aggregatum rationale eſt, ſed idem exceſſus eſt reciprocè rectanguli bis ſub ſegmentis unius diviſionis, ſupra rectangulum bis ſub ſegmentis alterius, eo quod aggregatum quadratorum, & tale rectangulum bis in utraque diviſione adæquetur quadrato AB, rectangulum autem in utraque diviſione ſupponitur medium eſſe, ſed medium non ſuperat medium rationali

(*per* 27.)

(*per 27.*) ergo idem exceſſus eſſet rationalis & irrationalis, quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO XLIV.

Theorema.

Ex binis mediis prima in uno tantum puncto dividitur in nomina.

Sit AB ex binis mediis prima, diviſa in ſua nomina in puncto C dico in alio puncto D dividi non poſſe in ſua nomina. Oſtendimus enim (*in 38.*) rectangulum bis, ſub ſegmentis eſſe rationale, & aggregatum quadratorum eſſe medium, & hoc in utraque diviſione verum eſſe, quare cum exceſſus rectanguli bis ſub ſegmentis unius diviſionis, ſupra rectangulum bis ſub ſegmentis alterius, debeat eſſe rationalis (*per 27.*) eo quod rationale ſuperet rationale, rationali, & idem exceſſus ſit unius aggregati quadratorum ſupra aliud aggregatum, & iſta aggregata ſint media, medium autem non ſuperet medium rationali, idem exceſſus rationalis, & irrationalis eſſet.

PROPOSITIO XLV.

Theorema.

Ex binis mediis ſecunda, in uno tantum puncto dividitur in nomina.

Oſtendimus (*in 39*) quadratarum aggregatum eſſe incommenſurabile rectangulo comprehenſo ſub partibus, quare idem exceſſus non poteſt eſſe aggregati quadratorum unius diviſionis, ſupra aggregatum alterius, & eſſe rectanguli bis unius diviſionis, ſupra rectangulum bis alterius, quia eſſet commenſurabilis & non.

PROPOSITIO XLVI.

Theorema.

Major in uno tantum puncto dividitur in nomina.

Oſtendimus (*in 40*) in majori, rectangulum bis ſub ſegmentis medium eſſe, & aggregatum quadratorum eſſe rationale: ergo idem ſequitur inconveniens, nempe idem exceſſus eſſet rationalis, & non rationalis.

PROPOSITIO XLVII.

Theorema.

Rationale ac medium potens in uno tantum puncto dividitur in nomina.

Eadem eſt demonſtratio petita ex eodem abſurdo, nam in hâc aggregatum quadratorum eſt medium, & rectangulum bis ſub ſegmentis rationale, atque adeo idem exceſſus eſſet rationalis, & irrationalis.

PROPOSITIO XLVIII.

Theorema.

Bina media potens, in uno tantum puncto dividitur in nomina.

Oſtendimus aggregatum quadratorum eſſe incommenſurabile rectangulo bis ſub ſegmentis, quare idem ſequitur abſurdum.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

Supponitur ſemper expoſita rationalis, & quæ ex binis nominibus eſſe diviſa in ſua nomina, & majus nomen plus poſſe quam minus, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

DEFINITIO I.

Si majus nomen ſit rationali commenſurabile longitudine, dicatur ex binis nominibus prima.

DEFINITIO II.

Si minus nomen fuerit rationali longitudine commenſurabile, dicatur ex binis nominibus ſecunda.

DEFINITIO III.

Si Neutrum nomen ſit rationali longitudine commenſurabile, dicatur ex binis nominibus tertia.

Rurſus ſi majus nomen plus poſſit quam minus quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

DEFINITIO IV.

Si majus nomen fuerit commenſurabile longitudine, dicetur ex binis nominibus quarta.

DEFINITIO V.

Si minus nomen, vocetur quinta.

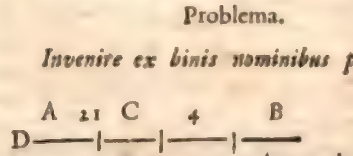
DEFINITIO VI.

Si neutrum, dicatur quinta.

PROPOSITIO XLIX.

Problema.

Invenire ex binis nominibus primam.



Primò inveniantur duo numeri quadrati AB, CB quorum exceſſus AC non ſit quadratus. Sit rationalis linea D cui EF ſit commenſurabilis longitudine. Tum fiat ut numerus AB ad AC, ita quadratum E F ad quadratum FG; dico EG eſſe ex binis nominibus primam.

Demonſtr: Ex primis nominibus prima eâ eſt quâ diviſâ in nomina majus nomen EF, plus poteſt quam minus FG quadrato lineæ, ſibi commenſurabilis. Sit autem A B numerus major quam AC, ergo EF erit majus nomen cujus quadratum ad quadratũ FG ſe habet ut AB ad ACB. Sit ergo exceſſus quadrati E F ſupra quadratum FG, quadratum lineæ H; quam oſtendo eſſe commenſura-

menſurabilem ipſi EF, cum enim ut AB ad AC, ita quadratum EF ad quadratum FG, ita etiam erit AB ad CB exceſſum quo AB ſuperat AC; ſicut EF ad exceſſum quo quadratum EF ſuperat quadratum FG, ſeu ad quadratum H; ſed AB, CB ſunt numeri quadrati, ergo ſe habet quadratum EF ad quadratum H, ut numerus quadratus ad quadratum: ergo (*per 9.*) lineæ ſunt commenſurabiles longitudine. Eſt autem EF expoſitæ rationali commenſurabilis longitudine; & rationalis, & minus nomen ſaltem potentia commenſurabile: ergo adſunt omnes proprietates lineæ quæ vocatur binomium primum.

PROPOSITIO L.

Problema.

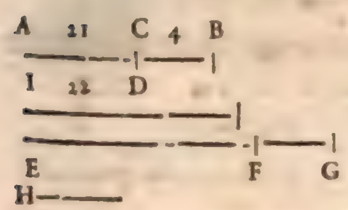
Invenire ex binis nominibus ſecundam.

Sint inventi duo numeri ut prius, ſitque expoſita rationalis D, cui FG ſit commenſurabilis longitudine, fiatque ut numerus AC ad AB, ita quadratum ex FG ad quadratum ex EF, eritque ut AB ad exceſſum CB, ita quadratum EF, ad exceſſum quadratorum; ſit ille exceſſus quadratum ex H; ſed AB, CB ſunt quadrati numeri: ergo (*per 9.*) majus nomen EF plus poteſt quam minus quadrato lineæ H, ſibi longitudine commenſurabilis, quæ eſt prima conditio. Fecimus item FG eſſe commenſurabilem longitudine lineæ rationali D, quare aderunt omnia quæ requiruntur ad hoc ut linea ſit ex binis nominibus ſecunda; nempe ut minus nomen ſit commenſurabile longitudine lineæ rationali, & majus nomen plus poſſit quam minor, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

PROPOSITIO LI.

Problema.

Invenire ex binis nominibus tertiam.



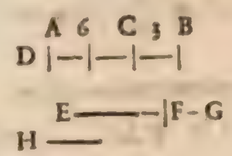
Ex binis nominibus tertia hoc habet, ut neutrum nomen ſit expoſitæ rationali commenſurabile longitudine, majus tamen nomen plus poſſit, quam minus quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Inveniantur duo numeri ut priùs, ſitque tertius numerus I qui neque ad AC neque ad AB, ſe habeat ut quadratus ad quadratum; nempe ſi ſit unitate major quam AC, aut binario prout opus fuerit ut numerus I non ſit quadratus. Exponatur rationalis D, fiatque ut numerus I ad AB, ita quadratum D ad quadratum EF, eruntque D & EF commenſurabiles tantum potentia, & D rationalis. Fiat item ut AB ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum FG, eruntque EF, FG potentia tantum commenſurabiles, & cum EF ſit rationalis, FG quoque rationalis erit. Sunt ergo EF, FG rationales potentia tantum commenſurabiles, & (*per 37.*) tota EG irrationalis eſt, & ex binis nominibus dico & tertiam eſſe.

Demonſtr. Ita eſt I ad AB, ut quadratum D ad quadratum EF, ut AB ad AC ita quadratum EF ad quad. FG, ergo ex æquo ita erit I ad AC, ut quadrat. D ad quadr. FG. Et cum I ad AC non ſe habeat ut quadratus ad quadratum D & FG non erunt longitudine commenſurabiles. Eſt ergo utrumq; nomen expoſitæ rationali incommenſurabile longitudine. Denique cum ſit ut AB ad AC ita quadratum EF ad quadratum FG, ita erit AB ad exceſſum AB ſupra AC, nempe ut AB ad CB, ut quadratum EF ad exceſſum quadrati EF, ſupra quadratum FG; nempe ad quadratum H, & cum AB, CB ſint quadrati numeri EF plus poterit quàm FG quadratâ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: ergo EG eſt binomium tertium.

PROPOSITIO LII.

Problema.

Invenire binomium quartum.



Binomium quartum tale eſt, ut majus nomen plus poſſit quam minus quadratô lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, & majus nomen ſit expoſitæ rationali commenſurabile longitudine: ad id præſtandum inveniatur numerus AB quadratus, qui ita dividatur in partes AC, CB, ut neutra ſit numerus quadratus. Exponatur rationalis D, cui EF ſit longitudine commenſurabilis quare & ipſa rationalis erit. Fiant eadem quæ in 49. & oſtendam pariter totam EG ex binis nominibus eſſe, addo ſe eſſe quartam.

Demonſtr. Quia eſt ut AB ad AC, ita eſt quadratum ex EF ad quadratum ex FG, ita erit AB ad BC, ut quadratum ex EF ad quadratum H; ſed AB ad BC ex conſtructione non eſt ut quadratus ad quadratum: ergo (*per 37.*) H ipſi EF eſt incommenſurabilis, & majus nomen EF plus poteſt quam minus FG quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: quare EG eſt binomium quartum.

PROPOSITIO LIII.

Problema.

Invenire binomium quintum.

Binomium quintum tale eſt ut majus nomen plus poſſit quàm minus, quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis. Repetitis iiſdem numeris, aſſumatur FG commenſurabilis expoſitæ rationali D, fiatque ut AC ad numerum AB ita quadratum FG ad quadratum EF: oſtendemus ut in 50 lineam EG eſſe binomium, addo eſſe quintum.

Demonſtr. Erit enim ut AB ad CB, ita quadratum ex EF ad exceſſum, ſcilicet ad quadratum H, & cum AB CB non ſint numeri quadrati, linea EF plus poterit quam FG, quadratô lineæ ſibi incommenſurabilis, & minus nomen FG eſt expoſitæ rationali commenſurabile: ergo EG eſt binomium quintum.

PROPO

Digitized by Google

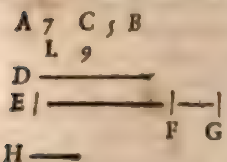
PROPOSITIO LIV.

Problema.

Invenire binomium ſextum.

Binomium ſextum tale eſt ut majus nomen plus poſſit quàm minus, quadratò lineæ ſibi incommenſurabilis, & neutrum nomen ſit commenſurabile lineæ rationali expoſitæ.

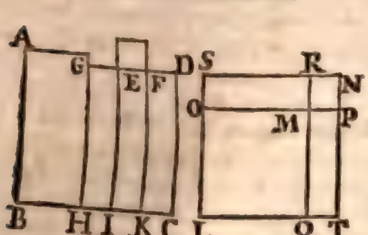
Sint numeri AC, CB plani diſſimiles, quorum neuter ſit quadratus, pariter A B quadratus non ſit, nec habeat ad utrumlibet rationem, quam quadratus ad quadratum. Sit I quilibet numerus quadratus. Sit rationalis D, fiatque ut I ad A B, ita quadratum ex D ad quadratum ex E F, & ut A B ad A C ita quadratum ex A B ad quadratum ex A C. Eritque ex æquo ut I ad A C, ita quadratum ex D ad quadratum F G, & cum tam I ad A B, quam I ad A C non habeat rationem, quàm quadratus numerus ad quadratum; lineæ EF, FG expoſitæ rationali D potentia tantum commenſurabiles, (*per 9.*) rationales igitur erunt, quare tota E G binomium erit. Addo & ſextum eſſe; nam primò utrumq; nomen probatum eſt expoſitæ rationali incommenſurabile longitudine. Secundò cum ſit ut AB ad A C ita quadratum ex E F ad quadratum ex FG, ita erit AB ad reliquum ſeu CB, ut quadratum E F ad exceſſum quadratorum ſeu quadratum H, & cum A B ad C B non habeat rationem quàm quadratus ad quadratum, erunt (*per 9.*) EF & H incommenſurabiles longitudine: quare majus nomen plus poterit quàm minus quadratò lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.



PROPOSITIO LV.

Theorema.

Si ſpatium rationali & ex binis nominibus primâ contineatur; linea ipſum potens irrationalis erit, & ex binis nominibus.



Spatium A C contineatur rationali linea AB, & binomio primo AC; dico lineam cujus quadratum æquale eſt rectangulo AC, eſſe irrationalem, & ex binis nominibus. Sit AE majus nomen, E D minus, quod bifariam dividatur in F, eritque quadratum ex EF quarta pars quadrati ED, ita ſecetur majus nomen A E in G, ut rectangulum ſub ſegmentis A G, G E, æquale ſit quadrato E F. Et quia AE plus poteſt quam ED quadrato lineæ ſibi commenſurabilis (*per def. binomij primi*) erunt AG, GE, commenſurabiles longitudine (*per 18.*) quare rectangula A H, G I erunt commenſurabilia. Fiat rectangulo AH æquale quadratum L M, & rectangulo G I quadratum M N, quæ conjungantur ad angulum rectum. Perficiatur quadratum T S, quod oſtendere debeo æquale eſſe rectangulo AC. Item lineam LT eſſe irrationalem & binomium.

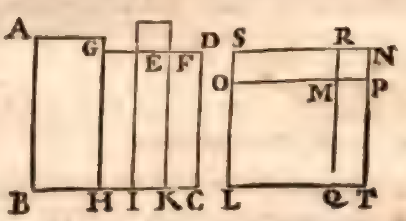
Demonſtr. Cum rectangulum A G E æquale ſit quadrato ex E F, erit E F media proportionalis inter A G & G E, quare (*per 1. 6.*) rectangulum EK erit medium proportionale inter AH, GI, ſeu inter quadrata LM, MN, ſed pariter rectangulum MT eſt inter eadem medium proportionale, nam ita eſt LM ad MT ut L q ad q T, ſeu T P ad P N, Sed ut Tp ad PN; ita eſt qP ad MN, ergo qP eſt medium proportionale inter quadrata; ergo æquale rectangulo E K, & conſequenter rectang. FC æquale eſt, rectangulo R o; ergo totum A C æquale eſt quadrato L N.

Secundò AG, GE ſunt commenſurabiles: ergo (*per 16.*) tota AE utrique erit commenſurabilis, & cum in binomio primo, majus nomen ſit rationali AB commenſurabile; erunt AG, GE, eidem AB longitudine commenſurabiles: erunt ergo rectang. AH, GI, & quadrata LM, MN, rationalia, & lineæ L q, q T rationales. Item A E majus nomen eſt incommenſurab le longitudine minori ED, & ejus ſemiſſi EE; AF autem & A G ſunt commenſurabiles longitudine; igitur AG, EF ſunt incommenſurabiles; ergo & rectang. A H, EK, ſeu quadr. LM & rectangulum q P, erunt incommenſurabilia, quare L q, q T ſunt incommenſurabiles longitudine, ſunt tamen oſtenſæ rationales. Erit ergo (*per 37.*) tota oP rationalis, & ex binis nominibus.

PROPOSITIO LVI.

Theorema.

Si rectangulum contineatur ſub rationali, & ex binis nominibus ſecunda, radix ejus quadrata erit irrationalis, & ex binis mediis prima.



Rectangulum A C contineatur ſub rationali A B, & ſub AD ex binis nominibus ſecunda; dico lineam potentem ſpatium A C eſſe irrationalem, & ex binis mediis primam. Sit A E majus nomen, E D minus, eruntque hæ lineæ rationales potentia tantum commenſurabiles, & AE plus poterit quàm E D quadrato lineæ ſibi commenſurabilis & minus nomen E D erit rationali A B incommenſurabile: fiat eadem conſtructio quæ priùs nempe rectangula AH, GI ſint æqualia quadratis LM, MN, & rectangula EK, FC rectangulis q P, R o. Oſtendam facile rectangulum AC, & quadratum LN eſſe æqualia, addo & lineam L T eſſe irrationalem & ex binis mediis primam.

Demonſtr. Primò minus nomen E D eſt lineæ A B

Digitized by Google

A B commenſurabile longitudine, A E vero rationalis eidem AB eſt incommenſurabilis, ſicut A G, GE ipſi AE commenſurabiles, erunt rationales eidem A B incommenſurabiles longitudine : ſunt ergo (*per* 22.) rectangula A H, G I media, item quadrata L M, M N erunt media, inter ſe tamen commenſurabilia, eo quod lineæ AG, GE ſint inter ſe commenſurabiles ; ergo & rectangula A H, GI & quadrata LM, MN : erunt ergo lineæ Lq, qT potentia ſaltem commenſurabiles, non tamen longitudine, quia AG, EF, ſunt incommenſurabiles, ergo & rectangula AH. EK, ſeu LM, q D ; ergo & lineæ Lq, qT. Illæ autem mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles continentes rectangulum q P rationale, utpote æquale rationali EK ; ergo (*per* 38.) linea LT eſt irrationalis, & ex binis mediis prima.

PROPOSITIO LVII.

Theorema.

Si Rectangulum contineatur ſub rationali & ex binis nominibus tertia ; recta illud potens, irrationalis erit, & ex binis mediis ſecunda.

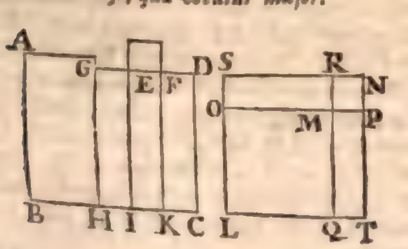
Rectangulum AC contineatur ſub rationali AB, & ſub AD quæ ſit ex binis nominibus tertia, ſitque quadratum LN æquale rectangulo AC, dico lineam LT eſſe irrationalem, & ex binis mediis ſecundam. Sit AE majus nomen, ED minus, eruntque A E, E D rationales potentia tantum commenſurabiles, & AE plus poterit quam ED quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, & AE, ED ſunt rationali AB incommenſurabiles longitudine ; facta eadem conſtructione, oſtendam quadratum L N æquale eſſe rectangulo AC, & lineam LT illud poſſe. Addo eam eſſe irrationalem, & ex binis mediis ſecundam.

Demonſtr. Primo cum AE ſit incommenſurabilis longitudini ipſi AB, & AG, GE, commenſurabiles ipſi AE eidem AB ſunt longitudine incommenſurabiles, idem dicendum de FD quæ quidem eſt rationalis, ſed (*per definitionem*) eſt rationali AB ſeu EI longitudine incommenſurabilis : ergo (*per* 22.) IK, eſt medium ſicut & QD ipſi æquale, ergo Lq, qT ſub quibus continentur ſunt potentia tantum commenſurabiles eritque (*per eandem* 22.) LT irrationalis quæ ex binis nominibus ſecunda appellatur.

PROPOSITIO LVIII.

Theorema.

Si Rectangulum contineatur ſub rationali, & ex binis nominibus quarta ; recta quæ illud poteſt irrationalis eſt, qua vocatur major.



Rectangulum AC contineatur ſub rationali AB ; & ſub binomio quarto, dico lineam quæ poteſt ſpatium AC eſſe irrationalem quæ vocatur major. Sit AE majus nomen, ED minus. Sunt AE, ED lineæ rationales potentia tantum commenſurabiles, & AE plus poterit quam ED, quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis, & AE eſt commenſurabilis longitudine rationali AB fiant reliqua ut priùs.

Demonſtr. Cum AE plus poſſit quam ED quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis ; Si ſecetur AE, ita ut rectangulum AGE, æquale ſit (*per* 19.) quadrato EF ; erunt AG, G E longitudine incommenſurabiles, & conſequenter (*per* 1. 6.) rectangula AH, GI, & quadrata LM, M N ipſis æqualia ſunt incommenſurabilia, & lineæ Lq, qT quæ ipſa poſſunt erunt potentiâ incommenſurabiles. & cum AE ſit commenſurabilis longitudine ipſi AB, erit rectangulum AI ſub rationalibus contentum rationale ; ergo aggregatum ex quadratis LM, MN rationale eſt. Rurſus cùm ED ſit rationali AB incommenſurabilis longitudine ; erit & EF ejus dimidia eidem AB incommenſurabilis longitudine, & cum EF ſit rationalis, erit rectangulum EK & MT illi æquale medium (*per* 22.) quare cum Lq, qT ſint potentiâ incommenſurabiles & aggregatum quadratorum rationale habeant, & rectangulum medium, linea LT erit major (*per* 40.) quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO LIX.

Theorema.

Si rectangulum contineatur ſub rationali & binomio quinto, recta illud potens irrationalis eſt qua rationale & medium potens dicitur.

Spatium AC contineatur ſub rationali AB, & ſub AD binomio quinto, dico lineam illud potentem irrationalem eſſe, quæ dicitur rationale, & medium potens. Sunt ergo (*ex defin.*) AE, ED, rationales potentia tantum commenſurabiles, & AE plus poteſt, quam ED quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, & ED commenſurabilis eſt longitudine ipſi AB. Fiat eadem conſtructio.

Demonſtr. Cùm A E plus poſſit quam ED quadratô lineæ ſibi longitudine in commenſurabilis. Si ita dividatur AE, ut rectangulum AGD, æquale ſit quadrato ex EF, erunt AG, GE longitudine incommenſurabiles (*per* 19.) & conſequenter (*per* 1.6.) rectangula AH, GI, & quadrata LM, MN ſunt incommenſurabilia ; & rectæ L q, q T incommenſurabiles potentia, A E eſt linea rationalis longitudine incommenſurabilis eſt rationali AB, quare (*per* 22.) rectangulum A I aut aggregatum quadratorum medium erit. Denique cum ED ſit rationali AB longitudine commenſurabilis, erit & EF, quare E K erit rationale, ſicut & MT illi æquale : cum ergo L q, q T ſint potentia incommenſurabiles, & aggregatum quadratorum ſit medium, & rectangulum rationale linea LT (*per* 41.) erit irrationalis quæ dicitur potens rationale, & medium potens dicitur.

PROPOSITIO LX.

Theorema.

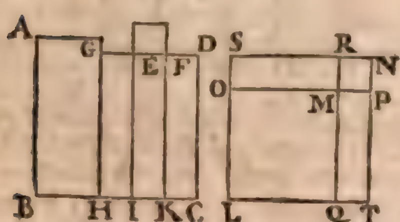
Si rectangulum contineatur ſub rationali & binomio ſexto, recta illud potens irrationalis eſt quæ bina media potens dicitur.

Sit rectangulum AC contentum ſub Rationali AB, & AD binomio ſexto, & quadratum LN ſit illi æquale : dico lineam LT eſſe irrationalem quam 42 *propoſitione* deſcripſimus quæ dicitur bina media potens. Eadem fiant quæ in propoſitione præcedenti eadem etiam ſequuntur, peculiare tamen erit cum in binomio ſexto, neutrum nomen ſit rationali lineæ commenſurabile,tam AI hoc eſt aggregatum quadratorum, quam EK, ſeu MT medium erit:ergo (*per* 42.) linea LT irrationalis erit quæ bina media dicitur, quod erat demonſtr.

PROPOSITIO LXI.

Theorema.

Quadratum lineæ quæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum, latitudinem facit binomium primum eſt.



Sit quadratum LN, ejus latus LT ſit ex binis nominibus, ſit item rectangulum AC æquale quadrato LN applicatum ad rationalem AB ; dico latitudinem AD eſſe binomium primum.

Demonſtr. *Per* 5.. ſi rectangulum AC contineatur ſub rationali AB & binomio primo, linea LT illud potens eſt quæ ex binis nominibus dicitur ; ergo ſi quadratum lineæ LT quæ ex binis nominibus dicitur, applicetur ad rationalem AB, latitudo ſeu quotiens erit AD binomium primum, quod enim componit multiplicatio, diviſio reſolvit.

PROPOSITIO LXII.

Theorema.

Quadratum ejus quæ ex binis mediis prima ad rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

Demonſtratio. Ex 56 binomium ſecundum per rationalem multiplicatum efficit quadratum ex binis mediis primæ : ergo quadratum ex binis primæ : ergo quadratum ex binis mediis primæ per rationalem diviſum efficit binomium ſecundum.

PROPOSITIO LXIII.

Theorema.

Quadratum ſecundæ ex binis mediis ad rationalem applicatum, latitudinem efficit binomium tertium.

Demonſtratio (*per* 57.) Vidimus rectangulum ſub rationali, & binomio tertio contentum æquale eſſe quadrato ex binis mediis ſecundæ : ergo quadratum ſecundæ ex binis mediis, applicatum ad rationalem reſtituit binomium tertium.

PROPOSITIO LXIV.

Theorema.

Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem efficit binomium quartum.

Demonſtratio (*per* 58.) rectangulum ſub rationali, & binomio quarto contentum æquale eſt quadrato majoris : ergo quadratum majoris ad rationalem applicatum facit latitudinem binomium quartum.

PROPOSITIO LXV.

Theorema.

Quadratum ejus quæ rationale ac medium poteſt ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus quintum.

Demonſtratio (*per* 59.) binomium quintum per rationalem multiplicatum efficit quadratum ejus quæ rationale, ac medium poteſt diviſum per rationalem reſtituit binomium quintum.

PROPOSITIO LXVI.

Theorema.

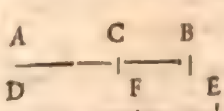
Quadratum ejus quæ bina media poteſt ad rationalem applicatum, latitudinem efficit binomium ſextum.

Demonſtr. (*Per* 60.) binomium ſextum per rationalem multiplicatum efficit quadratum potentis bina media : ergo potentis bina media quadratum per rationalem diviſum reſtituit binomium ſextum.

PROPOSITIO LXVII.

Theorema.

Longitudine commenſurabilis binomio, & ipſa binomium eſt ſimile.



Sit binomium quodcumque AB. diviſum in ſua nomina in C, ſitque DE illi longitudine commenſurabilis : dico DE eſſe binomium ſimile, hoc

Digitized by Google

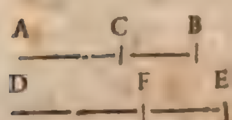
eſt vel primum vel ſecundum; ſi AB primum aut ſecundum fuerit, fiat ut AB ad AC ita DE ad DF, eritque (*per* 10.) AC commenſurabilis ipſi DF, & CB ipſi FE.

Demonſtr. AC, CB cum ſint nomina, ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles (*per* 37.) erunt & DF, FE rationales potentia tantum commenſurabiles, quare DE erit binomium. Similiter oſtendam ſi AC ſit rationali lineæ commenſurabile, DF eidem eſſe commenſurabile; quod ſi AC plus poſſit quàm CB quadrato lineæ ſibi commenſurabilis, oſtendam (*per* 15.) DF plus poſſe quam FE, quadrato lineæ ſibi potentiâ commenſurabilis: ergo quæ eſt longitudine commenſurabilis binomio, & ipſa ſimile binomium erit; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXVIII.

Theorema.

Longitudine commenſurabilis rectæ quæ ex binis mediis, & ipſa ex binis mediis erit & ſimilis.



Sit AB ex binis mediis, diviſa in ſua nomina in C, & DE ei ſit longitudine commenſurabilis, fiatque ut AB ad AC ita DE ad DF, dico DE eſſe ex binis mediis, & diviſam in F in ſua nomina.

Demonſtr. AC, CB ſunt mediæ, & commenſurabiles longitudine ipſis DE, EF: ergo (*per* 24.) DE, EF erunt mediæ, & ſicut AC, CB, ſunt potentiâ tantum commenſurabiles, DE, EF potentiâ tantum commenſurabiles erunt: eritque DE ex binis mediis. Item cum ſit AC ad CB ut DE ad DF, & ut quadratum AC ad rectangulum ACB, & ut DE ad DF, ita quadratum DE, ad rectangulum DFE; ergo ita quadratum ex AC ad quadratum ex DE ut rectangulum ACB ad rectangulum DFE; & (*per* 10.) ſi rectangulum AC, CB fuerit rationale rectangulum, DEF rationale erit, vel contra: ergo ſi AC fuerit ex binis nominibus prima, aut ſecunda, DF erit pariter ex binis mediis prima aut ſecunda.

PROPOSITIO LXIX.

Theorema.

Majori commenſurabilis, & ipſa major eſt.

Demonſtr. Eadem adhibeatur, percurrendo omnes proprietates majoris, oſtendendo compoſitum ex quadratis AC, CB commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis DE, EF, & cum primum ſit rationale ſecundum eſſe rationale.

PROPOSITIO LXX.

Theorema.

Rationale & medium potenti commenſurabilis, rationale, & medium poteſt.

Demonſtr. Simili modo inſtituetur, oſtendendo aggregatum quadratorum AC, CB quod medium eſt, eſſe commenſurabile aggregato quadratorum DE, EF: ergo & medium erit; idem probabitur de rectangulis ACB, DEF.

PROPOSITIO LXXI.

Theorema.

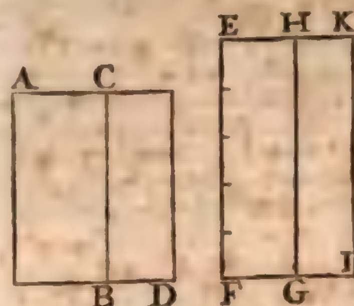
Commenſurabilis bina media potenti, bina media poteſt.

Demonſtratio eadem erit.

PROPOSITIO LXXII.

Theorema.

Si Rectangulum rationale cum medio componatur; Recta totum potens, irrationalis erit, vel ex binis nominibus; vel ex binis mediis prima, vel major; vel rationale, ac medium potens.



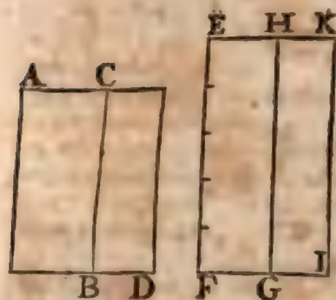
Sit rectangulum AB rationale, cui jungatur medium CD, dico lineam potentem totum ſpatium AD, eſſe irrationalem & unam ex ſupradictis. ſit enim expoſita rationalis EF, ad quam applicentur rectangula EG, HI prioribus æqualia. Cum AB, CD æqualia non ſint, alioqui ambo vel rationalia eſſent, vel ambo media, erit EH major, aut minor quam HK (*per* 1.6.) cum ergo EG ſit rationale, erit (*per* 21.) EH rationalis ipſi EF longitudine commenſurabilis; & (*per* 23.) HK, erit rationalis longitudine incommenſurabilis ipſi EF; & cum EG, GI ſint incommenſurabilia nempe rationale cum medio, EH, HK erunt incommenſurabiles. Sunt ergo EH, HK rationales potentiâ commenſurabiles; quare EK eſt ex binis nominibus, & cum EH majus nomen, ſit rationali lineæ EF commenſurabile longitudine, ſi plus poſſit EH quam HK quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, erit EK ex binis nominibus prima; quare (*per* 55.) linea potens ſpatium EI contentum ſub rationali EF, & ex binis nominibus prima erit irrationalis quæ ex binis nominibus. Si vero EH plus poſſit, quam HK, quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis, erit EK binomium quartum, & (*per* 58.) linea potens ſpatium EI erit major. Si AB minus fuerit quam CD, erit EH minor quam HK, vel ergo minus nomen HK plus poteſt quam minus EH quadrato lineæ ſibi commenſurabilis, erit EK binomium ſecundum & (*per* 56.) erit linea potens ſpatium EI, ex binis mediis prima, vel HK plus poterit quam EH, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, eritque EK binomium quintum, & (*per* 59.) linea potens ſpatium EI, aut AD, irrationalis, quæ rationale & medium potens dicitur.

PROPO

PROPOSITIO LXXIII.

Theorema.

Si duo media inter ſe incommenſurabilia componantur; linea illud potens irrationalis erit, vel quæ ex binis mediis ſecunda, vel bina media potens.



Duo media AB, CD incommenſurabilia, componantur, dico rectam quæ totum ſpatiū poteſt, eſſe aut ex binis mediis ſecūdam, vel bina media potentem.

Omnia fiant ut in præcedenti propoſitione, ſi AB, majus ſit quam CD, erit etiam EH major quam HK.

Demonſtr. Cùm ſpatia AB, CD ſupponantur incommenſurabilia, EG, HI erunt incommenſurabilia, & (*per* 1.6.) EH, HK incommenſurabiles longitudine, & (*per* 23.) utraque rationalis longitudine incommenſurabilis rationali EF, eritque EK ex binis nominibus vel tertia, vel ſexta.

Et (*per* 57.) linea potens ſpatium EI, erit irrationalis quæ ex binis mediis ſecunda.

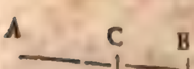
Si verò EK fuerit ſexta, linea potens ſpatium EI erit irrationalis quæ bina media nominatur.

Principium ſenariorum per detractionem.

PROPOSITIO LXXIV.

Theorema.

Si à rationali auferatur rationalis potentiâ tantum illi commenſurabilis, reliqua irrationalis, erit, dicta Apotome.



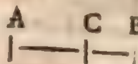
A Rationali AB auferatur rationalis AC, ſed ipſi potentiâ tantum commenſurabilis, dico reliquam BC eſſe irrationalem.

Demonſtr. Sicut eſt AB ad AC, ita quadratum AB ad rectangulum ſub AB, AC (*per* 1.6.) ſed AB, AC ſunt longitudine incommenſurabiles: erunt ergo incommenſurabilia quadratum ex AB, & rectangulum ſub AB, AC; Cum autem AB, AC ſint potentia commenſurabiles, quadrata AB, AC ſunt commenſurabilia, immo & aggregatum quadratorum AB, AC quadrato AB, & conſequenter idem aggregatum quadratorum AB, AC eſt incommenſurabile rectangulo ſub AB, AC, etiam bis ſumpto. Sed (*per* 7.2.) aggregatum quadratorum AB, AC æquale eſt rectangulo bis ſub AB, AC, unà cum quadrato BC: ergo (*per* 17.) aggregatum quadratorum AB, AC, quadrato BC eſt incommenſurabile, ergo BC eſt irrationalis. nam quadratum AB rationale eſt, ſicut & quadratum AC, & aggregatum.

PROPOSITIO LXXV.

Theorema.

Si à media, media auferatur, potentiâ tantum illi commenſurabilis quæ cum tota rationale contineat, reliqua irrationalis erit; dicatur mediæ apotoma prima.



Subtrahatur à media AB mediâ AC illi potentiâ tantum commenſurabilis; dico reliquam CB irrationalem eſſe.

Demonſtr. Quadratum ex AC media, medium eſt & irrationale, & conſequenter compoſitum ex quadratis AB, AC irrationale erit, & rectangulum ſub AB, AC ponitur rationale. Eſt autem (*per* 7.2.) aggregatum quadratorum AB, AC, æquale rectangulo bis ſub AB, AC & quadrato BC; ergo (*per* 17.) rectangulum bis ſub AB, AC, quod rationale eſt, incommenſurabile eſt quadrato BC; ergo BC irrationalis eſt: dicatur mediæ Apotomæ prima.

PROPOSITIO LXXVI.

Theorema.

Si à media, media auferatur potentiâ tantum illi commenſurabilis, quæ cum totâ medium contineat; reliqua irrationalis erit dicatur autem mediæ apotoma ſecunda.

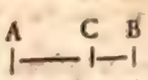


A media AB ſubtrahatur media AC potentia tantum illi commenſurabilis, ſitque rectangulum AB, AC medium. Oſtendam facile aggregatum quadratorum AB, AC medium eſſe, ſicut & rectangulum bis ſub AB, AC. Cùm ergo quadrata AB, AC æqualia ſint (*per* 7.2.) rectangulo bis ſub AB, AC, & quadrato CB, & medium non ſuperet medium rationali (*per* 67.) quadratum BC irrationale erit; ergo & linea BC: Vocetur autem mediæ apotomæ ſecunda.

PROPOSITIO LXXVII.

Theorema.

Si à recta linea, auferatur potentia ei incommenſurabilis, ita ut compoſitum ex ipſarum quadratis & rectangulum ſub ipſis contentum medium; reliqua irrationalis erit, quæ dicetur minor.



A linea AB ſubtrahatur AC, potentia ipſi incommenſurabilis. Sit autem aggregatum quadratorum AB, AC rationale, & rectangulum ſub AB, AC medium: dico reliquam AC irrationalem eſſe.

Demonſtr. Cum aggregatum quadratorum AB AC rationale ſit, & rectangulum ſub AB, AC medium ſeu irrationale, erit aggregatum quadr. AB, AC, ſeu (*per* 7.2.) rectangulum ſub AB, AC bis & quadratum BC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC. Quare (*per* 17.) aggregatum quadratorum AB, AC quod rationale eſt, quadrato BC eſt incommenſurabile: ergo quadratum BC

eſt

Digitized by Google

eſt irrationale: ergo linea BC eſt irrationalis; dicatur minor.

PROPOSITIO LXXVIII.

Theorema.

Si à recta ſubtrahatur potentiâ tantum commenſurabilis, ita ut aggregatum quadratorum ſit medium, & rectangulum ſub ipſis rationale, reliqua irrationalis erit. Vocetur autem cum rationali medium efficiens.



Subtrahatur ex recta AB, linea AC ipſi potentia incommenſurabilis, ſitque aggregatum quadratorum AB, AC, medium, & rectangulum ſub AB, AC rationale; dico reliquam CB eſſe irrationalem.

Demonſtr. Nam aggregatum quadratorum AB AC, hoc eſt (*per* 7.2.) rectangulum bis ſub AB AC unà cum quadrato BC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB,BC: ergo rectangulum bis ſub AB, BC quod rationale eſt incommenſurabile eſt quadrato BC, quod proinde irrationale erit, ſicut & linea BC. Vocetur autem cum rationali medium totum efficiens.

PROPOSITIO LXXIX.

Theorema.

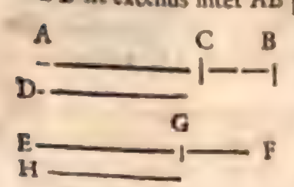
Si à recta ſubtrahatur linea ei incommenſurabilis potentiâ, ita ut tam aggregatum quadratorum quàm rectangulum ſub ipſis, ſit medium incommenſurabile quadratorum aggregato, reliqua irrationalis eſt, quæ dicitur cum medio medium totum efficiens.



Ex linea AB ſubtrahatur AC ipſi potentia incommenſurabilis, ita ut aggregatum quadratorum medium ſit, ſed incommenſurabile quadrato bis ſub AB, AC; ſed aggregatum quadratorum AB, AC, (*per* 7.2.) æquale eſt rectangulo bis ſub AB,AC, una cum quadrato BC. Ergo BC eſt exceſſus unius ſupra aliud; ſed medium non ſuperat medium rationali (*per* 27.) Ergo quadratum BC irrationale, ſicut & linea BC. Dicatur autem cum medio medium totum efficiens.

LEMMA.

Si idem ſit exceſſus inter primam & ſecundam magnitudinem, qui inter tertiam & quartam; idem etiam erit inter primam & tertiam, qui inter ſecundam & quartam.



CB ſit exceſſus inter AB primam, & D ſecundam, æqualis GF exceſſui inter EF tertiam, & H quartam; dico eundem eſſe exceſſum inter primum AB & tertiam EF, qui inter ſecundam D, & quartam H. Abſcindantur exceſſus, eruntque AC & D æquales, ſicut EG & H: ergo tam AC ſuperat EG, quam D ſuperat H, & additis CB, EF æqualibus non mutatur exceſſus: ergo tam AB ſuperat EF quàm D ſuperat H: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXX.

Theorema.

Apotomæ una tantum congruit recta linea rationalis, potentia tantum commenſurabilis toti.



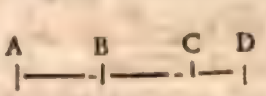
Sit Apotomæ AB, cui congruat BC potentia tantum commenſurabilis toti AC; hoc eſt ſi ex AC rationali auferatur BC illi tantum potentiâ commenſurabilis, reſtabit AB apotome, viciſſim proponatur apotome AB, cui addatur BC quæ ſit rationalis potentiâ tantum commenſurabilis toti AC, dico aliam ut BD non poſſe illi addi, quæ ſit rationalis potentiâ tantum commenſurabilis toti AD.

Demonſtr. Si hoc ita eſſet nempe tam BC,AC eſſent potentia tantum commenſurabiles quam BD, AD. Primò (*per* 7. 2.) aggregatum quadratorum AC BC ſuperat rectangulum bis ſub AC BC quadrato AB, ſicut aggregatum quadratorum AD, BD ſuperat rectangulum bis ſub AD, BD eodem quadratô AB. Ergo (*per lemma*) idem quadratum AB, erit exceſſus aggregati quadratorum AD, BD, ſupra aggregatum quadratorum AC,BC, qui rectanguli bis ſub AD, BD ſupra rectangulum bis ſub AC, BC. Sed tam quadrata AC, BC quam AD, BD ſunt rationalia, cùm dicantur lineæ eſſe rationales potentiâ commenſurabiles, & conſequenter exceſſus ille (*per* 16.) rationalis eſſet: rectangulum autem tam ſub AC, BC quam ſub AD, BD ſunt media utpote comprehenſa ſub lineis potentia commenſurabilibus, medium autem non ſuperat medium rationali (*per* 27.) ergo ille exceſſus non eſſet rationalis, quare ille exceſſus ſimul rationalis & irrationalis; quod implicat: ergo Apotomæ non poteſt duplex congruere linea rationalis potentia tantum toti commenſurabilis.

PROPOSITIO LXXXI.

Theorema.

Mediæ Apotomæ primæ una tantum congruit recta linea media, potentia ſolum commenſurabilis toti, & cum tota rationale continens.



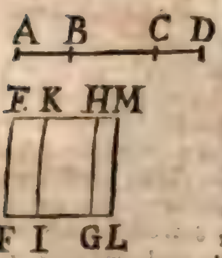
Sit AB mediæ Apotomæ prima, cui congruat BC media, toti AC potentia tantum commenſurabilis, ita ut rectangulum ſub AC BC ſit rationale; dico aliam BD cum iiſdem conditionibus ipſi AB non poſſe congruere.

Demonſtr. Linea AC, BC, ſicut & AD, BD dicuntur mediæ, & potentia commenſurabiles, ergo quadrata earum ſunt commenſurabilia: ergo tam aggregatum quadratorum AC, BC, quam AD, BD medium eſt; rectangulum autem ſub AC, BC, item ſub AD, BD ſupponitur rationale: ergo utrumque etiam bis ſumptum rationale erit. Oſtendam autem ſicut priùs, eundem eſſe exceſſum aggregati quadratorum AC, BC & aggregati quadratorum AD, BD, ac rectanguli bis ſub AC BC, & rectanguli bis ſub AD, BD. Sed primus

mus eſt irrationalis (*per* 27.) ſecundus rationalis (*per* 16.) ergo idem exceſſus ſimul rationalis, & irrationalis eſſet, quod implicat.

PROPOSITIO LXXXII.

Mediæ Apotomæ ſecundæ una tantum congruit media potentiâ ſolum commenſurabilis toti, & cum ea medium continens.



Sit A B mediæ Apotome ſecunda, cui congruat B C toti A C potentiâ tantum commenſurabilis; ita ut rectangulum ſub A C, BC ſit medium: dico aliam BD cum iiſdem conditionibus; non reſpondere lineæ A B. Si enim id fieri poteſt, exponatur rationalis E F ad quam applicetur E G æquale aggregato quadratorum AC, BC, & EI æquale quadrato AB. Item EL æquale aggregato quadratorum AD, BD, & quia aggregatum quadratorum AC, BC ſeu EG, æquale eſt rectangulo bis ſub AC, BC, & quadrato A B (*per* 7. 2.) ſeu E I, erit KG æquale rectangulo bis ſub AC, BC. Sicut EI rectangulo bis ſub AD, BD.

Demonſtr. Dicuntur AC, B C mediæ potentia commenſurabiles: ergo quadrata earum ſunt commenſurabilia, & aggregatum quadratorum AC, BC, medium erit, & (*per* 23.) erit EH rationalis rationali EF incommenſurabilis longitudine. Pariter cum rectangulum ſub AC, CB ſit medium, ejus duplum erit etiam medium, & KH erit rationalis ipſi E F incommenſurabilis longitudine. Item lineæ AC, BC ſunt longitudine incommenſurabiles, ut autem AC ad B C, ita quadratum ex AC ad rectangulum ſub AC, AB erit quadratum ex A C, & aggregatum quadratorum AC, BC, incommenſurabile rectangulo bis ſub A C B C: quare EG & K G, & conſequenter (*per* 1. 6.) lineæ EH, K H ſunt incommenſurabiles longitudine, rationales tamen: quare cum ex rationali E H auferatur rationalis KH, erit E K apotome, & illi congruens KH. Pariter oſtendam eidem congruere linea K M: quod fieri non poſſe probavimus prop. 80.

PROPOSITIO LXXXIII.

Theorema.

Minori una tantum congruit recta linea potentia tantum incommenſurabilis toti, & cum ea faciens aggregatum quadratorum rationale, & rectangulum medium.

Demonſtratio eadem eſt quæ 82 propoſitionis. Oſtendam enim ſi duæ tales lineæ minori congruerent, eundem eſſe exceſſum aggregati quadratorum unius, ſupra aggregatum quadratorum alterius, ac rectanguli bis unius ſupra rectangulum bis alterius. Et cum aggregata quadratorum ſint rationalia, ille exceſſus eſſet rationalis: ex alia verò parte, cum rectangula ſint media, & medium non ſuperet medium rationali; ille exceſſus irrationalis eſſet.

PROPOSITIO LXXXIV.

Theorema.

Linea quæ cum rationali medium totum facit una tantum congruit recta, potentia tantum commenſurabilis toti, & cum ea aggregatum quadratorum medium, & rectangulum rationale efficiens.

Eadem demonſtratio vim ſuam habet.

PROPOSITIO LXXXV.

Theorema.

Linea quæ cum media medium totum facit, una tantum congruit potentiâ incommenſurabilis toti, & cum ea faciens aggregatum quadratorum medium, & rectangulum medium, ſed incommenſurabile aggregato quadratorum.

Eadem demonſtratio quâ uſi ſumus in 82, vim ſuam habet.

DEFINITIONES TERTIÆ.

Expoſitâ rationali & apotomâ, ſi tota plus poſſit, quàm congruens quadrato lineæ ſibi commenſurabilis.

1 Si tota ſit expoſitæ rationali longitudine commenſurabilis, dicatur apotome prima.

2 Si congruens ſit expoſitæ rationali longitudine commenſurabilis dicatur Apotome.

3 Si nec congruens nec tota fuerit rationali longitudine commenſurabilis, dicatur Apotome. Quod ſi tota plus poſſit quàm congruens quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine.

4 Si tota fuerit rationali longitudine commenſurabilis, dicatur Apotome.

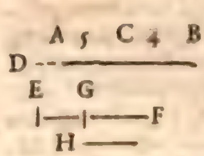
5 Si congruens fuerit rationali longit. commenſurabilis, dicatur Apotome.

6 Si neutra fuerit rationali commenſurabilis, dicatur Apotome.

PROPOSITIO LXXXVI.

Problema.

Invenire primam Apotomen.



Inventis duobus numeris quadratis AB, CB, quorum differentia A C non ſit numerus quadratus, ſit rationalis D, cui EF ſit longitudine commenſurabilis & conſequenter ſit rationalis. Fiat, ut numerus A B ad numerum A C, ita quadratum ex E F ad quadratum G F: dico E G eſſe primam Apotomen.

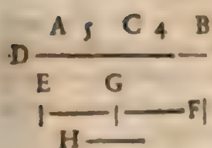
Demonſtr. Primò cum E F ſit rationalis, & EF GF quadrata commenſurabilis, erunt E F, F G rationales potentiâ tantum commenſurabiles, cum quadrata earum ſe habeant ut AB ad AC, hoc eſt non ut quadratus ad quadratum: quare per 74 E G eſt Apotome, quàm addo eſſe primam. Poſſit

enim E F plus quàm GF quadrato lineæ H. Cum ergo ita ſit numerus AB ad numerum AC ut quadratum EF ad quadratum G F erit per converſionem rationis numerus AB ad reliquum BC, ſeu exceſſum AB ſupra AC ſicut quadratum EF ad exceſſum ſeu quadratum H : ſed numeri A B , BC ; quadrati ſunt : ergo quadratum EF ad quadratum H, ſe habet ut numerus quadratus ad quadratum : ergo lineæ EF & H ſunt commenſurabiles longitudine : ergo adſunt omnes conditiones ut linea E G ſit Apotome prima.

PROPOSITIO LXXXVII.

Problema.

Invenire Apotomen ſecundam.



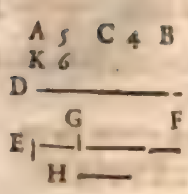
Inveniantur numeri ut in propoſitione præcedenti; expoſitaque rationali D, & ei longitudine commenſurabili GF, fiat ut AC ad AB ita ad E F.

Demonſtratio. GF, & EF erunt commenſurabiles tantùm potentia & rationales, ut patet (*per 9.*) ergo reliqua G E erit apotome, quam dico ſecundam eſſe. Poſſit enim recta EF pluſquam GF quadrato linea H. Quia ita eſt AB ad AC ſicut quadratum EF ad quadratum GF, ita erit AB ad reliquum CB ut quadratum EF ad differentiam quadratorum ſeu ad quadratum H & cum AB , CB ſint numeri quadrati, erunt E F & H longitudine commenſurabiles : quare adſunt omnes conditiones requiſitæ ut EG ſit 2 Apotome.

PROPOSITIO LXXXVIII.

Problema.

Invenire tertiam Apotomen.

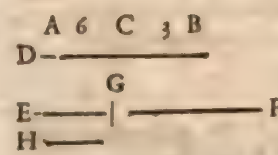


Sint duo numeri AB, AC, ut priùs: ſitque tertius K qui ad neutrum rationem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum : fiat ut K ad AB ita quadratum D ad quadratum E F eruntque lineæ potentia commenſurabiles, & cum D ſupponatur rationalis , E F rationalis erit. Fiat item ut A B ad AC : ita quadratum DF ad quadratum GF, eruntque E F, GF rationales potentiâ tantum commenſurabiles ; ergo EG (*per 74.*) erit Apotome quam dico tertiam eſſe eo quod neque GF, neque EF ſit longitudine commenſurabilis rationali D : quadratum enim D ad quadrata G F & E F rationem habet quam numerus K ad numerum AC aut AB, quæ non eſt numeri quadrati ad quadratum. Facile item oſtendere poſſum , ut priùs, lineam E F plus poſſe quàm GF quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

PROPOSITIO LXXXIX.

Problema.

Invenire quartam Apotomen.



Inveniantur numeri ita ut A B ad neutram partem A C , & C B ſit ut quadratus ad quadratum. Sit rationalis D cui ſit longitudine commenſurabilis E F ; fiatque ut A B ad AC ita quadr. EF ad quadr. G F, & cum E F ſit rationalis erit GF rationalis ; ſed potentiâ tantum commenſurabilis , eò quod numerus A B ad A C non habeat rationem , quàm numerus quadratus ad numerum quadratum : quare (*per 86.*) E G erit apotome, quam dico eſſe quartam : cum enim ſit ut AB ad AC ; ita quadratum EF ad quadratum G F ; ita erit per converſionem rationis AB ad CB ut quadratum EF ad differentiam quadratorum EF & GF, ſeu ad quadratum H, & cum AB ad C B non habeat rationem quam quadratus numerus ad quadratum , linea E F plus poterit quàm GF quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis : quod etiam requirebatur ut E G eſſet Apotome quarta.

PROPOSITIO XC.

Problema.

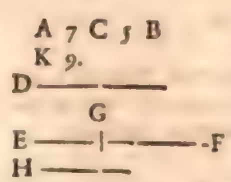
Invenire quintam Apotomen.

Sit eadem conſtructio, & inventio numerorum. Proponatur item rationalis D , cui G F ſit commenſurabilis longitudine. Fiat ut A C ad AB ita GF ad E F, clarum eſt GF, E F eſſe lineas rationales potentia tantum commenſurabiles , & adeſſe reliquas conditiones ad hoc ut E G ſit apotome quinta, cum GF ſit rationali D incommenſurabilis longitudine, & EF plus poſſit quam G F, quadrato lineæ H ſibi incommenſurabilis longitudine.

PROPOSITIO XCI.

Problema.

Invenire ſextam Apotomen.



Reperiantur numeri qui tales ſint ut A B ad neutrum illorum AC, CB, rationem habeat quam quadratus ad quadratum. Sit item numerus A , qui ad AB, AC rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum. Cætera fiant ut in propoſitione 88. Differet tamen hic caſus in eo quod AB ad BC non habeat rationem , quam habet quadratus ad quadratum , & conſequenter quadratum ex EF plus poterit quam quadratum ex GF quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Neutra etiam E F ad G F erit lineæ rationali D commenſurabilis longitudine.

PROPO

PROPOSITIO XCII.

Theorema.

Si ſpatium contineatur ſub rationali & Apotoma prima, linea illud potens erit Apotome.



Rectangulum AC contineatur ſub rationali AB, & Apotoma AD, dico lineam potentem ſpatium AC eſſe Apotomen; hoc eſt ſi QR ſupponatur eſſe hæc linea quæ poteſt ſpatium AC, ita ut ſpatium AC, & quadratũ TR ſint æqualia, debeo probare QM, RM eſſe rationales longitudine incommenſurabiles; unde ſequetur reliquã QR eſſe Apotomen.

Demonſtr. Cùm AD ſit Apotome prima, ſupponatur DE eſſe illi congruens, eritque tota AE commenſurabilis longitudine rationali AB; item AE, DE erunt rationales longitudine incommenſurabiles; denique AE plus poterit quàm DE quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Secetur ergo DE bifariam in F, quadratum ex DF erit quarta pars quadrati DE. Huic quadrato DF æquale fiat rectangulum AGE, eruntque (*per* 18.) AG, GE longitudine commenſurabiles: ergo & ipſi AB: ergo rationales erunt; & (*per* 20.) rectangula AH, GI rationalia erunt. DE rationalis quidem eſt, ſed incommenſurabilis longitudine rationali AB: ergo DF, FE illi commenſurabiles, rationales ipſi AB potentia tantum commenſurabiles erunt, quare (*per* 22.) erit utrumque rectangulum DK, FI medium.

Sit quadratum LM æquale rectangulo AH, & quadratum NO rectangulo GI, eritque utrumque quadratum rationale, & lineæ LP, NP rationales. Ex conſtructione rectangulum AGE æquale eſt quadrato DF; ergo tres lineæ AG, DF, GE ſunt continuè proportionales, & rectangula AH, DK, GI (*per* 1. 6.) ſunt continuò proportionalia, & DK erit medium inter AH, & GI, ſeu inter quadrata LM, NO; ſed pariter rectangulum LO eſt medium proportionale inter quadrata LM, NO: Eſt enim ut MP, OP ita quadratum LM ad rectangulum LO (*per* 1. 6.) ita etiam eſt rectangulum LO ad quadratum NO ut LP ad NP, ſeu MP, ad OP: ergo rectangula DK, LO ſunt æqualia, ſi FI, NM, & quadratum NO æquale eſt rectangulo GI: ergo reliquum RO æquale eſt rectangulo FH & Gnomon VXY æquale eſt rectangulo DH; cùm ergo totum quadratum LM toti rectangulo AH factum ſit æquale, & rectangulum DH Gnomoni VXY, erit quadratum TR, rectangulo AC æquale, & linea QR poterit ſpatium AC; hanc dico eſſe Apotomen; ſunt enim quadrata LM, NO rationales, & lineæ QR, RM illa potentes rationales. Oſtendimus item DK medium eſſe: ergo LO illi æquale medium erit, quare incommenſurabilia ſunt LO, NO; ergo & lineæ LP, NP, ſeu QM, RM ſunt incommenſurabiles potentiâ: ergo (*per* 74.) reliqua QR eſt Apotome.

PROPOSITIO XCIII.

Theorema.

Si rectangulum contineatur ſub rationali & Apotoma ſecunda; recta linea illud potens media eſt Apotoma prima.



Rectangulum AC contineatur ſub rationali AB & apotoma ſecunda AD, dico rectam potentem ſpatium AC eſſe mediæ apotomen primam; ut ſi quadratum TR fuerit æquale rectangulo AC, debeo oſtendere lineas QM, RM medias eſſe potentia tantùm commenſurabiles, quæ contineant rationale, & cõſequenter lineam QR eſſe mediæ apotomen primam.

Ex defin. Apotomæ ſecundæ erunt AE, DE, rationales potentiâ tantum commenſurabiles, & congruens DC erit longitudine commenſurabilis rationali DE; & AE plus poterit quàm DE quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Dividatur DE bifariam in F, & reliqua omnia conſtruantur ut in propoſitione præcedenti. Eruntque AG, GE longitudine commenſurabiles ipſi AE, & conſequenter incommenſurabiles longitudine rationali AB, ſunt tamen AG, GE, ſicut & AE, rationales: ergo rectangula AH, GI media erunt (*per* 21.) DF autem & FE, ſicut & tota DE ſunt longitudine commenſurabiles ipſi AB, & utrumque rectangulum DH, FI ſub rationalibus contentum rationale eſt. Oſtendemus item ut in præcedenti quadratum TR æquale eſſe rectangulo AC. Igitur oſtendere debeo QR eſſe mediæ Apotomen primam.

Demonſtr. Lineæ AG, GE ſunt longitudine commenſurabiles, ergo & rectangula AH, GI commenſurabilia ſunt (*per* 1. 6.) & quadrata LM, NO illis æqualia: ergo latera eorum QM, RM ſunt lineæ potentia commenſurabiles; ſed erant & mediæ, FI autem rationale eſt, & conſequenter illi æquale LO, & conſequenter medio NO incommenſurale; ſunt ergo lineæ QR, RM eandem cum illis rationem habentes longitudine incommenſurabiles: quare (*per* 75.) QR erit mediæ apotomæ prima.

PROPOSITIO XCIV.

Theorema.

Si rectangulum contineatur ſub rationali & Apotoma tertia; Recta illud potens eſt media apotome ſecunda.

Rectangulum AC contineatur ſub rationali AB & apotoma tertia AD, dico lineam potentem ſpatium AC eſſe mediæ Apotomen ſecundam; hoc eſt oſtendere debeo ſi quadratum TR fuerit æquale rectangulo AC, lineas QM, RM eſſe medias potentia tantum commenſurabiles continentes medium.



Primo (*ex definitione*) conſtat AE, DE rationales eſſe potentia tantum commenſurabiles, neutram eſſe eſſe commenſurabilem longitudine rationali AB, & AE plus poſſe quàm DE quadrato ſibi longitudine commenſurabilis. Diviſa DE bifariam in F, ſi fiat rectangulum AGE æquale quadrato DF, erunt AG, GE ipſi AE longitudine commenſurabiles (*per* 16.) & incommenſurabiles rationali AB: quare rectangula AH, GI media ſunt, ſicut & DK, FI.

Facta igitur eadem conſtructione erunt quadrata LM, NO media, commenſurabilia tamen ſicut rectangula AH, HI, & rectæ AG, GE; eruntque rectæ QM, RM potentia commenſurabiles. Deinde cum AE, DE ſint longitudine incommenſurabiles pariter (*per* 14.) GE, FE longitudine incommenſurabiles erunt, ſicut GI, FI, (*per* 1.6.) ſeu illis æqualia LO, NO, & lineæ QM, RM, quæ ſunt mediæ potentia ſolum commenſurabiles continentes LO medium; Quare (*per* 76.) erit QR, mediæ apotome ſecunda.

PROPOSITIO XCV.

Theorema.

Si rectangulum contineatur ſub rationali & apotomâ quartâ, linea illud potens minor erit.



Sit rectangulum AC contentum ſub rationali AB, & apotoma quartâ AD, & linea illud potens ſit QR, hoc eſt ſit quadratum TR æquale rectangulo AC, dico linea QR eſſe minorem, nempe QM, RM potentia eſſe incommenſurabiles, & aggregatum quadratorum ex QM, RM eſſe rationale, & rectangulum LO ſub ipſis contentum eſſe mediū.

Cùm linea AD ſupponatur Apotoma quarta, erit AE rationali AB longitudine commenſurabilis, erunt AE, DE rationales potentia commenſurabiles & AE plus poterit quàm DE, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis juxta (*def.*) quartæ Apotomæ; quare facta eadem conſtructione erunt AG, GE, tam inter ſe quam lineæ AE, incommenſurabiles. Eſt autem AI comprehenſum ſub rationalibus AE, AB rationale (*per* 20.)

Item cùm DE ſit rationalis, ſed rationali AB longitudine incommenſurabilis erit, DI & eius dimidium FI erunt media. Rurſus cùm AG, GE ſint incommenſurabiles, erunt incommenſurabilia AH, GI & illis æqualia quadrata LM, NO.

Denique cùm AI æquale ſit rationale, eo quod AB, AE ſint commenſurabiles, & AI ſit æquale aggregato quadratorum LM, NO, illud aggregatum rationale erit, rectangulum aut LO; cùm ſit æquale medio FI, medium erit; erunt igitur rectæ QM, RM potentia incommenſurabiles, & aggregatum ex quadratis rationale, rectangulum ſub ipſis contentum medium; ergo (*per* 77.) reliqua QR media erit; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XCVI.

Theorema.

Si rectangulum contineatur ſub rationali & Apotoma quinta; Recta ſpatium potens ea eſt qua cum rationali medium totum efficit.

Vide Figuram præcedentem.

Rectangulum AC contineatur ſub rationali AB, & apotoma quinta AD, dico lineam potentem ſpatium AC, eam eſſe quæ cum rationali medium totum efficit; hoc eſt ſi quadratum TR æquale ſit rectangulo AC, erunt lineæ QM, RM potentiâ incommenſurabiles, & aggregatum quadratorum medium erit, rectangulum ſub ipſis rationale. Sic enim reliqua QR erit quæ cum rationali medium totum efficit.

Supponitur ergo AD eſſe apotoma quinta, ergo per def. AE, DE potentiâ tantum commenſurabiles, & DE rationali AB longitudine commenſurabilis; item AE plus poterit quàm DE, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & quare ſi fiat quadrato DF æquale rectangulum AGE, erunt (*per* 22.) AG, GE incommenſurabiles longitudine. Item cum AE ſit longitudine incommenſurabilis rationali AB, erit AI medium, & cum DE rationalis ſit, ſicut & ejus ſemiſſis DF, erunt DI, & FI rationalia. Facta eadem conſtructione erunt AH, GI incommenſurabilia.

Demonſtratio. AI medium eſt, ſed AI æquale eſt ex conſtructione aggregato quadratorum LM, NO, ergo tale aggregatum medium eſt. Pariter cum FI rationale ſit, erit LO illi æquale rationale.

Oſtendemus item ut in præcedenti rectas QM, RM eſſe potentia incommenſurabiles: ergo (*per* 78.) QR eſt ea quæ cum rationali medium totum efficit.

PROPOSITIO XCVII.

Theorema.

Si rectangulum contineatur ſub rationali & Apotoma ſexta, recta illud potens eſt ea qua cum medio medium totum efficit.

Vide Figuram præcedentem.

Rectangulum AC contineatur ſub rationali AB, & apotoma ſexta AB, dico lineam potentem ſpatium AC eam eſſe quæ cum medio medium totum efficit: hoc eſt ſi L quadratum TR æquale ſit ſpatio AC, oſtendere debeo rectas QM, RM potentia eſſe incommenſurabiles: item aggregatum quadratorum LM, NO medium eſſe, ſicut rectangulum ſub QM,RM medium eſſe, ſic enim probavero reliquam QR eſſe eam quæ cum medio, medium totum efficit.

Supponitur

Digitized by Google

Supponitur A D eſſe apotoma ſexta, hoc nec AE, nec DE eſſe commenſurabilem rationali A E; item AE, DE eſſe rationales potentia tantum commenſurabiles. Et A E plus poſſe quam D E quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur pariter D E biſariam in F; fiatque quadrato D F æquale rectangulum A G E, eruntque A G, G E incommenſurabiles longitudine. Quia autem tam AE quàm AF ſunt rationes longitudine incommenſurabiles rationali AB, erunt AI, DI, F I media; item ut in 95 erunt AH, G I incommenſurabilia. Pariter AI, DI ſunt incommenſurabilia, eo quod rectæ AE, DE ſint potentia tantum incommenſurabiles; & cum DI, FI ſint commenſurabilia, erunt FI, AI incommenſurabilia. Oſtendimus AI medium eſſe; quare aggregatum quadratorum LM, NO, quod illi æquale eſt, medium erit.

Item quia AI, F I ſunt incommenſurabilia, erit aggregatum quadratorum incommenſurabile rectangulo LO quod fecimus æquale rectangulo FI. Denique lineæ QM, RM eodem modo oſtendentur incommenſurabiles potentia ac in propoſitione 95; ergo (*per* 79.) linea Q R eſt ea quæ cum medio medium totum efficit.

PROPOSITIO XCVIII.

Theorema.

Quadratum Apotome ad rationalem applicatum latitudinem facit Apotomen primam.

Sit Apotome cujus quadratum applicetur ad rationalem; dico latitudinem ſeu quotientem, eſſe Apotomen primam.

Demonſtr. Vidimus (*in* 92.) rectangulum comprehenſum ſub Apotome prima & rationali, eſſe æquale quadrato Apotomes; hoc eſt ſi multiplicetur Apotome prima, per rationalem, producetur quadratum Apotomes; ergo ſi quadratum Apotomes dividatur per rationalem, reſtituetur Apotomes prima.

Coroll. Si quadratum Apotomes, per Apotamen primam dividatur, quotiens erit rationalis.

PROPOSITIO XCIX.

Theorema.

Quadratum mediæ Apotoma prima ad rationalem applicatum latitudinem facit Apotomen ſecundam.

Vidimus (*in* 93.) ſpatium contentum ſub rationali, & Apotoma ſecunda, æquale eſſe quadrato mediæ Apotome primæ: ergo cum diviſio reſtituat primam latitudinem, quadratum mediæ apotome primæ, per rationalem diviſum, facit latitudinem Apotomen ſecundam.

PROPOSITIO C.

Theorema.

Quadratum mediæ Apotoma ſecundæ ad rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomam tertiam.

In 94. habemus ſpatium contentum ſub rationali & Apotoma tertia, æquale eſſe quadrato mediæ Apotome ſecundæ: ergo quadratum mediæ apotome ſecundæ per rationalem diviſum reſtituit mediam Apotomam tertiam.

PROPOSITIO CI.

Theorema.

Quadratum minoris ad rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

In 95 habemus, Rectangulum ſub rationali & Apotome quarta contentum æquale eſſe quadrato minoris: ergo quadratum minoris per rationalem diviſum, latitudinem facit Apotomen quartam.

PROPOSITIO CII.

Theorema.

Quadratum illius, quæ cum rationali medium totum efficit ad rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

In 96 habemus rectangulum ſub rationali & Apotome quinta æquale eſſe quadrato illius, quæ cum rationali medium totum efficit: ergo quadratum illius quæ cum rationali medium totum efficit, per rationalem diviſum, ſeu ad rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

PROPOSITIO CIII.

Theorema.

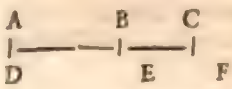
Quadratum illius quæ cum medio medium totum efficit, ad rationalem applicatum latitudinem facit Apotomen ſextam.

Quia (*per* 97.) Rectangulum ſub rationali & apotome ſexta contentum æquale eſt quadrato illius quæ cum medio, medium totum efficit: ergo quadratum ejuſdem per rationalem diviſum latitudinem efficit Apotomen ſextam.

PROPOSITIO CIV.

Theorema.

Apotomæ commenſurabilis, ſimilis eſt Apotome.



Sit Apotome A B, ipſique congruens BC, eruntque AC, BC rationales potentia tantum commenſurabiles. Sit D E longitudine commenſurabilis lineæ A B, dico D E Apotomen eſſe, imò & ſimilem ſeu ordine eandem. Fiat ut A B ad D E ita B C ad E F, eritque (*per* 12.5.) ut AC ad DF, ita AB ad D E, aut BC ad EF, & (*per* 10.) erunt AC, D E; item BC, EF commenſurabiles, & cum AC, BC ſint rationales potentia commenſurabiles, erunt D F, E F rationales potentia tantum commenſurabiles, quare (*per* 74.) DE eſt Apotome. Addo & eſſe ſi-

 milem,

milem. Si enim AB plus poſſit quàm BC quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis (*per* 15.) D E plus poterit quàm quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel contra. Si A C expoſitæ rationali ſit commenſurabilis, erit & DF eidem commenſurabilis, atque ita de cæteris: ergo ſi A B habeat omnes conditiones,ut ſit quæcunque Apotome, oſtendam D E eas omnes habere, & conſequenter eſſe ſimilem Apotomen.

Eôdem modò oſtendam 105 mediæ Apotomæ commenſurabilem mediam Apotomen eſſe & ordine eandem.

Propoſ.106. Minori commenſurabilem minorem eſſe.

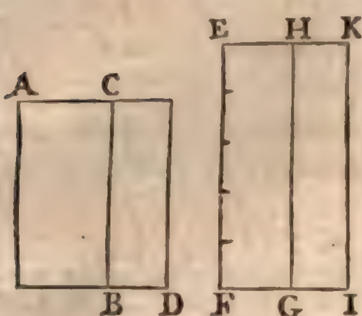
Propoſ.107. Rectam lineam commenſurabilem ei quæ cum rationali medium totum efficit, cum rationali medium totum efficere.

Propoſ. 108. Commenſurabilem ei quæ cum medio medium totum efficit, & ipſam cum medio medium totum efficere.

PROPOSITIO CIX.

Theorema.

Medio à rationali detracto, linea reliquum potens vel Apotome vel minor eſt.



Sit rectangulum rationale AD, à quo ſubtrahatur medium C D, dico rectam quæ poteſt reliquũ ſpatium A B, unam eſſe ex duabus irrationalibus, nempe Apotomen aut minorem. Exponatur rationalis EF,ad quam applicentur rectangula EI, H I rectangulis AC, CD æqualia.

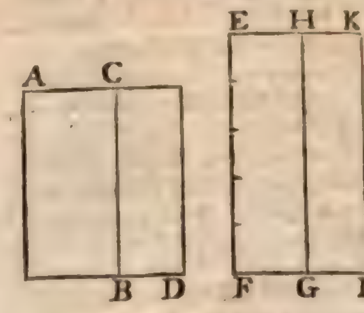
Demonſtr. Rectangulum E I rationali A D æquale, rationale eſt,& (*per* 21.) erit EK rationali E F longitudine commenſurabilis. Item cum HI medio CD, ſit æquale, medium erit, & (*per* 23.) erit HK rationalis longitudine ipſi HG ſeu rationali EF incommenſurabilis, & (*per* 13.) erunt E K, H K longitudine incommenſurabiles, eritque E H Apotome, & H K congruens. Vel ergo E K plus poteſt quam H K quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si primum erit EH apotome prima; ſi ſecundum erit E H apotome quarta, & (*per* 92. & 95.) linea potens ſpatium EG, ſeu AB erit aut Apotome, aut minor.

PROPOSITIO CX.

Theorema.

Rationali à medio detracto, aliæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ Apotoma prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

Subtrahatur à medio AD, rationale CD; dico rectam quæ poteſt reliquũ A B vel eſſe mediæ Apotome primã, vel eam quæ cum rationali medium totum efficit.

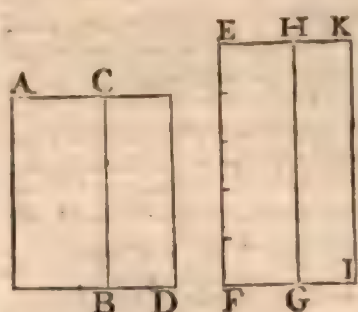


Factâ enim eâdem conſtructione; cum AD ſit medium, erit E I illi æquale medium, eritque (*per* 23.) E K rationalis, rationali E F longitudine incommenſurabilis. Et cum H I rationali C D æquale ſit, & ipſum rationale erit; & H K longitudine commenſurabilis erit rationali E F; Sunt ergo E K, H K rationales potentia tantum commenſurabiles; quare (*per* 74.) reliqua E H eſt Apotome. Vel ergo E K plus poteſt quam H K quadrato lineæ ſibi commenſurabilis, vel incommenſurabilis; ſi primum EH erit Apotome ſecunda, & (*per* 93.) linea potens ſpatium E G, ſeu AB mediæ eſt Apotome prima; ſi ſecundum E H (*ex def.*) eſt Apotome quinta, & (*per* 96.) linea potens ſpatium E G, ſeu A B, eſt ea quæ cum rationali medium totum efficit.

PROPOSITIO CXI.

Theorema.

Medio à medio detracto, quod ſit toti incommenſurabile, fiunt reliquæ irrationales, vel media Apotome ſecunda, vel cum medio medium totum efficiens.



Subtrahatur à medio AD medium CD, ſed ipſi incommenſurabile; dico rectam, quæ poteſt reliquum ſpatiũ A B, vel eſſe mediam Apotomen ſecundam, vel eam quæ cum medio medium totum efficit. Fiat eadem conſtructio.

Demonſtr. Cum A D & ei æquale E I, ſit medium, & E F ſit rationalis, erit E K rationalis ipſi E F potentia tantum commenſurabiles. Idem dicendum de HK. Et cum AD, C D & eis æqualia E I, H I ſupponantur incommenſurabilia; erunt E K, HK eamdem cum illis rationem habentes (*per* 1. 6.) incommenſurabiles; Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles, & (*per* 74.) reliqua EH erit Apotome. Vel ergo EK plus poteſt quàm HK quadrato ſibi longitudine commenſurabilis; & ſic EH erit Apotome tertia, & (*per* 94.) linea potens ſpatium E G, ſeu A B, eſt mediæ Apotome ſecunda. Vel E K plus poteſt quàm HK quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis,& tunc (*per def.*) linea EH erit Apotome ſexta. Et (*per* 97.) linea potens ſpatium E G, ſeu AB,erit ea quæ cum medio medium totum efficit; quod erat demonſtrandum.

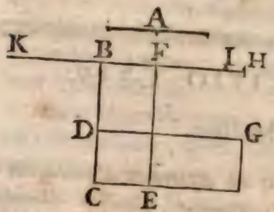
PROPO

12. Cum rationali medium totum efficientem.
13. Cum medio medium totum efficientem.

PROPOSITIO CXIII.

Theorema.

Quadratum rationalis ad eam quæ ex binis nominibus applicatum, latitudinem facit Apotomen; cujus nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius quæ ex binis nominibus. Et Apotome quæ fit, eundem habet ordinem, ac quæ ex binis nominibus.



Sit rationalis A & ex binis nominibus BC, ad quam applicetur rectangulum BE, æquale quadrato ex A. Sitque latitudo DF; hanc dico eſſe Apotomen, & ipſius nomina, hoc eſt totam lineam, & ipſi congruentem, eſſe commenſurabilia nominibus BD, DC ipſius BC. Addo hanc Apotomen eamdem eſſe ordine, ac BC. Applicetur idem quadratum A ad minus nomen DC, ſitque rectangulum CG, æquale quadrato A.

Demonſtr. Rectangula BE, CG eidem quadrato A æqualia, inter ſe ſunt æqualia: ergo (*per* 13. 6.) ita eſt BC ad CD, ſicut DG, ſeu BH ad BF, & dividendo ut BD ad DC, ita FH ad BF. Et cum BD ſit majus nomen, erit FH major quàm BF. Sint BF, FI æquales. Fiatque ut HI ad IF ita FB ad BK; erit componendo ut HF ad IF, ſeu BF, ita FK ad BK. Eſt autem ut HF ad BF, ita BD ad DC, ergo ut eſt BD ad DC, ita FK ad BK. Sunt autem (*per* 10.) BD & DC rationales potentia tantum commenſurabiles, ergo & FK, BK erunt rationales potentiâ tantum commenſurabiles.

Deinde cum ſit ut HF ad BF ita FK ad BK, erunt antecedentes ſimul ad conſequentes ut una ad unam, nempe ita erit HK ad FK ut FK ad BK, & FK erit media proportionalis inter HK & BK: ergo ita erit quadratum HK ad quadratum FK ut HK ad BK.

Item CG quadrato rationalis A æquale rationale eſt, & (*per* 21.) applicatum ad DC facit latitudinem DG ſeu HB rationalem ipſi DC longitudine commenſurabilem. Eſt autem ut BD ad DC ita FK ad BK, aut HK ad FK; ergo ut quadratum BD ad quadratum DC ita quadratum HK ad quadr. FK, ſed quadrata BD, DC ſunt commenſurabilia, cum lineæ BD, DC ſupponantur rationales potentia commenſurabiles: ergo quadratum HK commenſurabile eſt quadrato ex FK, ut autem quadratum HK ad quadr. FK ita HK ad BK: Sunt ergo HK, BK longitudine commenſurabiles, quare & reliqua BH quæ oſtenſa eſt rationalis. Eſt igitur HK rationalis ſicut & BK; ſed FK ipſi BK potentia commenſurabilis eſt oſtenſa, quare cum FK, BK rationales ſint potentia tantum commenſurabiles, erit (*per* 74.) reliqua BF, Apotome & congruens BK; quod erat primum.

Oſtendimus HK, BK longitudine commenſurabiles eſſe: ergo (*per* 16) BK BH ſunt longitudine commenſurabiles, ſed BH ipſi DC eſt commenſurabilis;

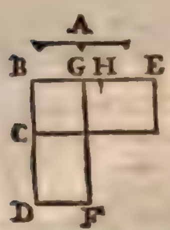
menſurabilis,ergo & BK. Item ita eſt BD ad DC; ut F K ad B K, & permutando erit B D ad F K, ſicut DC ad BK. Sed ultimæ ſunt commenſurabiles; ergo & BD, FK. Erunt ergo nomina Apotomes F K, BK nominibus B D, DC commenſurabilia, quod eſt ſecundum; immo & proportionalia.

Denique vel B D plus poteſt quàm D C quadrato ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Probabitur item FK plus poſſe quàm B K quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis vel incommenſurabilis ex ſimilitudine rationum, ſicut & cæteræ omnes conditiones: quare Apotome B F ipſi B C ordine reſpondet quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO CXIV.

Theorema.

Quadratum rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit binomium, ſuntque nomina utriuſque, & proportionalia & commenſurabilia: ſunt item ambo in eodem ordine.



Sit rationalis A, Apotome BC, congruens CD; & applicetur ad BC rectangulum C E æquale quadrato rationalis A; dico B E eſſe binomium, cujus nomina erunt commenſurabilia & proportionalia nominibus lineæ B D. Applicetur ad BD rectangulum B F, æquale eidem quadrato A, eruntque CE, BF æqualia,& (*per* 13.6.) erit ut B E ad B G ita B D ad B C; & per converſionem ut BE ad GE ita BD ad CD. Sit item EH ad HG ut BE ad GE.

Demonſtr. Quia eſt ut tota B E ad totam G E ita EH ad BE, ita erit reliqua BH ad HE ut tota BE ad totam GE, hoc eſt ut E H ad H G: ergo ita eſt BH ad HE ut HE ad HG; quare HE eſt media proportionalis inter BH & GH, erit ergo ut B H ad GH ita quadratum B H ad quadratum HE. Vidimus iam ita eſſe BD ad CD ut B F ad GE, ſeu BH ad HE. Sunt autem BD,CD nomina Apotomes lineæ rationales potentiâ tantum commenſurabiles,erunt BH, HE potentia commenſurabiles, & eorum quadrata commenſurabilia. Ut autem eorum quadrata ita BH ad GH: ergo BH, G H ſunt commenſurabiles longitudine. Quare reliqua BG eiſdem erit longitudine commenſurabilis. Item cum B D rationalis ſit, nempe majus nomen Apotome, & rectangulum B A quadrato rationali A æquale rationale; erit B G latitudo rationalis (*per* 21.) commenſurabilis longitudine ipſi BD; quare B H quoque rationalis erit. Sunt autem BH, H E potentiâ ſolum commenſurabiles, & B H rationalis. Sunt ergo rationales BH, HE potentia ſolum commenſurabiles. Eſt ergo BE binomium, quod erat primò demonſtrandum.

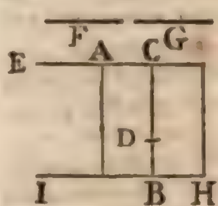
Oſtendimus item ita eſſe B H ad HE ſicut BD ad C D, & permutandoita erit BH ad BD ſicut HE ad CD; quare cum BH, BD ſint longitudine commenſurabiles, erunt & HE, CD. Quare BH, HE nomina binomia, commenſurabilia ſunt ipſis BD, CD nominibus Apotomæ; immo & proportionalia;quod erat ſecundum.

Denique ſi BD plus poſſit quam CD, quadrato lineæ ſibi commenſurabilis vel incommenſurabilis, idem oſtendam de BH reſpectu HE, atque ita de reliquis conditionibus,& conſequenter Apotome & binomium in eodem erunt ordine. Hoc eſt vel utraque prima, vel utraque ſecunda &c.

PROPOSITIO CXV.

Theorema.

Si ſpatium continentur ſub Apotoma, & binomio cujus nomina ſunt proportionalia, & commenſurabilia, recta ſpatium potens rationalis eſt.

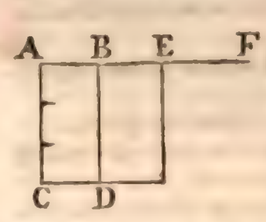


Spatium A B contineatur ſub Apotoma AC, & binomio C B, ita ut nomina illius C D, DB ſint commenſurabilia, & proportionalia, C E, A E nominibus apotomæ A C & in eadem ſint ratione, & recta F poſſit ſpatium AB, dico rectam F rationalem eſſe. Sit enim rationalis G, cujus quadratum applicetur binomio C B, fiatque rectangulum CH erit(*per* 113.)latitudo BH Apotome cujus nomina H I, B I erunt & proportionalia & commenſurabilia nominibus C D, D B, hoc eſt C E, AE, & permutando ut tota H I ad totam C E ita ablata B I ad ablatam A E; ergo & reliqua BH ad reliquam A C ut tota H I ad totam C E. Commenſurabiles autem ſunt longitudine H I, C E quod utraque eidem C D commenſurabilis ſit: ergo & BH, AC longitudine ſunt commenſurabiles, & HC ipſi BA; ſed H C æquale quadrato lineæ rationalis rationale eſt: ergo & AB. Ergo linea F illud potens rationalis erit.

PROPOSITIO CXVI.

Theorema.

A media infinitæ fiunt irrationales diverſæ à ſuperius enumeratis.



Sit media AB, dico ex illa fieri irrationales infinitas diverſa à tredecim ſuprà recenſitis. Expoſita enim rationali A C ſpatium A D contineatur ſub A B media, & rationali AC, illud (*per* 38.) irrationale erit. Poſſit ipſum recta BE, quæ irrationalis erit; dico BE non eſſe eandem cum ſupra recenſitis.

Demonſtr. Quadratum mediæ ad rationalem AC applicatum latitudinem facit rationalem ipſi AC incommenſurabilem longitudine (*per* 23.) & quadrata reliquarum ad eamdem AC applicata faciant latitudines aut apotomas, aut binomia, & quadratum hujus irrationalis BE ſimiliter applicatum faciat mediam AB, hæc irrationalis BE ab iis omnibus erit diverſa.

Quòd ſi compleatur rectangulum BE,illud contentum erit ſub rationali BD, & irrationali BE, irrationale

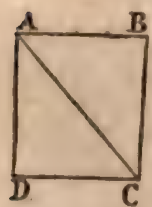
Digitized by Google

irrationale erit. Poſſit eum recta EF, hæc irrationalis erit: hanc oſtendo eſſe diverſam à tredecim ſupra recenſitis, nec ipſi DE. Nam quadratum EF ad rationalem applicatum, faciat latitudinem BE, oſtendam quadrata aliarum applicata ad BD facere aliam latitudinem à BE; ſic aliæ atque aliæ irrationales diverſæ comparari poſſunt.

PROPOSITIO CXVII.

Theorema.

Diameter quadrati, ejuſdem lateri longitudine eſt incommenſurabilis.



E . . . H . . . F
G . . . .

Sit quadratum ABCD, ſitque diameter AC, & latus AC; dico AB eſſe longitudine incommenſurabilem ipſi AC. Si enim commenſurabiles eſſent haberent rationem, quam numerus ad numerum. Habeant igitur ſi fieri poteſt eamdem quam numerus EF ad numerum G, ſintque numeri EF & G minimi in ſua proportione.

Demonſtr. Ita dicitur eſſe AB ad AC ut numerus G ad EF: ergo ut quadratum AB ad quadratum AC, ita quadratus numeri G ad quadratum EF, ſed (*per* 47.1.) quadratum AC duplum eſt quadrati AB: ergo & quadratus EF duplus erit quadrati ex G. Quadratus ex EF dividatur bifariam. Debet autem poſſe dividi; ergo par erit, & numerus EF ipſum producens par erit. Dividatur ergo EF bifariam in H, quadratus ex EF, quadruplus erit quadrati ex EH. Duplus autem eſt quadrati ex G, quare quadratus ex G duplus eſt quadrati ex EH, erit ergo quadratus ex H par cum habeat dimidium. Sed *in* 24 *ſeptimi* demonſtratum eſt ſi numeri in ſua proportione ſint minimi, ſi unus ſit par, alium eſſe imparem: ſi enim uterque par eſſet, divideretur uterque bifariam, & eorum ſemiſſes in eadem eſſent ratione, ergo non eſſent minimi.

Aliter idem demonſtratur AC ad AB dicantur rationem habere, quam numerus EF ad G, qui numeri minimi ſunt in ſua proportione & inter ſe primi; non erit G unitas, quia quadratus ex EF binarius eſſet. Quoniam autem quadratus ex EF duplus eſt quadrati ex G. quadratus ex G metietur quadratum ex EF, & (*per* 14. 8.) G latus metietur latus EF. Cùm ergo G ſeipſum metiatur, erunt numeri G & EF compoſiti; contra ſuppoſitionem.

SYNOPSIS TOTIUS LIBRI.

De commenſurabilibus & incommenſurabilibus.

Cum hæc vox commenſurabilitatis ſit reſpectiva debet ad aliquam magnitudinem reſpectum habere. Hæc prima magnitudo vocatur rationalis; cui commenſurabiles ſive potentiâ tantùm, ſive lõgitudine, rationales dicuntur.

Poſſunt plures magnitudines quæ cum propoſitâ rationali comparantur, iterum inter ſe conferri. Licet enim rationales ſint, poſſunt nonnunquam & ipſæ inter ſe commenſurabiles eſſe longitudine, aliquando potentiâ tantum.

Antequam igitur ad peculiares lineas deſcendatur æquum fuit ut generales traderentur quibus commenſurabilitas, & incommenſurabilitas dignoſceretur.

Et primò quidem dicitur quod ſi una magnitudo ab alia, & reliquum à ſecunda alternatim ſubtrahantur, erunt incommenſurabiles, ſi nunquam reliquum præcedentem metiatur. Exinde docemus methodum quotcumque commenſurabilium communem menſuram inveniendi. Stabilimus conſequenter magnitudines commenſurabiles eamdem habere rationem quam numerus ad numerum. Item linearum commenſurabilium longitudine quadrata, eamdem habere rationem quam numerus quadratus ad quadratum cum ſuis converſis. Ex quo ſequitur lineas longitudine commenſurabiles, potentia tales eſſe, non tamen viciſſim.

Quatuor proportionalium ſi prima ſecundæ fuerit commenſurabilis, erit & tertia quartæ; ſi duæ eidem fuerint commenſurabiles, erunt & inter ſe. In proportionalibus ſi prima plus poſſit quàm ſecunda quadrato lineæ ſibi incommenſurabili, idem dicendum de tertia reſpectu quartæ ſi partes commenſurabiles ſint, & totum ſingulis erit. Si partes incommenſurabiles ſint, & totum ſingulis erit incommenſurabile, & viciſſim.

Si rectangulum ſub ſegmentis majoris æquale ſit quadranti quadrati minoris, & ſegmenta illa ſint commenſurabilia, major plus poterit quàm minor quadrato lineæ ſibi commenſurabilis, & viciſſim.

Eidem rectæ duas incommenſurabiles unam potentiâ tantum, alteram omninò reperire.

Rectangulum contentum ſub longitudine commenſurabilibus lineis & rationalibus, hoc eſt propoſitæ rationali lineæ ſaltem potentiâ commenſurabilibus, rationale eſt, ſeu quadrato rationalis lineæ commenſurabile.

Rationale diviſum per lineam rationalem; hoc eſt ſaltem potentia primæ rationali commenſurabilem, quotientem efficit rationalem, & diviſori longitudine commenſurabilem.

Quod ſub rationalibus potentiâ tantum incommenſurabilibus continetur eſt irrationale, & radix ejus eſt irrationalis dicta media. Dicitur medium, quia eſt medium proportionale inter quadrata linearum.

Quadratum mediæ diviſum per rationalem, hoc eſt primæ rationali ſaltem potentiâ commenſurabilem, quotientem facit rationalem.

Mediæ commenſurabilis ſaltem potentia media eſt.

Rectangulum contentum ſub mediis longitudine commenſurabilibus, medium eſt; ſub commenſurabilibus tantum potentiâ, vel rationale eſt vel medium.

Medium non ſuperat medium rationali.

Invenire medias potentiâ tantum commenſurabiles

rabiles quæ rationale contineant, item quæ med. ũ.

Invenire duas rationales potentiâ tantum commenſurabiles, ita ut major plus poſſit, quàm minor quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Item incommenſurabilis ſimiliter de duabus mediis rationale continentibus. Item de medium continentibus.

Invenire duas rectas potentiâ incommenſurabiles, ita ut aggregatum quadratorum ſit rationale, & rectangulum ſub ipſis medium. Vel contra. Vel utrumque medium, ſed incommenſurabile.

Binomium irrationalis eſt linea, ex duabus rationalibus potentia tantum commenſurabilibus compoſita.

Ex duabus mediis prima conſtat duabus mediis potentia tantum commenſurabilibus, quæ rationale contineant.

Ex duabus mediis 2. conſtat duabus mediis potentiâ tantum commenſurabilibus quæ medium contineant.

Major eſt irrationalis linea ex duabus potentiâ incommenſurabilibus conſtans, ita ut aggregatum quadratorum ſit medium, & rectangulum ſub ipſis medium.

Bina media potens eſt irrationalis linea, ex duabus potentia incommenſurabilibus conſtans, ita ut tam aggregatum quadratorum, quàm rectangulum ſit medium, ſed ſint incommenſurabilia.

Quæ ex binis nominibus, in uno tantum puncto in ſua nomina dividitur.

Sicut ex binis mediis prima, ſecunda, major, rationale & medium potens, & bina media potens.

Binomiorum ſunt 6 ſpecies.

Prima talis eſt ut majus nomen plus poſſit quàm minus, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, & majus nomen ſit expoſitæ rationale longitudine commenſurabile.

2. Binomium vult minus nomen eſſe rationali expoſitæ commenſurabile.

3. Neutrum.

Quartum binomium tale eſt, ut majus nomen plus poſſit, quàm minus, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, & majus nomen ſit expoſitæ rationali commenſurabile.

Quintum ut ſit minus nomen.

Sextum ut neutrum.

Tum traduntur methodi ad eas inveniendas.

Linea potens rectangulum ſub rationali, & binomio primo, irrationalis eſt, & eſt binomium.

Si ſub rationali & binomio ſecundo, ex binis mediis prima erit.

Si ſub rationali & binomio tertio, ex binis mediis ſecunda.

Si ſub rationali & binomio quarto. Major.

Si ſub rationali & binomio quinto, rationale & medium potens.

Si ſub rationali & binomio ſexto, bina media potens erit.

Binomij quadratum per rationalem diviſum, quotientem exhibet binomium primum.

Quadratum ejus quæ ex binis mediis prima per rationalem diviſum quotientem habet binomium 2.

Quadratum ex binis mediis ſecundæ, binomium tertium.

Quadratum majoris, binomium quartum.

Quadratum, rationale, & medium potentis, binomium quintum.

Quadratum bina media potentis, binomium ſextum.

Binomio commenſurabilis long. ſimile eſt binomium, idem dicito de binis mediis, de majore, de rationali & medio potente, de bina media potente.

Si rectangulum rationale & medium componantur, linea totum potens irrationalis eſt, vel binomium, vel quæ ex binis mediis prima, vel major, vel rationale, & medium potens.

Si duo media incommenſurabilia componantur, linea totum potens vel erit ex binis mediis ſecunda, vel bina media potens.

Si à rationali rationalis potentia tantum commenſurabilis auferatur, reſtat Apotome, quæ eſt irrationalis, ſicut & ſequentes.

Si à media media auferatur potentia tantum commenſ. quæ cum tota rationale contineat, vocetur mediæ Apotome prima. Si medium contineat erit mediæ Apotome ſecunda.

Si à recta alia auferatur potentiâ illi incommenſ. ita ut aggreg. quadratorum ſit rationale rectangulum medium, dicatur minor. E contra ſi aggr. quadr. ſit medium, & rectang. rationale, dicitur cum rationali medium totum efficiens. Si utrumque medium dicatur cùm medio, medium totum efficiens.

Omnibus his lineis unica tantum congruit linea, quæ habeat ſupradictas conditiones.

Sex ſunt ſpecies Apotomæ. In tribus primis tota plus poteſt quàm congruens quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. In tribus poſterioribus incommenſurabilis.

In prima & quarta, tota eſt expoſitæ rationali commenſurabilis longitudine. In ſecunda & quinta congruens. In tertia, & ſexta neutra.

Exinde ſequitur inventio Apotomarum.

Si rectangulum contineatur ſub rationali & Apotoma, prima linea illud potens eſt Apotome.

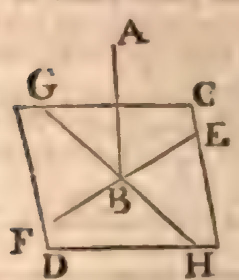
Digitized by Google

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER UNDECIMUS.

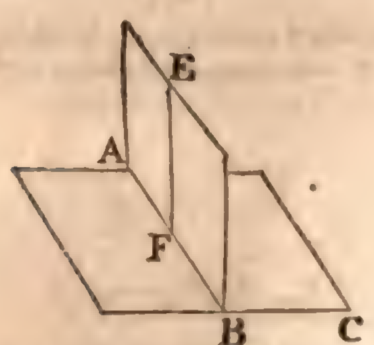
Definitiones.

1. Solidum eſt quantitas longitudinem, latitudinem, & craſſitiem habens.

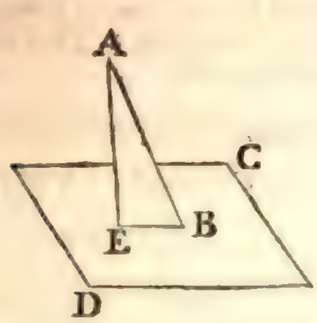
2. Solidi autem extrema ſunt ſuperficies.



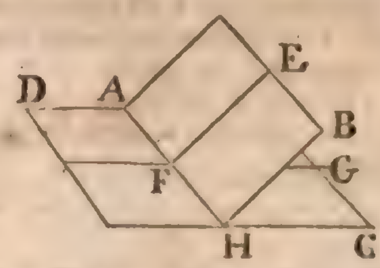
3. Linea dicitur ad planum recta, quæ eſt perpendicularis ad omnes lineas ductas in prædicto plano, & eam tangentes. *Ut linea AB dicitur recta ad planum CD, ſi ad omnes lineas ductas in plano CD per punctum B, quales ſunt EF, GH fuerit perpendicularis ita ut anguli ABE, ABF, ABG, ABH, &c. ſint recti.*



4. Planum ad planum rectum eſt, cum lineæ in uno plano ductæ perpendiculares communi planorum ſectioni, ad alterum planum ſunt rectæ. *Communem planorum ſectionem vocamus lineam exiſtentem in utroque plano, qualis eſt AB, quæ eſt tam in plano AC, quam in plano AE. Si igitur linea EF ducta in plano AE & perpendicularis ad communem ſectionem AB; fuerit recta ad planum AC; planum AE ad planum AC, rectum eſt.*



5. Si linea AB non fuerit recta ad planum CD, & ex ejus puncto ſublimi A ducatur AE ad planum CD recta; ducatur item linea BE; angulus ABE eſt inclinatio lineæ AB, cum plano CD.



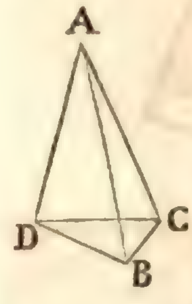
6. Plani ad planum inclinatio, eſt angulus acutus, quem comprehendunt duæ lineæ in utroque plano ductæ, & perpendiculares ad communem eorum ſectionem. *Ut plani AB ad planum CD inclinatio eſt angulus acutus EFG, quem comprehendunt lineæ EF, FG; utraque perpendicularis in ſuo plano, ad communem ſectionem AH.*

7. Planum ad planum, ſimiliter inclinatum eſt cum anguli inclinationum fuerint æquales.

8. Plana parallela ſunt ea, quæ quantumvis producantur ex omni parte, æquali ſemper intervallo ubique diſtant.

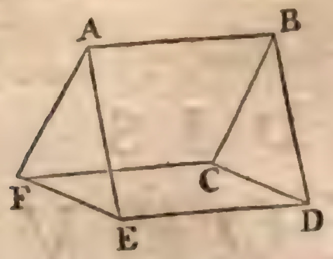
9. Similes ſolidæ figuræ ſunt, quæ totidem planis ſimilibus continentur. *Ut duo cubi. Hæc tamen definitio convenit ſphæris; tales autem figuræ angulos ſolidos æquales habent.*

10. Æquales & ſimiles ſolidæ figuræ, ſunt; quæ ſimilibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur; nam ſi animo concipiantur ſe penetrare, neutra aliam excedet cum angulos & latera æqualia habeant.



11. Angulus ſolidus eſt plurium quam duarum linearum in diverſis planis exiſtentium mutua inclinatio. *Ut inclinatio quam habent tres lineæ AB, AC; AD in diverſis planis exiſtentes.*

12. Pyramis eſt figura ſolida, quæ triangulis continetur: quorum baſes ſunt in eodem plano; vertex vero communis. *Ut figura ABCD.*



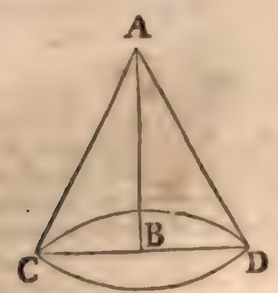
Priſma eſt figura ſolida,cujus adverſa duo plana æqualia,ſimilia, & parallela ſunt, alia verò parallelogramma. *Poſſunt autem parallela latera eſſe quæcumque polygona ; ut in figura ABCDEF.*

12. Sphæra eſt figura ſolida, unicâ ſuperficie contenta, ad quàm ab uno puncto intra figuram poſito ductæ lineæ ſunt æquales. *Alij ſphæram definiunt per circumvolutionem ſemicirculi, circa diametrum quieſcentem.*

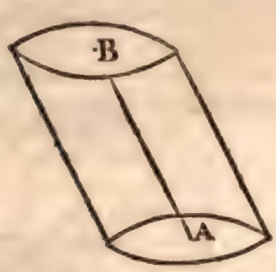
15. Axis eſt quieſcens illa linea, circa quàm ſemicirculus convertitur.

16. Centrum ſphæræ, eſt idem,ac centrum ſemicirculi. *Intellige illius ſemicirculi ; cujus circumvolutione generatur ſphæra.*

17. Diameter eſt quæcumque linea, per centrum ſphæræ tranſiens : & in ejus ſuperficie utrinque terminata.



19. Si ex puncto ſublimi, linea circumferentiam circuli decurrat, conum deſcribet. *Ut ſi linea AC manens immobilis in puncto A, decurrat circumferentiam circuli CD deſcribit conum,cujus vertex eſt punctum A in ſublimi poſitum ;* baſis ſubjectus circulus. Axis linea ducta à vertice ad centrum baſis.



20. Si circa duos circulos parallelos moveatur linea, ita ut ſit ſemper parallela lineæ connectenti centra circulorum ; deſcribet cylindrum. Linea circulorum centra connectens dicitur axis ut AB.

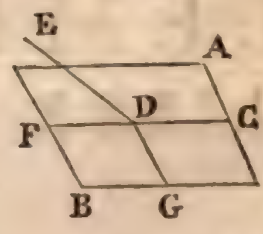
21. Similes coni,& cylindri ſi recti ſint (voco autem rectos cum axis eſt perpendicularis ad baſin) ſunt quorum axes, & diametri baſium ſunt proportionales.

In inclinatis verò addendum eſt ; ut axes ſint ad baſes ſimiliter inclinati.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Recta lineæ pars aliqua non eſt in aliquo plano, alia verò in ſublimi.



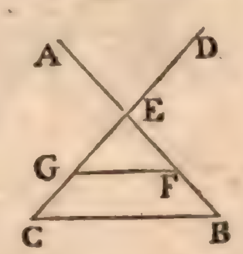
Sit in plano AB, alicujus lineæ rectæ pars CD, dico reliquam partem ejuſdem lineæ non eſſe extra illud planum, qualis eſt DE.

Demonſtr. Certum eſt in plano AB, eſſe aliquam lineam DF quæ in directum jaceat cum lineâ CD ; (nam poſſemus ducta linea DG, duos angulos CDG, GDF facere duobus rectis æquales, & tunc (*per 14. 1.*) DF unam lineam efficeret cum CD, quod tamen fieri non poſſet : nam duæ rectæ ED, FD, idem haberent ſegmentum commune CD, (*contra 10. pronunciatum.*

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si duæ rectæ ſe mutuò ſecent, in eodem ſunt plano, & omne triangulum in eodem eſt plano.



Duæ rectæ AB, CD ſe mutuò ſecent in puncto E,& adjunctâ lineâ BC, fiat triangulum EBC; dico totum triangulum EBC, & totas lineas AB, BC in eodem eſſe plano.

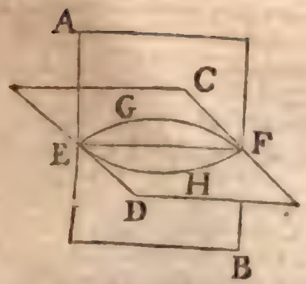
Demonſtr. Si enim fieri poteſt pars BFGC trianguli EBC, in uno ſit plano, & alia EFG, in alio : igitur linearum EB, FG, pars una EF, EG in uno erit plano ; alia FB, GC erit in alio (*contra 1. hujus*) & conſequenter lineæ AB, CD quæ in eodem plano trianguli EBC exiſtunt, totæ ſunt in eodem plano.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si duo plana ſe mutuò ſecent communis eorum ſectio eſt linea recta.

Plana



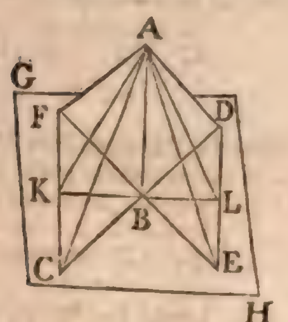
Plana AB, CD ſe mutuò ſecent; ſitque eorum communis ſectio linea E F, dico eam eſſe lineam rectam.

Demonſtr. Si enim EF non eſt linea recta, ducatur in plano AB, à puncto E ad F linea recta EGF, & in plano C D linea recta EHF, quæ non coincident, alioquin illæ ad utrumque planum pertinerent, eſſentque communis eorum ſectio; tunc igitur duæ lineæ rectæ EHF, EGF ſpatium clauderent; quod eſt *(contra 12. pronunciatum.)*

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si linea fuerit duabus lineis ſe mutuò ſecantibus ad rectos angulos, etiam plano per ipſas ducto ad rectos angulos erit.



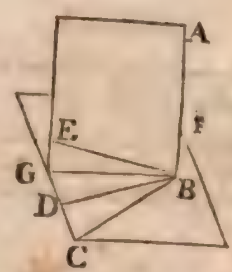
Sit linea AB perpendicularis duabus lineis CD, EF, ſe mutuò ſecantibus in B. Ita ut anguli ABC, ABD, ABE, ABF recti ſint *(quod ſatis figura plana exhibere non poteſt)* dico lineam AB rectam eſſe ad planum GH in quo ſunt lineæ CD, EF, hoc eſt ſi ducatur quæcumque linea KBL, lineam AB eſſe perpendicularem ad lineam KL; abſcindantur 4. lineæ BC, B D, B E, B F æquales, ducanturque lineæ AC, AD, AE, AF, CF, DE.

Demonſtr. In triangulis A B C, ABD, ABE, ABF, quia latus A B commune eſt, & latera B C, BD, BE, BF ſunt facta æqualia & anguli in puncto B ſunt recti & ideò æquales; erunt *(per 4. 1.)* baſes AC, AD, AE, AF æquales: quia autem triangula CBF, EBD duo latera BC, BF, BE, BD habent æqualia, & angulos CBF, EBD, oppoſitos ad verticem *(per 15.1.)* æquales; baſes CF, ED, æquales erunt *(per 4. 1.)* Item anguli BED, BFC, in triangulis KBF, EBL, quia anguli KBF, EBL ad verticem ſunt æquales, & anguli B E L, B F K oſtenſi ſunt æquales, & latera FB, BE ſunt æqualia, latera EL, KF; LB, KB, æqualia erunt: rurſus quia triangula ACF, AED habent latera AC, AF, AE, AD æqualia, & baſes CF, DE æquales: angulos omnes habebunt æquales *(per 8. 1.)* eruntque anguli AED, AFG æquales: quia verò in triangulis AEL, AFK, latera AE, AF; item EL, FK ſunt æqualia; & anguli AEL, AFK oſtenſi ſunt æquales; baſes AK, AL *(per 4. 1.)* æquales erunt: tandem triangula A BK, A B L, quorum latus AB commune eſt, & latera BK BL oſtenſa ſunt æqualia, item baſes AL, AK; habebunt angulos A B K, A B L æquales, atque adeò rectos; quod oſtendendum erat.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si recta linea perpendicularis ſit ad tres lineas in eodem puncto ſe interſecantes, illæ ſunt in eodem plano.



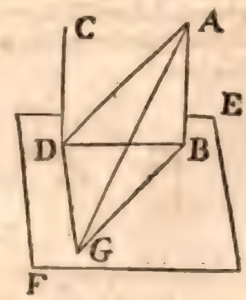
Sit linea AB perpendicularis ad tres lineas BC, BD, BE, ſe interſecantes in puncto E: dico illas in eodem eſſe plano.

Demonſtr. Intelligatur planum A G in quo ſunt lineæ AB, BE eſſe ductum. Item planum FG in quo ſunt lineæ BD, BC, dico lineam B E eſſe communem ſectionem planorum AG, FC, atque adeò eam eſſe in plano FC. Si enim non eſt communis ſectio. Sit BG communis ſectio. Quia linea AB eſt perpendicularis ad lineas BC, BD; perpendicularis erit *(per 4.)* ad planum FC, & conſequenter ad lineam BG, igitur angulus ABG rectus eſt, ſed iam angulus ABE rectus eſt: igitur anguli A B G, A B E in eodem plano exiſtentes eſſent æquales: pars & totum quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Duæ lineæ ad idem planum rectæ, inter ſe ſunt parallelæ.



Sint lineæ AB, CD ad idem planum E F rectæ, dico illas eſſe parallelas. Ductâ lineâ BD, *(per def. 3.)* anguli ABD, CDB ſunt recti: quare ſi lineæ AB, CD probentur in eodem eſſe plano *(per 29.1.)* erunt parallelæ, quod ita fiet: ducatur ad lineam BD perpendicularis DG, æqualis lineæ AB, junganturque lineæ AG, AD.

Demonſtr. In triangulis ABD, BDG, latus BD, eſt

Digitized by Google

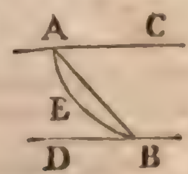
eſt commune, latera AB, DG ſunt facta æqualia; anguli A B D, B D G ſunt recti & æquales: igitur (*per* 4. 1.) baſes A G, AD ſunt æquales. In triangulis ABG, ADG, latera AB, DG; item BG, AD ſunt æqualia, & baſis AG communis, igitur (*per* 8. 1.) anguli ABG, ADG ſunt æquales; ſed ABG (*per def.*3.) rectus eſt, igitur A D G, rectus erit: ſed G D B jam rectus factus eſt, & G D C; item quia linea C D eſt recta ad planum E F. Igitur recta GD eſt perpendicularis ad tres lines CD AB, BD, quæ (*per* 5.) in eodem plano erunt, ſed linea AB eſt in eodem plano in quo exiſtunt A D, B D, (*per* 2.) igitur AB, CD in eodem plano.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Linea quæ duo puncta parallelarum conjungit, in eodem cum ipſis eſt plano.

Linea A B, conjungat duo puncta A & B, parallelarum A C, D B; dico lineam A B exiſtere in eodem plano in quo exiſtunt lineæ AC, DB.



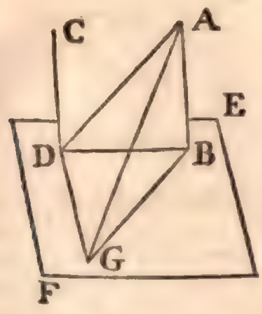
Demonſtr. In eo plano ducatur recta linea à puncto A ad B, quæ niſi coincidat cum A B ſit AEB: duæ rectæ A E B, A B ſpatium clauderent (*contra pron.*12.) igitur linea A B eſt in eodem plano.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si parallelarum altera ſit perpendicularis ad planum quidpiam; & alia ad idem perpendicularis erit.

Sint parallelæ A B, C D, quarum A B ſit recta ad planum EF: dico & CD ad idem eſſe rectam. Ducatur in plano E F linea D G perpendicularis ad lineam BD & æqualis lineæ AB; junganturque lineæ AD, AG, BG.

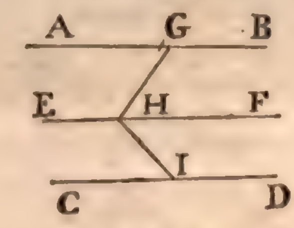


Demonſtr. Primò lineæ A B, C D in eodem ſunt plano, cum ſint parallelæ; & anguli B A D, C D B ſunt recti: lineæ etiam B D, A D, in eodem ſunt plano in quo lineæ A B, CD. In triangulis autem A B D, B D G, latera A B, GD, ſunt æqualia B D commune, & angulus ABG rectus (*per def.*3.) & B D G factus eſt rectus, igitur anguli ſunt æquales; quare (*per* 4. 1.) baſes B G, A D æquales ſunt. Rurſus in triangulis A B G, ADG latera AB; DG, AD, BG ſunt æqualia, & baſis A G communis: igitur (*per* 8. 1.) anguli ABG, A D G ſunt æquales, ſed A B G rectus eſt, cum linea AB ſit recta ad planum EF; igitur angulus G D A rectus eſt, quare linea G D recta eſt ad planum in quo ſunt lineæ AD, BD (*per def.*3.) & (*per def.*5.) angulus G D C rectus erit. quare cum anguli C D B, C D G recti ſint, linea C D recta erit ad planum E F.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Quæ eidem lineæ ſunt parallelæ; licet non in eodem cum illa plano, inter ſe parallelæ.



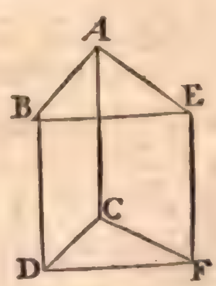
Sint lineæ AB, CD eidem lineæ E F parallelæ, licet non in eodem cum illa plano. Dico lineas AB, CD eſſe parallelas. Ducatur in plano linearum AB, EF; linea G H perpendicularis, & in plano linearum E F, C D ducatur perpendicularis H I.

Demonſtr. Linea E H, perpendicularis ad lineas H I, & G H (*per* 4.) recta eſt ad planum per illas ductum: ergo (*per* 8.) lineæ AG, & CI ipſi parallelæ ad idem planum rectæ erunt: quare (*per* 5.) AB CD inter ſe parallelæ ſunt.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si duæ rectæ concurrentes, ſint parallelæ duabus aliis, licet non in eodem plano, æqualem angulum comprehendent.



Sit linea AB parallela lineæ C D, & A E ipſi C F, licèt non in eodem plano: dico angulos B A E, D C F eſſe æquales. Abſcindantur lineæ

A B.

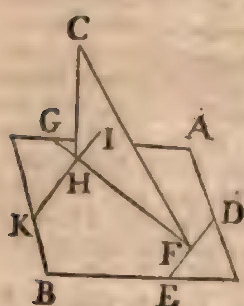
AB, CD; AE, CF æquales; ducanturque lineæ BD, AC, EF, BE, DF.

Demonſtr. Cùm lineæ AB, CD ſint æquales, & parallelæ, lineæ BD, AC (*per* 33. 1.) æquales erunt & parallelæ. Ita parallelæ erunt lineæ AC, EF; & (*per* 9.) lineæ BD, EF parallelæ erunt, & æquales; & lineæ BE, DF eas connectentes parallelæ erunt,& æquales. In triangulis verò BAE, DCF, cum latera AB, CD; AE, CF, facta ſint æqualia; & baſis BE baſi DF; (*per* 8. 1.) anguli BAE, DCF æquales erunt.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Ad datum planum perpendicularem ducere ex puncto extra illud dato.



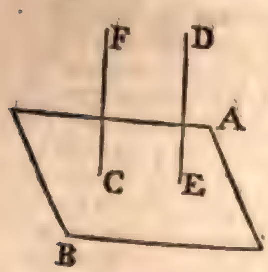
Sit planum AB, ad quod ex puncto C ducenda eſt perpendicularis. Ducatur linea DE utcumque, ad quam ex puncto C duc perpendicularem CF. Per F ad DE duc perpendicularem FG; ad quam ex C duc perpendicularem CH; dico CH eſſe rectam ad planum AB. Ducatur linea KI parallela lineæ DE.

Demonſtr. Linea EF eſt perpendicularis ad lineas CF & FG: ergo & ad planum trianguli CFH (*per* 4.) & (*per* 8.) linea KI illi parallela ad idem planum recta eſt, quare (*per def.* 3.) angulus KHC rectus eſt: igitur cum linea CI faciat angulos rectos CIF CIK cum duabus lineis ſe interſecantibus, recta erit ad illorum planum quod eſt planum AB. (*per* 4.)

PROPOSITIO XII.

Problema.

Ad datum planum perpendicularem ducere, per punctum in eâ datum.



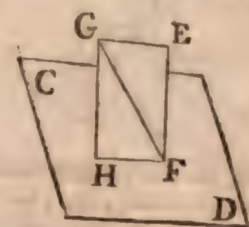
Ad planum AB per punctum C ducenda ſit perpendicularis, ex quocumque puncto D. Ad idem planum ducatur perpendicularis DE (*per* 11.) cui (*per* 30. 1.) duc parallelam CF, hanc dico eſſe rectam ad planum BA.

Demonſtr. Cùm enim lineæ DE, CF ſint parallelæ, & DE ſit recta ad planum AB; CF quoque (*per* 8.) ad idem recta erit.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Ex eodem plani puncto duæ perpendiculares ad illud non excitabuntur; neque ex eodem puncto extra illud poſito.



Ex eodem puncto F plani DC non excitabuntur ad illud duæ perpendiculares.

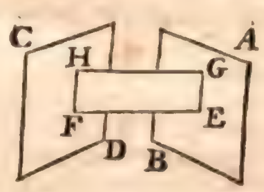
Demonſtr. Sint enim ſi fieri poteſt duæ perpendiculares FE, FG, ſitque planum per illas ductum FG, ſequeretur (*per def.* 3.) angulos GFH, EFH eſſe rectos,& æquales,pars & totum; quod eſt abſurdum.

Neque etiam ex eodem puncto G ad idem planum BC poſſunt duci duæ perpendiculares. Sint enim ductæ ſi fieri poteſt, nempe GF, GH, ductâ lineâ HF; ſequeretur in triangulo GFH angulos FHG, GFH eſſe rectos, (*contra* 17. 1.)

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Plana ad quæ eadem linea recta eſt, ſunt parallela.



Sint plana AB, CD, ſitque linea EF recta ad utrumque; dico plana AB, CD eſſe parallela. Ducatur linea GH lineæ EF parallela (*per* 30. 1.) junganturque lineæ GE, HF.

Demonſtr. Quia lineæ CH, EF ſunt parallelæ, & EF ad plana AB, CD recta eſt (*per* 8.) linea GH ad utrumque recta erit: igitur (*per def.* 3.) anguli FEG, HGE, GHF, EFH recti ſunt, & (*per* 28. 1.) lineæ GE, HF, ſunt parallelæ; igitur GEFH eſt parallelogrammum, in quo (*per* 34.) latera oppoſita GH & EF ſunt æqualia, igitur etiam in G & H, plana æqualiter diſtant; ita oſtendam in quocumque alio loco æqualiter diſtare; igitur ſunt parallela.

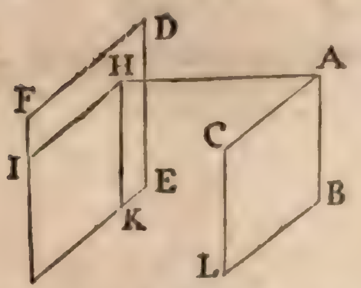
PROPO

Digitized by Google

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si duæ rectæ coëuntes, ſint parallelæ duabus ſe tangentibus, non in eodem plano; plana per ipſas ducta, ſunt parallela.



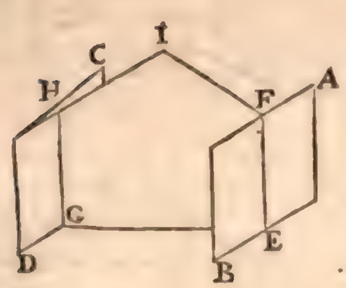
Rectæ AB, AC ſint parallelæ rectis DE, DF in alio plano exiſtentibus; dico plana AL, DI per AB, AC; & per DE, DF ducta, eſſe parallela. Ex puncto A ducatur (*per* 11.) linea AH recta ad planum DI, & per punctum H (*per* 30. 1.) ducantur lineæ HI, HK parallelæ lineis DE, DF, quæ (*per* 9.) parallelæ etiam erunt lineis AB, AC.

Demonſtr. Quia lineæ AC, HI ſunt parallelæ, (*per* 29. 1.) anguli AHI, HAC ſunt duobus rectis æquales; ſed AHI rectus eſt (cum linea AH, ſit recta ad planum DG;) igitur HAC rectus eſt. Ita oſtendetur rectus eſſe angulus HAB, quare (*per* 4.) linea AH recta eſt ad planum AL, igitur recta eſt ad utrumque ſcilicet ad plana AL, & DI: unde (*per* 14.) ſunt parallela.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Si duo plana parallela eodem plano ſecentur, communes ſectiones ſunt parallelæ.



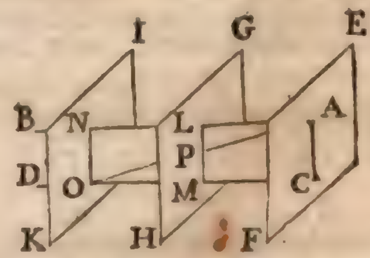
Sint duo plana parallela AB, CD, quæ ſecentur plano FG; dico communes ſectiones FE, GH eſſe parallelas.

Demonſtr. Si enim parallelæ non ſunt, conveniant in puncto I, ergo ſi plana producantur, cum totæ lineæ (*per* 1.) ſint in ſuis planis, convenient plana in puncto I: ergo parallela non ſunt.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Duæ lineæ parallelis planis proportionaliter ſecantur.



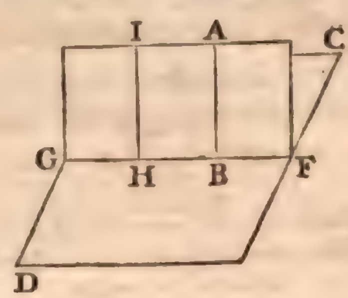
Sint lineæ AB, CD, quæ planis parallelis EF, GH, IK ſecentur in punctis A, C, L, M, N, O; dico illas proportionaliter ſecari, hoc eſt ita eſſe AL ad LN ſicut CM ad MO. Ducatur linea AO, ſecans planum GH in puncto P. Ducantur item lineæ AC, NO; ſintque communes ſectiones plani trianguli ACO, & planorum EF, GH, lineæ AC, PM, quæ (*per* 16.) parallelæ erunt. Parallelæ item erunt NO, LP, communes ſectiones planorum parallelorum GH, IK, & plani trianguli ANO.

Demonſtr. Quia in triangulo AOC linea PM eſt parallela lateri AC, erit ut CM ad MO ita AP ad PO (*per* 4.6.) Pariter in triangulo ANO erit AL ad LN ſicut AP ad PO; igitur eſt ut CM ad MO, ita AL ad LN; quod oſtendendum erat.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si linea ſit ad planum recta, omnia plana per ipſam ducta ad idem planum recta ſunt.



Sit linea AB recta ad planum CD, dico omnia plana per AB ducta, hoc eſt in quo exiſtet linea AB, quale eſt AH, eſſe rectum ad CD; hoc eſt, (*per def.*4.) lineam quamcunque IH perpendicularem ad communem ſectionem planorum CD & FI, eſſe rectam ad planum CD.

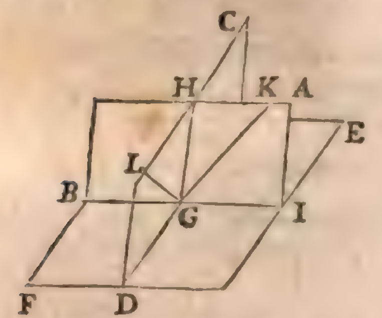
Demonſtr. Cùm linea AB ſit recta ad planum CD (*per def.*3.) angulus ABG rectus eſt: & cum linea IH ſit perpendicularis ad lineam FG, angulus IHB rectus erit: igitur (*per* 28.1.) lineæ AB, IH ſunt parallelæ; & cum AB ſit recta ad planum CD, linea IH (*per* 8.) eidem plano recta erit.

PROPO

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Si duo plana ſe invicem ſecantia, eidem ſint ad rectos angulos; communis eorum ſectio eidem plano recta erit.



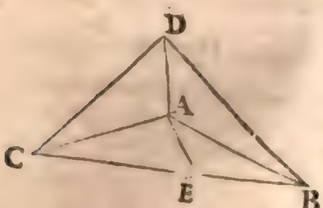
Sint plana AB, CD eidem plano EF, ad rectos angulos, dico communem eorum ſectionem G H, eſſe rectam eidem plano E F.

Demonſtr. Si enim hoc non ſit ita. Ducatur in plano A B per punctum G perpendicularis ad communem ſectionem I B; ſitque K G, & in plano C D, linea G L perpendicularis ad communem ſectionem G D. Quæ ſi non coincidant cum linea H L, duæ K G, G L perpendiculares ad communes ſectiones planorum ſuorum rectorum ad planum E F, (*per def.*4.) illæ ad planum E F rectæ ſunt. Igitur ad idem punctum G duæ perpendiculares ad idem planum ducerentur, (*contra* 13.) igitur illæ perpendiculares coincident cum linea G H: quæ propterea perpendicularis erit ad planum E F.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Ex tribus angulis planis ſolidum angulum componentibus, duo quilibet reliquo ſunt majores.



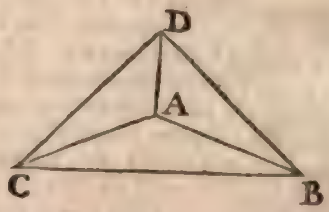
Sint tres anguli plani B A C, B A D, D A C, conſtituentes angulum ſolidum A, ſitque maximus B A C; dico reliquos duos illo eſſe majores. Fiat angulus B A E æqualis angulo B A D, & linea AE, æqualis lineæ AD, ducanturque lineæ BEC, BD, DC.

Demonſtr. In triangulis B A D, B A E, latus A B eſt commune, latus A D æquale lateri A E, & angulus B A E angulo B A D factus eſt æqualis; igitur (*per* 4. 1.) baſes B D, B E ſunt æquales. In triangulo B D C (*per* 20. 1.) latera B D, D C latere B C ſunt majora: quare ſi auferas lineas BD, B E æquales, reſtabit linea D C major linea E C, quare in triangulis B A C, E A C, in quibus latus A C commune eſt, & latus A D æquale eſt lateri E A, baſis autem D C eſt major baſi EC. (*per* 20. 1.) angulus D A C, major erit angulo E A C quibus ſi addas æquales angulos BAE BAD, erunt B A E, E A C ſimul ſeu totus BAC, minor angulis B A D, D A C; quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Omnes anguli componentes angulum ſolidum minores ſunt 4 rectis.



Sit angulus ſolidus A compoſitus ex quotlibet angulis planis, dico illos tres DAC,CAB, BAD minores eſſe 4 rectis. Si componatur ex tribus fiat triangulum D C B.

Demonſtr. In punctis B, C, D fiant anguli ſolidi quorum duo reliquo ſint majores, ut in B, anguli ABD, ABC reliquo D B C ſunt majores (*per* 20.) ſed omnes anguli trianguli D B C æquivalent duobus rectis (*per* 31. 1.) igitur 6 anguli ACD, ADC, ACB, ABC, ABD, ADB; majores ſunt duobus rectis: ſed omnes anguli trium triangulorum ADC, ACB, ABD æquivalent præciſe ſex rectis, ex quibus ſi auferas angulos A C D, A D C, A C B, ABC, ABD, ADB majores duobus rectis. Reſtabunt reliqui componentes angulum A minores 4 rectis.

Idem oſtenderetur licet plures quàm tres anguli componerent angulum A.

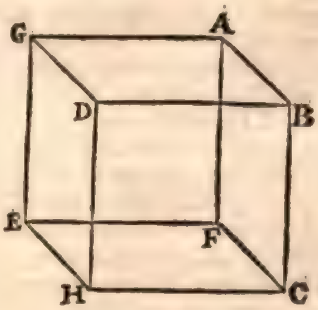
PROPOS. XXII. & XXIII.

Relinquantur.

PROPOSITIO XXIV.

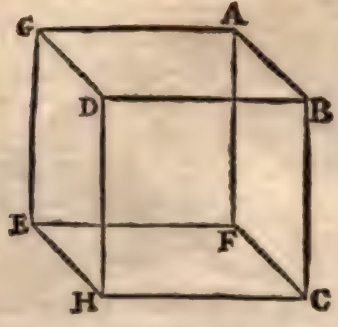
Theorema.

Si ſolidum parallelis planis contineatur; adverſa plana ſunt parallelogramma ſimilia, & æqualia.



Sit ſolidum A H parallelis planis contentum; dico adverſa plana eſſe parallelogramma, ſimilia & æqualia.

Digitized by Google

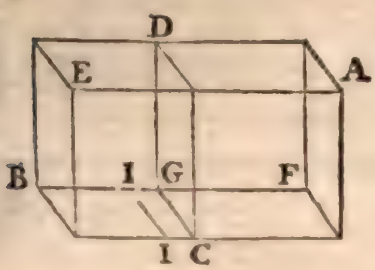


Demonſtr. Quia enim plana B G, CE plano AC ſecantur, ſectiones AB, C F, (*per* 16.) ſunt parallelæ. Pariter quia parallela plana A E, B H ſecantur plano A C, ſectiones B C, A F ſunt parallelæ: quare parallelogrammum eſt A C. Ita oſtendes D E eſſe parallelogrammum; anguli autem oſtenduntur æquales in oppoſitis ut in C E, B G cum enim A B; B D, ſint parallelæ lineis C F, C H anguli A B D, F C H (*per* 10.) ſunt æquales; Oſtendentur etiam latera oppoſitorum planorum BG, CE æqualia: nam AB eſt æquale lateri C F, quia A C eſt parallelogrammum pariter CF ipſi CH, & ita de aliis. Igitur ſunt ſimilia & æqualia.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Si ſolidum parallelepipedum ſecetur plano parallelo planis oppoſitis; erit quemadmodum baſis ad baſin ita ſolidum ad ſolidum.



Sit ſolidum AB, quod ſecetur plano C D, parallelo planis oppoſitis BE, AF; dico ita eſſe, ſolidum AG ad ſolidum G E ſicut baſis C F ad baſin C B.

Demonſtr. Sit enim baſeos C B, quæcumque pars C I verbi gratia quarta; per quam ſi intelligeretur duci planum parallelum plano C D, fieret parallelepidedum quod eſſet quarta pars ſolidi G E, nam ſupra reliquas partes baſis tria alia æqualia ſolida conſtitui poſſent æqualibus ſcilicet planis & ſimilibus conſtantia. Si autem parallelogrammum C I quod eſt quarta pars baſeos CD, quinquies inveniatur in baſi CF; in ſolido A G, quinque ſolida invenirentur æqualia (*per def.* 10.) ſolido, quod ſupra C I conſtitui poſſet, & quod oſtendimus eſſe quartam partem ſolidi GE. Haberent enim ſimilia, & æqualia plana, ac illud, quod autem de quarta parte diximus de aliis omnibus partibus aliquotis oſtendi poteſt, quare toties baſis F C continet quamcumque partem aliquotam baſis CB: quoties ſolidum A G, continet ſimilem partem aliquotam ſolidi GE, igitur (*per def.* 5. 5.) erit ut baſis F C ad baſin C B ita ſolidum AG ad ſolidum G F.

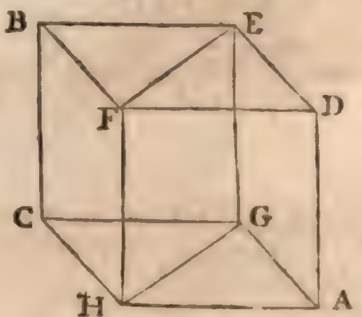
PROPOS. XXVI. & XXVII.

Relinquantur.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Parallelepipedum ſecatur biſariam plano per diametros adverſorum planorum ducto.



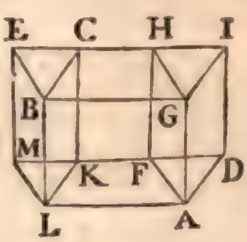
Sit parallelepidedum A B, in quo ſint oppoſita plana AC, BD quorum diametri ſint E F, G H. Dico planum per EF, GH ductum dividere ſolidum A B, biſariam.

Demonſtr. Cum DG ſit parallelogrammum lineæ A D, G E, erunt parallelæ & (*per* 34. 1.) æquales. Pariter F H, & A D ſunt parallelæ, & æquales. Igitur G E, F H æquales & parallelæ uni tertiæ, æquales ſunt, & (*per* 9.) parallelæ ſunt: quare lineæ EF, & E H (*per* 33. 1.) & parallelæ ſunt, & æquales. Eſt igitur EH parallelogrammum. Secantur autem parallelogramma DB, A C æqualia (*per* 24. 1.) in triangula æqualia: igitur ſiunt duo priſmata B H E, AFG conſtantia triangulis æqualibus, & parallelogrammis æqualibus, utpote oppoſitis: igitur priſmata (*per def.* 10.) ſunt æqualia.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eâdem altitudine quorum inſiſtentes in iiſdem lineis collocantur ſunt æqualia.



Super baſi AB ſint conſtituta duo parallelepipeda ABCD, ABEF, in eâdem altitudine: (id eſt inter duo plana parallela AB, DE) & lineæ inſiſtentes utriuſque nempe BC, BE ſint in eâdem linea IE, dico ſolida ABCD, ABEF eſſe æqualia.

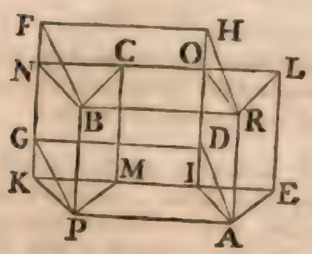
Demonſtr. Parallelogramma GBEH, GBCI (*per* 35.

(*per* 35. 1.) ſunt æqualia igitur ſi ab iis auferas, trapezium G B C H, reſtabunt triangula BCE, H G I æqualia; ita æqualia erunt triangula DAF KLM: item æqualia ſunt (*per* 36. 1.) parallelogramma CM, IF: æqualia etiam ſunt (*per* 24.) parallelogramma GF, BM, item DG, KB: quare priſmata BMC, GFI, contenta æqualibus planis & æqualibus angulis ut patet æqualia ſunt (*per def.* 10.) quibus ſi addas commune ABKH, fiunt parallelepipeda ABCD, ABEF æqualia.

PROPOSITIO XXX.

Theorema.

Parallelepipeda ſuper eâdem baſi, & in eâdem altitudine, licet eorum inſiſtentes non ſint in iiſdem lineis: ſunt æqualia.



Supra baſin AB ſint conſtituta parallelepipeda ABCE, ABFD, in eadem altitudine, id eſt inter plana parallela A B, F E; & inſiſtentes BC, BF, non ſint in eâdem lineâ conſtitutæ; dico adhuc æqualia eſſe. Producantur lineæ FG, HD, donec ſecent L C, E M in punctis, O,N,K,I; junctiſque lineis AI, PK, BN, RO, fiat parallelepipedum ABNI.

Demonſtr. Parallelepipeda ABCE, ABNI, ſuper eâdem baſi AB inter plana parallela, quorum inſiſtentes B C, B N ſunt in eâdem linea L N (*per* 29.) ſunt æqualia: ſed parallelepipeda ABNI, ABFD, ſunt in eâdem baſi, in eâdem altitudine, & eorum inſiſtentes BN, BF, ſunt in eâdem linea FK. igitur ſunt æqualia: ergo parallelepipeda ABCE, ABFD uni tertio oſtenſa æqualia eſſe, ſunt æqualia inter ſe.

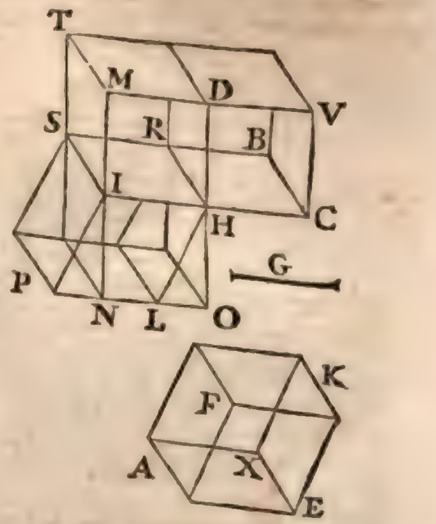
PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

Parallelepipeda ſupra æquales baſes conſtituta, & in eâdem altitudine ſunt æqualia.

Sint parallelepipeda AK, BD, quæ ſint ſupra baſes CD,EF æquales; & in eâdem altitudine G, hoc eſt linea G ſit diſtantia tam à plano C D ad ſibi oppoſitum; quam à plano E F ad oppoſitum. dico illa eſſe æqualia. Sit linea HI æqualis lineæ K F, fiatque parallelogrammum I L, æquale & ſimile parallelogrammo E F, perficiatur item parallelogrammum H M, denique producantur lineæ DH, MI in NO, erunt (*per* 34. 1.) parallelogramma H N, N P æqualia, cum eandem baſin H I habeant, ſed H P eſt æquale ipſi E F, cui æquale ſupponitur C D; igitur C D, H N æqualia erunt.

Tom. I.



Sint autem primò lineæ inſiſtentes C B, E X perpendiculares ad plana CD, ED, quæ æquales erunt lineæ G, nam altitudines metimur per perpendiculares. Intelligantur parallelepipeda B D, RM, OS, LS, quorum inſiſtentes cum æquales ſint lineæ CB, & eidem parallelæ ut patet ex parallelogrammis: omnia habebunt altitudinem æqualem lineæ G.

Demonſtr. Quia parallelepipedum CT ſecatur plano DR parallelo planis B, IT; erit (*per* 25.) ut baſis C D ad baſin H M, ita ſolidum BD, ad ſolidum HT. Pariter ita erit ut baſis HN; ad baſin HM, ita ſolidum OS ad ſolidum HT, ſed baſes C D, H N, cum ſint quales) *per* 7. 5.) eandem rationem habent ad baſin HM: ergo ſolida BD, OS, eandem rationem habent ad ſolidum HT, quare (*per* 9. 5.) ſunt æqualia; ſed OS (*per* 30.) eſt æquale ſolido LS; igitur ſolida LS, vel AK illi ſimile & æquale, & B D ſunt æqualia.

Si verò lineæ inſiſtentes non eſſent perpendiculares: intelligantur ſupra utramque baſin duo alia parallelepipeda, quorum inſiſtentes ſint perpendiculares, quæ erunt æquales altitudini G; illa autem parallelepipeda quorum inſiſtentes ſunt perpendiculares, ſunt æquales inter ſe (*per priorem partem hujus*) & quodlibet (*per* 30.) æquale eſt illi quod ſupra ſuam baſin deſcribitur, & in eâdem altitudine, qualia ſunt AK, BD: igitur parallelepipeda A K, B D ſunt æqualia.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

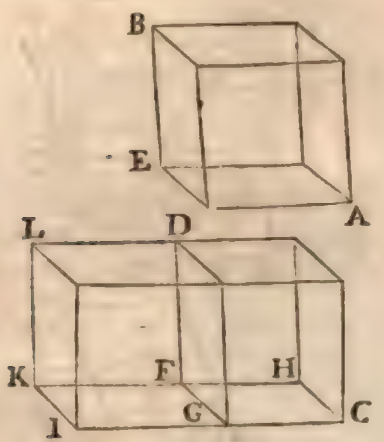
Parallelepipeda in eâdem altitudine conſtituta ſe habent ut baſes.

Sint parallelepipeda AB, CD, ejuſdem altitudinis; dico ita eſſe A B ad C D, ſicut baſis AE ad baſin CF. Fiat (*per* 45. 1. ſupra lineam FG, parallelogrammum F I, æquale parallelogrammo AE habens angulum F G I æqualem angulo HCG, ita ut lineæ GI, FK jaceant in directum cum lineis C G, H F; perficiaturque parallelepipedum CL, ſolida CD, GL habebunt eandem altitudinem quia componunt unum totale ſolidum; ſed CD ſupponitur habere eandem

 altitudi

Digitized by Google

altitudinem cum AB : igitur GL, & AB eandem habent altitudinem.

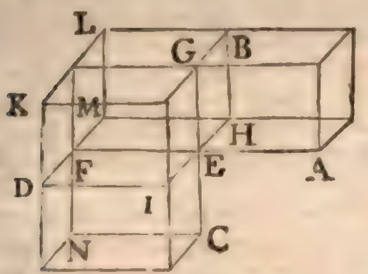


Demonſtr. Parallelepipeda AB, G L ejuſdem altitudinis ſuper æqualibus baſibus AE, GK (*per* 31.) ſunt æqualia, ſed C D ad G L ſe habet ut baſis C F, ad baſin G K, aut ad illi æqualem A E; igitur C D ad AB ſe habet, ut baſis CF ad baſin A E.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Similia parallelepipeda, ſunt in triplicatâ ratione laterum homologorum.



Sint parallelepipeda A B, CF ſimilia, hoc eſt ſingula plana unius ſint ſimilia ſingulis planis alterius, ad quod requiritur primò, ut omnes anguli ſint æquales: unde collocari poſſunt parallelepipeda ut AE, GE, HE. Lineæ unius jaceant in directum cum lineis alterius. Secundo ut ita ſit AE, ad E H ſicut F E ad E I, & permutando ita ſit A E ad E F ſicut H E ad E I, & ita etiam ſit GE ad EC ſicut AE ad EF; dico igitur AB ad C D eſſe in triplicatâ ratione illius quæ eſt lateris AE, ad latus homologum E F: hoc eſt ſi perficiantur parallelepipeda EL, EK, oſtendam eſſe 4. quantitates continuè proportionales in proportione AE ad EF; quarum A B ſit prima, & C D quarta.

Demonſtr. Quia parallelepipeda AB, AL, ſunt ejuſdem altitudinis, ſunt inter ſe, ut baſis A H, ad baſin E M, (*per* 32.) ſed baſis A H ad baſin E M ſe habet (*per* 1.6.) ut A E ad EF, igitur AB ad EL, ſe habet ut linea AE ad EF. Pariter ſolidum EL ad ſolidum EK, eſt ut baſis HF ad ED, ſeu (*per* 1. 6.) ut H E ad E I; id eſt ut AE ad E F; igitur E L ad E K ſe habet ut B E ad E F, ultimò E K ad C F ſe habet ut baſis GF, ad baſin E N, hoc eſt ut linea GE ad EC, quæ ſe habet ut AE ad EF, igitur ſolidum EK ad CD ſe habet ut A E ad EF, quare ſunt 4. parallelepipeda AB, EL, EK, CD continuè proportionalia in ratione lateris A E ad latus EF, quare (*per* 11. *def.* 5.) AB ad C D erit in triplicatâ ratione lateris A E ad E F.

COROLLARIUM.

Si 4. lineæ continuè proportionales fuerint ut eſt prima ad quartam, ita erit parallelepipedum ſupra primam, ad parallelepipedum ſimile ſupra ſecundam deſcriptum. Ex quo vides quod problema celebre duplicationis cubi, ſolam difficultatem habeat, in inventione duarum mediarum proportionalium inter duas datas lineas.

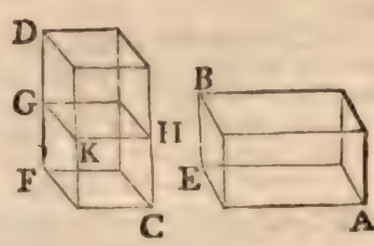
PROPOSITIO XXXIV.

Theorema.

Æqualium parallelepipedorum baſes & altitudines reciprocantur, & ea quorum baſes, & altitudines reciprocantur ſunt æqualia.

Primò, quidem ſi æqualium parallelepipedorum baſes ſunt æquales, neceſſariò altitudines ſunt æquales: quare evidens eſt reciprocatio.

Sint duo parallelepipeda æqualia AB, CD; ſintque primò lineæ inſiſtentes EB, FD perpendiculares ad baſes, eruntque propterea vera altitudo ſolidorum, dico ita eſſe baſin AE ad baſin CF, ut altitudo DF ad altitudinem BE. Abſcindatur ex altitudine FC altitudo FG æqualis altitudini BE, intelligaturque per G ductum planum GH, plano CF parallelum.



Demonſtr. Quia parallelepipeda AB, CG, ſunt ejuſdem altitudinis, erit (*per* 32.) AB ad CG ut baſis AE ad baſin C F; ſed ut AB ad CG, ita ſe habet (*per* 7.5.) CD illi æquale ad CG, igitur ut baſis A E ad baſin C F, ita C D ad C G; ſed quia C D ſecatur plano H G, parallelo oppoſitis: erit (*per* 25.) DH ad C G, ut baſis D K: ad baſin FK, ſed ut DK ad FK ita (*per* 1. 6.) D G ad G F, igitur erit ut DH ad CG ita DG ad GF, & componendo (*per* 18. 5.) erit ut DC ad CG, hoc eſt ut AB ad CG; ita DF ad GF, aut ad EB illi æqualem: ergo, erit ut baſis A E ad baſin C F, ita altitudo DF ad altitudinem BE.

Si verò ſint in eâdem conſtructione baſes, & altitudines reciprocæ, dico parallelepipeda AB, C D eſſe æqualia; cum enim ita ſe habeat A B ad C G, ſicut baſis AE ad CF, ut autem baſis ad baſin, reciprocè ita eſt altitudo F D ad E B aut ad F G, quare ita erit AB ad CG, ſicut altitudo FD ad GF, ſed ut FD ad FG, ita (*per* 1.6.) DK ad FK, & ut DK ad FK, ita (*per* 25.) H D ad CG,

Digitized by Google

ad C G, igitur ita erit AB ad C G, ſicut CD ad C G; quare (*per* 9.5.) AB, CD ſunt æqualia.

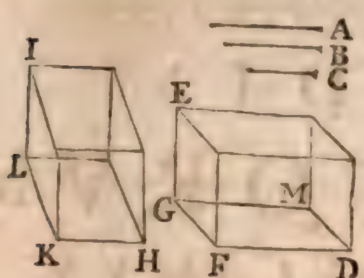
Quod ſi ſupra baſes A E, C F intelligerentur duo parallelepipeda æqualia ejuſdem altitudinis cum AB, CD quorum inſiſtentes non eſſent perpendiculares; illa eſſent (*per* 30.) æqualia ſolidis A B, C D: quare ſicut hæc æqualia, ita illa æqualia eſſent; ergo baſes ſolidorum A B & C D quæ ſunt communes aliis ſolidis reciprocantur cum altitudinibus quæ ſunt etiam communes, igitur parallelepipeda æqualia reciprocas habent baſes & altitudines, & è converſo ſi reciprocantur baſes & altitudines æqualia ſunt parallelepideda.

PROPOSITIO XXXV.

Relinquatur ut inutilis ſequenti.

PROPOSITIO XXXVI.

Si tres lineæ continuè proportionales fuerint, quod ex iis fit parallelepipedum, æquale eſt parallelepipedo facto à media, & æquiangulo priori.



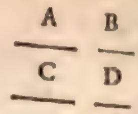
Sint tres lineæ A, B,C, continuè proportionales ſitque parallelepipedum D E ex iis factum hoc eſt linea D F ſit æqualis lineæ A, linea G E lineæ B; & F G ipſi C. Sit etiam aliud parallepipedum cujus tres lineæ HK,KL, LI ſint æquales mediæ B; ſitque æquiangulum priori,dico illa eſſe æqualia.

Demonſtr. Quia parallelogramma DG, HL; ſupponuntur æquiangula, & DF eſt æqualis ipſi A & FG, ipſi C; H K & KL mediæ B: erit ut DF ad KH ita K L ad F G: igitur cum reciproca habeant, (*per* 15. 6.) æqualia erunt. Quia autem anguli ſolidi G & L ſunt æquales; ſi L poneretur in G anguli congruerent, & quia tam L I quàm G E, ſupponuntur æquales mediæ B, punctum I caderet in punctum E, ex quo ſi intelligatur demitti perpendicularis ad planum baſium; hæc erit communis altitudo, quare ſolida DE, HI, habent baſes æquales, & altitudinem eandem; igitur, (*per* 31.) ſunt æqualia.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Si 4. lineæ proportionales fuerint: parallelepipeda ſimilia ſupra illas deſcripta proportionalia erunt. Si verò parallelepipeda ſimilia ſupra 4. lineas deſcripta ſint proportionalia, illæ proportionales erunt.



Sit A ad B, ut C ad D, dico ſi ſuper A & B deſcribantur parallelepipeda ſimilia, item ſuper C & D alia duo ſimilia, ita eſſe parallelepipedum ſuper A ad parallelepipedum ſuper B, ut parallelepipedum ſuper C ad parallelepipedum ſuper D.

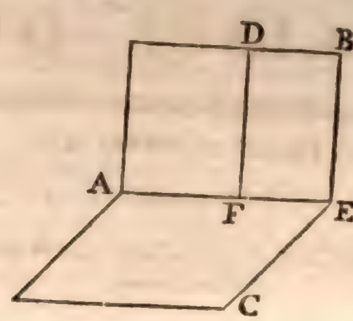
Demonſtr. Cum enim ſolidum A ad ſolidum B, (*per* 33.) ſit in triplicatâ ratione illius, quæ eſt lineæ A ad lineam B, ut autem linea A ad B, ita C ad D; igitur ſolidum A ad ſolidum B eſt in triplicatâ ratione illius,quæ eſt lineæ C ad lineam D. ſed (*per eandem*) ſolidum C ad ſolidum D eſt etiam in triplicatâ ratione illius, quæ eſt lineæ C ad lineam D: igitur ut ſolidum A ad ſolidum B ita ſolidum C ad ſolidum D.

E contra ſi ſolidum A ad ſolidum B, ſit ut ſolidum C ad ſolidum D; dico ita eſſe lineam A ad lineam B, ſicut linea C ad lineam D: nam linea A ad lineam B (*per* 33.) eſt in ſubtriplicata ratione illius,quæ eſt ſolidi A ad B, aut ſolidi C ad D quæ eſt eadem; ſed linea C ad D eſt etiam in ſubtriplicata ratione, illius quæ eſt ſolidi C ad D; igitur ita eſt A ad B ut C ad D.

PROPOSITIO XXXVIII.

Theorema.

Si duo plana ad invicem recta fuerint,& à quolibet puncto unius ad aliud perpendicularis ducatur, hæc in communem ſectionem cadet.



Plana AB, AC ſint ad invicem recta; dico ſi ex puncto D plani A B ducatur perpendicularis ad planum AC,illam cadere in communem ſectionem A E. Ducatur in plano A B ex puncto D perpendicularis ad lineam AE, ſitque DF.

Demonſtr. Linea DF perpendicularis ad communem ſectionem cum plana ſint recta ad invicem (*per* 4.*def.*) recta eſt ad planum AC, duæ autem ex puncto D duci non poſſunt perpendiculares ad planum AC, (*per* 13.) igitur nulla alia duci poteſt niſi hæc quæ in communem ſectionem cadit.

PROPOSITIO XXXIX.

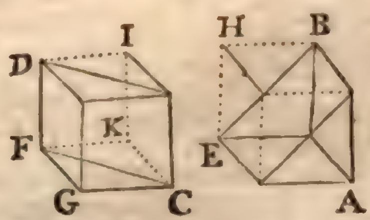
Relinquatur.

PROPOSITIO XL.

Theorema.

Si fuerint duo priſmata triangularia æqualis altitudinis, quorum unum baſin parallelogrammam duplam habeat baſis alterius triangularis, priſmata erunt æqualia.

Digitized by Google



Sint priſmata A B, CD triangularia, quorum AB habeat baſin A E parallelogrammam, duplam baſis C F G triangularis, ſint autem æqualis altitudinis, dico illa eſſe æqualia, intelligantur perfecta eſſe parallelepideda AH, G I.

Demonſtr. Cum baſis A E, ſit dupla trianguli C F G, & parallelogrammum G K, ſit etiam duplum ejuſdem (*per* 34. 1.) æqualia erunt parallelogramma AE, GK; quia verò parallelepipeda AH, CD baſes AE, GK habent æquales, & altitudo eadem eſt; (*per* 31.) æqualia erunt, ſed priſmata A B, C D, (*per* 28.) ſunt mediæ partes parallelepipedorum: igitur priſmata A B, C D ſunt æqualia.

COROLLARIUM.

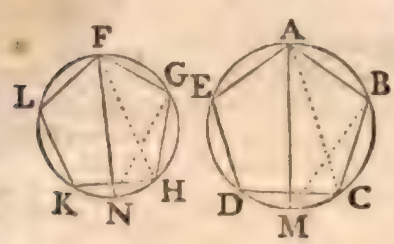
Ex hac propoſitione facile probari poteſt quod priſmata quorum unum planum ex parallelis ſumetur pro baſi, ſi ſint ejuſdem altitudinis ſe habebunt ut baſes, & primò quidem de triangularibus conſtat, nam vides priſma C G F D, eſſe dimidium parallelepipedi eandem altitudinem habentis, & baſin ejus C G F eſſe dimidiam partem baſis parallelepipedi: ergo ſi comparetur cum alio ejuſdem altitudinis, ad illud ita ſe habebit ut parallelepipeda, igitur hæc ſe habebunt ut baſes parallelepipedorum, & conſequenter ut baſes propriæ. Idem etiam probari poterit de priſmatibus: quorum baſes erunt unum ex planis oppoſitis polygonis, quia ſcilicet in triangularia priſmata reſolvi poſſunt.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DUODECIMUS.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Polygona ſimilia circulis inſcripta ſunt ut quadrata diametrorum.

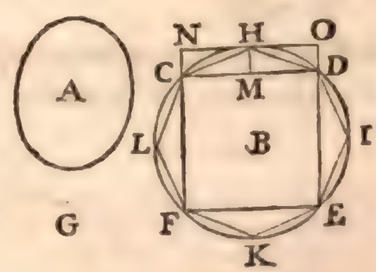


Sint polygona ſimilia circulis inſcripta ABCDE, FGHKL, ſintque diametri circulorum AM, FN, dico ita eſſe polygonum ABCDE ad polygonum F G H K L ſicut quadratum lineæ A M ad quadratum lineæ F N. Ducantur lineæ AC, BM, FH, GN.

Demonſtratio. Quoniam polygona ſunt ſimilia, erunt (*per* 1. *def.*6.) anguli B & G, æquales; eritque ut A B ad BC: ita FG ad GH. Quare triangula ABC, FGH, (*per* 6. 6.) æquiangula erunt; ſunt igitur anguli ACB, & FHG æquales. Sunt autem hi anguli æquales angulis M & N, (*per* 21. 3.) cum ſint in eâdem portione: igitur anguli M & N ſunt æquales; quare triangula ABM, FGN, quæ habent angulos M & N æquales, item angulos A B M & F G N in ſemicirculo (*per* 31. 3.) rectos, & æquales, æquiangula ſunt. Ideoque erit (*per* 6. 6.) ut A B ad A M ita G F ad GN; & permutando, ut AB ad GF ita A M ad G N; quare (*per* 22. 6.) erit polygonum ſuper A B quale eſt A B C D E ad ſimile polygonum F G H K L deſcriptum ſuper G F; ut polygonum ſuper A M, quale eſt ejus quadratum ad ſimile quadratum deſcriptum ſuper F N, (*per* 22. 6.)

LEMMA.

Si ſit quantitas minor circulo, deſcribi poterit intra circulum poligonum ordinatum majus illa quantitate.



Sit magnitudo A minor, circulo B, dico intra circulum B, poſſe deſcribi polygonum ordinatum majus

majus magnitudine A, ſit magnitudo G, id quod deeſt magnitudini A, ad hoc, ut adaquet circulum B, inſcribatur circulo B quadratum CDEF; quod ſi majus eſſet magnitudine A, factum eſſet quod deſideratur; ſi verò ſit minus, dividantur arcus CD, DE, EF, FC biſariam in H, IKL, ducanturque linea CH, HD &c. ut fiat octogonum; quod ſi adhuc majus non eſt magnitudine A: dividantur biſariam arcus octogoni, ut fiat polygonum ſexdecim laterum: & ſi hoc non ſufficit fiat polygonum triginta duorum laterum & ita deinceps per punctum H; ducatur tangens NO, producanturque latera FC, ED, in N & O.

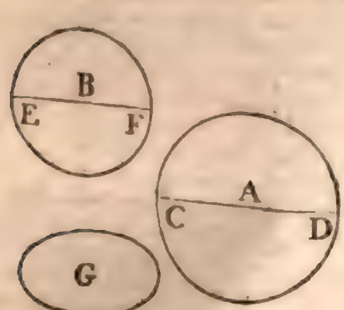
Demonſtr. Quia ex circulo auſertur quadratum, quod eſt pluſquam illius dimidium, cum ſit dimidium quadrati circumſcripti, & ex reliquo, id eſt ex ſegmentis DHC, CLF, FKL, EID auſertur pluſquam dimidium; ſcilicet triangula DHC, CLF, FKL, EID (nam triangulum DHC eſt dimidium parallelogrammi CDON, quod majus eſt ſegmento DHC. Igitur triangulum DHC eſt majus dimidio ſegmenti DHC; & ita de reliquis triangulis) igitur auſertur pluſquam dimidium reliqui. Et pariter dum fit polygonum ſexdecim laterum, auſertur pluſquam dimidium reliqui; & ita in aliis polygonis, tandem relinquetur minor quantitas quam G. Quare illud polygonum, minus relinquet ex circulo B, quàm quantitas B, cui deeſt quantitas G, ut circulum B adaquet. Quare illud polygonum majus erit quantitate A.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Circuli ſunt inter ſe, ut quadrata diametrorum.

Sint circuli A & B, quorum diametri CD EF; dico ita eſſe A ad B, ſicut quadratum lineæ CD, ad quadratum lineæ EF.



Si hoc ita non eſt, unus circulus, verbi gratia A, habebit majorem rationem ad B quàm quadratum CD ad quadratum EF; igitur dari poterit G minor quantitas quàm A, quæ ad B eandem habebit rationem, quam quadratum CD habet ad quadratum EF, quâ quantitate G, ut minore quàm ſit circulus A, poteſt dari (*per lemma ſuperius*) polygonum majus intra circulum A deſcriptum, cui ſimile intelligatur deſcriptum intra circulum B.

Demonſtr. Polygona A & B (*per* 1.) erunt ut quadrata diametrorum, ſed magnitudo G ad circulum B ſupponitur ut quadrata diametrorum: igitur ita erit polygonum A ad polygonum B ut magnitudo G ad circulum B. Sed polygonum A majus eſt magnitudine G: igitur (*per* 14. 5.) polygonum B, id eſt intra circulum B deſcriptum, majus eſſet circulo B, pars toto quod eſt abſurdum. Non igitur magnitudo G, minor circulo A, poteſt ita eſſe ad circulum B ut quadratum lineæ CD ad quadratum lineæ EF: quare A ad B majorem rationem non habet, quàm quadratum CD ad quadratum EF.

Corol. I. *Circuli ſunt in duplicatâ ratione diametrorum: quia quadrata, ut ſimiles figura* (per 20. 6.) *ſunt in duplicatâ ratione laterum homologorum: circuli autem oſtenſi ſunt in eâdem ratione cum quadratis: igitur in duplicatâ erunt ratione diametrorum.*

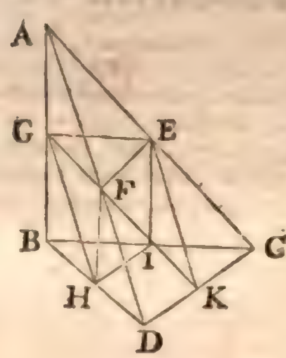
Corol. II. *Circuli ſunt in eâdem ratione cum polygonis ſimilibus, intra ipſos deſcriptis.*

Coroll. III. *Ex quibus vides quod ſi ſimiles figura intra alias deſcripta, & ad illas magis, & magis accedentes; ita ut in illas quaſi deſinant ſemper inter ſe eandem rationem ſervent: etiam figura continentes eandem rationem ſervabunt; ut accidit polygonis ſimilibus intra circulos deſcriptis: quia ita accedunt ad circulum, ut in ipſum deſinant, & ſemper ſervant rationem quadratorum; circuli eandem rationem inter ſe habebunt.*

PROPOSITIO III.

Theorema.

Omnis Pyramis triangularem habens baſin, dividi poteſt in duo priſmata aqualia; qua ſimul ſumpta majora ſint dimidio Pyramidis; & in duas Pyramides aquales, & ſimiles toti.



Sit Pyramis ABCD triangularem habens, baſin BCD; dico primo in illâ inveniri poſſe duo priſmata æqualia EBFI, EHKF. Dividantur ſingula latera pyramidis biſariam in punctis E, F, G H, I, K, ducanturque lineæ EG, EF, FG, EI, FH, EK, KI, IH.

Demonſtr. Quoniam in triangulo ABD eſt ut AF ad FD ita AG ad GB, cum AD, AB ſint diviſæ lineâ FG biſariam, GF, HB erunt parallelæ (*per* 2. 6.) ſimiliter parallelæ erunt FH, GB: eſt igitur FGBH parallelogrammum. Ita oſtendam BGEI, EFHI eſſe parallelogramma; item DHIK, DFEK. Quia autem EG, GF, ſunt parallelæ lineis IB, BH; erunt (*per* 15. 11.) plana per ipſas ducta nempe EGF, IBH parallela, ideò priſma erit EBFI. Simili modo oſtendam EHKF eſſe priſma. Quia autem hæc duo priſmata ſunt ejuſdem altitudinis

nis, & parallelogrammum K H quod eſt baſis unius, duplum eſt trianguli I B H (*per* 41. 1.) quod eſt baſis alterius, erunt (*per* 40.11.) priſmata EBHI, EHKF æqualia.

Dico ſecundò, inveniri etiam Pyramides æquales A E F H, E C K I, nam triangulum A F G, æquale eſt (*per* 8. 1.) triangulo F D H, & hoc ſibi oppoſito E I K, ut patet propter parallelogramma; igitur triangula A F G, E I K ſunt æqualia; triangula item A E G, E I C, A E F ECK; EFG, CIK, ſunt æqualia; quia conſtant lateribus æqualibus, nempe dimidiis laterum pyramidis. Igitur pyramides ſunt æquales (*per def.*10.11.)

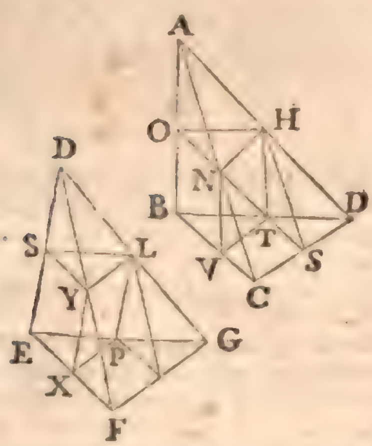
Dico tertiò, eas eſſe ſimiles toti pyramidi ABCD, triangula AEG ACB quia linea EG eſt parallela lateri C B, (*per* 2.6.) ſunt ſimilia; ita oſtendam reliqua triangula parvæ pyramidis, eſſe ſimilia triangulis majoris.

Dico quartò, priſmata eſſe majora dimidio pyramidis. Ducantur lineæ GI, GH; ſit pyramis G I H B, æqualis pyramidi AEFG; nam primo triangula EFG, IBH æqualia ſunt; & cum lineæ AG, FH ſint parallelæ & æquales, lineæ G H, & AF (*per* 33.1.) æquales erunt; ita GI, & AE æquales erunt; quare triangula AEF, GIH, AEG GIB; AFG, GHB (*per* 8. 1.) ſunt æqualia: igitur pyramides AEFG, GIHB ſunt æquales, ſed priſma EBFI, majus eſt pyramide GIKB, igitur & pyramide AEFG majus erit, & priſma EHKF alia pyramide E C K I majus erit: igitur duo priſmata ſimul, majora ſunt duabus pyramidibus; quare erunt pluſquam dimidia pars totius pyramidis.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si duæ pyramides æqualis altitudinis, & triangularis baſis, dividantur ſingulæ in duo priſmata æqualia, & duas pyramides, & hæ rurſus dividantur ſimiliter, erunt omnia priſmata unius, ad omnia priſmata alterius ut baſis ad baſin.



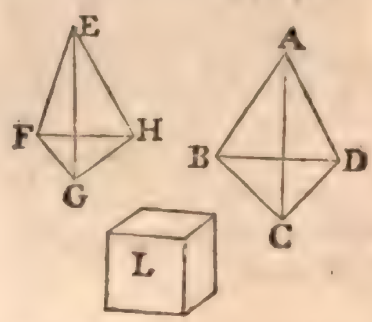
Sint duæ pyramides ABCD, DEFG, æqualis altitudinis & triangularis baſis, quæ dividantur ſicut prius, in duo priſmata æqualia & duas pyramides, & hæ rurſus ſubdividantur in alia duo priſmata æqualia, & duas pyramides; & ita deinceps quantùm volueris, ſintque tot diviſiones in unâ, quot in aliâ, ita ut totidem generentur priſmata in utraque; dico omnia priſmata unius, ſe habere ad omnia priſmata alterius; ut ſe habet baſis D C B ad baſin E F G.

Demonſtr. Cùm pyramides ABCD, DEFG ſint æqualis altitudinis & priſmata orta ex prima diviſione utriuſque, ſint dimidiæ altitudinis, ea etiam inter ſe æqualis altitudinis erunt; quare cum ſint dimidia pars parallelepipedorum eamdem baſin habentium ut propoſ.4. 11. oſtenſum eſt; & parallelepipeda ejuſdem altitudinis (*per* 32. 11.) ſe habeant ut baſes, priſmata quoque ſe habebunt, ut baſes. Eſt igitur priſma B H ad priſma E L ſicut baſis TVB ad baſin P X E, ſed T V B eſt quarta pars trianguli B C D, ut patet, quia parallelogrammum C T eſt duplum trianguli T V B, ſicut & trianguli D S T, (*per* 41. 1.) item triangulum P X E, eſt quarta pars trianguli E F G: igitur priſma B H ad priſma E L ſe habet ut baſis B C D ad baſin G E F; & quia alia duo priſmata C H, F L prioribus ſunt æqualia: priſmata ex primâ diviſione orta ſe habent ut baſes pyramidium. Pariter ea quæ fierent in pyramidibus A H N O, D L Y S ſe haberent ut baſes HNO, LYS, quæ [cum ſint æquales oppoſitis triangulis BVT, EPX, quæ ſunt quartæ partes baſium totalium BCD, EFG] ſe habent etiam ut baſes totales; quare priſmata ex ſecunda diviſione orta ſe habent adhuc ut baſes BCD, EFG, ita oſtendam ſingula priſmata ex quâcumque diviſione orta, ſe habere ut baſes totales; quare omnia ſimul priſmata unius pyramidis, ad totidem alterius pyramidis, ſe habebunt (*per* 12. 5.) ut baſis D B C, ad baſin E F G.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Pyramides triangularis baſis & ejuſdem altitudinis ſe habent ut baſes.



Sint pyramides A B C D, E F G H ejuſdem altitudinis, dico ita eſſe pyramidem A B C D, ad pyramidem E F G H ſicut baſis B C D eſt ad baſin F G H.

Si hoc ita non eſt una pyramis verbi gratiâ A B C D majorem rationem habebit ad aliam quàm baſis BCD, ad baſin FGH: igitur dari poteſt aliqua quantitas L minor pyramide A B C D, quæ eandem rationem habeat ad pyramidem E F G H, quàm habet baſis B C D ad baſin F G H. Dividatur pyramis A B C D in duo priſmata æqualia & duas pyramides: & hæ rurſus dividantur; & ita deinceps quantum opus erit. Quia duo priſmata ſunt pluſquam dimidium

Digitized by Google

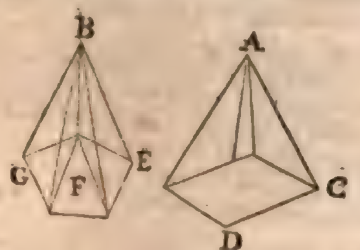
dimidium pyramidis (*per* 3.) & reliqui, id eſt paruarum pyramidum priſmata; ſunt pluſquam dimidium, tandem tot fient priſmata in pyramide ABCD, ut ea ſimul ſumpta minus deficiant ab eâdem pyramide ABCD, quam magnitudo L; atque adeo ſint majora magnitudine L, totidem fiant priſmata in pyramide EFGH, per totidem diviſiones.

Demonſtr. Priſmata facta in pyramide ABCD, ſunt ad priſmata EFGH ut baſis BCD : ad baſin FGH, ſed ut BCD ad FGH : ita ſupponitur magnitudo L ad pyramidem EFGH, igitur ut priſmata ABCD ad priſmata EFGH, ita magnitudo L ad pyramidem EFGH, ſed priſmata ABCD majora ſunt magnitudine L, igitur (*per* 14. 5.) priſmata EFGH majora erunt pyramide EFGH, quod eſt abſurdum: cum in illâ contineantur, & ſint illius pars. Igitur nulla magnitudo L minor pyramide ABCD, habebit eandem rationem ad pyramidem EFGH, quam habet baſis BCD ad baſin FGH, quare neutra pyramis, ad pyramidem, majorem rationem habet : quam baſis ad baſin.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Pyramides quæcumque æquè altæ, eandem rationem habent ac baſes.



Sint pyramides ACD, BEFG, æquè altæ. Dico ita eſſe primam ad ſecundam, ſicut baſis CD ad baſim EFG; dividantur baſes in triangula.

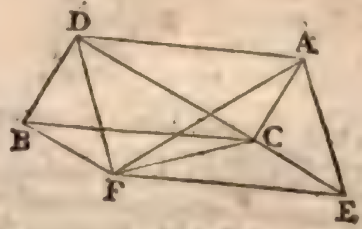
Demonſtr. Quia pyramides BE, AC ſunt triangulares, & æquè altæ erit (*per* 5.) prima ad ſecundam, ut baſis E ad baſin C. Pariter ita erit BF ad AC, ſicut baſis F ad baſin C; quare (*per* 24. 5.) ita erit tota pyramis BEF ad AC ſicut baſis EF ad baſin C. Quia verò (*per* 5.) etiam eſt pyramis BG ad AC ſicut baſis G ad baſin C. (*per eandem* 24. 5.) ita erit tota pyramis BEFG ad pyramidē AC ſicut baſis EFG ad baſin C. Sic oſtendam, ita ſe habere pyramidem BEFG ad pyramidem AD, ſicut baſis EFG ad baſin D. Cum igitur ſit ut pyramis AC ad pyramidem BEFG, ita baſis C ad baſin EFC. Item ut pyramis AD ad pyramidem BEFG, ita baſis D ad baſin EFG, ita erit (*per* 24. 5.) tota pyramis ACD ad totam BEFG, ſicut baſis CD ad baſin EFG.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Omnis pyramis, eſt tertia pars priſmatis eandem baſin, & altitudinem habentis.

Sit primò priſma triangulare AB, dico pyramidem eandem altitudinem, & eandem cum illo baſin habentem, eſſe tertiam ejus partem. Dividantur parallelogramma ductis diametri AF, CD, CF.



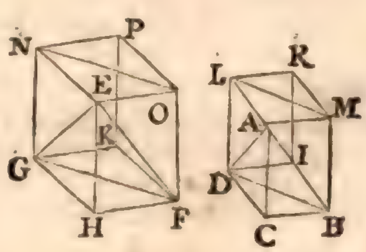
Demonſtr. Diviſum eſt priſma in tres pyramides ACFE, CFBD, DACF, quas dico eſſe æquales: nam ACFE, ACFD, cum habeant baſes AFE, AFD (*per* 34. 1.) æquales & eandem altitudinem lineam ſcilicet ductam ex communi vertice C, rectam ad planum ED; erunt (*per* 5.) æquales. Pariter pyramides ACFD, CDFB, baſes ADC, BCD æquales habent & pro altitudine lineam ductam ex communi vertice F ad planum AB. Sunt etiam æquales: quare pyramis AFEC cujus eadem altitudo cum priſmate, & eadem baſis ACE; eſt tertia ejus pars. Et quia omnes quæ haberent eandem baſin ACE, & eandem cum illa altitudinem, eſſent illi æquales (*per* 5.) omnis pyramis triangula, eſt tertia pars priſmatis ejuſdem altitudinis, & baſis.

Si verò priſma eſſet polygonum, divideretur in priſmata triangularia. Pyramis quæ eandem baſin haberet cum priſmate & eandem altitudinem, dividi poſſet in totidem pyramides triangulares quarum quælibet eſſet tertia pars priſmatis ſibi reſpondentis, (*per primam partem hujus*) ergo tota pyramis (*per* 7. 12.) eſt tertia pars totius priſmatis.

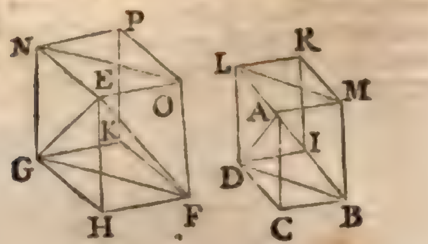
PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Similes pyramides ſunt in triplicatâ ratione laterum homologorum.



Sint primò duæ pyramides ſimiles triangularis baſis ABCD, EFGH. Dico primam ad ſecundam habere triplicatam rationem; illius quam habet latus AC ad ſibi homologum EH. Producantur plana triangularia ABC, ACD, BDC; EFH, EGH, FGH; ita ut perficiantur 6 parallelogramma GM, CL, CI; HO, HN, HK, ductiſque lineis ML, NO, perficiantur



priſmata MCLB, OHNF. Item perficiantur parallelepipeda RC, PH.

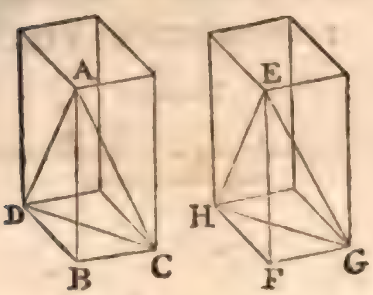
Demonſtr. Cum pyramides ſint ſimiles, (*per def.9. 11.*) omnia triangula ſimilia erunt, eritque ut AC ad CB: ita EH ad FH, & angulus ACB angulo EHF æqualis erit, quare parallelogramma MC, OH, ſimilia erunt. Ita ſimilia erunt parallelogramma LC, NH; CI, HK, & illis oppoſita (*per 24.11.*) Sunt igitur (*per def.9.11.*) parallelepideda RC, PH ſimilia; quare (*per 33.11.*) erunt in triplicatâ ratione laterum AC, EH: ſed priſmata ut eorum dimidia, & pyramides priſmatum tertiæ partes ſunt in eâdem ratione. Igitur pyramides ſunt in triplicatâ ratione laterum AC EH.

Si verò pyramides non eſſent triangulares, ſed polygonæ, dividantur in triangulares. Cum igitur ſingulæ triangulares ſe habeant ad ſuas correſpondentes, in triplicatâ ratione laterum; erunt (*per 7. 12.*) & omnes ſimul, ad omnes in eadem ratione triplicatâ.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Æquales pyramides reciprocant baſes & altitudines: & quæ reciprocant baſes, & altitudines æquales ſunt.



Sint primò pyramides triangulares A B C D, EFGH æquales, dico ita eſſe baſin CBD ad baſin G F H; ſicut altitudo pyramidis EFGH ad altitudinem primæ. Perficiantur parallelepipeda ſicut priùs.

Demonſtr. Parallelepipedorum baſes, ut patet (*per 34. 1.*) ſunt duplæ baſium pyramidum, altitudines autem ſunt eædem. Cum autem pyramides ſint æquales, & ſextæ partes parallelepipedorum, nempe tertiæ priſmatum (*per 7. 12.*) parallelepipeda erunt æqualia, ſed (*per 34. 11.*) parallelepipedorum æqualium reciprocantur baſes, & altitudines: igitur baſes pyramidum, quæ ſunt dimidiæ baſium parallelepipedorum, reciprocantur cum altitudinibus.

Secundò, ſi reciprocæ ſint baſes, & altitudines pyramidum; dico illas eſſe æquales. Quia cùm in eâdem conſtructione baſes parallelepipedorum ſint duplæ baſium pyramidum, & altitudines eædem, reciprocabuntur baſes, & altitudines parallelepipedorum: quare (*per 34. 11.*) illa ſunt æqualia; ergo pyramides quæ ſunt illorum ſextæ partes etiam æquales erunt.

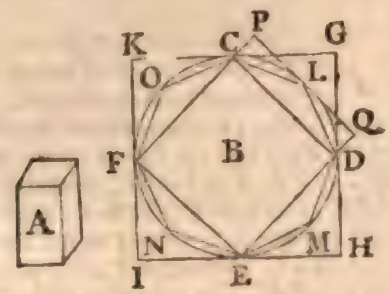
Si verò pyramides æquales, habeant baſes polygonas. Fiant triangula æqualia, earum baſibus; quod facillimum eſt: nam (*per 4 . 1.*) fiat parallelogrammum baſibus æquale, fiatque triangulum cujus baſis ſit dupla baſis parallelogrammi, & quod ſit inter eaſdem parallelas; eritque (*per 41. 1.*) triangulum æquale parallelogrammo, & conſequenter baſi polygonæ. Supra hæc triangula intelligantur pyramides ejuſdem altitudinis cum pyramidibus polygonis, quæ (*per 6.*) illis æquales erunt, & inter ſe (*per primam partem*) triangulares baſes reciprocantur cum altitudinibus: igitur baſes polygonæ æquales triangularibus, reciprocantur cum altitudinibus.

L E M M A.

Si detur quantitas minor cylindro; intra cylindrum inſcribi poterit priſma majus illa quantitate.

Sit quantitas A, minor cylindro, cujus baſis B; dico intra cylindrum inſcribi poſſe priſma majus quantitate A.

Sit enim circulo B quadratum inſcriptum CD EF, & circumſcriptum GHIK, fiat item octogonum CLDMENFO; productiſque lateribus quadrati inſcripti, in P & Q; ducatur tangens CLP, & ſupra hæc omnia polygona, tanquam ſupra baſes, intelligantur priſmata ejuſdem altitudinis cum cylindro: quorum quod eſt ſupra quadratum circumſcriptum ambit totum cylindrum.



Demonſtr. Priſmata ejuſdem altitudinis, ſe habent ut baſes, (per cor. 4. 11.) *ſed quadratum inſcriptum eſt media pars circumſcripti; ergo priſma illius eſt media pars circumſcripti: ſed circumſcriptum majus eſt cylindro; igitur priſma quadrati inſcripti eſt pluſquam media pars cylindri. Facto autem octogono & priſmate ſupra illud: dico auferri ex cylindro, pluſquam mediam partem reliqui. Nam triangulum DLC eſt media pars rectanguli D C P Q; igitur priſma ſupra triangulum D L C deſcriptum* (per cor.4. 11.) *eſt media pars priſmatis deſcripti ſupra rectangulum D C P Q: igitur idem priſma trianguli D L C eſt pluſquam dimidium, partis cylindri deſcripti ſupra ſegmentum D L C. Et ita de reliquis ſegmentis. Ita oſtendam facto polygono ſexdecim laterum auferri cylindro pluſquam dimidium reliqui. Cum igitur ex cylindro dum aufertur priſma, quod*

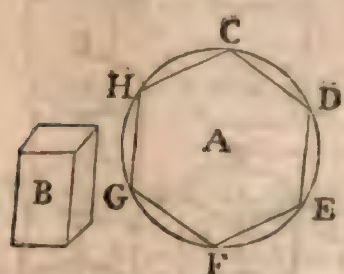
quod eſt ſupra quadratum; auſertur pluſquam media pars; & dum auſertur priſma octogoni auſertur pluſquam dimidium reliqui, & ita deinceps tandem relinquetur quantitas minor eâ, qua cylindrus ſuperat quantitatem A, quare dabitur aliquod priſma intra cylindrum B quod minùs ſuperabitur à cylindro B, quàm quantitas A, atque adeò majus erit quantitate A.

Idem de pyramidibus inſcriptis cono oſtendi poſſet, & eodem modo.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Omnis conus eſt tertia pars cylindri, eandem cum ipſo baſin, & altitudinem habentis.



Si ſupra circulum A ſit conus, & cylindrus ejuſdem altitudinis, dico cylindrum eſſe triplum coni.

Si enim cylindrus majorem rationem habeat ad conum quam triplam, dari poſſet aliqua quantitas B cylindro minor; quæ ad conum haberet rationem triplam. Sit hæc quantitas B. Inſcriptis autem circulo polygonis & factis priſmatibus intra cylindrum, tandem poterit dari priſma intra cylindrum majus quantitate B (*per lemma ſuperius*). Sit illius priſmatis baſis polygonũ CDEFG; ſupra quod fiat intra conum pyramis, quæ conſequenter erit ejuſdem altitudinis cum cono, cylindro & priſmate; priſma erit triplum pyramidis. Sed quantitas B eſt tripla coni, igitur eadem eſt ratio priſmatis ad pyramidem quæ quantitas B ad conum: ſed priſma eſt majus quantitate B, igitur (*per* 14. 5.) pyramis major erit cono; pars toto, cum intra conum tota contineatur. Hoc autem abſurdum eſt.

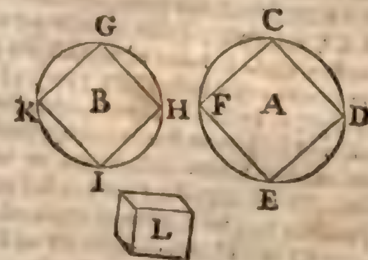
Si diceretur conus habere majorem rationem ad cylindrum quàm ſubtriplicatam, idem argumentum fieret, & eadem methodo.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Cylindri, & coni ejuſdem altitudinis, inter ſe ſunt ut baſes.

Sint duo cylindri, vel duo coni ejuſdem altitudinis ſupra circulos A & B, dico ita eſſe cylindrum A ad cylindrum B ut circulus A ad circulum B. Nam ſi hoc ita non eſt, alteruter cylindrorum ut A, majorem rationem habebit ad B quàm baſis ad baſin: Igitur poſſibilis erit quantitas L minor cylindro A, quæ ad cylindrum B eandem rationem habeat, ac baſis A ad baſin B, quare (*per lemma ſuperius*) poteſt inſcribi intra cylindrum A priſma aliquod majus quantitate L. Sit priſma cujus baſis CDEF, inſcribaturque circulo B ſimile polygonum GHIK, & intelligatur inſcriptum cylindro B, priſma ſupra baſin GHIK.



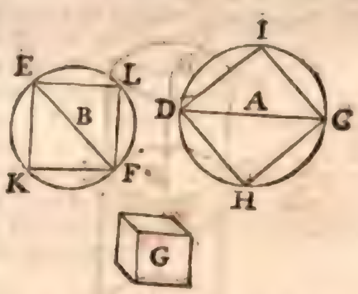
Demonſtr. Ita eſt priſma ſupra CDEF ad priſma ſupra GHIK ſicut baſes (*per cor.* 40. 11.) ſeu polygona; polygona autem ſimilia ſe habent ut circuli (*per corol.* 2.) igitur ita eſt priſma A ad priſma B ſicut baſis A ad baſin B, ſed ut baſis A ad baſin B ita quantitas L ad cylindrum B, igitur ut priſma A ad priſma B ita quantitas L ad cylindrum B; ſed priſma A majus eſt quantitate L: Igitur (*per* 14. 5.) priſma B majus eſt cylindro B; quod eſt abſurdum cum in eo contineatur & ſit ejus pars: igitur cylindri ſunt ut baſes.

Cum autem cylindri ſint tripli conorum, habebunt etiam coni ejuſdem altitudinis eandem rationem, ac baſes.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Similes cylindri, & coni ſunt in triplicatâ ratione diametrorum ſuarum baſium.



Sint duo coni ſimiles quorum baſes circuli A & B; dico conum A ad conum B eſſe in triplicata ratione diametri CD ad EF.

Si enim hoc ita non eſſet, alteruter majorem haberet rationem. Sit major ratio coni A ad B quàm triplicata rationis CD ad EF; igitur dabitur aliqua magnitudo G minor quàm conus A, quæ ad conum B habebit rationem triplicatam rationis CD ad EF. Quare (*per lemma ſuperius*) inſcribi poterit aliqua pyramis intra conum A major quantitate G. Sit illa cujus baſis CHDI. Inſcribatur circulo B polygonum EKFL ſimile priori; ſupra quod intelligatur pyramis ſimilis priori, quæ eandem habebit altitudinem ac conus B, nam coni ſimiles habent diametros & altitudines proportionales, (*per def.* 21. 11.)

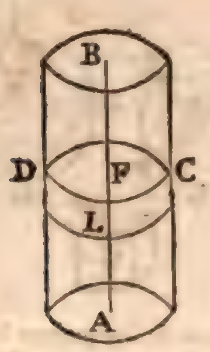
ut autem diameter C D ad E F, ita latus CH ad latus EK, (*ut oſtendimus prop.* 1.) igitur ut C H ad E K, ita altitudo coni A, ad altitudinem coni B; ſed altitudo pyramidis inſcriptæ cono A eadem eſt cum altitudine coni A: igitur ita eſt altitudo pyramidis A ad altitudinem coni B ſicut CH ad EK, ſed ut CH ad EK ita altitudo pyramidis A ad altitudinem pyramidis ſimilis ſupra E K L F deſcriptæ; igitur altitudo pyramidis A eodem modo ſe habet ad altitudinem coni B & pyramidis cujus baſis EKFL (*per* 75.) altitudines coni, & pyramidis ſunt æquales. Supra eandem baſin EKFL cono B inſcribatur pyramis, quæ cum eandem habeat altitudinem & baſin cum priori, illi erit æqualis (*per* 6.) Sed prior ſimilis pyramidi A, (*per* 8.) erat in triplicatâ ratione lateris KF ad CH, aut diametri EF ad C D; igitur hæc pyramis inſcripta cono B erit ad inſcriptam cono A in triplicatâ ratione diametri EF ad C D; ſed conus B ad magnitudinem G erat etiam in triplicatâ ratione diametri E F ad C D, igitur ut pyramis B ad pyramidem A ita conus B ad magnitudinem G, & convertendo, ut pyramis A ad pyramidem B ita magnitudo G ad conum B; ſed pyramis A major eſt magnitudine G, igitur pyramis B hoc eſt inſcripta cono B (*per* 14. 5.) major eſſet cono B; pars toto: quod abſurdum eſt.

Quia verò cylindri ſunt tripli conorum, eandem rationem habebunt ac coni; igitur etiam ipſi erunt in triplicata ratione diametrorum ſuarum baſium.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si cylindrus ſecetur plano baſibus parallelo; ita erunt inter ſe ſegmenta cylindri ac ſegmenta axis.



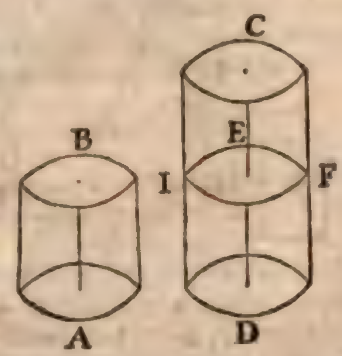
Cylindrus A B ſecetur plano C D, parallelo baſibus A, & B; dico ita eſſe cylindri ſegmentum AF, ad ſegmentum FB; ſicut eſt linea AF, ad FB. Sit enim lineæ AF quæcumque pars aliquota L F, ſitque verbi gratiâ quarta pars, per quàm intelligatur duci planum baſibus parallelum.

Demonſtr. Quoniam L F eſt quarta pars lineæ A F in reliquâ A L, invenientur tres partes lineæ LF æquales; per quas ſi ducerentur plana baſibus parallela, fierent tria ſegmenta cylindri æqualia ſegmento LF (*per* 11.) cum æquales habeant baſes, & æquales altitudines: igitur ſegmentum L F tam eſt quarta pars cylindri A F quam linea L F lineæ AF. Ponamus in lineâ F B bis inveniri lineam LF, & duci planum parallelum baſibus. In ſegmento F B invenirentur ſaltem duo cylindri æquales cylindro L F; igitur quoties in lineâ F B continetur quarta pars lineæ AF, toties in cylindri ſegmento F B continetur quarta pars cylindri AF; & quod de quartâ parte oſtendi, de quacumque parte aliquota oſtendi poteſt; igitur ita eſt (*per def.* 5. 5.) linea F B ad AF ſicut cylindri ſegmentum F B ad ſegmentum AF.

PROPOSITIO XIV.

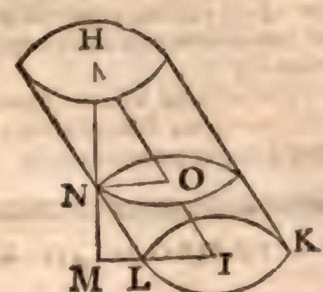
Theorema.

Cylindri, & coni quorum baſes ſunt æquales: ſe habent ut altitudines.



Sint primò duo cylindri recti A B, C D quorum baſes ſint æquales, dico ita eſſe cylindrum AB ad cylindrum C D ſicut altitudo A B ad altitudinem C D. Ex majori altitudine abſcindatur altitudo DE, æqualis altitudini AB; intelligaturque duci planum F I baſibus parallelum.

Demonſtr. Cylindri A B, ED, (*per* 11.) ſunt æquales, ſed cylindrus C D (*per* 13.) ſe habet ad Cylindrum E D ſicut axis C D ad axin E D, aut A B illi æqualem; [nam in cylindris rectis axes, & altitudines eædem ſunt:] igitur erit cylindrus C D ad cylindrum A B ſicut altitudo C D ad altitudinem AB.



At verò ſi cylindri non eſſent recti quale eſt H I, demittatur à puncto H perpendicularis HM ad planum KL, quæ erit altitudo cylindri; ducaturque linea IM. Quia planum trianguli H I M ſecat duo plana NO, LK parallela (*per* 16. 1.) ſectiones NO, IM parallelæ ſunt: quare (*per* 2. 6.) ita erit HO ad OI, ſectiones axis, ac HN ad NM, ſectiones altitudinis: igitur optimè ſectiones axis pro altitudinibus aſſumi poſſunt, quod etiam notandum eſt in prop. 13.

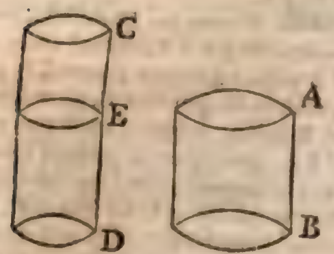
Quia autem coni ſunt tertiæ partes cylindrorum

drorum (*per* 10.) ita ſe habebunt ſicut cylindri; igitur coni quorum baſes ſunt æquales, ita ſe habent ut altitudines.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Æquales cylindri, & coni reciprocant baſes & altitudines. Et qui reciprocant baſes & altitudines, illi ſunt æquales.



Sint duo cylindri æquales AB, CD; dico ita eſſe baſin B ad baſin D ſicut eſt altitudo CD ad altitudinem AB. Ex majori altitudine CD, abſcindatur altitudo DE, æqualis altitudini AB.

Demonſtr. Quia cylindri AB, DE ſunt ejuſdem altitudinis: ita erit (*per* 11.) cylindrus AB ad cylindrum DE ſicut baſis B ad baſin D: ſed ſicut AB ad DE ita cylindrus CD, æqualis ipſi AB ad ED. (*per* 7. 5.) & ut CD ad DE ita altitudo CD ad DE, aut illi æqualem AB; igitur ut baſis B ad baſin D ita altitudo CD ad altitudinem AB.

Dico ſecundò, ſi ſit ut baſis B ad baſin D ita altitudo CD ad altitudinem AB, cylindros AB, CD eſſe æquales; in eadem ſuppoſitione, ut baſis B ad baſin D ita cylindrus AB ad cylindrum DE ejuſdem altitudinis (*per* 11.) ſed ut B ad D ita altitudo CD ad altitudinem AB, aut DE illi æqualem, igitur ita eſt AB ad DE ſicut altitudo CD ad DE; ſed ut altitudo CD ad altitudinem DE, ita eſt (*per* 13.) cylindrus CD ad DE, igitur ita eſt cylindrus AB ad DE ſicut cylindrus CD ad DE; quare (*per* 9. 5.) cylindri AB, CD ſunt æquales.

Idem intelligendum de conis, quia ſunt tertiæ partes cylindrorum.

PROPOSITIO XVI. & XVII.

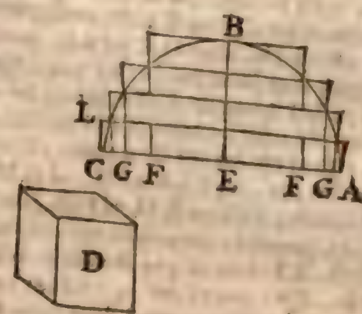
Relinquantur.

Quia iſtæ propoſitiones ſunt difficilimæ, adhibenturque tantùm propter 18. quam aliâ methodo facilius cum P. Tacqueto oſtendere poſſumus; ideo illas relinquimus, & loco illarum duo lemmata ſubſtituimus.

LEMMA I.

Si detur quantitas minor ſpherâ; tot cylindri ſpherâ inſcribi poterunt, ut omnes ſimul ſumpti illâ quantitate majores ſint.

Sit ſphæra cujus maximus ſemicirculus ABC: detur quantitas D ſpherâ minor: dico tot ſphæræ inſcribi poſſe cylindros, ut omnes ſimul ſumpti majores ſint quantitate D. Semidiameter EB in quotvoluerit partes æquales dividatur per quas agantur parallelæ lineæ AC, fiantque parallelogramma inſcripta; productis autem lateribus fiant parallelogramma circumſcripta circulo, quorum numerus inſcriptorum numerum ſuperabit unitate, ut patet ex figurâ.



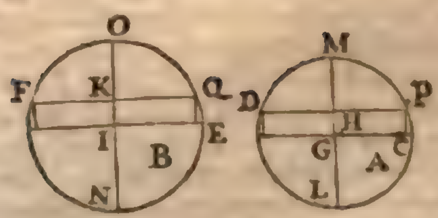
Demonſtr. Parallelogramma circumſcripta circulo ſuperant inſcripta parallelogrammis per quæ tranſit circulus, quæ ſimul ſumpta æqualia ſunt parallelogrammo AL. Si intelligatur volvi ſemicirculus diametro BE immotâ permanente; ſingula parallelogramma deſcribent cylindros, tam inſcriptos quàm circumſcriptos ſphæræ; exceſſus autem cylindrorum circumſcriptorum ſphæræ, ſupra inſcriptos omnes ſimul ſumpti, æquales ſunt cylindro deſcripto à rectangulo AL; ſed ſphæra minus excedit cylindros inſcriptos quàm circumſcripti eoſdem inſcriptos ſuperent; cum intra circumſcriptos contineatur: igitur exceſſus quo ſphæra ſuperat cylindros inſcriptos, minor eſt cylindro deſcripto à parallelogrammo AL. Quo autem in plures partes dividatur ſemidiameter EB, eo minor eſt cylindrus parallelogrammi AL, cum eius altitudo minor ſit: igitur ita parvus eſſe poteſt cylindrus AL: ut exceſſus ſphæræ ſupra cylindros inſcriptos; minor ſit quàm id quo ſphæra ſuperat quantitatem D; quare ita ſubdividi poteſt ſemidiameter EB ut cylindri inſcripti ſimul ſumpti, majores ſint media parte quantitatis D, quod dixi de uno hemiſphærio, de alio intelligi etiam poteſt; igitur poteſt ita dividi tota diameter, ut cylindri inſcripti in tota ſphæra ſimul ſumpti majores ſint quantitate D.

LEMMA II.

Similes cylindri in duabus ſphæris inſcripti; habent rationem diametrorum triplicatam.

In duabus ſphæris A & B ſint duo cylindri recti ſimiles, producti ex circumvolutione ſimilium rectangulorum CD, EF, circa immotas diametros LM, NO; dico cylindrum rectanguli CD eſſe ad cylindrum rectanguli EF, in ratione triplicata diametri LM ad diametrum NO.

Digitized by Google

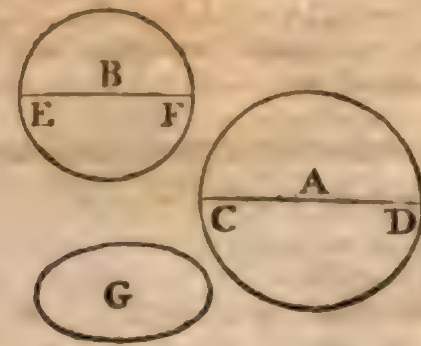


Demonſtr. Cum rectangula C D, E F ſint ſimilia, ita erit (*per def. 5.*) P D ad P C, aut HG illi æqualem ſicut Q F ad K I, & conſequenter ita erit PH ad HG ſicut Q K ad K I; quare ſi intelligantur duci lineæ P G, Q I, (*quæ in figura non ſunt ductæ*) triangula PHG, QKI (*per 6.*) proportionalia erunt, eritque ut PH ad PG, aut GM, ita QK ad QI, aut IO illi æquales; & conſequenter erit PD, dupla ipſius PH, ad G M ſicut Q F ad I O, vel ſicut L M ad NO, (*per 5.*) ſed cylindri generati circumvolutione rectangulorum P D, E F habent pro diametris baſium lineas PD, QF; quare (*per 12.*) habent rationem triplicatum illius quam habent lineæ PD, Q F: igitur habebunt rationem triplicatam illius quam habent lineæ L M, N O, quæ ſunt diametri ſphærarum. Quod ſi tot in una ſphærâ inſcriberentur quot in aliâ, cum ſinguli ad ſuos correſpondentes habeant rationem triplicatam diametrorum ſphærarum, omnes ſimul ad omnes ſimul (*per 12. 5.*) rationem habebunt triplicatam illius, quam habent ſphærarum diametri.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Sphæræ habent rationem diametrorum triplicatam.



Sint ſpheræ A & B, quarum diametri CD, EF; dico A ad B eſſe in ratione triplicata rationis, quæ eſt C D ad E F.

Demonſtr. Si enim hoc ita non eſt, alterutra ſphærarum, verbi gratia A, majorem rationem habeat ad B quàm triplicatam rationis C D ad E F, igitur poſſibilis eſt quantitas G minor ſphærâ A, quæ ad B habeat rationem triplicatam rationis C D ad E F. Quia igitur G minor eſt ſphærâ A, poterunt (*ex lemmate primo*) per ſubdiviſionem diametri, tot inſcribi cylindri ſphæræ A, ut illi omnes ſimul ſumpti majores ſint magnitudine G. Intelligantur totidem, & ſimiles inſcripti ſphæræ B, Cylindri A ad cylindros B (*per lemma 2.*) habebunt rationem triplicatam rationis C D ad E F; ſed quantitas G ad ſphæram B habet etiam rationem triplicatam rationis C D ad E F, igitur ita erunt cylindri A ad cylindros B, ſicut quantitas G ad ſphæram B; ſed cylindri A majores ſunt quantitate G, igitur (*per 14. 5.*) cylindri B majores eſſent ſphæra B, quod eſt abſurdum; nam ſunt illius partes, & in ea continentur, cum ſint inſcripti.

Coroll. *Sphæræ ſunt inter ſe ut cubi ſuarum diametrorum: cum enim cubi ſint parallelepipeda ſimilia, habebunt rationem laterum triplicatam* (per 33. 11.) *ſed ſphæræ habent etiam rationem diametrorum triplicatam (per præcedentem) ergo ſphæræ ſunt inter ſe, ut cubi diametrorum.*

EUCLI

Digitized by Google

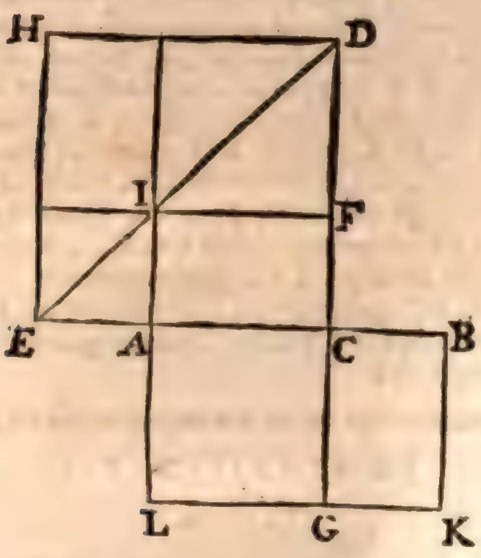
EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUSTERTIUS.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Si lineâ extremâ ac mediâ ratione ſecetur; compoſita ex majori ſegmento, & dimidiâ lineâ, quintupla eſt potentiâ, ipsâ dimidiatâ lineâ.

Linea A B extremâ, ac mediâ ratione ſecetur in C. Hoc eſt; ita ſit linea AB ad majus ſegmentum A C ut A C ad C B, addaturque majori ſegmento A C, linea AE, æqualis AD, dimidiatæ AC; dico lineam AEC, quintuplam eſſe potentiâ ipſius A E, ſeu quadratum ex E C eſſe quintuplum, quadrati ex A E.



Fiat ſupra E C quadratum E D, ductaque diagonali DE, ducantur FI, AI parallelæ ſuis oppoſitis: eruntque E I, I D quadrata, ut oſtendimus (*in* 4. 2.) fiat item quadratum A L.

Demonſtratio. Cum A I, ſeu E A ſit dimidia lineæ AC, ſeu A L, & (*per* 1. 6.) ſit ut AI ad AL ita rectangulum A F ad A G, erit A G duplum ipſius A F, ergo æquale rectangulum A F, H I. Rectangulum autem G B æquale eſt quadrato ID (*per* 16. 6.) quia nempe AB, ſeu BK, AC & CB ſunt continuæ proportionales; Ergo quadratum AK, æquale eſt Gnomoni HFA. Sed quadratum A K quadruplum eſt quadrati E I, eo quod A C ſit dupla ipſius A E; ergo Gnomon H F A, eſt quadruplum quadrati E I. Et addendo ipſum quadratum EI, erit quadratum ED quintuplum quadrati E I, quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si linea quintuplum poſſit ſui ſegmenti, reliqua pars erit majus ſegmentum, dupla prioris ſegmenti extrema ac media ratione ſecta.

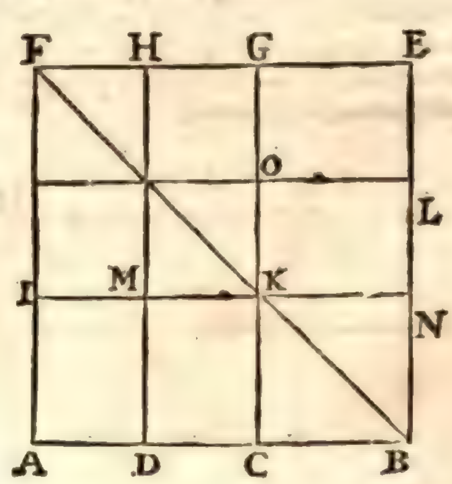
Lineæ EC quadratum quintuplum ſit quadrati ex AE; dico reliquam A C eſſe majus ſegmentum lineæ A B duplæ prioris ſegmenti AE, ſectæ extrema ac media ratione, hoc eſt ita eſſe A B ad A C, ſicut A C ad C D; fiat eadem conſtructio.

Demonſtr. Cum quadratum E D quintuplum ſit quadrati E I, ſubtracto quadrato EI erit Gnomon H F A, quadruplum quadrati EI; ſed quadratum ex A B, nempe A K, eſt etiam quadruplum ejuſdem quadrati E I: ergo æquale eſt eidem Gnomoni, & cum A B, ſeu A L, dupla ſit ipſius AE aut AI, & (*per* 1. 6.) ita ſit AL ad AI, ut rectangulum AG ad AF, erit AL duplum ipſius A F, nempe æquale rectangulis H I, A F; ergo quadratum I D æquatur rectangulo C K, quare (*per* 16. 6.) ita eſt C G, ſeu AB, ad AC ſicut AC ad C B, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si linea dividatur extremâ ac mediâ ratione; quadratum compoſita ex minori ſegmento, & dimidio majoris, quintuplum eſt quadrati dimidij ejuſdem majoris ſegmenti.



Linea A B ſecetur extrema ac media ratione, ſitque CB minus ſegmentum A C majus diviſum bifariam

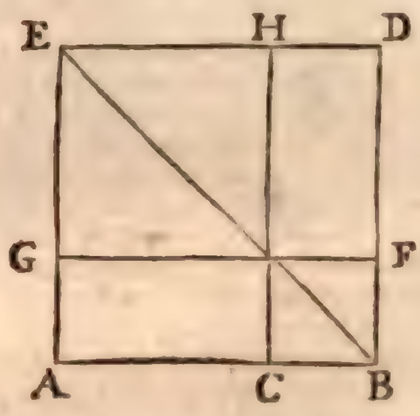
biſariam in D: dico quadratum lineæ D B compoſitæ ex C B & D C, eſſe quintuplum quadrati ex D C aut A D. Fiat ſupra A B quadratum A E ductâque diagonali F B, ducantur C G, D H, &c.

Demonſtr. Cum ſit ut AB ad AC ita AC ad ad CB, erit rectangulum A N ſub extremis æquale quadrato mediæ AC, nempe quadrato IG; ſed quadratum I G quadruplum eſt quadrati M O; ergo rectangulum A N, ſeu Gnomon D N O, illi æquale (tranſlato ſcilicet A M in K L) eſt quadruplum quadrati M O: ergo addendo quadratum M O, quadratum D L quintuplum erit quadrati M O quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si linea extrema ac media ratione ſecetur; quadrata totius, & minoris ſegmenti ſimul, tripla erunt quadrato majoris.



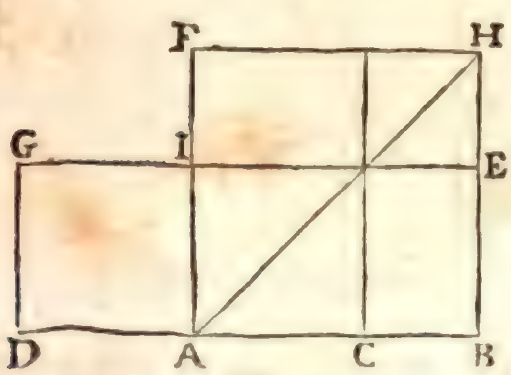
Linea A B extremâ, ac media ratione ſecetur; dico quadrata ex A B, & ex C B ſimul, tripla eſſe quadrato ex A C. Fiat ſupra AB quadratum AE, ductaque diagonali E B perficiatur conſtructio.

Demonſtr. Cum ſit ut A B ad A C ita A C ad CB; erit (*per* 17. 6.) rectangulum AF ſub extremis æquale quadrato mediæ A C, ſeu quadrato G H: ergo quadratum A D; continet bis quadratum GH, & præterea rectangulum HF, cui ſi addatur quadratum C F, fient quadrata AD, CF, tripla quadrati GH, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si linea extremâ ac mediâ ratione ſecta addatur majus extremum; compoſita ex utraque, ſecta erit extremâ ac mediâ ratione, priorque linea erit ejus majus ſegmentum.



Lineæ A B extremâ ac mediâ ratione ſectæ in C, addatur AD æqualis AC; dico DB extrema ac media ratione dividi in A, & AB eſſe ejus majus ſegmentum: nempe debeo probare ita eſſe DB ad A B ſicut AB ad D A.

Demonſtr. Cum ſit ut A B ad AC ita AC ad CB, ſeu EH, erit (*per* 17. 6.) rectangulum E H æquale quadrato C I, ſeu AG, cum DA, AC, ſint æquales. Addatur commune A E, erit rectangulum DE æquale quadrato AH; ergo ita eſt (*per* 17. 6.) DB ad AB, ut AB ad BE, ſeu DA.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si recta rationalis extrema, ac media ratione ſecetur; utrumque ſegmentum erit irrationalis linea dicta Apotome.



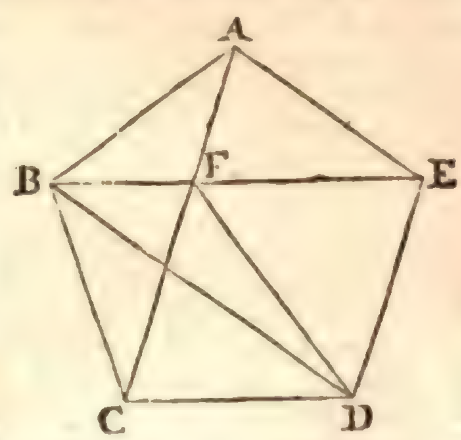
Recta rationali A B, extrema, ac media ratione ſecetur in C; dico utrumque ſegmentum AC, & CB eſſe lineam irrationalem dictam Apotomen. Addatur A D dimidia A B.

Demonſtr. Quadratum rectæ CD, quintuplum eſt quadrati A D (*per* 1.) ergo commenſurabilia ſunt, & lineæ ſaltem potentia. Et cum A D ſit rationalis, C D etiam rationalis erit: cum autem quadrata non habeant rationem quam habet numerus quadratus ad numerum quadratum, erunt C D, A D longitudine incommenſurabiles, ſed potentia commenſurabiles. Quare ſi ex rationali C D detrahatur A D rationalis potentia tantum toti incommenſurabilis, reſtabit A G irrationalis quæ dicitur Apotomê. Sit rectangulum AE comprehenſum ſub A B, B C, illud erit æquale quadrato ex AC; quare quadratum Apotome AC applicatum ad lineam rationalem A B, facit latitudinem B E, ſeu CB Apotomen primam (*per* 98. 10.)

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si Pentagoni æquilateri tres anguli æquales fuerint; æquiangulum erit.



Sint primò tres anguli A, B, C in pentagono æquilatero ABCDE æquales; dico pentagonum æquiangulum eſſe. Ducantur B E, AC, BD.

Demonſtr. Comparentur tria triangula Iſoſcelia

celia

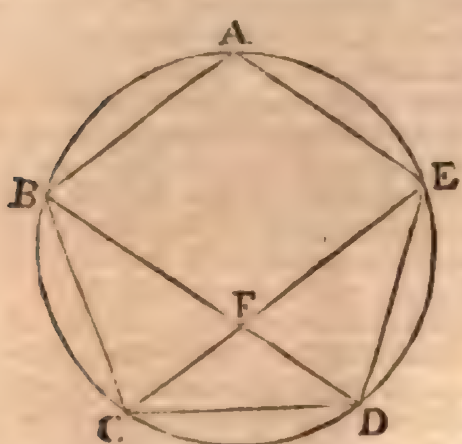
Digitized by Google

celia BAE, ABC, BCD, quæ (*per* 4. 1.) & baſes habebunt æquales, & omnes angulos ad baſes. Nempe æquales erunt AEB, ABE, BAC, BCA, CBD, CDB. Sunt item æquales BED, BDE (*per* 5. 1.) cum B E, C D ſint æquales: ergo totales AED, CDE æquales erunt. Rurſus cum anguli BAF, FBA ſint oſtenſi æquales, erunt (*per* 6. 1.) latera BF, FA æqualia, & conſequenter reliqua FE, FC. Quare ſi conſiderentur triangula FED, FCD, hæc habent latera FE, FC; ED, CD æqualia, & baſin FD communem: ergo anguli FED, FCD (*per* 8. 1.) æquales erunt, & additis æqualibus BCA, AEB, fient anguli BCD, AED æquales: ergo omnes anguli ſunt æquales. Si verò anguli æquales non fuerint continui ſint illi A, C, & D; oſtendam ſicut prius angulos AED, CDE eſſe æquales. Quare cum tres continui A, E, D ſint æquales: erit pentagonum æquilaterum.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si in pentagono æquilatero & æquiangulo duæ lineæ ſubtendant angulos vicinos; hæ extremâ ac mediâ ratione ſe ſecabunt invicem, & majus ſegmentum æquale erit lateri pentagoni.



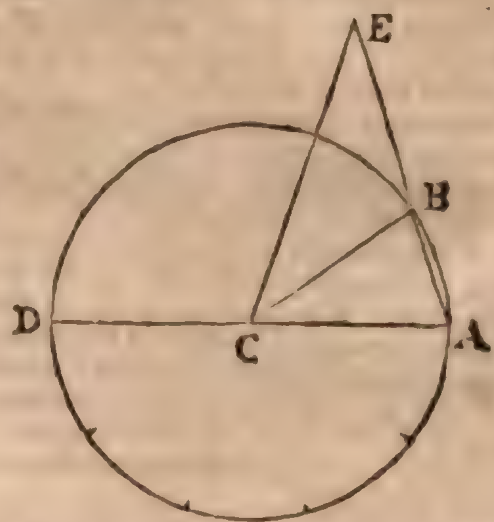
In pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, lineæ BD, CE ſubtendant angulos æquales C & D: dico utramque ſecari extremâ, ac mediâ ratione in F, ita ut majus ſegmentum BF æquale ſit lineæ BC lateri pentagoni. Pentagono circulus circumſcribatur.

Demonſtr. Primò triangula BCD, EDC ſunt (*per* 4. 1.) omninò æqualia, ergo & baſes CE, BD. Sunt item 4 anguli CBD, CDB, CED, DCE æquales, quare latera CF, FD erunt æqualia (*per* 6. 1.) Item cum angulus externus BFC æqualis ſit duobus internis FCD, FDC æqualibus, erit duplus anguli ECD, ſed angulus BCE, duplus eſt anguli ECD, cum arcus BAE, ſit duplus arcûs DE, ergo æqualis eſt angulo BFC. Et (*per* 6. 1.) BC, BF ſunt æquales. Cum ergo triangula CFD, BCD ſint æquiangula, eo quod anguli CBD, BDC, DCF ſint æquales, erit (*per* 3. 6.) ut BD ad BC, ſeu FD, ita CD, ſeu BF, ad FD. Ergo BD extrema, ac media ratione ſecatur in F; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si latus exagoni, & decagoni componantur, linea erit ſecta extremâ ac mediâ ratione, majuſque ſegmentum erit latus exagoni.



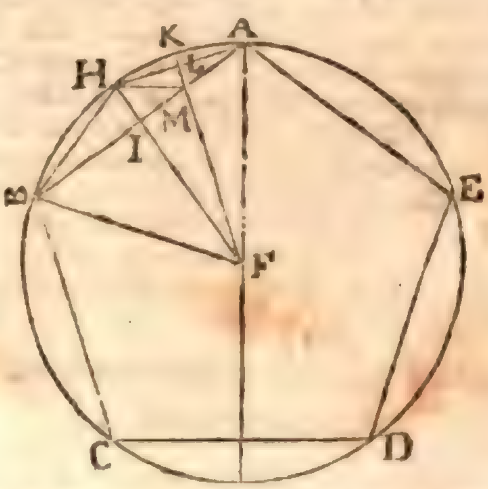
Sit A B latus decagoni, cui addatur B E latus exagoni in eodem circulo inſcripti: dico lineam AE extremâ & mediâ ratione ſectam eſſe in B & majus ſegmentum eſſe BE, latus exagoni. Eſt BE æquale radio BC.

Demonſtr. Cum A B ſit latus decagoni, arcus AB erit graduum 36 diviſis gradibus 360 per 10. quibus ſublatis ex 180 erunt reliqui duo anguli trianguli ABC 144 graduum: ſunt autem æquales; ergo quilibet eſt 72 graduum. Eſt ergo CBA graduum 72, ſed eſt æqualis duobus internis æqualibus E & BCE, ergo quilibet eſt 36. Eſt ergo angulus E 36, & angulus ECA 72; ſicut EAC. Sunt ergo triangula AEC, ACB æquiangula: ergo (*per* 3. 6.) ita eſt EA ad CA, ſeu CB, aut EB, ſicut CB, ſeu EB, ad BA: ergo EA eſt diviſà extremâ, ac mediâ ratione; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Quadratum lateris pentagoni æquale eſt quadratis, lateris exagoni & decagoni.



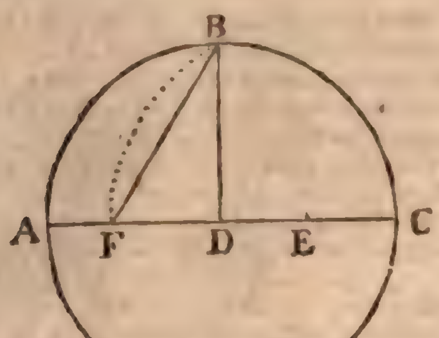
Sit pentagonum regulare ABCDE dico quadratum lateris AB æquale eſſe quadratis ex BF,

radij ſcilicet exagoni,& BH lateris decagoni. Dividatur arcus BK biſariam in K, ducaturque HA, & H M.

Demonſtr. Angulus BFA eſt quinta pars quatuor rectorum nempe 72. quibus ſublatis ex duobus rectis erunt reliqui duo 108 ſeu ſinguli BAF, FBA 54. Eſt arcus BH 36 & HK 18. Ergo arcus BHK eſt 54: ergo angulus B F M eſt 54, æqualis angulo BAF. Sunt ergo triangula A B F , M B F æquiangula : ergo ita eſt A B ad BF , ſicut BF ad BM (*per* 3. 6.) ergo rectangulum ſub A B B M æquale eſt quadrato BF. (*per* 17. 6.)

Pariter æquiangula ſunt quadrata HIA,LMA, cum præter angulos rectos in I & L, habeant angulum LAM,communem : ergo æquiangula ſunt triangula ABH , HAM : ergo (*per* 3. 6.) ita eſt AB ad BH, ſicut AH, ſeu BH, ad AL : ergo (*per* 17. 6.) rectangulum ſub AB, AM , æquatur quadrato ex B H. Ergo quadrata ex B F & B H, æquantur rectangulis ſub AB,BM,& ſub AB,AM: ſed hæc rectangula (*per* 2. 2.) æquantur quadrato ex AB:ergo quadratum ex AB,æquale eſt,quadratis ex BF, BH ; quod erat demonſtraudum.

Corollarium. Invenire in circulo latus decagoni, & pentagoni.



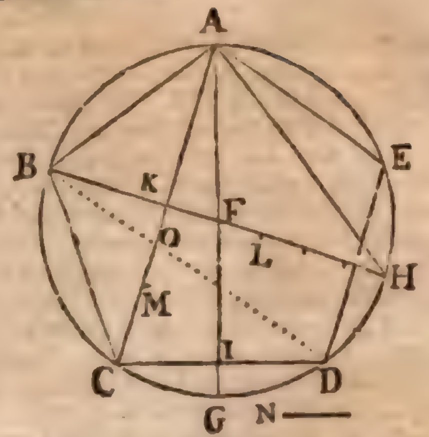
In circulo A B C ſit inveniendum latus decagoni & exagoni. Ducatur diameter ADC & perpendicularis DB, dividatur DC biſariam in E , ducatur E B cui fiat æqualis E F ; dico FB eſſe latus pentagoni, & FD decagoni.

Demonſtr. Cum linea D C ſit diviſa biſariam in E, & ei addita FD, erit (*per* 6. 2.) rectangulum CFD, unà cum quadrato ex ED, æquale quadrato EF,ſeu EB,ſed quadrato EB æqualia ſunt quadrata ED, DB (*per* 47. 1.) ergo rectang. C F D cum quadrato E D æquatur quadratis E D, D B. Et abjecto quadrato ED , erit rectangulum CFD æquale quadrato DB ; ergo ita eſt CF ad DB , ſeu DC , ut DC ad FD. Ergo linea CF diviſa eſt extremâ ac mediâ ratione , & cum majus ſegmentum DC ſit latus exagoni, erit (*per* 9.) FD latus decagoni : ſed quadratum lineæ F B æquale eſt quadratis ex FD & D B , nempe quadratis lateris decagoni & exagoni ; ergo F B (*per præcedentem*) eſt latus pentagoni.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Si diameter circuli fuerit linea rationalis pentagoni, latus eſt linea irrationalis dicta minor.



Sit diameter AG rationalis dico latus pentagoni eidem circulo inſcripti eſſe lineam rationalem quæ dicitur minor. Ducantur diametri AG, BH, quæ latera oppoſita divident biſariam , ducantur item AC , AH, abſcindanturque ex ſemidiametro FH quarta eius pars : ſicut & C M quarta pars lineæ AC ; cum BH ſit rationalis,erit BF, ſicut & FL, rationalis, & tota BL erit rationalis.

Demonſtr. Triangula AKF, ACI habentia angulum CAI communem, & præterea angulos rectos in K & I, ſunt æquiangula ; ergo (*per* 3.6.) ita eſt CI ad F K ut CA ad F A , aut F H. Pro CA & FH ſumantur quadrantes CM, FL ; ita erit C I ad FK ut CM ad FL ; & permutando ut C I ad CM , aut ut dupla nempe CD ad CK , ita FK ad FL ; & componendo ut CD,CK ſimul ad CK, ita KL ad FL , & earum quadrata in eadem ratione erunt. Supponamus duci lineam BD ; AC , & BD ſe ſecabunt in O extremâ , ac mediâ ratione (*per* 8.) eritque AO æqualis CD,& *per* 1.) quadratum compoſitæ ex A O ſeu C D, & ex CK, quintuplum eſt quadrati CK,ergo quadratum KL quintuplum eſt quadrati FL, illique commenſurabile , ergo cum F L ſit rationalis , & KL ſaltem illi potentia commenſurabilis,rationalis erit.

Deinde ſi B F ſit diviſa in quatuor partes, erit FL una, & BL 5. Igitur quadratum FL erit 1, & quadratum BL 25. Quadratum autem KL erit 5. ut vidimus. Sunt igitur lineæ BL, KL longitudine incommenſurabiles cum earum quadrata non ſe habeant ut numerus quadratus ad quadratum ; ſunt autem rationales. Quare ſi ex rationali BL, auferatur K L rationalis potentiâ tantum commenſurabilis, reſtabit BK irrationalis dicta apotome , & ei congruens erit KL.

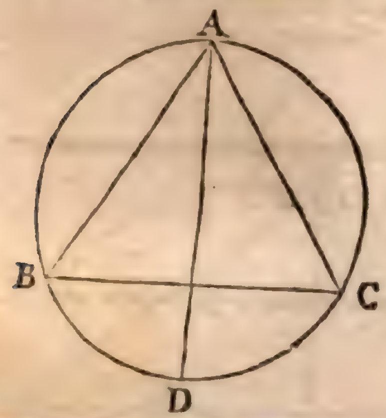
Jam verò linea BL plus poſſit quàm K L quadrato rectæ N, ſe habet autem quadratum B L ad quadratum KL,ut 25 ad 5 ; ſeu ut 5 ad 1, & in illa hypotheſi erit quadratum lineæ N , 4. Sunt ergo commenſurabilia quadrata BL & N , cum ſe habeant ut 5 ad 4 , lineæ tamen potentia tantum ſunt incommenſurabiles ; quare cum tota BL rationalis longitudine commenſurabilis primæ rationali BH , poſſitque plus quàm congruens KL, quadrato lineæ N , ſibi longitudine incommenſurabilis ; erit BK apotome quarta ; ex definitione.

Denique cum AB ſit media proportionalis inter BH,& BK: eſt enim angulus BAH in ſemicirculo rectus , & triangulum ABK diviſum eſt perpendiculari A K in triangula ſimilia. Erit ergo ABH ad AB ut AB ad BK ; quare quadratum AB æquale eſt rectangulo ſub BH, BK. Quare cum linea AB poſſit rectangulum contentum ſub rationali B H , & Apotoma quarta erit (*per* 95.10.) AB linea minor ; quod erat demonſtrandum.

PROPO

PROPOSITIO XII.

Quadratum lateris Trianguli æquilateri triplum eſt, quadrati ſemidiametri.



Sit triangulum æquilaterum ABC circulo inſcriptum; dico quadratum eius eſſe triplum quadrati radii ſeu ſemidiametri, aut lateris exagoni. Ducatur diameter AD, & jungatur BD.

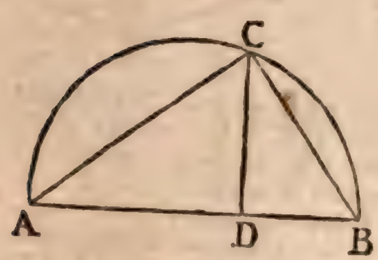
Demonſtr. Cùm arcus AB ſit tertia pars circuli ſeu duæ ſextæ, & ABD contineat tres ſextas, erit BD ſexta pars:erit igitur latus exagoni, ſed cum angulus ABD in ſemicirculo ſit rectus,quadratum ex AD æquale erit quadratis ex AB, & BD (*per* 47.1.) Ponatur quadratum ex A D, eſſe quatuor, eritque quadratum ex BD unum,cum BD æqualis ſit ſemidiametro:ergo quadratum ex AB erit tria: eſt ergo triplum quadrati lateris exagoni, ſeu ſemidiametri.

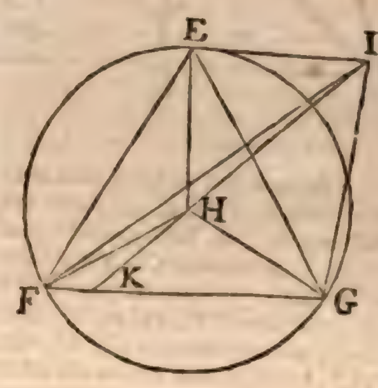
Coroll. Quadratum diametri ſe habet ad quadratum trigoni æquilateri, ut 4 ad 3.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Tetraedrum ſphæræ inſcribere, & oſtendere diametrum ſphæræ potentia ſeſquialterum eſſe lateris Tetraedri.





Sit datæ ſphæræ diameter A B, cujus BD ſit tertia pars: ducatur perpendicularis DC,junganturque CA, CB ex centro quocumque H, intervallo DC. Fiat circulus, cui inſcribatur (*per* 2.4.) triangulum æquilaterum EFG, eruntque HE, HF, HG æquales ipſi DC, ad planum G E F, in puncto H excitetur perpendicularis H I æqualis AD, junganturque I E, I G, I H; dico I E F G eſſe tetraedrum, ſeu pyramidem conſtantem quatuor triangulis æquilateris:item ſi ponatur H K æqualis DB, quod ſphæra ad cujus diameter I K, attinget pyramidem in punctis E F G & quod diameter ſphæræ KI, ſeu AB, ſit ſeſquialterum potentia lateris illius pyramidis.

Demonſtr. Primò cum triangula EHI, A D C; habeant angulos in H & D rectos,& latera DC, H E; A D, H I ſint æqualia: erunt (*per* 4.1.) A C, E I æquales, eodem modo oſtendo A D, F I, aut G I eſſe æquales.

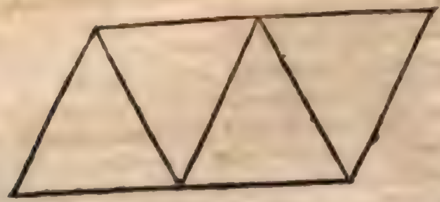
Secundò cum tres lineæ AD, DC, DB ſint proportionales, erit ut AD ad D B, ita quadratum AD ad quadratum DC: (*per* 8. 6.) ſed AD eſt dupla ipſius DB, cum D B ſit tertia pars totius AB: ergo quadratum AD, duplum eſt quadrati DC; ſed (*per* 47.1.) quadratum AC æquale eſt quadratis AD, DC: ergo AC eſt triplum quadrati DC, ſeu HE; ſed etiam quadratum F E triplum eſt quadrati HE: (*per* 12.) ergo lineæ A C, F E, ſunt æquales; ſunt igitur triangula I F E, I F G, I E G, E F G æquilatera.

Tertiò, cùm ita ſit AD ad DC, ut DC ad DB, erit etiam I K ad H E, ita H E ad H K, circulus deſcriptus ſupra diametrum K I tranſit per E, ita oſtendam tranſire per F & G: ergo tetraedrum eſt ſphæræ inſcriptum.

Quartò, cum quadratum AD ſit duplum quadrati DC, & illis ſit æquale quadratum AC, erit 3 & quadratum AD 2, ſeu ſi quadr. AD ponatur 4, quadratum AC erit 6: ſed cum AD ad AB ſit ut 2 ad 3, quadratum A D ad quadratum AB, erit ut 4 ad 9: ergo quadratum A B ad quadratum AC, ſeu ad quadratum I E, aut I F, erit ut 9 ad 6, ſeu ſeſquialterum.

Coroll. Facile ex his colligimus quadratum diametri ſe habere ad quadratum ſemidiametri circuli baſium tetraedri, ut 9 ad 2.

Secundò, perpendicularis ex centro ſphæræ ad baſin tetraedri eſſe ſextam partem diametri, & altitudo tetraedri continet duas tertias diametri.

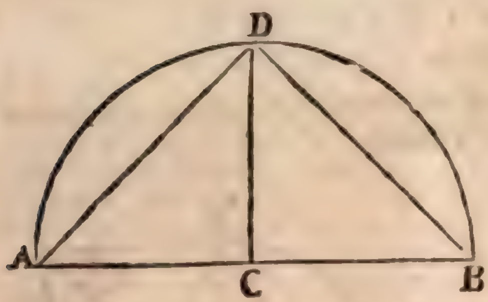


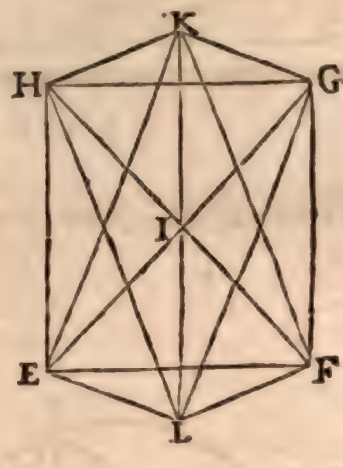
Coroll. 1. Si ex materia ſolida fiant triangula æquilatera quatuor, ut figura indicat, fiet tetraedrum regulare.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Octaedrum ſphæræ inſcribere; & oſtendere diametrum ſphæræ, eſſe duplum potentiâ, lateris octaedri.

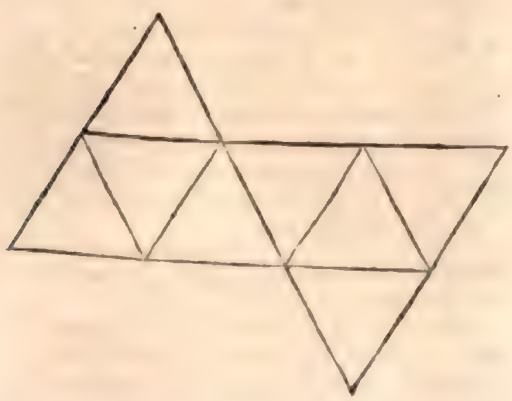




Sit ſphæræ diameter AB diviſa bifariam in C, ducatur perpendicularis C D, & jungantur AD, BD; ſit E F æqualis D B, ſupra quam fiat quadratum EFGH, cujus diametri GE, FH ſe interſecantes in puncto I, per quod ad planum E G erigatur perpendicularis I K, I L æquales ſemidiametro A C; tum connectantur KE, KF, KG, KH, LE, LF, LG, LH, dico factum eſſe octaedrum.

Demonſtr. In triangulo rectangulo EHG, cum angulus H, ſit rectus & latera HG, H E æqualia erunt anguli HGE, HEG æquales & ſemirecti. Similiter idem oſtendam in aliis triangulis H E F, EFG, quare oſtendam in triangulo v. g. H I G, angulos H G I, I H G eſſe ſemirectos & conſequenter latera H I, I G eſſe æqualia, & angulum G I H rectum eſſe, & cum (*per* 47. 1.) quadratum lateris I G æquale quadratis H I, I G, ſit etiam æquale quadrato BD, quod æquale eſt quadratis C B, C D; erit H I æqualis ſemidiametro C B, & cum I K, eidem ſemidiametro ſit æqualis, & anguli in I ſint recti, erit quadratum E K æquale quadratis I E, I K, id eſt C D, BC: ergo latus E K æquale eſt DB, ita oſtendam reliqua latera H K, F K, G K, L E, L F &c. eſſe æqualia lateri D B; eſt ergo ſolidum comprehenſum octo triangulis æquilateris, quod ſphæræ inſcriptum eſt cum lineæ I H, I G, I K, I L &c. ſint æquales ſemidiametro C B, manifeſtum autem eſt quadratum diametri A B duplum eſſe quadrati ex D B.

Coroll. In octaedro tres diametri ſe invicem ſecant ad angulos rectos in centro ſphæræ, item tria plana HEFG, EKGL, FKHL eſſe quadrata, 6 plana oppoſita eſſe parallela, & dividi octaedrum in duas pyramides ſimiles.



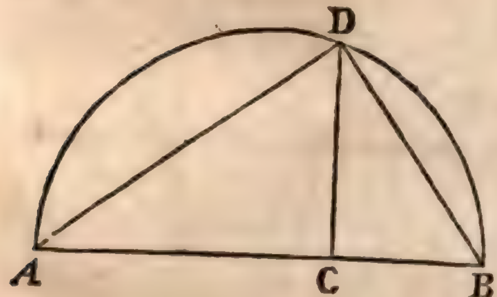
Coroll. 2. Si in materia ſolida fiant octo triangula qualia figura indicat ea coaleſcent in octaedrum.

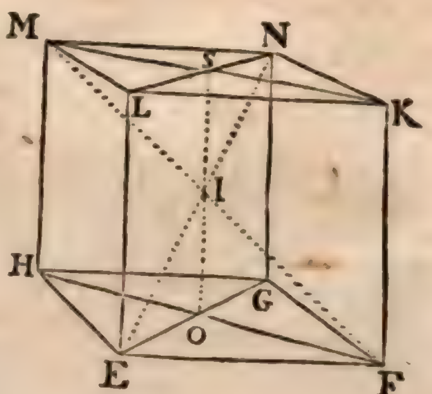
PROPO

PROPOSITIO XV.

Problema.

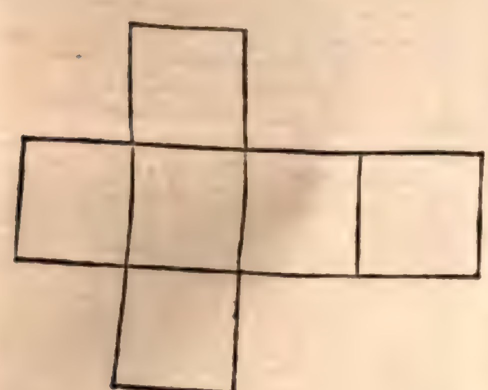
Cubum ſphæra inſcribere, & oſtendere diametrum ſphæræ, eſſe potentiâ triplam lateris cubi ipſi inſcripti.





Sit ſphæra cujus diameter AB, & illius tertia pars ſit BC, excitetur perpendicularis C D, junganturque A D, D B, aſſumatur E F æqualis ipſi D B; fiatque quadratum EFGH, & excitatis in punctis E, F, G, H, quatuor perpendicularibus ad planum EG perficiatur cubus; dico illum eſſe qui quæritur. Ducatur in planis oppoſitis LN, EG diametri LN, MK, HF, EG; item ducatur SO, ducantur item diametri cubi N E, M F, qui(*per 35. 11.*)ſe bifariam ſecabunt in puncto I; eruntque IM, IN, I E, I G æquales. Ergo I eſt centrum ſphæræ tranſeuntis per M F, N E: ſi ducerentur aliæ diametri, oſtenderem eandem ſphæram tranſire per H, G, L, K; oſtendo E N æqualem eſſe A B.

Demonſtr. Cùm AB ſit tripla C B, erit AC dupla, & cum A C, C D, C B; ſint proportionales, erit ut A C ad C B, ita quadratum A C, ad quadratum C D: eſt ergo illius duplum, & cum quadratum A D ſit illis æquale, erit quadratum AD triplum quadrati C D, & ſe habet ad quadratum AC ut 3 ad 2, & quadratum AC ad quadratum A B ſe habet ut 4 ad 9, cum ſe habeant lineæ ut 2 ad 3. Sunt ergo quadrata AC 4 AD, 6, AB 9, ſunt autem quadrata AD, DB æqualia quadrato AB, ergo quadratum DB erit 3, cum E F ſit æqualis D B, ejus quadratum erit 3, & quadratum E G illius duplum erit 6, & cum quadratum E N ſit æquale quadrato E G 6, & G N 3, ejus quadratum erit 9; ergo E G æqualis eſt diametro AB, ejuſque quadratum 9 triplum eſt quadrati E F 3; quod erit demonſtrandum.

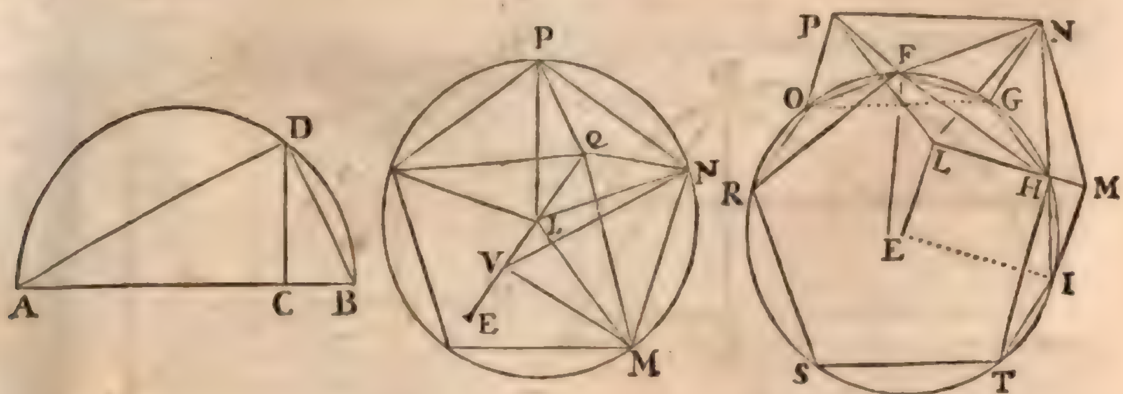


COROLL. Si ex materia ſolida fiant 6 quadrata æqualia ut figura indicat, ea coaleſcent in cubum.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Icoſaedrum ſphæræ inſcribere, & demonſtrare eius latus eſſe lineam irrationalem, quæ dicitur minor.



Sit AB diameter ſphæræ, & C B illius quinta pars, excitetur perpendicularis C D, ducantur item AD, DB; tum intervallo DB centro E fiat circulus in quo inſcribatur decagonum regulare, nempe inſcripto prius pentagono, & diviſis bifariam arcubus decagonum; tum in punctis E, & alternatim in angulis decagoni excitentur perpendiculares ad planum circuli F G I, quæ ſint æquales ipſi E F, nempe E L, I M, G N, O P, quæ conjungantur ductis lineis LP, LN, LM &c. & cum hæ perpendiculares ſint parallelæ & æquales, lineæ eas conjungentes erunt parallelæ & æquales, ut LM, EI; quare ductæ ex ML ad R, P, N, M omnes æquales erunt. Quare ſi ex centro L deſcriberetur circulus, ille tranſiret per puncta P, N, M,&c. Item PN eſſet æqualis OG, ſi ducta eſſet & NM lineæ GI, atque adeò ſi perficerentur omnia fierent RP, PN, NM latera pentagoni æqualis pentagono F H T, &c. quia autem GN eſt linea æqualis ſemidiametro EF, ſeu lateri exagoni & FG eſt latus decagoni,eſtque angulus FGN rectus, lineæ F N quadratum æquale erit quadrato lateris decagoni & exagoni : quare (*per* 10.) erit FN latus pentagoni : Idem dicendum de NH : eſt ergo FNH æquilaterum triangulum. Pariter æquilaterum erit FNP licet figura id non exhibeat : eſt enim angulus POF rectus, & PF poteſt latus exagoni OP, & decagoni O F ; fiunt ergo ſi perficeretur figura 10 triangula æquiangula. Producatur perpendicularis LE, utrinque in q ita ut L q ſit æqualis lateri decagoni circuli FGHI, & ut vitetur confuſio repetatur ſeparatim pentagonum P N M & linea E L dividatur bifariam in V. Cum E L ſit ſemidiameter circuli FGI, ſeu latus exagoni, & Lq latus decagoni ejuſdem, erit E q diviſa in L extrema ac media ratione, (*per* 9.) & E L majus ſegmentum, (*per* 3.) erit quadratum ex Vq quintuplum quadrati ex VL. Ducantur ex puncto q ad ſingula puncta pentagoni PNM &c. lineæ q P, q N, q M, quas oſtendo eſſe æquales lateri pentagoni : ducantur ex centro L lineæ LP, L N, L M, cùm anguli in L ſint recti; quadratum ex q P æquale erit quadratis ex LP, Lq, nempe quadratis laterum exagoni, & decagoni; ergo (*per* 10.) qP eſt latus pentagoni. Pariter oſtendam qN, qM, eſſe latera pentagoni, inſcripti circulo cujus L P aut EF eſt radius: fiunt ergo in puncto q quinque triangula æquilatera, totidem fierent ex parte adverſa : ergo habemus 20 triangula æquilatera.

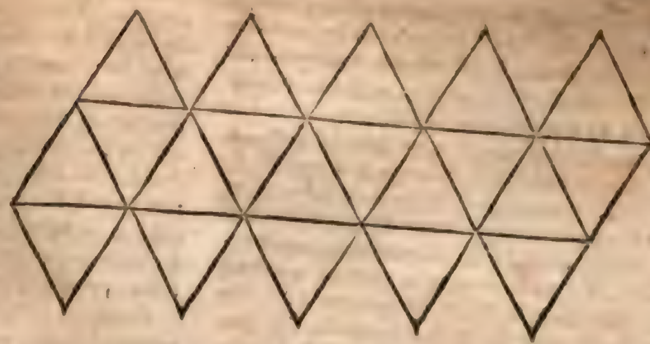
Rurſus cum omnes anguli in L recti ſint nempe quos linea Eq comprehendit, ſintque lineæ LP, LN, LM, aliæque æquales erunt VN, V M, V P æquales, earumque quadratum eſt quintuplum quadrati VL : nam EL ſuppoſita fuit æqualis radio E F, ſeu LN ; ergo quadratum V L eſt quarta pars quadrati LN ; ergo quadratum V N, utrique æquale (*per* 47. 1.) eſt quintuplum ergo linea VN, VP, & aliæ omnes ductæ ex centro V ad omnes angulos ſunt æquales lineæ Vq. Ergo ſphæra attingit hoc icoſaedrum in omnibus angulis quod erat demonſtrandum.

Deinde cum ita ſit AB ad BD, ut BD ad C B ita erit quadratum AB ad quadratum DB, ut A B ad BC (*per* 20. 6.) ſed A B eſt quintupla ipſius B C; ergo quadratum A B eſt quintuplum quadrati B D : ſed quadratum radij V N eſt quintuplum quadrati V L, & conſequenter quadratum diametri integræ illius ſphæræ quintuplum eſt quadrati totius EL, ſeu BD, ergo diameter ſphæræ æqualis eſt lineæ A B.

Denique cum quadratum AB ſit quintuplum quadrati BD, ſeu EF, & AB ſit rationalis, erit E F radius circuli F G I rationalis, & (*per* 11.) latus pentagoni ipſi inſcripti, ſeu latus icoſaedri erit irrationalis linea quæ dicitur minor.

Digitized by Google

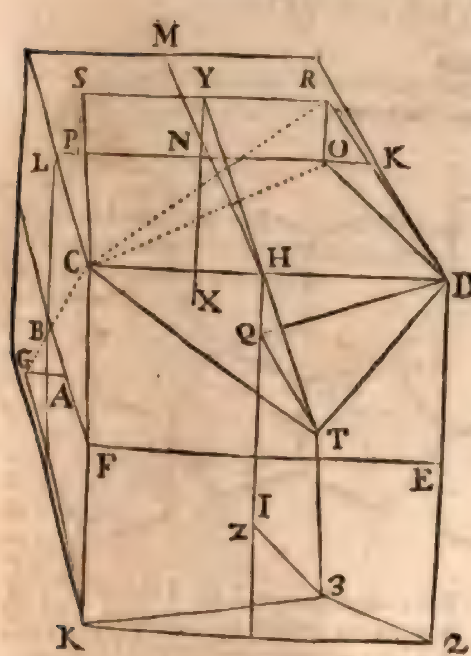
Si conjungantur viginti triangula æquilatera in materia ſolida, formabitur ex his icoſaedrum regulans.



PROPOSITIO XVII.

Problema.

Dodecaedrum ſphæra inſcribere, & demonſtrare ejus latus eſſe irrationalem lineam quæ dicitur apotome.



Sphæræ inſcribatur cubus A B, cujus latera omnia biſecentur, & per diviſiones ducantur HG, HM, KL, FE, &c. Lineæ LN, NK, I H ſecentur extrema ac media ratione in punctis Q, P, & O; in quibus excitentur lineæ perpendiculares ad plana quadratorum DB, AC, æquales majoribus ſegmentis QI, NO, NP; ducantur lineæ CT, DT, C S, D R, R S : dico factum eſſe pentagonum SCTDRS, quod totum ſit in eodem plano, ſitque æquilaterum, & æquiangulum cujus puncta S, R, T ſint in ſuperficie ſphæræ, fierique poſſe alia undecim ſimilia ſupra alia latera cubi. Item latus ejus eſſe lineam irrationalem apotomen, poſitâ nempe diametro ſphæræ rationali. Ducatur N V parallela; quæ producta attinget centrum cubi, & ſphæræ in puncto X, ducantur item lineæ CR, CO, DP, DS, DO, HV, HT, RX.

Oſtendo primò totum pentagonum in uno eſſe plano.

Demonſtr. Cum PS, O R ſint rectæ ad idem planum, parallelæ erunt; & cum ſint æquales; erunt SR, PO parallelæ & æquales (*per* 33.1.) & cum PO, CD ſint parallelæ, erunt SRCD parallelæ: quare totũ trapeſium SCDR in uno eſt plano. Dico triangulum CTD in eodem eſſe plano. Nam ita eſt NK ad NO, ſeu NH ad NY, ſicut I H ad QT, ſeu ut QT ad QH. Sunt item anguli in N, & Q recti, cum utraque linea NYQ ſit ad ſuum planum recta. Sunt igitur triangula ſimilia, & ſunt ita collocata ut latera homologa NY, QH ſint parallela, utpote ad idem planum CM recta, quare (*per* 32.6.) lineæ TH, HY in directum jacent, & in uno ſunt plano trianguli CTD, quod ducitur per rectas CD, TY, in quo etiam eſt trapeſium CSRD.

Oſtendo ſecundò illud eſſe æquilaterum.

Si ducerentur lineæ CP, DO, CQ, DQ, cum lineæ LP, OK, QH ſint æquales & anguli recti; item CH, HD, LC, DK, illæ (*per* 4.1.) eſſent æquales. Sunt autem (*per* 47.1.) quadrata DR, DT æqualia quadratis DQ QT; DO, OR; ergo lineæ RD, DT, CT, TS ſimili modo ſunt æquales.

Reſtat probandum rectas SR, RD eſſe æquales. Cum NK ſit ſecta in K extremâ ac mediâ ratione, erunt (*per* 3.) quadrata NK, OK, ſeu DK, OK, tripla quadrati ON, ſed quadratis OK, KD (*per* 47.1.) æquale eſt quadratum OD; ergo quadratum OD eſt triplum quadrati ON, ſeu O R. Sed quadratum R D æquale eſt quadratis OR, OD; ergo quadratum R D quadruplum eſt quadrati ON. Sed pariter quadratum PO, ſeu SR, eſt quadruplum quadrati O N, ergo quadrata R D, S R æqualia ſunt: ergo æquilaterum eſt pentagonum.

Oſtendo tertiò eſſe æquiangulum nempe ſi ducatur C R, fieri triangulum C S R æquale triangulo CTD, & angulum CSR æquale eſſe angulo CTD; ad quod probandum ſufficit oſtendere lineam CR æqualem eſſe lineæ CD, ſeu LK. Cum linea LN ſit ſecta in P, extremâ ac mediâ ratione, eique addatur majus ſegmentum N O, linea L O ſecabitur extremâ ac mediâ ratione in N (*per* 5.) eruntque (*per* 4) quadrata LO, O N ſeu OR tripla quadrati LN, ſeu LC; quod ultimum ſi addatur erunt quadrata LO, LC, OR quadrupla quadrati L C. Pro duobus primis ſubſtitue quadratum C O illis æquale (*per* 47.1.) erunt ergo quadrata CO, OR, ſeu quadratum CR, quadruplum quadrati LC, ſeu C H. Sed quadratum C D eſt quadruplum quadrati C H; ergo lineæ C R, C D ſunt æquales & in triangulis C R S, CTD. Cum omnia latera ſint æqualia erunt (*per* 8.1.) anguli CTD, CSR æquales; ita oſtendam reliquos angulos eſſe æquales.

Pariter ſi alia cubi plana ſimiliter ſecentur, oſtendam fieri ſimilia & æqualia pentagona quale eſt CT 3, K G C, D T 3 2, & ſic de cæteris quæ

Digitized by

quæ ſimili progreſſu oſtendentur eſſe æquilatera, & æquiangula. Reſtat probandum lineas ductas ex centro ſphæræ X ad angulos pentagoni eſſe æquales ſemidiametro ſphæræ, ut ſi duceretur linea XR ad angulum pentagoni.

Linea XN æqualis eſt lineæ BL, ſeu LN, & NY æqualis lineæ NO. Eſt ergo XY æqualis lineæ LO. Cum autem LN diviſa ſit extremâ ac mediâ ratione, eique additum ſit majus ſegmentum ON, erit LO diviſa extremâ ac mediâ ratione in N (*per 5.*) eruntque (*per 4.*) quadrata LO, ON, ſeu XY, YR tripla quadrati LN, ſeu XN. Sed ſi duceretur XR, ejus quadratum (*per 47. 1.*) æquale eſſet quadratis XY, YR; ergo quadratum XR triplum eſt quadrati LN. Sed vidimus (*in 15.*) quadratum diametri ſphæræ triplum eſſe quadrati lateris cubi; & conſequenter quadratum ſemidiametri ſphæræ triplum erit quadrati Semilateris cubi: ergo diameter ſphæræ eſt æqualis lineæ XR: ergo ſphæra attingit omnes angulos illius polygoni.

Denique dico latus dodecaedri eſſe lineam irrationalem dictam apotomen. Ponitur enim diameter ſphæræ eſſe linea rationalis, quæ eſt potentiâ tripla lateris cubi; ergo latus cubi eſt linea rationalis potentiâ tantum commenſurabilis. Idem dicendum de ſemilatere NK, & cum diviſum ſit extremâ ac mediâ ratione in O, erit (*per 6.*) NO irrationalis dicta apotome. Quod ſi ſumeretur totum latus LK, quod divideretur ſimiliter extremâ, ac mediâ ratione, eſſet PO, ſeu SR majus ſegmentum; ergo SR latus dodecaedri eſt apotome; quod erat demonſtrandum.

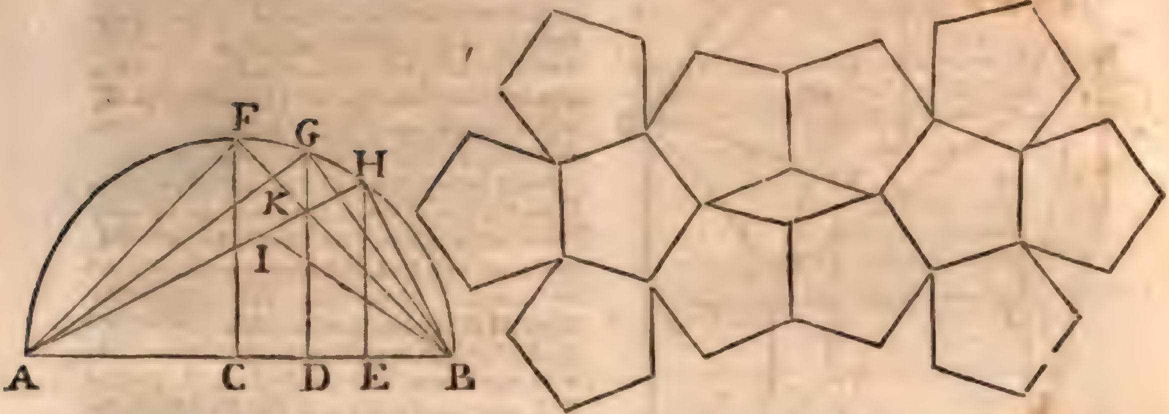
COROLL. 1. Si latus cubi extremâ ac mediâ ratione ſecetur, majus ſegmentum erit latus dodecaedri eidem ſphæræ inſcribendi; & ſi minus ſegmentum lineæ ita ſectæ fuerit latus dodecaedri, majus erit latus cubi.

COROLL. 2. Si ex materia ſolida fiant duodecim pentagona æquiangula, & æquilatera, quæ conjungantur, ut figura indicat; ea dodecaedrum component.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Latera 6 figurarum comparare.



Linea AB dividatur bifariam in C, tum ita dividatur ut DB ſit ejus tertia pars; & EB quinta, factóque circa AB ſemicirculo, excitentur perpendiculares CF, DG, EH; connectantur AF, FB; AG, GB, AH, HB, abſcindatur HI æqualis lateri decagoni in eo circulo deſcripti cujus ſemidiameter BH, ſecetur GB extremâ ac media ratione in K.

Dico primo AG eſſe latus tetraedri.

Demonſtr. Cum (*per 8. 6.*) ſit ut AB ad AG ita AG ad AD, erit (*per 20.*) ita quadratum AB ad quadratum AG ut AB ad AD; eſt autem AB ipſius AD ſeſquialtera: ergo quadratum AB eſt ſeſquialterum quadrati AG; ergo (*per 13.*) AG eſt latus tetraedri.

Secundò, dico AF eſſe latus octaedri, quia AB eſt dupla potentiâ, lateris AF: ergo (*per 14.*) AF eſt latus octaedri.

Tertiò, Cum BG ſit media proportionalis inter AB, BD, erit ut AB ad BD, ſeu ut 3 ad 1, ita quadratum AB ad quadratum BH, ergo per 15 BG eſt latus cubi.

Quartò, Pariter cum BH ſit media proportionalis inter AB & BE, & AB ſit quintupla ipſius BE; erit quadratum AB quintuplum quadrati BH: ergo (*per 16.*) erit BH diameter circuli ambientis quinque latera icoſaedri. Eſt autem HI latus decagoni ejuſdem circuli, & BH latus exagoni; ergo BI (*per 16.*) eſt latus icoſaedri.

Denique cum BG latus cubi ſit ſectum in K extremâ, ac mediâ ratione erit (*per 17.*) BK latus dodecaedri.

Communiter interpretes oſtendunt nullam poſſe dari figuram ſolidam regularem, (nempe quæ conſtet figuris planis regularibus) præter recenſitas. Nam ad angulum ſolidum ad minimum tres requiruntur anguli plani, qui quatuor rectis ſint minores, ſex anguli trianguli æquilateri, 4 anguli recti & tres exagoni quatuor rectos adæquant: ergo angulum ſolidum perficere non poſſunt, quatuor pentagonici, tres heptagonici, tres octogonici quatuor rectos ſuperant, ergo ſolum ex tribus, quatuor, & quinque angulis trianguli æquilateri, ex tribus angulis rectis, ex tribus angulis pentagoni effici poteſt angulus ſolidus; ergo præter recenſita corpora ſolida regularia, nulla alia eſſe poſſunt.

Comparatio

Comparatio horum corporum ex Herigonio.

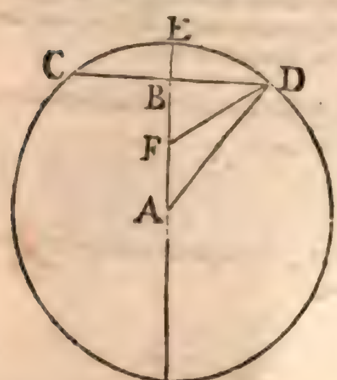
Diameter ſphæræ	2,		
Latus tetraedri	$162299^{|||||}$	Superficies octaedri	$69282^{|||||}$
Latus cubi	$11547^{|||||}$	Superficies dodecaedri	$1051462^{|||||}$
Latus octaedri	$141421^{|||||}$	Superficies icoſaedri	$957454^{|||||}$
Latus dodecäedri	$71364^{|||||}$	Soliditas ſpheræ	$41879^{|||||}$
Latus icoſaedri	$105146^{|||||}$	Soliditas tetraedi	$5132^{|||||}$
Superficies ſphæræ	$1256637^{|||||}$	Soliditas cubi	$15396^{|||||}$
Area circuli majoris	$314159^{|||||}$	Soliditas octaedri	$133333^{|||||}$
Superficies tetraedri	$46188^{|||||}$	Soliditas dodecaedri	$278516^{|||||}$
Superficies cubi	8,	Soliditas icoſaedri	$253615^{|||||}$

ELEMENTORUM EUCLIDIS aut potius Hypſiclis Alexandrini LIBER DECIMUSQUARTUS.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni ducta; eſt ſemiſſis compoſita ex lateribus exagoni, & decagoni.



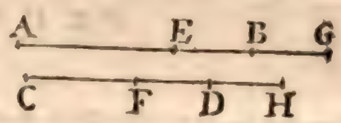
Linea A B ſit perpendicularis ad CD latus pentagoni; dico illam eſſe ſemiſſem compoſitæ ex lateribus exagoni, & decagoni. Abſcindatur BF æqualis B D, jungantur D F.

Demonſtr. Linea A B dividit bifariam lineam CD (*per* 3. 3.) & arcum C D, eritque linea E D latus decagoni, angulus E A D eſt quinta pars duorum rectorum, ergo in triangulo E A D reliqui AED, ADE æquales inter ſe quilibet continet duas quintas. Sed cum triangula EDB, EDF habeant latera B E, B F æqualia, B D commune, erunt (*per* 4. 1.) baſes ED, DF æquales & anguli D F E DEF; ergo angulus DFE continet duas quintas duorum rectorum. Sed (*per* 32. 1.) angulus externus EFD duobus internis F A D, F D A, æqualis eſt, & cum FAD ſit quinta pars duorum rectorum, erit FD A quinta pars duorum rectorum: ſunt ergo æquales, & (*per* 5. 1.) AF, ED, ſeu AF, ED ſunt æquales, ſed BF facta eſt æqualis lineæ BE, ergo AB æqualis eſt lineis DE, EB, ergo AB eſt ſemiſſis linearum A E, ED, ſeu lineæ compoſitæ ex A E latere exagoni, & E D latere decagoni; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si duæ lineæ extremâ ac mediâ ratione dividantur, proportionaliter ſecabuntur.



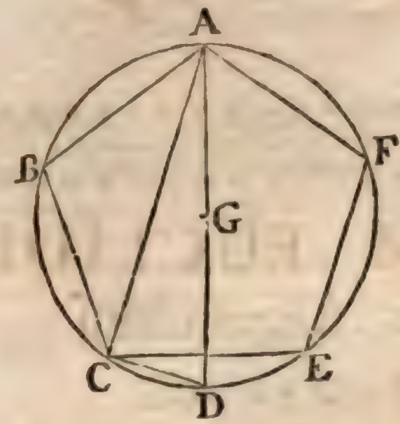
Linea AB, CD ſecentur extremâ, ac mediâ ratione in E & F; dico eas proportionaliter ſecari, ſeu ita eſſe AB ad CD, ſicut AE, CF, aut EB ad FD. Addatur BG æqualis EB, & DH æqualis FD.

Demonſtratio cum ſit ut AB ad AE ita AE ad EB, (*per* 17. 6.) erit rectangulum ſub A B, E B, æquale quadrato AE, ſicut rectangulum ſub CD, F D, æquale erit quadrato C F; ergo ita eſt rectangulum ſub A B, E B ad quadratum AE, ſicut rectangulum ſub AB, EB ad quadratum CF, ergo ita erit quadruplum rectanguli ABE ad quadratum A E ſicut quadruplum rectanguli C D F ad quadratum C F, & componendo ut quadruplum rectanguli ABE cum quadrato AE, hoc eſt (*per* 8. 2.) quadratum A G ad quadratum A E, ut quadruplum rectang. C D F cum quadrato C F ſeu quadratum C H ad quadratum C F; ergo ita eſt AG ad AE, ut CH ad CF, & permutando ita erit A G ad C H ut A E ad C F; & ita erit reliqua EG ad reliquam FH, & dimidia EB ad dimidiam FD. Cum ergo ita ſit AE ad CF, ut EB ad FD, ita erit tota AB ad totam CD ut AE ad CF; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si Pentagonum regulare circulo inſcribatur, quadrata lateris ejus, & lineæ ſubtendentis duo ejus latera, quintupla ſunt quadrati radij, ſeu lateris exagoni.



Pentagonum regulare ABCEF inſcriptum ſit circulo, ſitque ejus latus C E, & linea A C ſubtendat duo ejus latera, dico quadrata linearum AC, C E eſſe quintupla quadrati E F. Ducatur diameter AGD, quæ dividet bifariam latus C E. Ducatur CD quæ erit latus decagoni.

Demonſtr. Quadratum A D quadruplum eſt quadrati GD, ergo quadrata AC,CD illi æqualia (*per* 47. 1.) quadrupla ſunt quadrati G D. Addatur quadratum GD, eruntque quadrata A C, CD, GD quintupla quadrati C D, pro quadratis CD, GD ſubſtituatur quadratum C E illis æquale (*per* 10. 13.) ergo quadrata A C, C D quintupla ſunt quadrati GD, ſeu lateris exagoni; quod erat demonſtrandum.

Coroll. Quadratum lateris cubi, & lateris dodecadri, eidem ſphæræ inſcriptorum quintupla ſunt quadrati radij circuli pentagonum dodecaedri circumſcribentis. Si enim in aliqua ſphæra circulus A B C ambiat pentagonum dodecaedri, erit (*per* 17. 13.) linea AC latus cubi eidem ſphæræ inſcripti. Oſtendimus autem quadrata AC, & CE ſeu lateris dodecaedri quintupla eſſe quadrati G D.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si latus exagoni, extremâ ac mediâ ratione ſecetur; majus ejus latus erit decagoni latus.



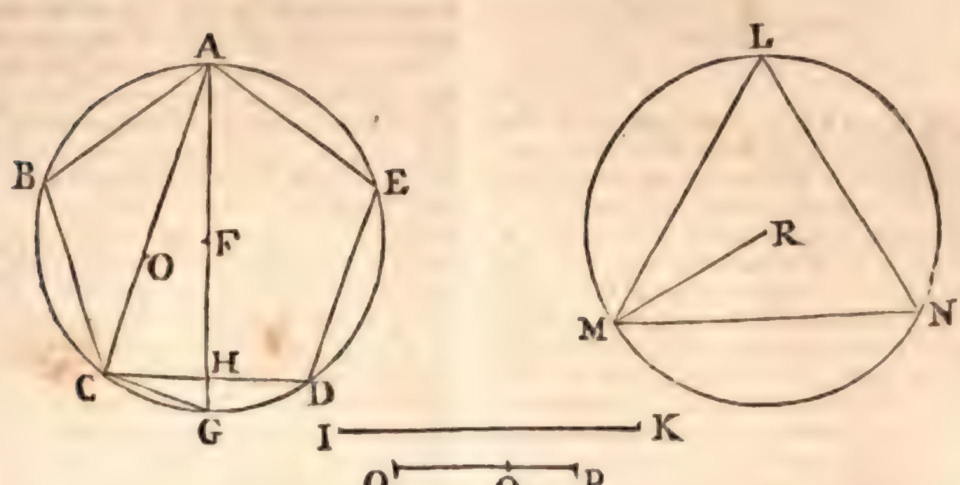
Sit AB latus exagoni, mediâ & extremâ ratione ſectum in C; dico majus extremum A C eſſe latus decagoni. Adjungatur AD æqualis A C.

Demonſtr. Cum lineæ A B ſectæ extrema ratione in C additum ſit AD, majus ſegmentum erit DB ſecta ſimiliter in A, & erit AB majus ſegmentum (*per* 5. 13.) & cum lineæ B D majus ſegmentum AB ponatur latus exagoni; erit (*per* 9. 13.) minus ſegmentum A D, ſeu A C latus decagoni; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Idem circulus comprehendit & dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum, eidem ſphera inſcriptorum.



Sit ABCDE pentagonum dodecaedri, & LMN unum ex triangulis icoſaedri inſcriptorum in eadem ſphera, cujus diameter I K; dico circulos ABCDE, LMN eſſe æquales.

Sit

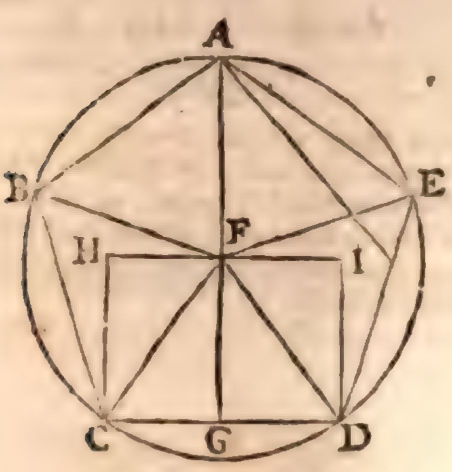
Sit quadratum I K quintuplum quadrati O P, tum OP extremâ ac mediâ ratione ſecetur in Q; eritque (*per corol. 16. 13.*) OP radius circuli quinque latera icoſaedri ambientis.

Demonſtr. Quadrata AB, AC (*per 3.*) quintupla ſunt quadrati FG; ſed (*per 8. 13.*) ſi AC extremâ ac mediâ ratione ſecetur; erit AO æqualis AB, ergo ita eſt AC ad A B ſicut AB ad OC; ſed ita eſt OP ad OQ ſicut OQ ad QP, ergo (*per 2.*) ita eſt AC ad OP ſicut AB ad OQ. Eſt autem A C latus cubi (*per 17. 13.*) cujus diameter ſphæræ tripla eſt potentia. Ergo tria quadrata AC æquantur quadrato I K, ſeu quinque quadratis O P ergo tria quadrata A B æquantur quinque quadratis OQ. Sunt autem (*per 10. 13*). quinque quadrata M L, æqualia quindecim quadratis M R, & cum ML ſit latus icoſaedri, cujus quinque latera inſcribuntur circulo, cujus radius O P erunt quinque quadrata ML æqualia quinque quadratis exagoni, nempe radij O P, & quinque decagoni ſeu OQ, nempe tribus quadratis A C, & tribus A B ſeu quindecim FG; ergo quadrata RM, FG æqualia ſunt: ergo & radij R M, F G; ergo & circuli ABC; LMN, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Rectangulum comprehenſum ſub latere pentagoni, dodecaedri, & ſub perpendiculari ductâ ab ejus centro ad idem latus trigeſies ſumptum, æquale eſt ſuperficiei dodecaedri.



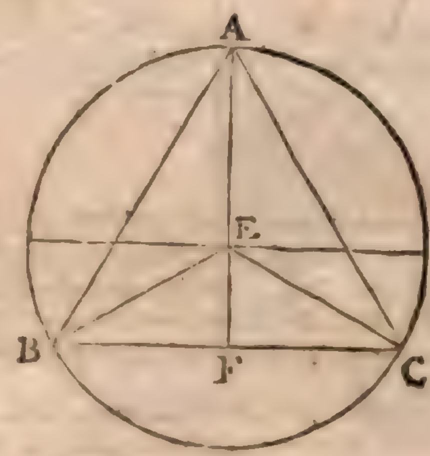
Sit dodecaedri pentagonum ABCDE circulo inſcriptum, ſitque ex centro F ducta perpendicularis FG ad latus CD, ſitque rectangulum CI comprehenſum ſub dicta perpendiculari & latere CD. dico rectangulum C I trigeſies ſumptum æquari ſuperficiei dodecaedri.

Demonſtr. Rectangulum C I (*per 41. primi*) duplum eſt trianguli CFD. Sunt autem in dodecaedro ſexaginta triangula æqualia triangulo CFD, nempe duodecies quinque: ergo triginta rectangula CI ſuperficiei dodecaedri æqualia ſunt, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Rectangulum comprehenſum, ſub latere trianguli icoſaedri, & ſub perpendiculari ducta ab ejus centro, trigeſies ſumptum, æquale eſt ſuperficiei icoſaedri.



Triangulum ABC ſit unum ex conſtituentibus icoſaedrum, ſit ejus centrum E, ducatur E F perpendicularis ad latus BC, ſitque rectangulum BC, comprehenſum ſub EF, & ſub latere BC: dico rectangulum BC trigeſies ſumptum, æquale eſſe ſuperficiei icoſaedri.

Demonſtr. In quolibet triangulo icoſaedri ſunt tria triangula æqualia triangulo B E C, ut patet (*per 8. 1.*) ergo ſunt 60 in icoſaedro, ſed rectangulum BC duplum eſt (*per 33. 1.*) trianguli BEC: ergo rectangulum BC trigeſies ſumptum æquatur ſuperficies icoſaedri.

Coroll. Si fieret rectangulum ſub AF & BC illud duplum eſſet trianguli ABC, atque adeò decies ſumptum eamdem ſuperficiem æquaret.

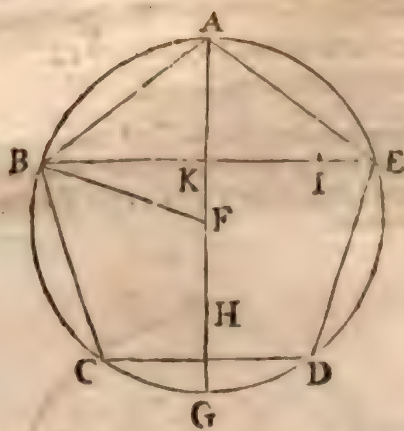
Coroll. Superficies dodecaedri ad ſuperficiem icoſaedri ſe habet ut rectangulum ſub perpendiculari & latere pentagoni ad rectangulum ſub perpendiculari, & latere trianguli, & hoc in quibuſcumque dodecaedris & icoſaedris, etiam non in eadem ſphæra deſcriptis.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Pentagonum æquilaterum inſcriptum circulo æquale eſt rectangulo contento, ſub tribus quadrantibus diametri, circuli, & ſub quinque ſextis lineæ ſubtendentis angulum pentagoni.

Digitized by Google



Proponatur pentagonum ABCDE circulo inſcriptum, & linea A H contineat tres quadrantes diametri AG, & B I contineat quinque ſextas lineæ BE, ſubtendentis angulum BAE; dico rectangulum comprehenſum ſub AH, BI æquale eſſe pentagono.

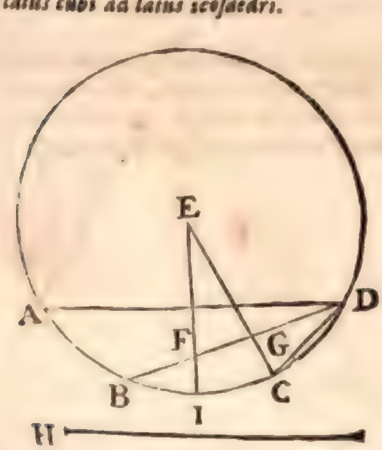
Demonſtr. A H eſt ſeſquialtera lineæ A F, & B K ſeſquialtera lineæ B I: ergo ita eſt AH ad AF ſicut B K ad K I; ergo rectangulum ſub extremis AH, KI æquatur rectangulo ſub mediis AF, BK, (*per 16. 6.*) ſed rectangulum ſub AF BK, duplum eſt trianguli A B F (*per* 33. 1.) cum habeant eandem baſin AF, &c. Ergo rectangulum AH, KI duplum eſt trianguli ABF; ſed rectangulum AH, KI duplum etiam eſt rectanguli ſub AH, IE, cum F I ſit dupla I E; ergo rectangulum ſub AH, I E æquatur triangulo A B F; ſed pentagonum ABCDE quintuplum eſt trianguli ABF, & rectangulum ſub AH, BI, quintuplum eſt rectanguli ſub AH, IE. Ergo rectangulum ſub A H, B I æquatur pentagono ABCDE, quod erat demonſtr.

Coroll. Rectangulum comprehenſum ſub perpendiculari ab angulo trianguli icoſaedri ad unum ejus latus, & ſub quinque ſextis lateris cubi, æquale eſt pentagono icoſaedri; nam illi perpendicularis æqualis eſt lineæ A H, ſeu continet tres quadrantes diametri, & latus cubi æquale eſt lineæ BE ut oſtendimus (*in* 17. 13.)

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Superficies dodecaedri ad ſuperficiem icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, eandem rationem habet, ac latus cubi ad latus icoſaedri.



Circulus A B C D circumſcribat pentagonum dodecaedri, & cujus latus B D, & trigonum icoſaedri cujus latus A D; & ad utrumque ex centro E ducantur perpendiculares E F, E G, ſitque H latus cubi, dico ita eſſe ſuperficiem dodecaedri ut H ad AD.

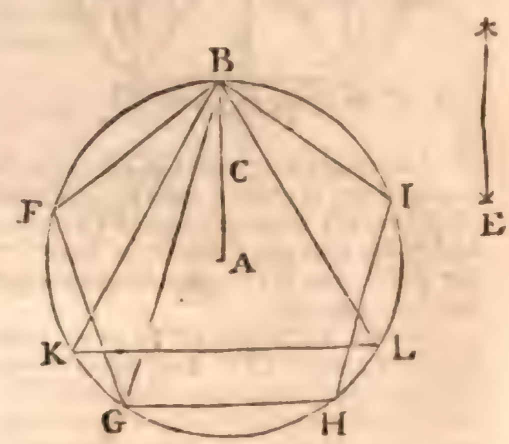
Demonſtr. Si linea H extremâ ac mediâ ratione ſecetur, majus latus erit B D latus dodecaedri (*per* 17. 13.) Pariter ſi E G ſecetur, erit E F majus ſegmentum (*per* 2. 14) ita erit H ad EG, ſicut BD ad EF, & (*per* 17. 6.) rectangulum ſub extremis H, E F æquatur rectangulo ſub mediis BD, EG. Eſt autem ut H ad AD ita rectangulum ſub H, E F ad rectangulum ſub AD, E F (*per* 1. 6.) Ergo ita erit H ad A B, ut rectangulum ſub B D, E G, ſed (*per* 7. *hujus*) ita eſt rectangulum ſub BD, EG ad rectangulum ſub AD, EF ut ſuperficies dodecaedri ad ſuperficiem icoſaedri: ergo ita erit H latus cubi ad A D latus icoſaedri ut ſuperficies dodecaedri ad ſuperficiem icoſaedri; quod erat demonſtrandum.

Videtur deeſſe ad perfectam demonſtrationem quod ſi E G dividatur extremâ ac mediâ ratione quod EF ſit majus ſegmentum. Suppono autem probatum eſſe (*in* 12. 13.) E F eſſe dimidiam E I, & (*in prima hujus*) lineam E G eſſe dimidiam compoſitæ ex E C latere exagoni, & latere decagoni, hæc enim compoſita ſecatur extrema ac media ratione, eſtque E C latus exagoni majus ſegmentum. Cum ergo ita ſe habeat compoſita ECD ad ejus dimidium EG ut EC ad ſuam ſemiſſem EF; ſi EG extrema ac media ratione ſecetur, erit EF, majus ſegmentum.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si linea ſecetur extremâ ac mediâ ratione; ita erit linea cujus quadratum æquabitur quadratis totius, & majoris ſegmenti, ad lineam cujus quadratum æquabitur quadratis totius, & minoris ſegmenti, ut latus cubi, ad latus icoſaedri ejuſdem ſphæræ.



AB ſecetur extrema ac media ratione in C, linea BF poteſt quadrata A B & A C, nempe quadratum exagoni & decagoni (*per* 10. 13.) Ponatur quadratum E æquale eſſe quadratis AB, CB; dico ita eſſe BF ad E ſicut BG latus cubi (*per* 17. 13.) ad BK latus icoſaedri.

Demonſtr. (*Per* 12. 13.) quadratum B K, triplum eſt quadrati AB, & (*per* 4. 13.) quadratum E triplum

E triplum eſt quadrati A C. Ergo ita eſt quadr. BK ad quadr. A B, ergo permutando ita eſt quadratum B K ad quadratum E ut quadratum A B ad quadratum AC. Sed ut quadratum AB ad quadratum AC ita quadratum BG ad quadratum BF, nam (*per* 8. 13.) ſi linea B G extremâ ac mediâ ratione ſecetur, erit majus ſegmentum latus pentagoni. Ergo permutando ita erit quadratum B K ad quadratum BG, ut quadratum E ad quadratum BF, & (*per* 22.6.) ita erit BK ad BG, ut E ad B F, ſeu ut BG ad BK ita BF ad E; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Soliditas dodecaedri ad ſoliditatem icoſaedri in eadem ſphæra, eſt ut cubi latus ad latus icoſaedri.

Sint dodecaedrum & icoſaedrum deſcripta in eadem ſphæra, dico ſoliditatem dodecaedri ad ſoliditatem icoſaedri eſſe ut latus cubi ad latus icoſaedri.

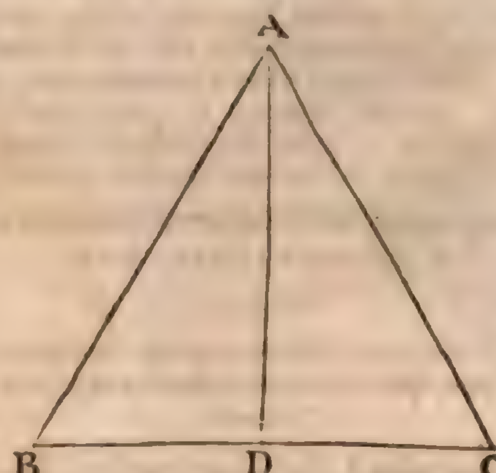
Demonſtr. Superficies dodecaedri ad ſuperficiem icoſaedri eſt ut latus cubi ad latus icoſaedri (*per* 9.); ſed ut ſuperficies ita ſoliditates, quod oſtendo: nam idem circulus comprehendit, & dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum. Sed (*per* 6. *Theod.*) circuli æquales in ſphæra æqualiter à centro diſtant, hoc eſt perpendiculares à centro ſphæræ ad plana circulorum ductæ ſunt æquales, illæ autem ſunt altitudines pyramidum, habentium centrum ſphæræ pro apice, & pro baſibus pentagonum, dodecaedri, & triangulum icoſaedri: pyramides æqualium altitudinum (*per* 6. 12.) ſe habent ut baſes. Ergo omnes pyramides dodecaedri ad omnes icoſaedri, ſe habent ut omnes baſes pyramidum dodecaedri, ſeu ut ſuperficies dodecaedri, ad ſuperficiem icoſaedri; quod erat demonſtrandum.

Coroll. Ita eſt ſoliditas dodecaedri ad ſoliditatem icoſaedri, ut ſuperficies ejus ad ſuperficiem alterius, ut latus cubi ad latus icoſaedri, ut linea potens quadratum totius lineæ diviſæ extremâ & mediâ ratione, & quadratum majoris ſegmenti ad lineam potentem quadratum lineæ totius, & quadratum minoris ſegmenti.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Latus pentagoni æquilateri, potentiâ ſeſquitertium, eſt perpendicularis ducta ab uno angulo ad latus oppoſitum.



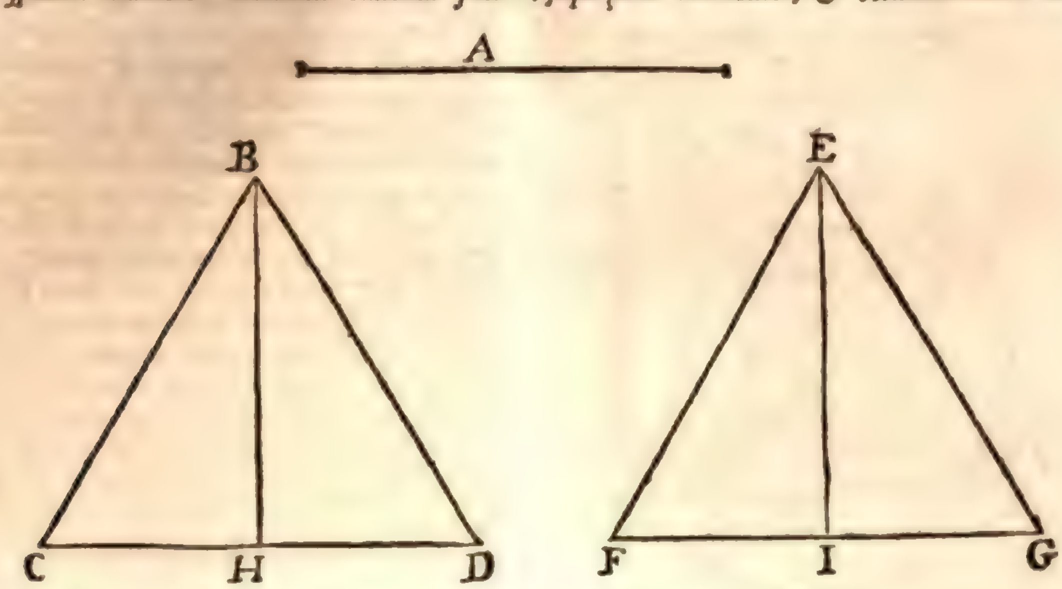
Sit triangulum A B C æquilaterum, ſitque à puncto A demiſſa perpendicularis ad latus oppoſitum BC, dico latus AC eſſe potentiâ ſeſquitertium perpendicularis A D.

Demonſtr. (*Per* 47. 1.) quadratum AC, aut AB æquale eſt quadratis AD, DC, aut AD, DB; & cum AB, AC ſint æqualia, BD, BC æquales erunt. Eſt ergo DC ſemiſſis lineæ BC aut AC. Ergo quadratum A C quadruplum eſt quadrati D C. Sed æquale eſt quadratis A D, D C: ergo quadratum AD eſt trium partium qualium A C eſt quatuor; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si ſphæræ diameter rationalis tantum fuerit; ſuperficies tetraedri, & octaëdri media erit.



Ponatur diameter ſphæræ A eſſe linea rationalis, ſitque B C D triangulum tetraedri, & E I G octaedri

octaedri

octaedri eidem ſpheræ inſcriptorum. Dico utriuſque ſuperficiem eſſe mediam, nempe comprehendentur hæ ſuperficies ſub lineis rationalibus potentia tantum commenſurabilibus. Demittantur perpendiculares BH, EI.

Demonſtr. (*Per* 13. 13.) linea A eſt potentiâ ſeſquialtera lineæ BC, & (*per* 14. 13.) & dupla lineæ E F; ergo earum quadrata ſe habent ut 6. 4. 3. quare cum ſint commenſurabilia, tam lineæ A, B C, E F quàm earum dimidiæ C H, F I erunt rationales, & item quadrata CH, HB; FI, IE habent rationem quam 1 ad 3. atque adeò commenſurabilia ſunt quadrata, & cum rationem non habeant quam numerus quadratus ad quadratum, illæ erunt longitudine incommenſurabiles, quare (*per* 22. 10.) rectangula CH, HB; FI, IE, ſeu illis æqualia triangula BCD EFG media erunt, & cum ſuperficies tetraedri ſit commenſurabilis triangulo BCD, & ſuperficies octaedri triangulo EFG, (*per* 24. 10.) utraque ſuperficies media erit.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Baſis tetraedri ſeſquitertia eſt baſis octaedri; & ſuperficies octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei tetraedri.

Supponitur A eſſe diameter ſphæræ, BCD baſis tetraedri, E F G baſis octaedri; dico primo B C D eſſe ſeſquitertiam trianguli EFG.

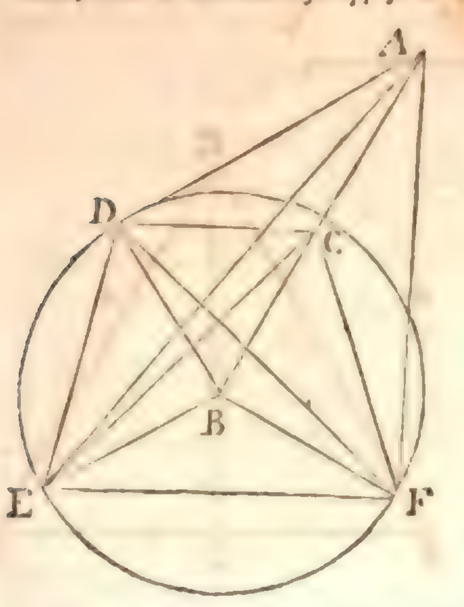
Demonſtr. Quadratum A eſt ſeſquialterum quadrati CD, & duplum quadrati FG, (*per* 13. & 14. *libri* 13.) ergo ſe habent ut 6. 4. 3. ergo quadratum C D ad quadratum F G, eſt ut 4 ad 3, ſed ut quadrata ita triangula (*per* 19. 6.) ſunt enim ſimiles figuræ: ergo triangulum BCD ad triangulum EFG ſe habet ut 4 ad 3.

Secundò ſuperficies octaedri erit 24, ſuperficies tetraedi erit 16; ſed 24 ad 16 eſt ut 3 ad 2. ſeu ſeſquialtera. Ergo ſuperficies octaedri eſt ſeſquialtera ſuperficiei tetraedri, quod erat demonſtr.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Linea recta ex angulo tetraedri per centrum ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſita.



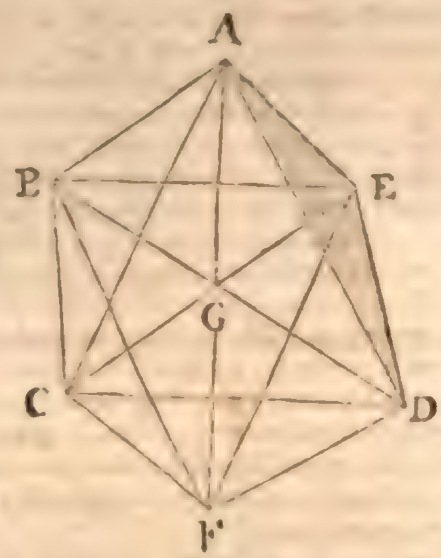
Sit punctum A angulus tetraedri, ducatur per centrum ſpheræ C linea ACB; dico illam cadere in centrum B baſis EFD. Ducantur BE, BF, BD, item CD, CE, CF.

Demonſtr. In triangulis ACF, ACE, ACD cum latera AF, AE, AD ſint æqualia, latus AC commune, & baſes CE, C D, C F (*per defin.*) ſphæræ æquales; erunt (*per* 8. 1.) anguli D A C, E A C FAC æquales. Rurſus in triangulis B A F, B A E BAD, cum latera AD, AE, AF ſint æqualia, latus AB commune, & anguli in A æquales, erunt baſes BD, BE, BF æquales (*per* 4. 1.) ergo (*per* 9. 3.) B eſt centrum; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Octaedrum dividitur in duas Pyramides æquales, & ſimiles; quarum æqualis altitudo; baſis verò eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ.



Sit octaedrum A B C D E, dico illud dividi in duas pyramides ABCDE, FBCDE, quæ ſint æquales & ſimiles, æqualis altitudinis, & quarum baſis communis ſit quadratum BCDE, ſubduplum quadrati diametri ſpheræ. Ducantur ex puncto G ad ſingulos angulos lineæ rectæ.

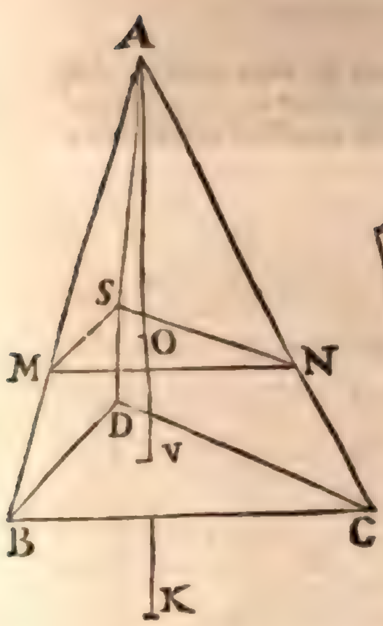
Demonſtr. Quadratum diametri ſphæræ, eſt quadruplum quadrati ſemidiametri BG aut GC, & eſt duplum quadrati lateris octaedri BC, (*per* 14. 13.) ergo quadratum B C duplum eſt quadrati B G, ergo æquale eſt quadratis BG, CG; ergo (*per* 48. 1.) angulus BGC rectus eſt, & GBC, BCG ſemirecti. Pariter oſtendam angulos BGE, DGE, DGC rectos eſſe; quare ex 4 angulis in G puncto non fiet angulus ſolidus (*per* 21 *undecimi*) ſed lineæ BG, CG, DG, EG in uno erunt plano: & cum anguli BGC, BGE ſint æquales, lineæ CG, GE in directum jacebunt. Item cum angulus CBE ex duobus ſemirectis conſtet, rectus erit, eſt ergo BCDE quadratum Pyramidis. Item A B C D E, F C D E habent omnia plana ſimilia & æqualia; baſin eandem, altitudines GA, GF æquales: ergo ſunt ſimiles & æquales: quadratum inſuper BCDE ſupra latus octaedri deſcriptum ſubduplum eſt quadrati diametri ſphæræ, ut oſtendimus.

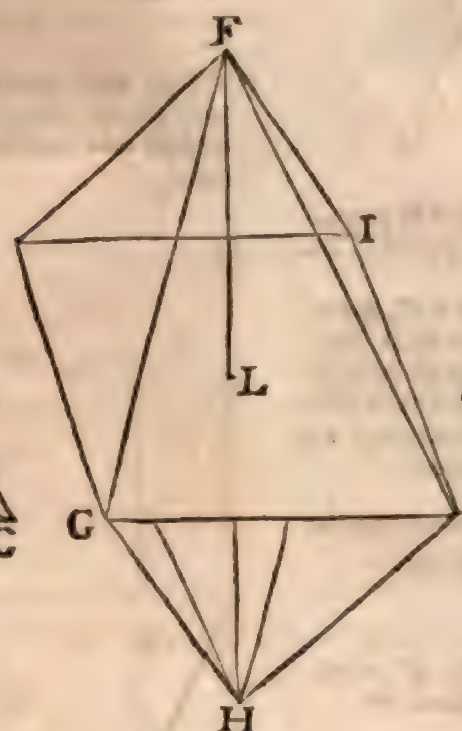
PROPO

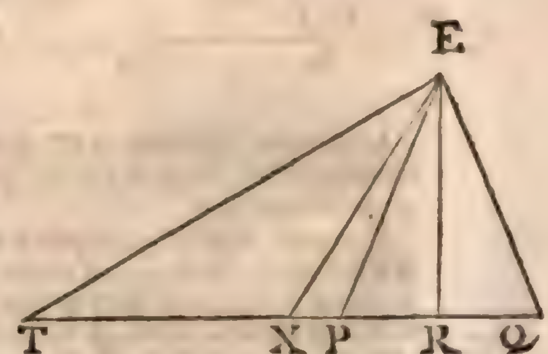
PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Tetraedrum ſe habet ad octaedrum ejuſdem ſphæræ, ut rectangulum ſub linea potente 27 ſexageſimas quartas partes quadrati lateris tetraedri, & ſub linea continente octo nonas partes ejuſdem lateris, ad quadratum diametri ſphæræ.







Sit tetraedrum ABCD, & octaedrum FGHI, ejuſdem ſphæræ, dico ita eſſe ſoliditatem tetraedri ABCD ad ſoliditatem octaedri F G H I ut rectangulum ſub linea cujus quadratum continet 27 ſexageſimas quartas partes quadrati lateris tetraedri, & ſub linea continente octo nonas partes lateris ejuſdem ad quadratum diametri ſphæræ: Sit AK diameter ſphæræ AO FL, ſemidiameter ducatur per O planum M N O baſi BCD parallelum.

Demonſtr. Cum AO, FL altitudines ſint æquales, erit (*per* 6. 12.) tetraedrum AMNS ad octoaedrum FGHI ut baſis M S N ad duplum baſis G I, nempe ad quadratum diametri (*per præcedentem*) Eſt autem pyramis ABCD ad pyramidem ſimilem A M N S in ratione triplicata AC ad AN, (*per* 8. 12.) ſeu in ratione triplicata A V ad A O, & cum diameter ſphæræ A K ſit ſeſquialtera lineæ A V (*per* 13. 13.) erit A K 6. AV 4. AO 3. ratio autem triplicata 4 ad 3 eſt 64 ad 27. Igitur ſe habet pyramis A B C D ad pyramidem A M N S ut 64 ad 27.

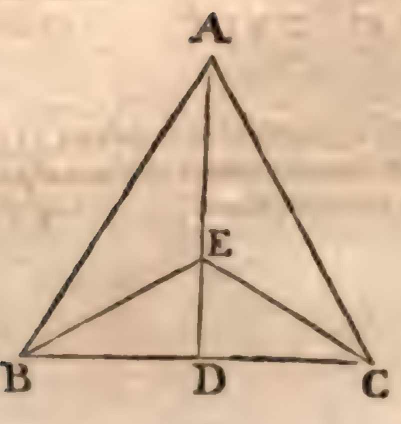
Sit triangulum EPQ, æquale triangulo MSN, ſitque perpendicularis E R, latus E Q, ſeu S N, aut A N, ſeſquitertium potentia perpendicularis ER (*per* 12. 14.) quare ſi quadratum E Q, ſeu AN, ponatur 36, erit quadratum E R 27, quadratum autem AC, erit 64. nam A N ad A C ſe habent ut 3 ad 4, nempe ut 6 ad 8. & quadrata in duplicata ſe habebunt ut 64 ad 36. quare linea E R poteſt 27 ſexageſimas quartas quadrati A C lateris tetraedri. Producatur latus Q P in T ſiatque ut 27 ad 64 ita QP ad QT dividaturque bifariam in X, & ducantur ET, EX; eritque Q P 27 QX 32, QT 64. eſt autem AC 36. poſito quod E Q aut QP ſit 27. eſt enim proportio ſeſquitertia 36 ad 27. nempe ut 4 ad 3. quare linea QX ad A C ſe habet ut 32 ad 36. ſeu reducendo ad minores numeros ut 8 ad 9. Continet ergo QX octo nonas lateris AC tetraedri. Iam vero rectangulum contentum ſub E R, & ſub Q X continetur ſub Q X continente octo nonas lateris AC tetraedri & ſub linea R E, cujus quadratum ſe habet ad quadratum lateris A C ut 27 ad 64; ſed hoc rectangulum æquale eſt triangulo ETQ (*per* 36. 1.) triangulum BTQ ad triangulum EPQ aut MSN ſe habet (*per* 1. 6.) ut QT ad PQ, nempe ut 64 ad 27. nempe ut pyramis A B C D ad pyramidem AMNS ut 64 ad 27. eſt autem pyramis A M N S ad tetraedrum ut baſis M N S ad quadratum diametri. Sunt ergo tres quantitates aliis tribus proportionales, nempe rectangulum de quo ſupra triangulum EPQ, ſeu MNS, quadratum diametri. Et ex alia parte pyramis ABCD, pyramis AMNS; tetraedum ergo ex quo ita erit rectangulum ſub RE potente 27 ſexageſimas quartas quadrati AC lateris tetraedri, & ſub linea X Q continente octo nonas ejuſdem lateris ad quadratrum diametri ſphæræ, ut tetraedrum ad octaedrum; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Perpendicularis ducta ab angulo trianguli æquilateri ad latus oppoſitum, tripla eſt perpendicularis ducta à centro ejus ad idem latus.

In



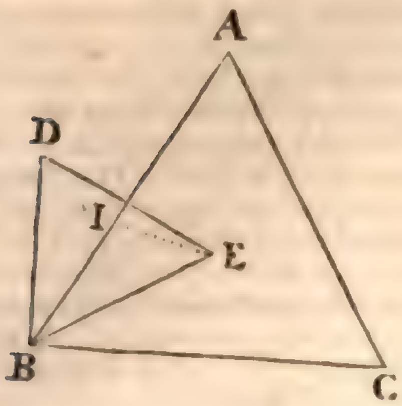
In triangulo æquilatero A B C ſit A D perpendicularis ad B C, ſitque E centrum dico AD, triplam eſſe lineæ E D.

Demonſtr. Sunt tria triangula A E C, B E C, A E B, æqualia *(per 8. 1.)* eſt autem BED ſemiſſis trianguli BEC, ergo BED eſt ſemiſſis trianguli AEB, ſed (*per 1. 6.*) ita eſt AE ad ED ut ABD ad BED : ergo DE eſt ſemiſſis lineæ AE, ergo AD eſt tripla ED quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Semidiameter ſphæræ potentiâ tripla eſt perpendicularis ducta ex centro ſphæræ ad baſin octaedri.



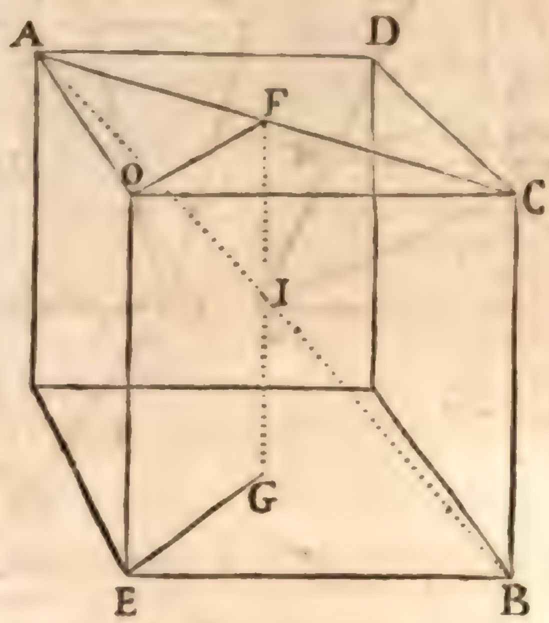
Sit baſis octaedri A B C, ad quam ex centro ſphæræ D cadat perpendicularis D E, quæ (*per coroll. 10.*) cadet in centrum trianguli A B C ; dico DB ſemidiametrum ſphæræ potentiâ triplam eſſe, perpendicularis D E.

Demonſtr. Quadratum diametri, quadruplum eſt quadrati ſemidiametri DB & duplum quadrati lateris AB ; ergo ſi quadratum diametri ponatur 12, erit quadratum AB 6, & DB 3 : eſt autem AB triplum quadrati E B ; nam cum EB ſit dupla I E (*per præcedentem*) erit quadratum BE 4, I E unum, I B 3, A B 12 : ergo AB eſt triplum BE ; quare ſi AB ponatur 6, BE erit 2 ; cum ergo quadratum DB ſit 3, BE 2, erit DB 1, (*per 47.1.*) ergo quadratum DB triplum eſt quadrati DE.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Superficies cubi æqualis eſt duplo quadrati diametri ſphæræ : Perpendicularis ex centro ſphæræ ad baſin cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateri cubi.



Sit cubus AB, dico duplum quadrati AB diametri ſphæræ, æquale eſſe ſuperficiei cubi.

Demonſtr. Quadratum A B (*per 47.1.*) æquale eſt quadrato ex BC, & quadrato AC, quadratum AC eſt duplum quadrati C D ; ergo AB eſt æquale tribus quadratis cubi, ſed ſunt 6 in ſuperficie cubi, ergo duplum quadrati AF æquatur ſuperficiei cubi.

2. Perpendicularis F G æquatur lateri O E, ergo ejus ſemiſſis I G æqualis eſt lateri OF, quod erat demonſtrandum.

Coroll. Si multiplices duas tertias partes quadrati diametri AB per altitudinem I G, habebis ſoliditatem cubi ; nam 6 tertiæ partes quadrati diametri faciunt totam ſuperficiem cubi ; clarum eſt autem fieri 6 pyramides, quarum apex in centro, harum autem habetur ſoliditas ſi baſes per tertiam partem altitudinis multiplicentur ; vel tertia pars baſium per totam altitudinem.

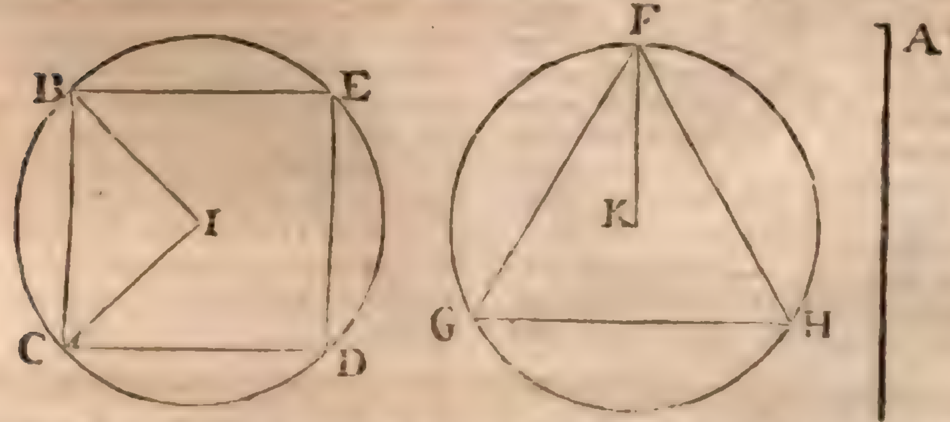
Item ſi multiplices latus cubi per tertiam partem quadrati lateris cubi, habebitur ſoliditas cubi.

PROPO

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Idem circulus circumſcribit & quadratum cubi, & triangulum octaedri.



Circulus BC DE circumſcribat quadratum circuli BCDE,& circulus FGH circumſcribat triangulum octaedri FGH, dico circulos eſſe æquales, ſeu radios IB,KF,eſſe æquales. Sit A diameter FK.

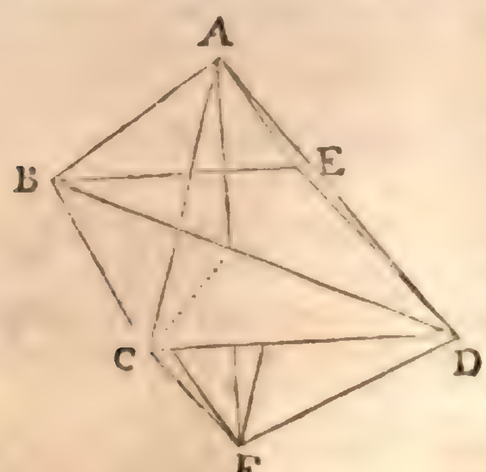
Demonſtr. Quadratum A triplum eſt quadrati BC (*per* 15. 13.) quadratum BC duplum eſt quadrati BI (*per* 47. 1.) ergo quadratum A ſextuplum eſt quadrati BI. Pariter quadratum A duplum eſt quadrati FG, (*per* 14.13.) & quadratum FG triplum eſt quadrati FK, ergo quadratum A ſextuplum eſt quadrati FK; ergo quadrata BI & FK ſunt æqualia quod erat demonſtrandum.

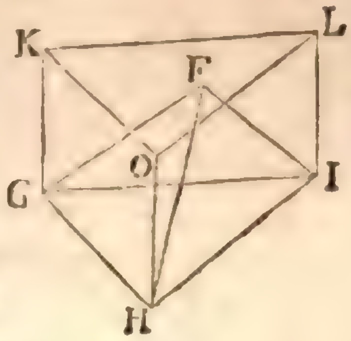
Coroll. III. Circuli æqualiter à centro diſtant; ergo altitudines pyramidum quæ fiunt in centro ſunt æquales.

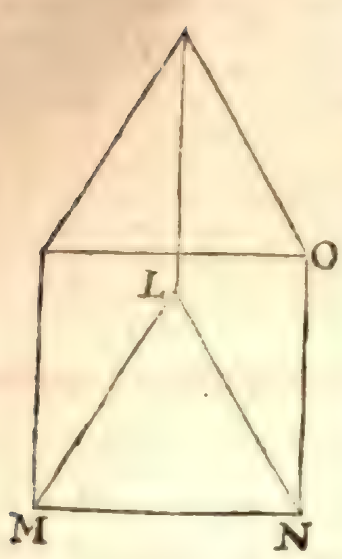
PROPOSITIO XXII.

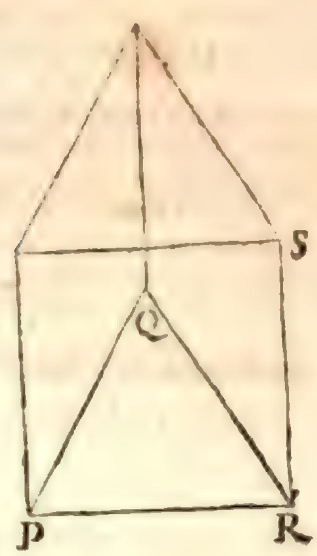
Theorema.

Octaedrum ſe habet ad triplum tetraedri ejuſdem ſphæræ; ut latus octaedri ad latus tetraedri.









Octaedrum ABCDEF & tetraedrum FGHI ſint ejuſdem ſphæræ, dico ita eſſe octaedrum ad tri-

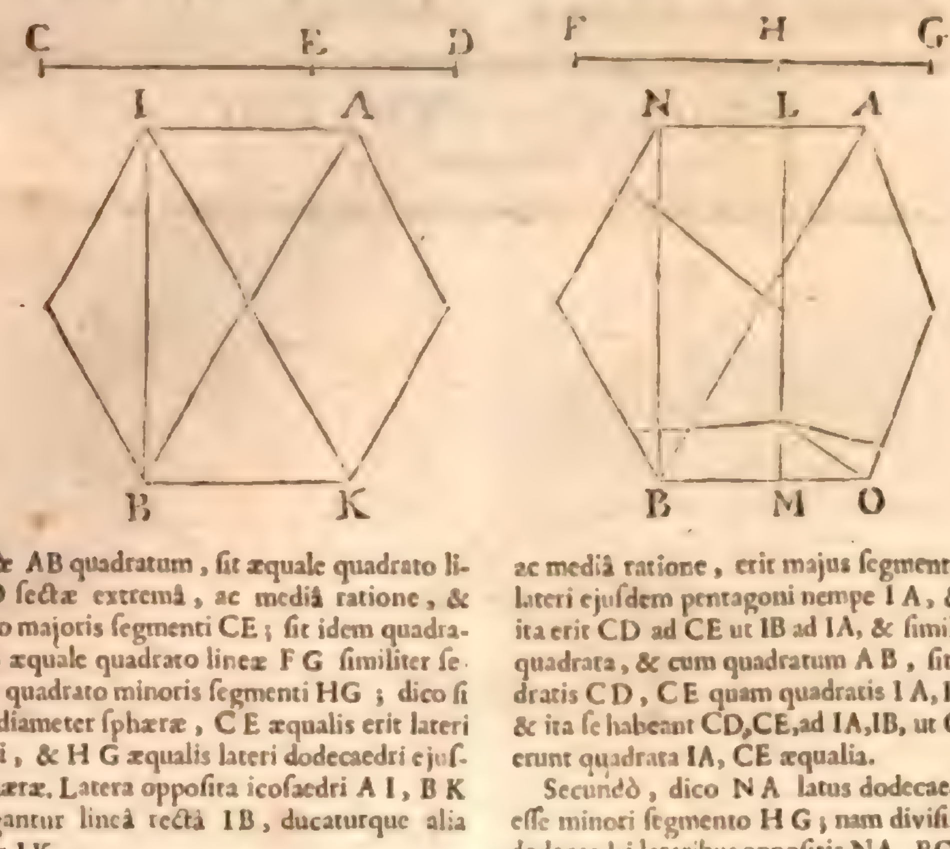
plum tetraedri nempe ad priſma KGHIL; ſicut B C latus octaedri ad GH latus tetraedri. Ducatur diameter AF in octaedro, dividaturque in quatuor pyramides æquales, comprehenſas duobus triangulis octaedri, & aliis duobus, nempe fiant pyramides ABCF, ACDF, ADEF, ABEF. Aſſumatur altitudo unius talis pyramidis, ſitque M L N baſis unius æqualis uni triangulo octaedri; fiatque ſupra MLN, & ſupra P q R æqualem baſi tetraedri, duo priſmata quorum altitudo ſit æqualis altitudini unius ex dictis pyramidibus; fiat item ſupra G H I baſin tetraedri priſma æqualis altitudinis cum tetraedro.

Demonſtr. Octaedrum continet quatuor pyramides æquales, priſma LO triplum eſt unius pyramidis (*per* 17. 12.) ergo octaedrum eſt illius ſeſquitertium; ſed prima M O ad priſma PS, ſe habet ut M L N triangulum octaedri, ad P Q R, baſin tetraedri, nempe ut 3 ad 4, cum baſis tetraedi ſeſquitertia ſit trianguli octaedri (*per* 14. 13.) ergo octaedrum ABCDE æquale eſt priſmati PS; ſed priſma PS ad priſma GL, triplum tetraedri, ſe habet ut altitudo unius pyramidis ex recenſitis, ad altitudinem tetraedi; ſe habet autem altitudo, ad altitudinem ut latus octaedri ad latus tetraedi: nam altitudo unius ex pyramidibus eſt latus cubi, quod ad altitudinem tetraedi ſe habet ut 3 ad 4, ſicut latus octaedri, ad latus tetraedi ſe habet ut 3 ad 4, (*per* 13. & 15. *libri* 13.) ergo ita ſe habet octaedrum ad triplum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Si linea poſſit totam lineam ſectam extremâ ac mediâ ratione; & majus ſegmentum poſſit & aliam lineam ſimiliter ſectam & minus eius ſegmentum; ſi hac fiat diameter ſphæræ erit majus ſegmentum prioris, latus icoſaedri, & minus latus dodecaedri.



Lineæ AB quadratum, ſit æquale quadrato lineæ CD ſectæ extremâ, ac mediâ ratione, & quadrato majoris ſegmenti CE; ſit idem quadratum AB æquale quadrato lineæ F G ſimiliter ſectæ, & quadrato minoris ſegmenti HG; dico ſi AB fiat diameter ſphæræ, C E æqualis erit lateri icoſaedri, & H G æqualis lateri dodecaedri ejuſdem ſphæræ. Latera oppoſita icoſaedri A I, B K conjungantur lineâ rectâ IB, ducaturque alia diameter IK.

Demonſtr. Cùm AI, B K ſint parallelæ, erunt (*per* 30. 1.) anguli A I K, I B K æquales duobus rectis, & cum triangula A I B, I B K habeant omnia latera æqualia, erunt (*per* 8. 1.) anguli AIB, I B K æquales, ergo quadratum A B æquale eſt quadratis A I, I B; I B autem ſubtendit angulum pentagoni, & (*per* 8. 13.) ſi ſecetur extremâ, ac mediâ ratione, erit majus ſegmentum æquale lateri ejuſdem pentagoni nempe I A, & (*per* 2.) ita erit CD ad CE ut IB ad IA, & ſimiliter earum quadrata, & cum quadratum A B, ſit tam quadratis C D, C E quam quadratis I A, I B æquale, & ita ſe habeant CD, CE, ad IA, IB, ut CD ad IA, erunt quadrata IA, CE æqualia.

Secundò, dico N A latus dodecaedri æquale eſſe minori ſegmento H G; nam diviſis bifariam dodecaedri lateribus oppoſitis NA, BO linea LM erit perpendicularis, ergo & N B erit perpendicularis, & angulus ANB rectus; item (*per* 17. 13.) ſi linea LM extrema ac media ratione ſecetur, minus ſegmentum latus dodecaedri, quare adhibito ſuperiori ratiocinio, erunt H G, A N æquales; quod erat demonſtrandum.

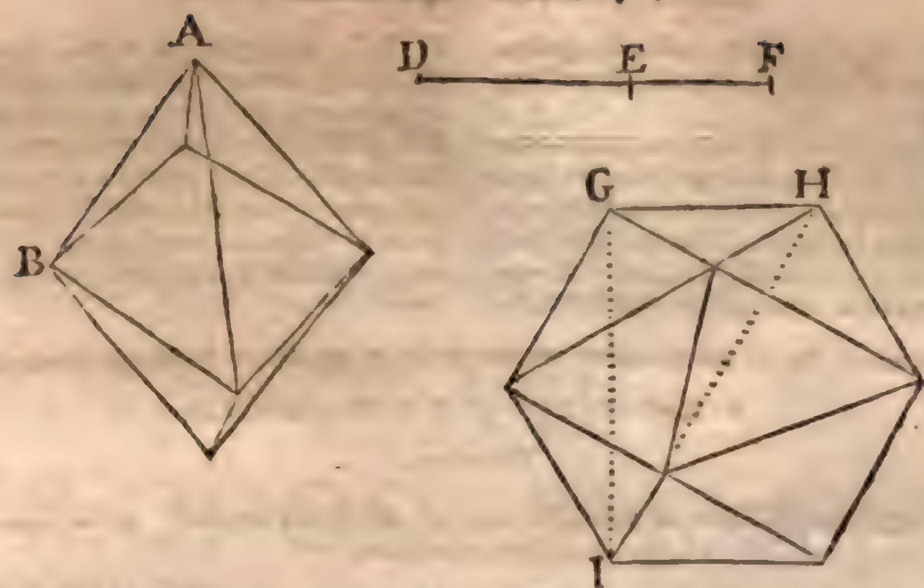
PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Si latus octaedri poſſit majus & minus ſegmentum lineæ, extremâ, ac mediâ ratione diviſæ; latus icoſaedri eiuſdem ſphæræ poterit duplum minoris ſegmenti.

Latus

Digitized by Google



Latus octaedri AB poſſit majus, & minus ſegmentum DE, EF lineæ DF ſectæ extremâ, ac mediâ ratione, dico latus icoſaedri GH poſſe duplum minoris ſegmenti; ſeu ejus quadratum duplum eſſe quadrati EF.

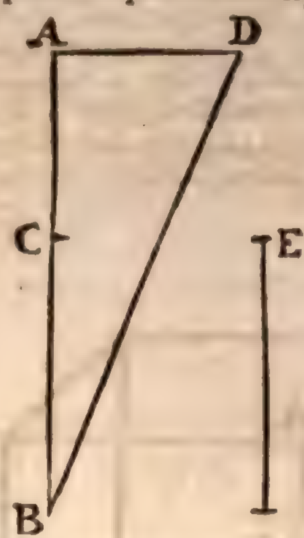
Demonſtr. (*Per* 8. 13.) erit GH majus ſegmentum lineæ GI extremâ ac mediâ ratione ſectæ, & (*per* 5. 13.) addita GH ad GI, compoſita GIH ſecabitur extremâ ac mediâ ratione, eritque GH minus ſegmentum; ſed quadratum diametri GI æquale eſt quadratis GH, GI (*per* 47. 1.) ſicut quadratum lateris AB æquale ponitur quadratis DE, EF, & lineæ ſimiliter ſecantur; erit ut quadratum HI ad quadratum AB ita quadrata GI, GH ad quadrata DE, EF; ſed quadratum diametri AB duplum eſt quadrati AB lateris tetraedri; ergo GI, GH dupla ſunt DE, EF. Et cum ſimilem habeant rationem inter ſe, cum lineæ ſimiliter ſectæ ſint, erit quadratum GH duplum quadrati EF.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Latus octaedri potentiâ ſubduplum eſt illius lineæ, quæ poteſt lineam extremâ ac mediâ ratione ſectam, & minus eius ſegmentum quod ſit latus dodecaedri.

Sit linea AB extremâ ac mediâ ratione ſecta, ſitque AD æqualis minori ſegmento AC, nempe lateri dodecaedri, ſit angulus A rectus, atque adeo BD poſſit lineam AB, & lineam AD, ſitque E potentiâ ſubdupla; dico E eſſe latus octaedri illius ſphæræ, in qua AC eſt latus dodecaedri.

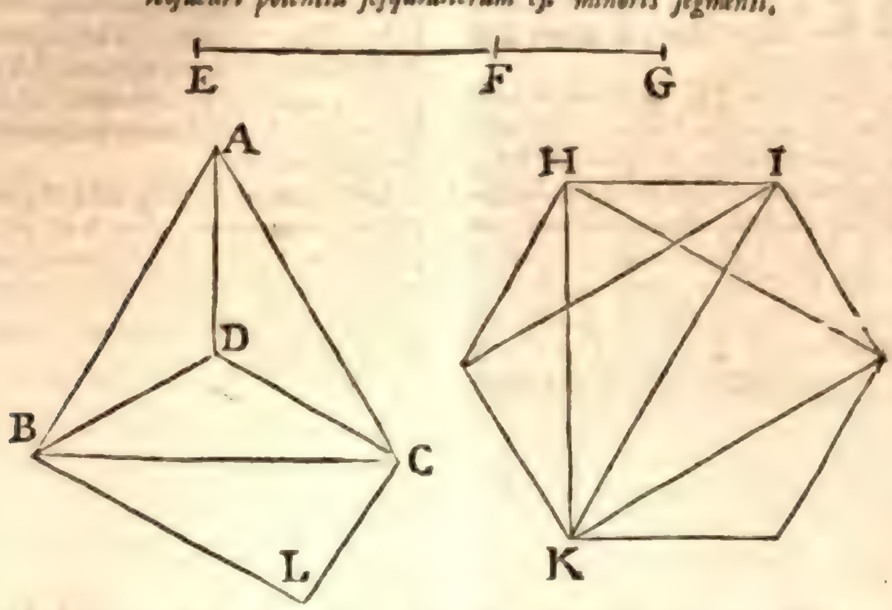


Demonſtr. (*Per* 17.13.) ſi AC ponatur latus dodecaedri, erit BC latus cubi, eritque illius ſphæræ diameter potentiâ tripla majoris ſegmenti BC; ſed (*per* 4.13.) quadrata AB, AD tripla ejuſdem majoris ſegmenti BC, & (*per* 47.1.) quadratum BD eſt æquale quadratis AB, AD; ergo BD eſt diameter illius ſphæræ; ſed diameter ſphæræ potentiâ dupla eſt lateris octaedri (*per* 14.13.) ergo linea E eſt latus octaedri.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Si latus tetraedri poſſit majus, & minus ſegmentum lineæ extremâ ac mediâ ratione ſectæ; latus icoſaedri potentiâ ſeſquialterum eſt minoris ſegmenti.



Tetraedri ABCD latus BC poſſit majus, & minus ſegmentum lineæ EG extremâ ac mediâ rationе

Digitized by Google

ſectæ in F ; dico H I latus icoſaedri ejuſdem ſpheræ potentiâ ſeſquialteram eſſe minoris ſegmenti F G.

Demonſtr. Si H K dividatur extremâ ac mediâ ratione,& HI ſit majus ſegmentum(*per* 8.13.) erit K H I extremâ ac mediâ ratione ſecta, eritque H I minus ſegmentum. Fiat ex tribus lineis BC, EF, FG triangulum BLC, & cum BC quadratum ſupponatur æquale quadratis EF, FG, ſeu BL, LC ; erit angulus L rectus ; ſicut I H K rectus eſt, & cum tam BLC quàm K H I, ſit ſecta extremâ ac mediâ ratione, erit ut BL ad LC, ita HK ad KI, ergo triangula æquiangula erunt ; ſed I K diameter ſpheræ potentiâ ſeſquialtera eſt lateris tetragoni ſeu B C, ergo H I latus octaedri potentiâ ſeſquialterum eſt lateris L C, ſeu minoris ſegmenti F G, quod erat demonſtrandum.

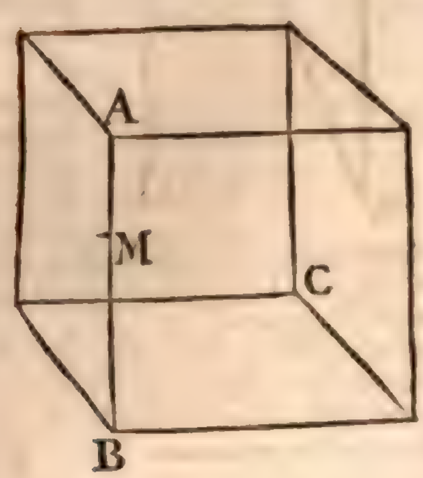
PROPOSITIO XXVII.

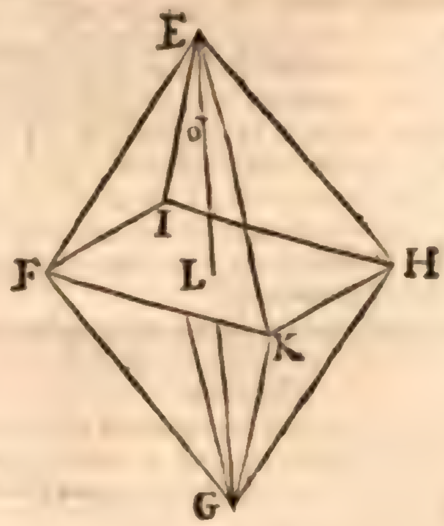
Theorema.

Cubus ad octaedrum ſe habet ut ſuperficies cubi ad ſuperficiem octaedri, & ut latus cubi ad ſemidiametrum ſpheræ.

Supponantur in eadem ſphera deſcribi cubus & octaedrum, dico ita ſe habere cubum ad octaedrum ut ſuperficies cubi ad ſuperficiem octaedri.

Demonſtr. (*Per* 22.) idem circulus ſpheræ circumſcribit & quadratum cubi, & triangulum octaedri : ſed æquales circuli æqualiter à centro ſphæræ diſtant, ergo perpendiculares ductæ à centro ſphæræ ad quadratum cubi, & ad triangulum octaedri, ſunt æquales ; ſunt autem in cubo 6 pyramides,& in octaedro 8,habentes eandem altitudinem : ergo (*per* 6.12.) ut omnes baſes pyramidum cubi ad omnes baſes pyramidum octaedri ita omnes pyramides cubi ad omnes pyramides octaedri, hoc eſt ita eſt cubus ad octaedrum ut ſuperficies cubi ad ſuperficiem octaedri; quod erat primum.





Secundò, dico ita eſſe cubum A C ad octaedrum EFGH ut latus cubi AB ad LE ſemidiametrum ſpheræ. Sit A M tertia pars lineæ A B, eritque M B illius ſeſquialtera ; ſit etiam E O tertia pars ſemidiametri LE.

Demonſtr. Quadratum F K H I quod eſt baſis duplicis pyramidis in quas reſolvitur pyramis (*per* 18. 13.) ſeſquialterum eſt quadrati B C ; quare ſi ſupra quadratum FKHI fieret parallelepipedum ad altitudinem BM, illud æquale eſſet cubo (*per* 34. 11.) nam baſes & altitudines eſſent reciprocæ ; deinde ſi ſupra idem quadratum F K H I fieret parallelepipedum ad altitudinem O E quæ eſſet tertia pars L E, illud (*per* 7.12.) eſſet æquale pyramidi EFKHI, ergo quod habebit altitudinem LO æquale erit octaedro ; ſed prius parallepipedum ſupra baſin F K H I & altitudinem B M quod eſſe æquale cubo oſtendimus, ſe habet ad hoc ultimum, ſeu ad octaedrum ut baſis B M ad baſin O L, ſeu ut tota AB ad totam LE (*per* 14. 12.) ergo ita eſt cubus ad octaedrum ut latus cubi ad ſemidiametrum ſpheræ ; quod erat demonſtrandum.

Ulterius non eſt progreſſus Hipſicles in comparatione horum corporum inter ſe. Addidit tamen unum librum de inſcriptione unius figuræ intra aliam, quæ materia cum ſit omnino inutilis, nullumque habeat in geometricis uſum, non proſequar ulteriùs.

TRACTATUS

Digitized by Google

TRACTATUS II.

THEODOSII ELEMENTA SPHÆRICA.

PRÆCIPUA corpora, quæ ſunt conſiderationis Mathematicæ, Sphærica ſunt; ideoque non immeritò Sphæricorum Elementa hîc inſerimus, ex quibus ſcilicèt præcipuæ cæleſtium orbium proprietates demonſtrantur, hæc à Theodoſio concinnata ſunt erudito, Mathematico, qui tempore Pompeij magni, aut Tripoli in Africa, aut in Phœnicia floruit. Tyrones primò & ſecundò libro contenti ſunt; Tertium ſuo tempore reſument.

LIBER PRIMUS.

Definitiones.

1. Sphæra eſt figura ſolida, unicâ ſuperficie comprehenſa, ad quam omnes lineæ ab uno, intra Sphæram poſito puncto ductæ ſunt, æquales.

2. Centrum Sphæræ eſt hujuſmodi punctum.

3. Axis Sphæræ eſt linea recta, per centrum Sphæræ ducta, ad ſuperficiem ejus utrinque terminata, & circa quam quieſcentem Sphæra intelligitur circumvolui.

4. Poli Sphæræ ſunt extrema puncta illius axis.

5. Polus alicujus circuli in ſphærâ deſcripti, eſt punctum in Sphæræ ſuperficie poſitum, à quo lineæ omnes ad prædicti circuli circumferentiam ductæ, ſunt æquales.

6. Circuli in Sphærâ æqualiter diſtant à centro, cùm lineæ perpendiculares ab eo ad eorum plana ductæ, ſunt æquales.

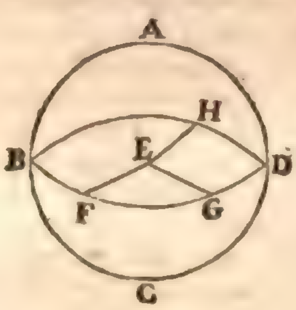
PROPOSITIO I.

Theorema.

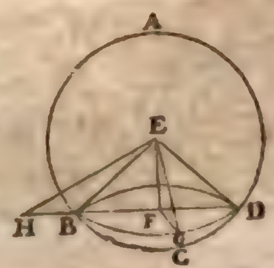
Si Sphæra plano quomodocumque ſecetur communis ſectio ſphæræ, & illius plani eſt circulus.

Sit Sphæra ABCD, quæ ſecetur plano BGDH, dico BGD quæ eſt communis ſectio Sphæræ, & illius plani, eſſe circulum. Primò enim ſupponatur centrum Sphæræ E, eſſe in eo plano ſecante, ducantur lineæ FE, EG, EH.

Demonſtr. Lineæ EG, EH, EF, & quæcumque aliæ ſunt æquales (*per 1. defin. hujus*) ergo (*per def. circuli*) BGDH eſt circulus.



Secundò planum BGD ſecans Sphæram, non tranſeat per centrum E. Dico tamen figuram BGD communem ſectionem Sphæræ, & plani propoſiti, eſſe circulum. Ex centro E in planum propoſitum cadat perpendicularis, hæc autem cadet intra Sphæram: nam ſi poſſet cadere extra Sphæram, hæc ſit EH, attingens planum in puncto H. Ducatur linea H F D, ſecans Sphæræ ſuperficiem in punctis B & D, ducantur item lineæ E B, E D; quæ (*per def. Sphæræ*) ſunt æquales, dividatur bifariam linea BD in puncto F; & ducatur EF. Cum triangula EBF, EDF habeant omnia latera æqualia, erunt (*per 8. 1.*) anguli ad F æquales, & recti; ergo rectus non eſt angulus E H B, ergo E H & quæcumque alia extra Sphæram cadens, perpendicularis non erit ad planum B G D, quare illa cadet intra Sphæram: Sit ergo E F ductiſque lineis B F, F G, F D, connectantur EB, GE, ED.



Demonſtr. Quadrata linearum EF, FB æqualia ſunt quadrato EB, & quadrata linearum E F, FG, quadrato E G : denique quadrata linearum E F, FD quadrato lineæ E D ; (*per* 47. 1.) ſed quadrata EB,EG,ED æqualia ſunt,cum lineæ ſint æquales : ergo quadrata EF, F B æqualia ſunt quadratis EF,FG,& quadratis EF,FD ; & ſubducto communi quadrato EF, quadrata FB, FG, FD æqualia erunt, & conſequenter lineæ ; quod probabo de quibuſcumque aliis : igitur (*per def.circuli*) BGD circulus erit.

COROLLARIUM I.

Idem eſt centrum Sphæræ, & circuli, in cujus plano centrum Sphæræ invenitur:oſtendimus enim punctum E eſſe centrum circuli F G H, in priori figura.

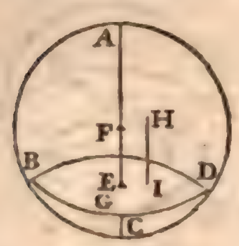
COROLLARIUM II.

Perpendicularis ducta à centro Sphæræ,ad planum quod non tranſit per illud, cadit in centrum circuli, qui eſt communis ſectio plani & Sphæræ.

PROPOSITIO II.

Problema.

Centrum Sphæra reperire.



Proponatur Sphæra A B C D, cujus centrum quæritur,ſecetur Sphæra plano quocumque,cujus communis ſectio ſit circulus BGD, quæratur ejus centrum E (*per* 1. 3.*Eucl.*) & per illud excitetur perpendicularis EA (*per* 12. 11.) dividenda bifariam in F ; dico F eſſe centrum Sphæræ.

Demonſtr. Si circulus BGD tranſiret per centrum Sphæræ,ejus centrum eſſet punctum E, & ductâ perpendiculari diviſa bifariam punctum F coincideret cum puncto E (*per def.Sphera*) Si verò circulus BGD non ſit in eodem plano, in quo eſt centrum ; dico in perpendiculari E A eſſe centrum Sphæræ:non enim poteſt eſſe extra illam lineam,quale eſt punctum H, alioquin ex H ad planum BGD, ductâ perpendiculari H I, punctum I, eſſet centrum circuli BGD, (*per ſecundum coroll.*) cùm tamen centrum ejus priùs inventum, ſit punctum E, non poteſt autem centrum Sphæræ eſſe niſi in medio illius lineæ AC, (*per defin.Sphæra.*)

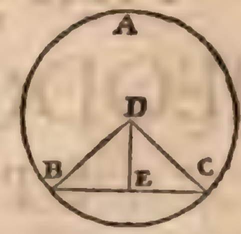
COROLLARIUM.

In perpendiculari per centrum minoris circuli ductâ, eſt centrum Sphæræ.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Sphara planum in uno tantùm puncto tangit.



Sphæra ABC tangat planum, à quo non ſecatur ; dico planum à Sphæra in uno tantùm puncto tangi. Si enim fieri poteſt ſupponamus planum illud tangi in duobus punctis B & C. Ducantur linea B C, dividaturque bifariam in E ; tum ducantur lineæ BD, DE, DC.

Demonſt. Cum triangula D B E, D C E omnia latera habeant æqualia, angulos in puncto E, æquales habebunt (*per* 8. 1.*Eucl.*)& conſequenter rectos, eritque latus DC (*per* 18. 1. *Eucl.*) majus latere DE ; ergo punctum E erit intra Sphæram. Tota autem linea B C, conjungens duo puncta ejuſdem plani quod ſupponitur tangere Sphæram, erit tota in eodem plano tangente (*per* 1. 11.) ergo planum quod tangit circumferentiam Sphæræ in duobus punctis B & C, habet aliqua puncta intra Sphæram quod eſt contra ſuppoſiti onem : igitur ſi Sphæram non ſecat, eam non attinget in duobus punctis, ſed in uno tantum.

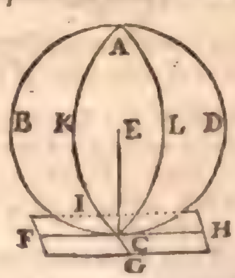
COROLLARIUM.

Linea recta conjungens duo puncta ſuperficiei, intra Sphæram cadit, & omnia ejus puncta. Nam ductâ lineâ D E, vel fient duo recti, & ſic vim habebit eadem demonſtratio, vel fiet unus acutus, & alius obtuſus. Ponamus angulum DEC eſſe obtuſum, erit (*per* 18. 1.) latus DC majus latere DE, atque adeò punctum E ; erit intra Sphæram, quod de quocumque alio puncto intra B & C poſito oſtendi poteſt.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Linea ducta à centro Sphara ad contactum plani, & Sphara ad illud, recta eſt.



A puncto E, centro Sphæræ ABCD, ducatur linea

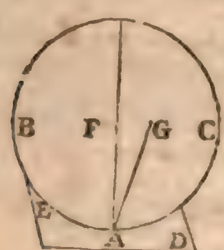
linea ad punctum C contactûs Sphæræ, & plani F G H; dico lineam CE, rectam eſſe ad illud planum. Intelligantur in Sphærâ duo plana per lineam F C ducta; hoc eſt linea EC ſit communis ſectio planorum ABCD, AKCL, quorum item communes ſectiones cum plano tangente ſint FH, GI.

Demonſtr. Plana ABCD, AKCL efficiunt in Sphæra circulos (*per 1. hujus*) & cum in iis ſit linea C E, & conſequenter punctum E, illud erit centrum circulorum (*per primum corol. 1. hujus*) & linea FCH tanget circulum ABCD, nullum enim punctum habet commune cum circulo, niſi punctum C, alioquin planum FGHI, in quo hæc linea ducta eſt, Sphæram ſecaret: Cum ſit item à centro ejuſdem circuli ducta linea E C, erit (*per 18. 3. Eucl.*) linea E C perpendicularis ad FH: eodem modo oſtendam eam eſſe perpendicularem ad GI; quare (*per 4. 11.*) erit linea EC, recta ad planum FGHI.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Perpendicularis ad planum tangens, per contactum ducta, per centrum Sphæra tranſit.



Per punctum contactus A erigatur A F, recta ad planum tangens E D; dico in linea A F eſſe centrum Sphæræ. Si enim non ſit in linea AF, aſſignetur centrum G, ducaturque linea GA.

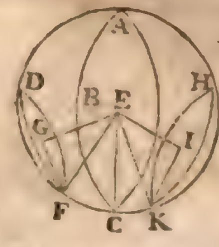
Demonſtr. Linea G A, (*per 4. hujus*) recta eſt ad planum ED; ergo (*per 13. 11.*) linea AF, recta non eſt ad planum E D; quod eſt contra ſuppoſitionem. Ergo G non eſt centrum; nec inveniri poterit niſi in linea A F.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Circuli in Sphæra, per ejus centrum tranſeuntes ſunt maximi. Et viciſſim in maximis eſt centrum Sphæræ. Qui æqualiter à centro diſtant, æquales ſunt. Et viciſſim qui æquales ſunt æqualiter à centro diſtant, & remotiores à centro minores ſunt.

Sit circulus A B C in cujus plano inveniatur punctum E centrum Sphæræ. Sint & alij quicunque DF, KH; in quorum planis non inveniatur centrum Sphæræ: dico primò circulum ABC majorem eſſe circulis K H, DF. Ex centro E ducantur lineæ EG, EI, ad plana circulorum rectæ, (*quæ per corol. 2. 1. hujus*) in eorum centra cadent, ducantur lineæ GF, IK, EF, EK, EC.



Demonſtr. Linea E C eſt ſemidiameter circuli ABC, cum E ſit ejus centrum, ſed hæc æqualis eſt lineis EF, EK, quæ majores ſunt (*per 18. 1.*) lineis GF, IK, ſemidiametris circulorum DF, KH, cum anguli G & I ſint recti; igitur ſemidiameter circuli A B C, major eſt ſemidiametris G F, I K, & conſequenter circulus A B C major eſt circulis DF, KH.

Dico ſecundò quod ſi circulus A B C ſit maximus, centrum Sphæræ eſt in ejus plano: ſi enim non eſt in ejus plano, circulus quicumque per centrum tranſiens eo major erit: ergo non erit maximus.

Dico tertiò. Quòd ſi circuli DF, KH æqualiter à centro diſtent, hoc eſt ſi lineæ EI, EG ſint æquales, circuli DF, KH æquales erunt.

Demonſtr. Cum quadrata linearum E G, G F, æqualia ſint quadrato lineæ E F, & quadrata linearum EI, IK æqualia quadrato lineæ EK, (*per 47. 1*) ſunt autem quadrata EF, EK æqualia; ergo quadrata EG, GF quadratis EI, IK æqualia ſunt, & ſubductis æqualibus quadratis videlicet linearum EG, EI, reſtabunt quadrata GF, IK æqualia, & conſequenter lineæ GF, IK; quæ cum ſint ſemidiametri circulorum, circuli æquales erunt.

Dico quartò. Si circuli æquales ſint, diſtantias GE, IE æquales eſſe.

Demonſtr. Oſtendam enim ut priùs quadrata EG, GF quadratis EI, IK æqualia eſſe, & cum circuli æquales ſint, radij GF, IK æquales erunt, & eorum quadrata æqualia, quibus ſubductis, reſtabunt quadrata GE, EI, æqualia, & lineæ EG, EI quæ ſunt diſtantiæ æquales erunt.

Dico quintò. Si circulus D F magis diſtet à centro, quàm circulus KH, eo minor erit.

Demonſtr. Oſtendam enim quadrata linearum EG, GF quadratis linearum EI, IK, æqualia eſſe; quare ſi auferatur quadratum majus E G, & ab alio aggregato, quadratum minus EI; reſtabit quadratum lineæ GF, minus quadrato lineæ I K, quare radius I K major erit radio G F, & conſequenter circulus KH major erit circulo DF.

COROLLARIUM.

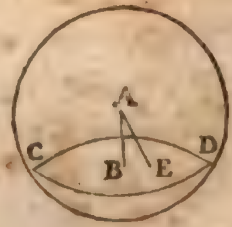
Omnes circuli maximi; ſeu per centrum Sphæræ tranſeuntes æquales ſunt, quia oſtendimus eorum radium eſſe radium Sphæræ.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Linea ducta à centro Sphæræ, ad centrum circuli; ad illius planum recta eſt.

Linea



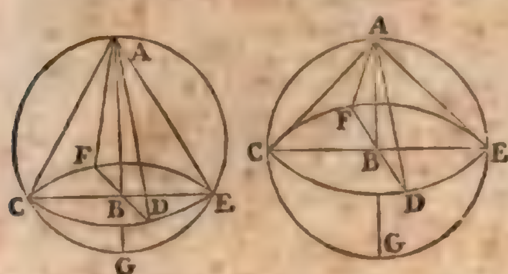
Linea AB ducatur à centro Sphæræ A ad centrum B circuli CD; dico AB rectam eſſe ad planum CD: ſi enim non eſt perpendicularis ad planum CD; ducatur AE perpendicularis ad idem planum.

Demonſtr. (*Per coroll. 2. primæ hujus*) punctum E eſſet centrum circuli CD, quod eſt contra ſuppoſitionem: Punctum enim B ſupponitur eſſe centrum ejuſdem circuli.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Perpendicularis ducta à centro Sphæræ ad planum circuli; tranſit per ejus polos.



Linea AB, ſit recta ad planum circuli CDEF, & tranſeat per centrum Sphæræ, ſive illud coincidat cum puncto B, ſive non: dico lineam AB productam tranſire per polos circuli CDEF. Hoc eſt lineas AC, AE, AD, AF æquales eſſe.

Demonſtr. Cum linea AB per centrum Sphæræ tranſeat, & ſit perpendicularis ad ejus planum, vel punctum B erit centrum Sphæræ, & circuli CDEF, vel (*per cor. 1. 1. hujus*) eadem linea AB tranſit per centrum circuli CDEF; quare in omni caſu punctum B erit centrum circuli CDEF. Ex quo fit, cùm triangula ABE, ABD, ABC, ABF habeant angulos in puncto B rectos & conſequenter æquales, & lineas BC, BD, BE, BF æquales, & AB communem, erunt (*per 4. 1.*) baſes AC, AD, AE, AF, æquales & (*per defin. 5. hujus*) punctum A erit polus, quod erat demonſtrandum. Idem probabitur de alio polo.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Perpendicularis à polo alicujus circuli ad planum ejus ducta; per centrum ejus, & per alterum polum tranſit.

In eâdem figurâ linea AB ducta ſit ex puncto A, polo circuli CDEF, perpendiculariter ad ejus planum, dico punctum B eſſe centrum ejus, & lineam AB, tranſire per alium polum.

Demonſtr. Cum A ſit polus circuli CDEF, erunt (*per def. 5.*) lineæ AC, AD, AE, AF æquales; & aliunde cum AB, perpendicularis ſit ad planum CDEF, omnes anguli in puncto B recti erunt, & (*per 47. Eucl.*) erunt quadrata ex AC, AD, AE, AF, ſingula æqualia quadratis AB, BC; AB, BD; AB, BE; AB, BF, binis & binis; cum autem prædicta quadrata ſint æqualia inter ſe, AB, BD; AB, BC, & reliqua bina & bina æqualia inter ſe erunt, & dempto communi AB, erunt quadrata linearum BC, BD, BE æqualia; ergo lineæ erunt æquales & B centrum circuli; & linea AB tranſibit per centrum Sphæræ (*per corollarium ſecunda hujus*) & (*per præcedentem*) eadem linea AB producta per alium polum G ejuſdem circuli tranſit.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Linea per polos alicujus circuli ducta, recta eſt ad planum ejus, tranſitque per centra circuli, & Sphæræ.

Linea AB per polos A & B circuli EHFG tranſeat, dico primò illam rectam eſſe ad planum EHFG. Ducantur per punctum C lineæ FE, GH; conjungantur lineæ AE, AH, AF, AG; item lineæ BE, BH, BF, BG.



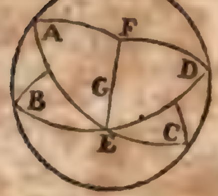
Demonſtr. Triangula AEB, AHB, AFB, AGB, habent ſingula latera æqualia, nempe AB commune AE, AH, AF, AG æqualia inter ſe, ſicut BE, BH, BF, BG, (*per def. 5.*) ergo anguli BAE, BAH, BAF, BAG æquales ſunt (*per 8. 1.*) & conſequenter triangula EAC, HAC, FAC, GAC, (*per 4. 1.*) habent baſes EC, CH, CF, CG æquales: ergo punctum C eſt centrum circuli, & AC erit perpendicularis quia anguli GCA, HCA; tum FCA, ECA ſunt æquales atque adeò recti. Item (*per corol. 1. hujus*) in ea erit centrum ſphæræ.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

In Sphærâ, maximi circuli ſe mutuò bifariam ſecant.

In



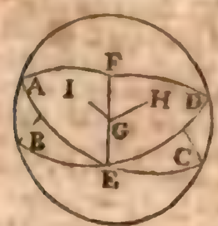
In ſphæra A B C D ſint duo maximi circuli AECF, BEDF, dico illos circulos ſe mutuò bifariam ſecare. Et primò quidem non poſſunt non ſe ſecare, quia in utroque eſt centrum ſphæræ, cum ſint maximi circuli, unde paralleli eſſe non poſſunt. Sit ergo centrum ſphæræ G, per quod ab interſectione E, ducatur linea recta EG, dico illam in aliam interſectionem F incidere, & arcus EDF, FBE; ECF, EAF eſſe ſemicirculos.

Demonſtr. Centrum ſphæræ G, eſt in utriuſque circuli plano, immò & (*per* 1. *coroll.* 1. *hujus*) eſt centrum utriuſque circuli, ſed puncta E, & F ſunt in utroque plano, quare puncta E, F, G, ſunt in communi ſectione utriuſque plani, ergo (*per* 3. 11.) linea ducta per puncta E, G, F, recta erit. Cum ergo E F per centrum utriuſque circuli tranſeat, erit utriuſque diameter, & bifariam utrumque circulum ſecabit.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Circuli in ſpherâ, qui ſe mutuò bifariam ſecant ſunt maximi.



In ſphæra ABCD circuli BEDF, A E C F ſe mutuò bifariam ſecent, in punctis E, & F; dico illos eſſe maximos; ſeu in eorum plano eſſe centrum ſphæræ, ducatur enim E F, quæ ſecetur bifariam in G, dico punctum G, eſſe centrum ſphæræ.

Demonſtr. Oſtendo primò punctum G, eſſe centrum utriuſque circuli: cum enim FDE, FBE, ſint ſemicirculi; EF erit diameter circuli BEDF, in cujus medio erit centrum. Idem dico de circulo AECF. Quod ſi G non eſt centrum ſphæræ; ducatur per punctum G, linea G I, recta ad planum BEDF, & G H quæ ſit recta ad planum circuli AECF, in utraque erit centrum ſphæræ (*per corol.* 2. *hujus*) ergo adhuc ſequitur, quod punctum G erit centrum ſphæræ, quia illæ lineæ conveniunt tantùm in puncto G.

Multi mirabilem hunc modum argumentandi exiſtimant, quo ſcilicet ex eo quod punctum G dicatur non eſſe centrum ſphæræ, concluditur illud eſſe centrum ſphæræ.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

In ſphæra, maximus circulus alium ſecans ad rectos angulos, biſariam illum ſecat, & per polos eius tranſit.

Circulus maximus A B C D circulum B E D ſecet ad rectos angulos, hoc eſt planum circuli ABCD, ſit rectum ad planum circuli BED, & linea BD ſit communis utriuſque ſectio, dico lineam BD eſſe diametrum circuli B E D. Sit centrum ſphæræ F, à quo ad lineam BD ducatur perpendicularis FG, quæ utrinque producatur.



Demonſtr. Cùm centrum ſphæræ F, ſit in plano circuli maximi A B C D (*per* 6. *huius*) Item punctum G in eodem ſit plano, cum linea GBD ſit communis utriuſque plani ſectio; tota linea FG erit in plano circuli ABCD quod ſupponitur eſſe rectum ad planum B E D, eſt item FG perpendicularis ad communem ſectionem BD; quare (*per* 4. *def.* 11.) linea FG erit recta ad planum BED & (*per* 2. *corol.* 1. *huius*) punctum G erit centrum circuli BED, & BD diameter, & arcus BED, BFD ſemicirculi. Denique (*per* 8. *huius*) puncta A & C ſunt poli circuli B E D.

Hæc propoſitio vim ſuam obtinet, ſive BED, ſit maximus circulus, ſive non.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Circulus maximus, non maximum biſariam ſecans, ad rectos angulos eum ſecat.

In eâdem figurâ, circulus maximus ABCD circulum minorem BED bifariam ſecet in punctis B & D; dico planum A B C D eſſe rectum ad planum BED. Ducatur linea B D, quæ erit diameter circuli B E D, & in ea erit centrum illius G. Ex centro ſphæræ F, ducatur linea F G, utrinque producenda.

Demonſtr. Centrum ſphæræ F eſt in plano circuli maximi ABCD, ſicut & punctum G cum ſit in communi ſectione utriuſque plani; ergo tota FG eſt in plano circuli ABCD; ſed (*per* 7. *huius*) linea G F eſt recta ad planum B E D; ergo (*per* 18. 11.) planum ABCD eſt rectum ad planum B E D.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si maximus in Sphara circulus, per polos alterius tranſierit, eum biſariam & ad rectos angulos ſecabit.

Maximus circulus ABCD tranſeat per polos A, & C circuli BED; dico quod biſariam illum ſecabit in punctis B, & D, & ad angulos rectos. Ducatur linea AC connectens duos polos, ſecans planum BED in puncto G.

Demonſtr. Quoniam linea AC, per polos A & C ducitur, erit (*per* 10. *hujus*) recta ad planum BED; & (*per* 18. 11.) planum ABCD per illam ductum rectum erit ad planum BED: quod erat Primum.

Item (*per eandem* 10.) linea AC tranſit per centrum circuli BEDH, ergo centrum ejus G, erit in communi ſectione, & linea BGD erit diameter ſecans biſariam circulum BEDF, in punctis B & D; quod erat ſecundum.

Hæc propoſitio habet ſuam vim, etiamſi uterque circulus ſit maximus.

COROLLARIUM I.

Si circulus maximus per alterius maximi polos tranſierit, viciſſim ſecundus per polos primi tranſit, ſi enim primus tranſit per polos ſecundi erit ad eum rectus (*per hanc* 15.) & viciſſim ſecundus, erit rectus ad primum, & (*per* 13.) per polos ejus tranſit.

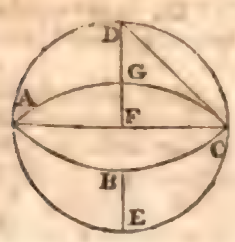
CORROLLARIUM II.

In Sphærâ, circulus per utrumque polum alterius circuli tranſiens, maximus eſt; quia linea à polo ad polum ducta tranſit per centrum Sphæræ (*per* 10. *hujus*) ſed illa tota eſt in plano circuli per utrumque polum tranſeuntis: ergo centrum Sphæræ invenitur in eius plano, & (*per* 6. *hujus*) circulus ille maximus eſt.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Linea ducta à polo circuli maximi, ad eius circumferentiam, æqualis eſt lateri quadrati inſcripti maximo circulo.



Linea DC ducta ſit à puncto D, polo circuli maximi ABCG, ad ejus circumferentiam; dico lineam DC eſſe æqualem lateri quadrati inſcribendi in quocumque circulo maximo illius Sphæræ.

Sit enim alter polus illius circuli, punctum E, tranſeatque per utrumque circulus AECD; ducatur linea DE, ſecans planum circuli ABCG, in puncto F. Ducatur item linea AFC.

Demonſt. Linea DE, (*per* 10. *hujus*) recta eſt ad planum ABC, ergo (*per def.* 3. 11.) angulus DFC rectus eſt, & F eſt centrum circuli ABCG, qui cum ſit maximus, punctum F erit centrum Sphæræ. Idem punctum F eſt etiam centrum circuli AECD, cum (*per corol.* 2. *præcedentis*) ſit maximus, quare cum in circulo maximo AECD ſint ductæ duæ diametri AC, DE, perpendiculares ad invicem erit linea DC, (*ut colligere licet ex* 6. 4. *Eucl.*) latus quadrati in ipſo inſcribendi.

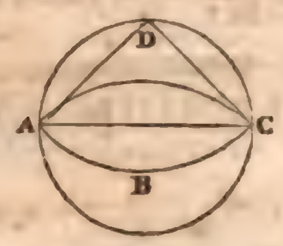
COROLLARIUM.

Circulus maximus diſtat à ſuis polis quadrante circuli, cum enim anguli ad F ſint recti, erunt æquales: quare arcus AD, DC, CE, EA æquales erunt; ergo quadrantes.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Circulus in Sphæra diſtans à ſuo polo lineâ æquali lateri, quadrati inſcribendi in maximo circulo, maximus eſt.



Circulus ABC, diſtet à ſuo polo D, linea AD, quæ ſit æqualis lateri quadrati inſcribendi in maximo Sphæræ circulo, dico circulum ABC maximum eſſe. Intelligatur circa centrum Sphæræ & per puncta A & D, deſcribi circulus ADC, qui (*per* 6. *hujus*) maximus erit, ſecans circulum ABC, in A & C. Ducantur lineæ AC, DC.

Demonſtr. AD eſt latus quadrati inſcribendi in circulo ADC, cui DC eſt æqualis (*per def. poli*) ergo AD, DC ſunt quadrantes, & ADC ſemicirculus: igitur AC erit diameter maximi circuli ADC, & in ea erit centrum circuli ejuſdem, quod etiam centrum eſt Sphæræ, ſed linea AC, eſt etiam in plano circuli ABC; ergo in plano circuli ABC eſt centrum Sphæræ, & (*per* 6. *hujus*) circulus ABC erit maximus.

COROLLARIUM.

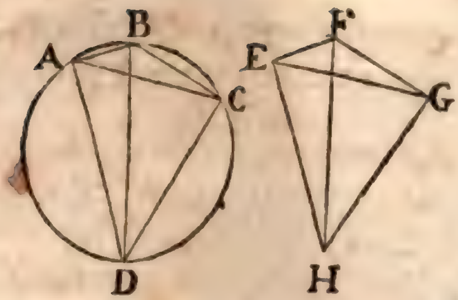
Circulus diſtans à ſuo polo quadrante circuli maximus eſt, quia diſtat lineâ æquali lateri quadrati inſcribendi in maximo circulo.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Lineam æqualem diametro circuli in Sphæra dati invenire.

Iſtud



Iſtud problema inutile non eſt, quia non poſſumus per centrum circuli in Sphæra dati, lineam rectam ducere.

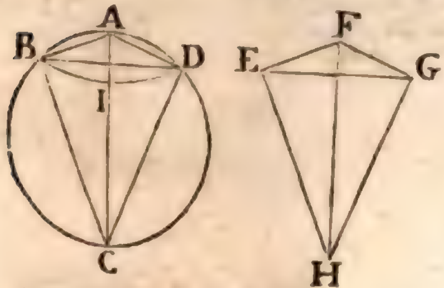
Proponatur circulus ABC, in cujus circumferentiâ tria puncta notentur A B, & C: fiat triangulum E F G, ita ut ejus latera ſingula æqualia ſint lateribus trianguli A B C, & ad latera E F, FG; ducantur perpendiculares E H, G H, tum ducatur linea FH, hanc dico eſſe æqualem diametro circuli A B C: intelligatur ducta hæc diameter BD, & ductæ lineæ CD, AD.

Demonſtr. Anguli BAD, BCD in ſemicirculo recti ſunt, (*per* 31. 3.) ſicut & anguli F E H, FGH, unde ſi intelligatur triangulum ABC ſuperponi triangulo E F G, omninò quadrabit, & cum anguli BCD,FGH, ſint recti, lineæ GH, CD congruent, ſicut & lineæ A D, E H; ergo & lineæ BD, FH congruent, & æquales erunt.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Lineam æqualem diametro datæ Sphæræ aſſignare.



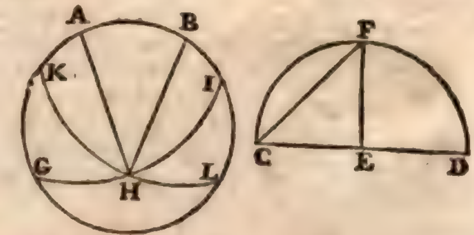
Proponatur Sphæra A B C D; quæritur linea æqualis ejus diametro. Ex A ut polo intervallo quocumque deſcribatur circulus B I D, cujus diametro B D (*per præcedentem*) inveniatur linea æqualis EG, fiat triangulum EFG, cujus latus EG æquale ſit diametro circuli BID: latera autem EF, F G æqualia lineæ AB, ad cujus intervallum deſcriptus eſt circulus ex polo A, tum ad latera FG, EF; ducantur perpendiculares GH, EH, convenientes in puncto H, tum ducatur linea FH; dico eam eſſe æqualem diametro Sphæræ. Intelligatur per polos A & C, tranſire maximus circulus CAB; hic tranſibit etiam per D, quia (*per* 15. *hujus*) dividit circulum BID bifariam, quemadmodum ipſa linea B D. Item ducatur per centrum Sphæræ, quod etiam eſt centrum circuli B A D, diameter AC; ducantur denique lineæ AB, AD, BC, DC.

Demonſtr. Oſtendam ſicut priùs angulos ADC, ABC in ſemicirculo rectos eſſe (*per* 31.3.) unde cum triangulum EFG, ſit triangulo BAD æquilaterum, cum eo congruet, & in eâ ſuperpoſitione cum anguli ADC, FGH recti ſint; congruent lineæ DC, GH; ſicut EH, BC; ergo & lineæ AC, FH congruent, & conſequenter æquales erunt.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Per duo qualibet puncta, in ſuperficie Sphæræ aſſignatâ circulum maximum deſcribere.



Aſſignentur duo puncta A & B in ſuperficie Sphæræ, per quæ ducendus eſt circulus maximus; habeatur Sphæræ diameter quæ ſit CD, (*per præcedentem*) & dividatur bifariam in E; ducaturque perpendicularis E F, æqualis ſemidiametro; tum ducatur linea C F: hæc erit latus quadrati inſcribendi in maximo Sphæræ circulo, ut patet ſi fiat ſemicirculus CFD.

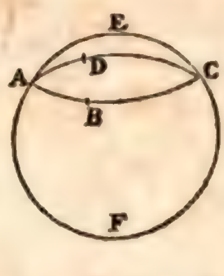
Intervallo C F, ex puncto A: deſcribatur circulus GHI, & ex puncto B, eodem intervallo circulus K H L, qui duo circuli ſe interſecent in puncto H. Denique ex puncto H, ut polo, intervallo HA, aut HB, deſcribatur circulus, qui tranſibit per utrumque punctum A & B, & maximus erit. Intelligantur duci duæ lineæ AH, BH.

Demonſtr. Cum ex A, ut polo, deſcriptus ſit circulus G H I, intervallo C F; linea AH æqualis erit lineæ C F, idem dico de BH, quare puncta A & B æqualiter diſtant à polo H, unde circulus deſcriptus ex H intervallo H A, tranſit per B; & cum circulus A B diſtet à ſuo polo, lineâ æquali lateri inſcribendo in maximo Sphæræ circulo, (*per* 17. *hujus*) maximus erit.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Cujuſlibet circuli Sphæra, polum reperire.

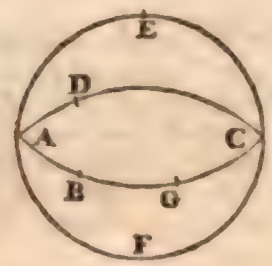


Proponatur primò. Circulus A B C non maximus cujus polus quæritur, determinentur utcumque duo puncta B & D, Dividanturque arcus B A D, B C D bifariam in punctis A & C; tum per A & C deſcribatur maximus circulus

AECF (*per præcedentem.*) Denique arcus AEC, AFC dividantur bifariam in punctis E & F, quæ dico eſſe polos circuli A B C D.

Demonſtr. Si arcubus æqualibus A B, A D addas æquales arcus BC, DC, erunt arcus ABC, A D C æquales, quare circulus ABCD, bifariam dividitur in punctis A & C, à circulo maximo AECF, quare (*per* 14. & 13. *hujus*) circulus A E C F per polos tranſit, unde puncta E & F æqualiter diſtantia à circulo A B C D, erunt ejus poli.

Proponatur ſecundò circulus maximus ABCD, cujus quæruntur poli, aſſumptis pariter in eo duobus punctis B & D, diviſiſque bifariam arcubus BAD, BCD, erunt arcus ABC, ADC æquales, & ſemicirculi. Dividatur ſemicirculus A G C bifariam in G, ita ut AG ſit quadrans, tum ex G ut polò intervallo GA circulus deſcribatur AECF; diviſis denique bifariam arcubus AEC, AFC, in E & F; dico puncta E & F eſſe polos.

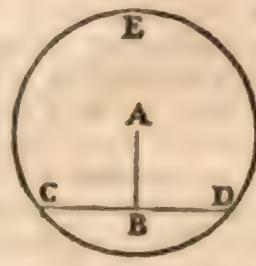


Demonſtr. Circulus A E C F deſcriptus ex polo G, intervallo quadrantis GA (*per coroll.*17. *hujus*) maximus eſt, & quia circulus maximus ABCD per polum ejus G tranſit; ipſe viciſſim circulus AECF tranſit per polos circuli ABCD, (*per* 1. *coroll.*15. *hujus*) Quare poli erunt puncta E & F æqualiter diſtantia à punctis A & C.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Si linea ex centro Sphæræ ducta, aliam non per centrum ductam biſariam dividat; perpendicularis ad eam erit. Et viciſſim ſi ad eam perpendicularis fuerit, biſariam eam dividet.



Recta A B per A centrum Sphæræ ducta, bifariam dividat lineam C D, non per centrum ductam: Dico A B eſſe perpendicularem ad C D.

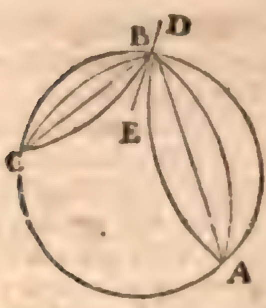
Ducatur enim planum per rectas A B, C D quod in Sphæra faciet circulum maximum CED, cum centrum Sphæræ nempe punctum A in eo inveniatur.

Demonſtratio. In circulo CED, recta A B à centro A ducta lineam C D non per centrum ductam bifariam ſecat: ergo (*per* 3. 3.*Eucl.*) ad eam perpendicularis erit: pariter (*per eandem*) ſi ad eam perpendicularis fuerit, bifariam eam dividet.

THEODOSII

THEODOSII SPHÆRICORVM LIBER SECVNDVS.

Definitio unica.



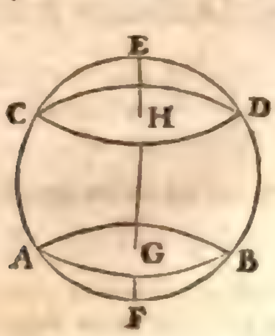
Circuli in Sphærâ ſe mutuò tangere dicuntur quando communis ſectio planorum utrumque circulum tetigerit.

Vt ſi ſint circuli AB, BC quorum plana producta habeant communem ſectionem DE, quæ utrumque circulum tangat ; hoc eſt anguli ABD, ABE, CBD, CBE ſint recti : circuli ſe mutuò tangere dicentur.

PROPOSITIO I.

Theorema.

In Sphærâ, paralleli circuli eoſdem polos habent.



Proponantur in Sphærâ paralleli circuli A B, CD, hoc eſt plana eorum ſint parallela ; dico illorum circulorum eoſdem eſſe polos.

Sint enim circuli A B poli E, & F, aſſero eoſdem eſſe polos circuli C D. Ducatur linea E F.

Demonſtr. Linea E F. Ducta per polos circuli AB, recta eſt ad illius planum, & tranſit per centrum Sphæræ *(per 10.1. hujus:)* ergo *(per 14.11.)* erit etiam recta ad planum C D; & cum tranſeat per centrum Sphæræ (*ut vidimus*) tranſit per polos circuli C D *(per 8. 1. hujus:)* ergo puncta E & F ſunt poli circuli C D.

PROPOSITIO II.

Theorema.

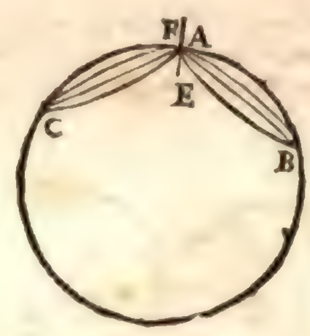
Circuli eoſdem polos habentes ſunt paralleli.

Circuli AB, CD habeant eoſdem polos E, & F, dico illos eſſe parallelos, hoc eſt eorum plana eſſe parallela.

Demonſtr. Linea E F recta eſt ad utriuſque circuli planum (*per* 10. 1. *hujus*,) ergo (*per* 14. 11.) plana circulorum ſunt parallela.

PROPOSITIO III.

Si in Sphæra duo circuli ſibi mutuò occurrunt, in eodem puncto, circuli maximi per polos eorum tranſeuntis, illi ſe mutuò tangent.



Circuli AB, A C ſibi occurrant in puncto A circumferentiæ maximi circuli A B C per polos utriuſque tranſeuntis, dico circulos AB, AC ſe mutuò tangere in puncto A : Hoc eſt ſi linea EF ſit communis ſectio planorum AB, AC, dico eam perpendicularem eſſe ad diametros AB, AC.

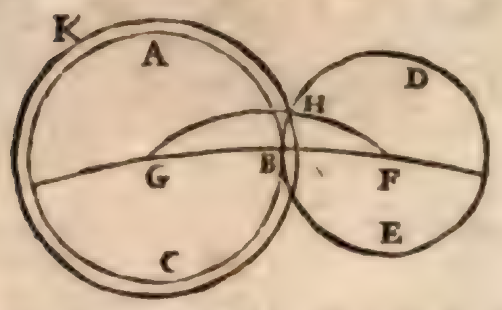
Demonſtr. Circulus maximus ABC ſupponitur tranſire per polos circulorum A B, A C, ergo (*per* 15. 1. *hujus*) illos bifariam, & ad rectos angulos ſecat ; ergo lineæ A B, A C communes ſectiones circulorum AB, AC, & circuli A B C ſunt eorum diametri ; & (*per* 19. 11.) linea E F communis ſectio planorum AB, AC, recta erit ad planum circuli ABC, quare (*per* 3. *def.* 11.) linea E F perpendicularis erit ad diametros AB, AC, & (*per def. hujus*) circuli AB, AC ſe tangunt in puncto A.

Digitized by Google

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si in Sphara duo circuli ſe tangunt, maximus circulus per eorum polos tranſiens, tranſit quoque per contactum.



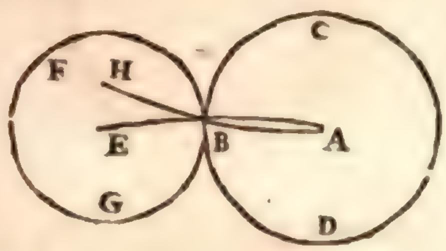
Circuli ABC, DBE ſe tangant in puncto B, & maximus circulus G F tranſeat per eorum polos G & F, dico eum circulum tranſire per punctum B; nam ſi dicatur non tranſire per contactum B, ſed ſecare circulum B E D; in puncto H ex polo G, per punctum H deſcribatur circulus H K, qui neceſſariò ſecabit circulum BHD, cum ad majus intervallum deſcribatur quàm A B C.

Demonſtr. Duo circuli DHE, KH, ſecant circumferentiam circuli maximi tranſeuntis per eorum polos G & F, ergo (*per* 3. *hujus*) ſe mutuò tangent in puncto H, quod eſt abſurdum; cum ſe mutuò ſecent: ergo quicumque circulus maximus tranſit per polos, tranſit etiam per contactum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si duo circuli in Sphera ſe tangant, maximus circulus per polos unius, & per contactum deſcriptus; per polos alterius tranſit.



Maximus circulus AB, deſcriptus ſit per polum A circuli C B D & per contactum B, dico eum tranſire per polum E circuli FBG. Si enim non tranſit qualis eſt ABH, ſit alius circulus maximus tranſiens per polos A & E.

Demonſtr. Circulus maximus AE, per polos circulorum ſe tangentium deſcriptus tranſit etiam per contactum B (*per precedentem*) ergo duo circuli maximi ABH, ABE ſe ſecant in B & A, & cum bifariam ſe ſecent (*per* 11. 1. *hujus*) erit uterque arcus AB, ſemicirculus; quod eſt abſurdum cum duo poli ſemicirculo diſtent.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Maximus circulus aliquem circulum tangens; tangit & alterum aqualem, & parallelum.



Maximus circulus AB tangat circulum A C in puncto A; ſintque poli circuli AC puncta D, & E, per quæ, & per contactum A, tranſeat maximus circulus ADBE. Ex polo E, intervallo EB, deſcribatur circulus BF; dico circulum BF & eſſe parallelum circulo AC, & tangere circulum A B in puncto B, denique eſſe æqualem circulo A C. Ducantur lineæ AC, BF, quæ erunt diametri circulorum, eò quòd (*per* 15. 1. *hujus*) bifariam dividantur, à circulo maximo ADBE, per polos eorum tranſeunte.

Demonſtr. Primò circuli AC, B F eoſdem polos habentes ſunt paralleli (*per* 2.)

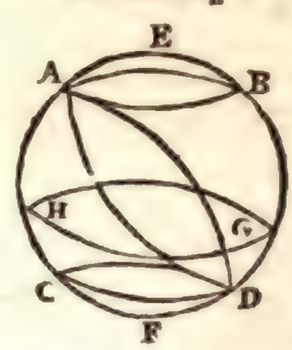
Secundò circulus maximus A C B tranſit per polos circuli AC, & per contactum A; ergo tranſit per polos circuli AB, (*per* 5.) cum ergo idem circulus ACB, tranſeat per polos circulorum AB, BF, ſibi occurrentium in puncto B, (*per* 3.) circuli A B, B F ſe tangent.

Tertiò cum circuli maximi AB, ACB ſe bifariam ſecent (*per* 11. 1. *hujus*) erit arcus ADB ſemicirculus: ſed etiam D C E ſemicirculus eſt; igitur ablatô communi arcu DCB, erunt arcus AD, B E æquales; eruntque etiam arcus dupli nempe ADC, BEF æquales, & (*per* 29. 3.) lineæ AC, BF, æquales erunt, ergo & circuli quorum ſunt diametri.

Coroll. Sequitur puncta contactuum A & B eſſe oppoſita per diametrum, hoc eſt, diſtare ſemicirculo.

PROPOSITIO VII.

Si ſint in Sphara duo circuli aquales, & paralleli; maximus circulus unum tangens, & alterum tanget.



Sint duo circuli AB, CD paralleli, & æquales, & circulus maximus AD, tangat circulum A B; dico

dico eum tangere circulum CD; ſi enim ideò non tangit circulum C D, quia illi non occurrit, ſecet circulum maximum ABD in puncto G, per quod ex polo F deſcribatur circulus G H. Sequeretur quod circulus G H eſſet æqualis circulo A B, & conſequenter æqualis circulo C D; quod tamen fieri non poteſt cum arcus G F H, ſit major arcu DFC. Igitur circulus tangens ipſum A B, attinget circulum C D. Cum autem maximus circulus A E D F tranſeat per polos, tam circulorum AB, CD, quam circuli A D; circuli AD, CD, ſe mutuo tangent.

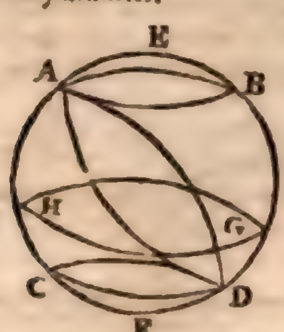
COROLLARIUM.

Plures quàm duo circuli paralleli, & æquales in Sphæra eſſe non poſſunt, quia nec ſupra nec infra CD duci poteſt circulus parallelus, & æqualis circulo AB.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si maximus circulus ad alium obliquus ſit; ille tanget duos circulos, æquales inter ſe; & prædicto circulo parallelos.



Circulus maximus A D ſit obliquus ad circulum G H; hoc eſt neque ad illum rectus ſit, neque illum tangat, dico circulum A D, tangere duos circulos A B, CD inter ſe æquales, & parallelos circulo H G. Circulus maximus A G D H, tranſeat per polos circulorum A B, C D, ſintque puncta E, & F poli circuli H G, tum ex E intervallo EA, & ex F intervallo F D deſcribantur circuli AB, CD.

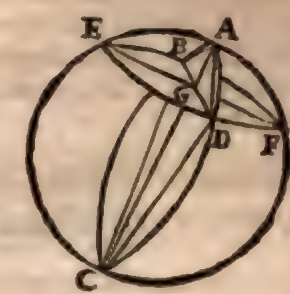
Demonſtr. Erunt puncta E & F poli circulorum AB, C D, cum circulus A B C tranſeat per polos circulorum A B, CD, GH (*per 3. hujus*) circulus A D tangit circulos AB, CD, qui (*per 6.*) erunt inter ſe æquales,& cum eoſdem polos habeant, ac circulus GH, illi etiam paralleli erunt. (*per 2.*

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si duo circuli in Sphæra ſe mutuò ſecent: maximus circulus per utriuſque polos ductus, ſegmenta bifariam ſecat.

Duo circuli A B C D, B E D F, ſe mutuò in Sphæra ſecent, & maximus circulus AECF per eorum polos tranſeat, dico circulum AECF, bifariam ſecare ſegmenta utriuſque circuli, nempe BAD, BCD, BED, BFD.

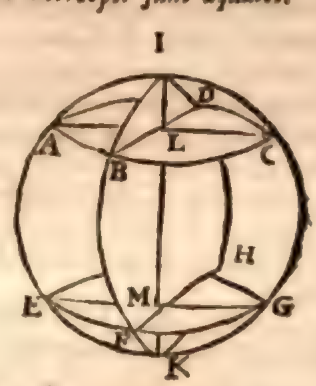


Demonſtratio. Cum circulus A E C F tranſea per polos circulorum, erit rectus ad utriuſque planum (*per 15. 1. hujus*) ergo (*per 19.11.*) communis ſectio utriuſque hoc eſt B D recta erit ad planum circuli AECF; jam linea EF eſt diameter circuli E F, cum bifariam dividatur à circulo AECF, per polos ejus tranſeunte (*per 15. 1.*) ergo cum AC perpendiculariter dividat lineam BD, bifariam illam dividet (*per 3. 3.*) in triang. igitur BAG, GAD, cum latera GB; GD ſint æqualia,& AG commune, & anguli in puncto G ſint recti, erunt (*per 4. 1.Eucl.*) baſes B A, A D æquales: ergo (*per 28. 3.*) arcus A B, AD æquales erunt. Eodem modò oſtendam arcus BC, CD; EB,ED; FB, FD, eſſe æquales.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si per polos circulorum parallelorum deſcribantur circuli maximi arcus parallelorum inter eos intercepti ſunt ſimiles; & arcus maximorum inter parallelos intercepti ſunt æquales.



Sint circuli A B C D, EFGH paralleli quorum (*per 1. hujus*) ſint iidem poli I & K, per quos ducantur duo, aut plures max.circuli IBKD, IAKC: dico arcus AB, EF, BC, FG parallelorum eſſe ſimiles; & arcus AE, BF, CG, DH, eſſe æquales, intelligantur lineæ BD, AC, EG, FH, communes ſectiones parallelorum,& maximorum circulorum.

Demonſtr. Circuli ABC, EFG ſecantur bifariam à circulo maximo I A K C per eorum polos tranſeunte, (*per 15. 1. hujus*) igitur arcus A B C, EFG,ſunt ſemicirculi,& AC, EG diametri: oſtendam pariter lineas BD, FH eſſe diametros,& conſequenter puncta L & M eſſe centra; cum autem plana ABC,EFG ſint parallela,ſectiones AC,EG, BD, F H, parallelæ erunt (*per 16.11.*) & *per* 10.11. anguli ALB,EMF, erunt æquales, qui cum ambo ſint in centro conſtituti, arcus A B, E F ſimiles erunt (*per 22. 3.*) hoc eſt A B tot gradus continebit, quot arcus E F.

Secundò, cum polus I ſit polus circuli A B C, erunt

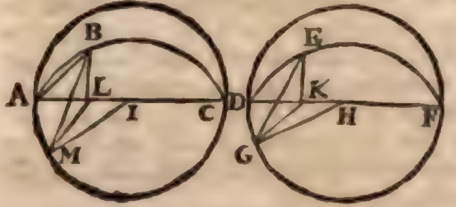
BIBLIOTECA

erunt (*per 5. defin.1. hujus*) lineæ AI, IB æquales, & cum circuli I A K C, IBKD ſint æquales, erunt arcus A I, I B æquales; ſimiliter æquales erunt arcus IE, IF, ex quibus ſi æquales AI, B I auferas; remanebunt A E, BF æquales; ſimiliter de aliis demonſtrabo.

PROPOSITIO XI.

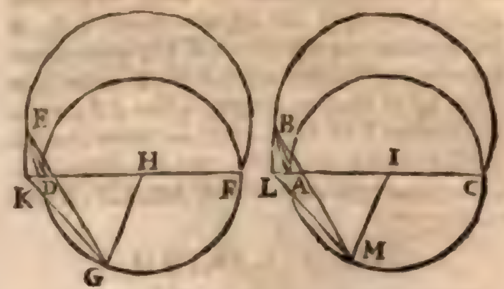
Theorema.

Si diametris circulorum æqualium, inſiſtant perpendiculariter duo ſegmenta ſimilia & æqualia in quibus ſumpti ſint arcus æquales, inæquales medietati & ab iis cadant in circumferentias circulorum lineæ æquales; illa abſcindent arcus æquales.

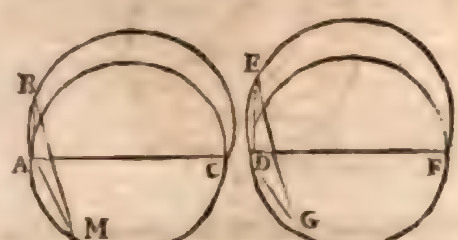


Diametris AC, D F circulorum æqualium, inſiſtant perpendiculariter duo ſegmenta æqualia ABC, DEF; ſumanturque in iis ſegmentis arcus æquales A B, D E, qui ſint minores aut majores medietate arcuum A B C, D E F, & à punctis B, & E cadant in circumferentias circulorum duæ lineæ æquales B M, E G; dico arcus A M, D G æquales eſſe. Demittantur ex punctis B & E, duæ perpendiculares B L, E K, in plana circulorum, quæ (*per defini.4. 11.*) cadent in communes ſectiones, ſeu in diametros quibus inſiſtunt; hæ vel intra circulum cadent, vel extra circulum, vel in ipſam circumferentiam; hi enim tantum tres caſus excogitari poſſunt. Cadant ergo primò intra circulum in puncta L, K; ducanturque lineæ L M, K G; & à centris I & H lineæ I M, H G, item AB, DE.

Demonſtratio. Segmenta ABC, DEF ſupponuntur æqualia, & ſimilia: arcus item A B, DE ſupponuntur æquales, & reliqui BC, E F erunt æquales: quare (*per 29. 3.*) lineæ A B, DE; æquales erunt; & (*per 27. 3.*) anguli BAC, FDE, arcubus æqualibus inſiſtentes æquales erunt. Igitur triangula A BL, D E K, quæ habent angulos K & L rectos, & angulos BAL, EDK æquales, & latera AB, DE æqualia, erunt in omni ſenſu æqualia (*per 26. 1.*) Pariter triangula B M L, EGK, cum ſint rectangula in L & K; erit quadratum lateris B M, æquale quadratis B L, L M; ſicut quadratum EG æquale quadratis E K, K G, (*per 47.*) ſunt autem quadrata BM, EG æqualia, cum lineæ ſupponantur æquales: igitur quadrata B L, L M, quadratis KE, K G æqualia ſunt, à quibus ſi auferas quadrata æqualia BL, EK, reſtabunt quadrata L M, K G æqualia. Denique cum lineæ A I, D H, ſint diametri circulorum æqualium, æquales erunt, & ſubductis æqualibus AL, DK, reliquæ LI KH æquales erunt: quare cum triangula M L I, GKH, ſingula latera æqualia habeant, erunt (*per 8. 1.*) æquianguli LIM, KHG æquales, qui cum ſint in centro, erunt (*per 26.3.*) arcus AM, DG æquales.



Secundò, cadant perpendiculares BL, EK, extra circulum. Cum arcus AB, DE æquales ſint, ut priùs, lineæ A B, D E æquales erunt & anguli CAB, FDE, æqualibus arcubus inſiſtentes æquales erunt: quare reliqui L A B, K D E, erunt æquales: & triangula L B A, K D E ut priùs æqualia erunt in omni ſenſu, eodem modò etiam oſtendam in triangulis rectangulis B L M, EKG, lineas K G, L M æquales eſſe. Denique ſi lineis æqualibus L A, K D, addas ſemidiametros A I, DH æquales; fient lineæ L I, KH æquales: quare cum triangula, L I M, K G H habeant ſingula latera, ſingulis æqualia, (*per 8. 1.*) erunt anguli L I M, KHG æquales, & arcus A M, D G æquales.



Tertiò, perpendiculares cadant in circumferentias, ſintque AB, DE.

Demonſtr. Cum arcus AB, DE, ſupponantur æquales, erunt etiam lineæ AB, DE æquales. In triangulis igitur rectangulis B A M, E D G, (*per 47. 1.*) erunt quadrata BA, AM, æqualia quadrato BM; ſicut quadrata D E, D G, quadrato EG; Sunt autem quadrata B M, E G æqualia, cum lineæ ſupponantur æquales; quare quadrata A B, A M, quadratis D E, D G æqualia ſunt; à quibus ſi ſubtrahas quadrata æqualia AB, DE, relinquentur quadrata æqualia AM, D G: erunt igitur lineæ A M, D G æquales, & arcus pariter AM, DG in circulis æqualibus (*per 28.3.*) æquales erunt.

PROPOSITIO XII.

Si ſegmenta æqualia, & ſimilia inſiſtant perpendiculariter diametris circulorum æqualium, & tam in ſegmentis, quàm in circulis abſcindantur arcus æquales, lineæ conjungentes iſtos arcus æquales erunt.

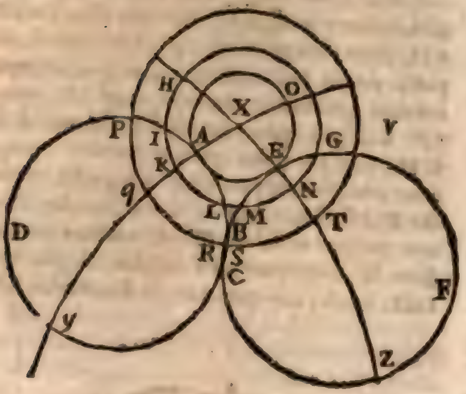
Hæc eſt converſa ſuperioris; ſint ut priùs ſegmenta ſimilia, & æqualia quæ inſiſtant perpendiculariter diametris circulorum æqualium; ſintque

ſintque arcus AB, DE; ſicut AM, DG æquales: dico lineas BM, EG eſſe æqualesr. Pobabimus enim ſicut ſuprà, lineas AB, DE eſſe æquales; unde in ultimo caſu cum triangula BAM, DEG, habeant duo latera AB, DE, item AM, DG æqualia, eò quòd arcus AM, DG æquales ſint, & anguli A & D æquales ſint, ut pote recti; baſes AM, EG æquales erunt (*per* 4. 1.) Eôdem modò applicari poterit demonſtratio aliis caſibus.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si maximi circuli eundem parallelum tangant reliquos verò parallelos ſecent; erunt arcus maximorum inter parallelos eoſdem intercepti æquales: & parallelorum arcus inter maximos intercepti, quâ parte non concurrunt poſt utriuſque contactum, ſimiles.



Sint maximi circuli ABCD, EBCF tangentes eundem circulum AE, in punctis A, & E, & ſecantes alios parallelos IK, NO, Pq, TV in punctis I, L, M, G, P, R, S, V. concurrunt autem hi circuli in B, & C ita ut arcus BRC, BSC ſint ſemicirculi, quamvis id figura non ſatis exprimat; ideoque arcus BEG, LPD ſint ex ea parte quâ non concurrunt circuli maximi; dico quod arcus maximorum AI, AL, EM, EG, inter parallelos intercepti ſunt æquales. Item dico quod arcus inter maximos intercepti quâ parte non concurrunt, hoc eſt arcus IM, LG, PR, SV, eſſe ſimiles, probabo autem eſſe ſimiles arcui AE. Per polum X & per puncta contactus A, & E, ducantur maximi circuli, XAQ, XET.

Demonſtr. Circuli maximi XAQ, XET, per polum X, & per puncta contactuum A & E, du... (*per* 5. *huius*) tranſeunt per polos circulorum ...ximorum ABCD, EBCF, & (*per* 15. 1. *huius*) ...os bifariam, & ad angulos rectos ſecant; quare ...icirculi AQY, ETZ inſiſtunt perpendicula... ...r diametris circulorum ABCD, EBCF. & pa... ...r alij ſemicirculi AXOY, EXHZ, inchoati à ...tactibus, & perfecti donec denuò ſecent eoſ... ...n circulos ABCD, EBCE, (*quod figura plana ſatis exprimere non poteſt*) inſiſtent etiam ex parte, perpendiculariter diametris eorum circulorum, quare ſi intelligantur ductæ li... XG, XI, illæ æquales erunt (*ex defin. poli,*)

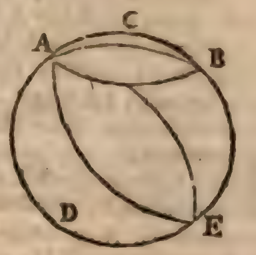
& (*per præced.*) arcus EG, AI æquales erunt. Pariter oſtendam arcus AP, EV æquales eſſe; & cum (*per* 9. *huius*) arcus REV, PAS, item IAL, MEG, ſecentur bifariam à circulis maximis XAY XEZ, arcus IA, AL, ME, EG, item arcus PA, AS, RE, EV æquales erunt; quod erat primum.

Secundò cum arcus IAL, MEG, ſint oſtenſi æquales, erunt eorum ſubtenſæ æquales; quæ cum ſint etiam ſubtenſæ in circulo IKNG, erunt arcus IKL, MNG æquales; pariter eorum dimidia IK, KL, MN, NG æqualia. Si ergo arcui KM, ex una parte addas arcum MN, & ex alia parte arcum æqualem IK, erunt IM, KN æquales; ſed KN (*per* 10. *huius*) eſt ſimilis arcui AE, ergo & IM, eidem AE ſimilis erit. Idem oſtendere poſſum de LG, PR, SV; quod erat ſecundum.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Circulum maximum deſcribere, qui minorem datum in aſſignato puncto tangat.



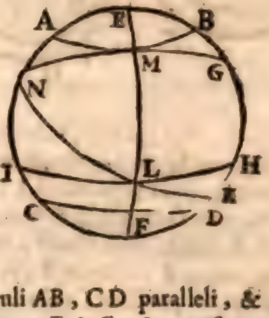
Sit minor circulus AB cujus polus C ſitque deſcribendus circulus maximus eum tangens in puncto A. Per punctum A, & polum C, deſcribatur maximus circulus ABD (*per* 20. 1. *huius*) ſitque AD quadrans; ex D ut polô, intervallô AD, deſcribatur circulus AE, dico illum eſſe maximum; & tangere circulum AB in puncto A.

Demonſtr. Circulus AE deſcriptus eſt intervallô quadrantis DA; ergo (*per* 17. 1. *huius*) maximus eſt; quia autem circulus ABD tranſit per polos utriuſque circuli AB, AE, (*per* 3. *huius*) ſe tangunt in puncto A.

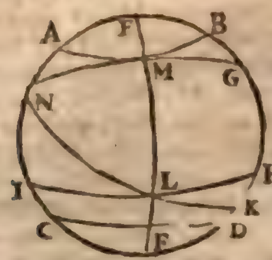
PROPOSITIO XV.

Problema.

Per datum punctum inter datos circulos parallelos æquales conſtitutum, maximum circulum deſcribere qui utrumque circulum tangat.



Sint circuli AB, CD paralleli, & æquales; poli communes E & F, & punctum G datum



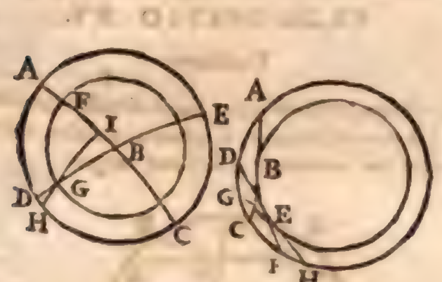
deſcribendus proponitur maximus circulus, tranſiens per punctum G, & tangens utrumque circulum AB, CD. Per punctum G, & polum E deſcribatur (*per 20. 1. hujus*) maximus circulus EGF; ſintque GK, BH quadrantes; Ex polo F, intervallo F H, deſcribatur parallelus H I, & ex puncto G ut polo, intervallo GK, deſcribatur maximus circulus K L N, qui neceſſariò ſecabit parallelum HI. Cum enim BH ſit quadrans, AI erit etiam quadrans (*per 10. hujus*) unde BI erit quadrante major: ergo circulus K L incipiens infra H I, debet productus cadere in N, ſupra punctum I, quare ſecabit parallelum HI, in puncto L. Per punctum L, & polum E, deſcribatur circulus maximus FLME, ſecans parallelum A B in puncto M, tum ex L ut polo, intervallo L M, quod eſt quadrans, deſcribatur maximus circulus; qui (*per 3. hujus*) circulum A B tanget, & (*per 7.*) alium parallelum æqualem. Dico illum circulum tranſire per punctum G.

Demonſtratio. Cum circulus NL deſcriptus ſit ad intervallum quadrantis, punctum L diſtabit quadrante à puncto G. Arcus autem ML eſt quadrans, cum ſit æqualis arcui B H, qui ſuppoſitus eſt quadrans: quare circulus deſcriptus ex L, intervallo quadrantis, tranſit per punctum G, quamvis plurimi ſint caſus propoſitionis hi tamen non mutant demonſtrationem.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Maximi circuli, ſimiles arcus parallelorum intercipientes, aut ambo per polos eorum tranſeunt; aut eundem parallelum ambo tangunt.



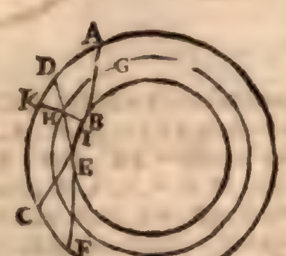
Sint in prima figura duo circuli maximi ABC, D B E, intercipientes in parallelis F G, AD arcus ſimiles FG, AD. Dico primò ſi unus, nempe AB, per polum B parallelorum tranſit, alium tranſire etiam per polum B: ſi enim B ubi concurrunt non eſt polus, ſit punctum I polus a quo ducatur circulus I G H.

Demonſtratio. Circuli maximi A I, H I, per polum I parallelorum tranſeunt & intercipiunt (*per 10. hujus*) arcus AH, FG, ſimiles: ſed arcus A D ſupponebatur ſimilis arcui F G; ergo etiam A H erit ſimilis arcui A D, quod eſt abſurdum.

Secundò, circuli ABC, DEF in ſecunda figura intercipiant in circulis parallelis, arcus ſimiles A D, B E, & circulus A B C tangat parallelum BE. Dico quod circulus D E F eundem parallelum tanget in puncto E, ſi enim non tangit, ſed ſecat parallelum BE, in puncto E; ducatur circulus G E H, tangens parallelum B E, in puncto E. Hic circulus non tranſit per D, alioquin arcus D E, G E eſſent ſemicirculi & conſequenter A B, BC æquales ipſi GE (*per 13. hujus*) eſſent ſemicirculi, unde ABC eſſet circulus & puncta A & C coinciderent, quæ omnia ſunt contra ſuppoſitionem.

Demonſtratio. Arcus AD, BE ſunt arcus ſimiles ex ſuppoſitione, ſed (*per 13.*) arcus AG, B E ſunt etiam ſimiles; ergo arcus A D, A G ſunt etiam ſimiles; pars & totum quod eſt abſurdum.

Tertiò circuli maximi ABC, DEF in figura ſequenti intercipiant in parallelis arcus ſimiles AD, GH, ita ut uterque circulus parallelos ſecet & per polos eorum non tranſeat: dico quod uterque eundem parallelum minorem tangit. Et primo (*per 8. hujus*) quia circulus A B obliquus eſt ad G H, cum per polos ejus non tranſeat; tanget duos minores ipſi parallelos. Tangat BE in puncto B, deſcribatur (*per 15. hujus*) circulus maximus tangens circulum BE, & tranſiens per punctum H; dico quod talis circulus coincidet cum DEF, ſi enim non coincidit, ſit ille circulus KHI.



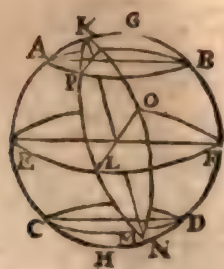
Demonſtr. Cum circuli K H I, ABC, tangant eundem circulum BE, erunt arcus AK, G H ſimiles (*per 13. hujus*) ſed AD, G H ſupponebantur ſimiles: igitur arcus AK, AD ſimiles eſſent; pars & totum quod eſt abſurdum: igitur, circulus tranſiens per punctum H, & tangens parallelum BE, coincidit cum D F.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Circuli paralleli inter quos, & circulum maximum intercipiuntur arcus æquales maximorum circulorum, ſunt æquales: Ille autem major eſt inter quem & maximum ipſi parallelum intercipiuntur arcus minores.

Sit



Sint paralleli circuli A B, C D, E F; quorum poli G & H; & circulus E F ſit maximus. Item arcus EC, AE ſint æquales: dico circulos AB, DC æquales eſſe. Supponatur primò circulus ADB, per polos parallelorum tranſire, & conſequenter eos bifariam ſecare (*per* 15. *hujus* 1.) ſunt igitur AB, EF, CD diametri.

Demonſtr. Plana parallela AB, CD, EF, (*per* 16. 11.) faciunt ſectiones A B, EF, CD parallelas, & cum arcus AE, EC ſint æquales: erunt arcus AGB, CHD æquales: & (*per* 29. 3.) lineæ AB, CD æquales erunt: & conſequenter circuli, quorum ſunt diametri. Quod ſi arcus AE, minor eſſet arcu EC; arcus AGB, major eſſet arcu CHD, linea AB, major eſſet linea CD, quia uterque arcus AGB, CHD, minor eſt ſemicirculo, & conſequenter circulus AB, major eſſet CD.

Secundò ſi circulus maximus ut K L N. Non tranſeat per polos parallelorum deſcribatur circulus maximus ABDC per polos parallelorum, & per polos circuli K L N tranſiens, qui perpendiculariter inſiſtet diametro K N. Dico ergo quod ſi arcus L P, LM ſint æquales, circuli AB, C D æquales erunt.

Demonſtratio. Cùm circulus ACDB, tranſeat per polos circulorum EF, & KN; circuli EF, & K N viciſſim per ejus polos tranſeunt: (*per Corol.* 1. 15. 1. *hujus*) quare punctum L circuli ACDB polus erit; erunt ergo L K, L N quadrantes, & ablatis æqualibus arcubus LP LM, reſtabunt MN, PK æquales, æquales etiam ſunt arcus HN, GK, quare ſi intelligantur duci lineæ G P, H N, illæ (*per* 11. *hujus*) æquales erunt, quæ cum ſint ductæ ex polis circulorum; illi æquales erunt.

Si verò arcus LM, minor eſſet arcu L P, reſtaret arcus PK minor quàm M N, & conſequenter linea GP minor quàm H M.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

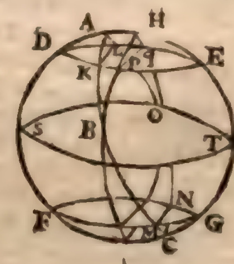
Arcus maximorum circulorum, intercepti inter circulos parallelos æquales, & circulum maximum ipſis parallelum æquales ſunt.

In figura ſuperiori ſint circuli AB, CD paralleli, & æquales, & E F maximus, ipſis parallelus, dico arcus AE, E C eſſe æquales: ſi enim AE eſſet major: circulus A B minor eſſet contra ſuppoſitionem. Idem dicendum eſt de arcubus P L, L M.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Circulus maximus parallelos minores ſecans, & per polos eorum non tranſiens, eos bifariam non ſecat. Eaque parallelorum ſegmenta majora ſunt, quæ ſpectant ad polum viciniorem.



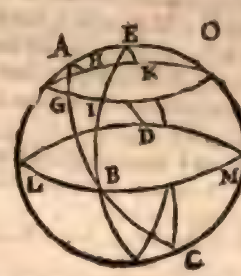
Circulus maximus ABC ſecans parallelos DE, FG, non tranſeat per polos eorum H & I. Dico eos non ſecari bifariam: ducatur enim per polos H & I, circulus HBI.

Demonſtr. Circulus HBI, parallelos DE, FG, ſecat bifariam, hoc eſt arcus PEq, eſt ſemicirculus; ergo arcus KEL major eſt ſemicirculo, ſpectat autem ad polum H igitur ſegmentum majus KEL, ſpectat polum H, viciniorem.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Maximus circulus non tranſiens per parallelorum polos; magis inæqualiter ſecat viciniores polo.



Circulus maximus ABCD non tranſeat per polos parallelorum LM, GO; dico quod magis inæqualiter ſecat parallelum GO, viciniorem polo E. Ex polo E, ducantur circuli maximi EIB, EMC.

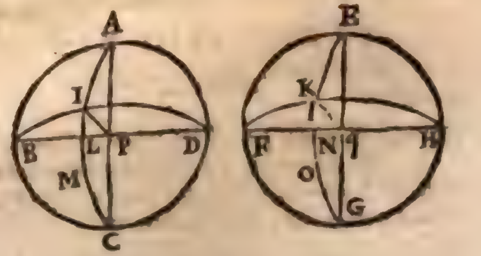
Demonſtr. Arcus IO, BM, (*per* 10. *hujus*) ſunt ſimiles; ſicut & arcus DM, KO: igitur totus arcus IOK ſimilis eſt arcui BMD: ſed arcus GOH, major eſt arcu IOK: ergo GOH, major eſt, quàm ut ſit ſimilis arcui BMD.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

In Sphæris æqualibus, ille circulus ad alium inclinatior erit cujus polus ab alterius polo minùs diſtabit, & æqualis polorum diſtantia, æqualem inclinationem producet.

Digitized by Google



In Sphæris æqualibus A B C D, EFGH, ſint circuli BI D, FKH, inclinati ad circulos ABCD, EFGH. Dico quod ſi polus circuli B I D minus diſtet à polo circuli ABCD; quàm polus circuli FKH à polo circuli EFGH; quod inquam circulus BID inclinatior erit ad ABCD, hoc eſt angulus inclinationis planorum BID, ABCD acutior erit angulo inclinationis planorum FKH, EFGH. Ex punctis B & F communibus interſectionibus circulorum intervallo quadrantis ducantur circuli AIC, EKG, qui maximi erunt & cum circuli A B C D, BID, tranſeant per polum B circuli A I C, viciſſim circulus A I C per polos eorum tranſit (*per cor.1.15. 1. hujus*) idem dico de circulo E K G. Sit igitur L polus circuli ABCD, & M polus circuli BID, N polus circuli EFG & O, circuli F K H. Ex centris P & q ducantur lineæ PI, qK.

Demonſtr. Quoniam circuli ABCD,BID tranſeunt per polos B & D, circuli A I C ad ipſum recti ſunt (*per 15.1. hujus*) & (*per 19. 11.*) communis ſectio B D ad planum A I C recta erit: & anguli DPA, DPI recti ſunt; (*per 6. def.11.*) angulus API eſt inclinatio planorum ABCD, BID. Ita angulus EqK, eſt angulus inclinationis planorum EFGH, FKH. Supponitur autem ML, diſtantia poli à polo, minor eſſe quàm NO; & cum M I, L A ſint quadrantes ablato communi L I erunt arcus M L, AI æquales: ſimiliter æquales erunt N O, KE. Ergo arcus A I minor eſt arcu KE; & quia anguli API, EqK, ſunt ad centrum Sphæræ ſeu maximorum circulorum,angulus API, minor erit angulo EqK.

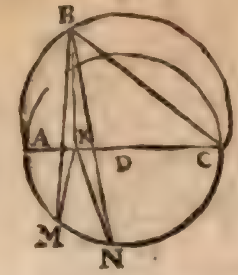
Quod ſi arcus LM, æqualis eſſet arcui NO, anguli quoque inclinationis æquales eſſent.

COROLLARIUM.

Sequitur ſi ex interſectione maximorum circulorum quaſi polo, deſcribatur maximus circulus, quòd arcus illius interceptus inter prædictos circulos, erit menſura inclinationis circulorum ut A I eſt menſura inclinationis circulorum ABCD, BID. Dum autem loquimur de angulo quem comprehendunt duo circuli in Sphærâ, intelligimus ſemper angulum inclinationis planorum.

LEMMA I.

Si ex puncto quod circuli polus non ſit, ducantur in ejus circumferentiam plurima lineæ: ea eſt breviſſima, quæ attingit lineam ductam per ejus centrum, & per punctum in quod cadit perpendicularis, ea brevior aliis quæ iſti vicinior, ea longiſſima quæ iſti oppoſita.

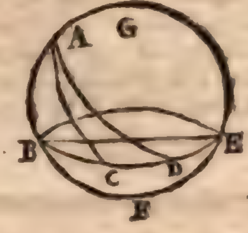


Ex puncto B, quod non ſit polus circuli AMNC, in circumferentiam ejus, cadant plurimæ lineæ BA, BM, BN, BC, ductâque perpendiculari B K, linea AKDC, tranſeat per centrum D. Dico lineam BA, eſſe breviſſimam, BC longiſſimam; BN, majorem quàm BM.

Demonſtr. Cum enim punctum K non ſit centrum circuli AMNC, alioquin punctū B eſſet polus; AK erit breviſſima KC maxima, K N major quam KM, (*per 7. 3.*) quare quadratum ex AK, minimum erit, quadratum ex K C maximum, quadratum ex KN majus quadrato ex KM,& addito communi quadrato B K, erunt quadrata ex B K, K C, maxima, & quadrata ex BK KA, minima, & quadrata ex BK, KN, majora quadratis ex BK, KM, ſed primis (*per 47. 1. Eucl.*) æquale eſt quadratum BC, ſecundis quadratum ex BA, &c. ergo quadratum ex A C maximum eſt, A B minimum, BN majus quam B M, & conſequentes lineæ eodem modò ſe habent. Alij caſus faciles ſunt nempe ſi perpendicularis B K cadat in peripheriam, aut extra, advocanda erit octava tertij Euclidis eademque methodus adhibenda.

LEMMA II.

Si ex quocumque puncto, quod alicujus circuli polus non ſit, ad ejus peripheriam plurimi arcus ducantur; maximus erit, qui per polos eius tranſit, illi propinquior remotiore major erit.



Ex puncto A, ad periphariam circuli BCD, arcus maximorum circulorum ducantur; nempe AB,AE,AD,AC. dico A G E tranſeuntem per polum G maximum eſſe; A D majorem eſſe quàm AC, modò quilibet ſemicirculo minor ſit.

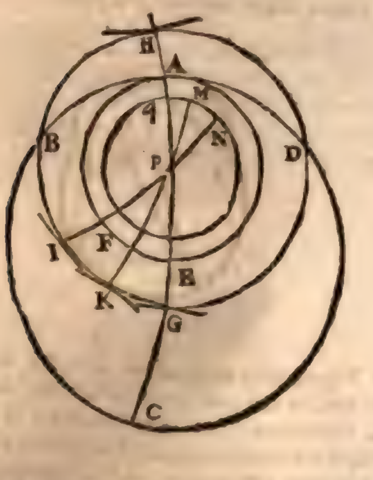
Demonſtratio. Cum circulus A G E tranſeat per polos circuli B C D, bifariam & perpendiculariter eum ſecabit: igitur B E erit diameter, & ſegmentum B G E perpendiculariter inſiſtet diametro circuli B C E, & cum punctum A non ſit polus, arcus B A non erit media pars ſegmenti B G E. Quare (*per lemma præcedens*) erit linea A E ſi duceretur maxima, A D major quam A C: & A B minima, igitur arcus circulorum æqualium nempe maximorum, quos prædictæ lineæ ſubtendunt (*per 28. 3.*) ita ſe habebunt

bebunt, ut AGE ſit maximus, AD major quam AC & AB minimus modò ſint minores ſemicirc.

PROPOSITIO XXII.

Si in Sphærâ maximus circulus minorem tangat, & minorem alium parallelum in eodem hemiſphærio ſecet; ita ut polus circuli tangentis ſit inter utrumque parallelum, circuli maximi tangentes majorem parallelum, erunt inclinati, ad primum illum circulum tangentem: illeque magis erit inclinatus, qui tanget in eo puncto, in quo minus ſegmentum dividitur biſariam, ille rectiſſimus qui tanget parallelum in eo puncto in quo majus ſegmentum dividitur biſariam; ille magis inclinabitur, qui in loco remotiore eum tanget, & poli circulorum tangentium majorem parallelum erunt in eodem circulo minoribus parallelo, & ipſis minoribus etiam minore.

Circulus ABCD maximus tangens parallelum AF, ſecet parallelum HBGD, deſcriptum in eodem hemiſphærio: ſitque polus E, circuli tangentis ABCD, inter utrumque parallelum poſitus: ſint item plurimi circuli tangentes majorem parallelum HIKG, in punctis H, I, K, G, ſitque punctum H, illud in quo minus ſegmentum BHD diviſus eſt biſariam, dico circulos tangentes parallelum HBGD, eſſe inclinatos ad circulum ABCD; item eum qui tangit in H eſſe maximè inclinatum, eum verò qui tangit in puncto G eſſe rectiſſimum, & alios eſſe magis inclinatos qui tetigerint in puncto viciniori puncto H, & omnium prædictorum circulorum tangentium polos, eſſe in eodem circulo minore, quàm ſit AF, ipſi tamen parallelo.



Per polum E circuli ABCD, & per contactum A, ducatur maximus circulus EA, qui (*per 5. hujus*) tranſit per punctum P, polum circuli AF, quod punctum P eſt etiam polus circuli HBG, quare circulus EA biſariam ſecat ſegmenta BHD, BGD in punctis G & H.

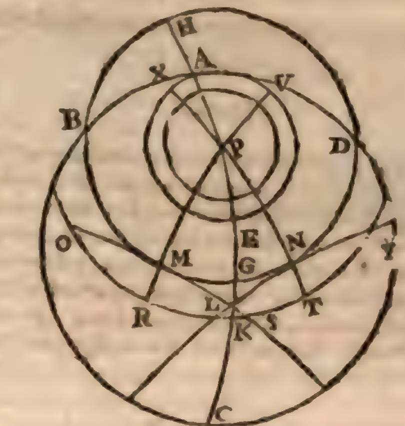
Demonſtratio. Punctum E eſt polus circuli ABCD, igitur EA, eſt quadrans, polus autem circuli tangentis in G, eſt in circulo EA v. g. in q, ita ut Gq ſit quadrans: debet ergo eſſe intra circulum AF; & quia arcus à puncto K ad polum circuli tangentis in K eſt quadaans, & talis polus eſt in circulo tranſeunte per polum circuli minoris qui tangitur; ſublatis arcubus æqualibus KP, GP reſtabunt uſque ad polos q, & M, arcus æquales; igitur poli circuli tangentis in K, erit in eodem circulo minore deſcripto ex P, tanquam polo, idem dicendum de reliquis omnibus circulis tangentibus.

Deinde quia arcus, Eq minor eſt quadrante, ſeu E, non eſt alius polus circuli qMN, ſi ex E, ducerentur arcus maximorum circulorum uſque ad ejus circumferentiam; Eq eſſet maximus; EM maior, quàm EN, (*per lemma 2. hujus*) quare (*per 21. hujus*) circulus tangens in H, eſt minimè inclinatus, tangens in G, maximè, & prout reliqui tetigerint in puncto viciniore ipſi H, minus inclinabuntur quia poli eorum magis diſtabunt à polo.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Iiſdem poſitis ſi arcus circulorum tangentium intercepti inter contactus & nodos, æquales fuerint; circuli tangentes ſimiliter inclinati erunt.



Sit maximus circulus ABC, cujus polus E tangens parvum circulum in A; ſecans illi parallelum GBHD, in eodem hemiſphærio deſcriptum, & pariter polus E ſit inter utrumque parallelum, & circuli maximi tangant parallelum GBHD in punctis MN, ſecantes circulum ABCD, in O & Y, quos nodos vocabimus, ſintque arcus MO, NY, æquales: dico circulos OM, YN eſſe ſimiliter inclinatos ad circulum ABCD. Ducatur ut priùs circulus EPA per polos E, & P, qui tranſit per contactum A; ducantur item MP, NP, qui (*per 5. hujus*) tranſeunt per polos circulorum tangentium & ad angulos rectos ipſos ſecant: debemus oſtendere arcus GN, GM æquales eſſe, quia hoc poſito (*per præcedentem*) circuli ſimiliter inclinati erunt.

Demonſtratio. Si arcus NP, MP intelligantur produci donec NX, MV ſint ſemicirculi, erunt inſiſtentes diametris circulorum tangentium; nam maximi circuli ſe biſariam ſecant, punctum autem P non eſt polus circulorum tangentium, & ſupponuntur arcus æquales YN, MO, igitur (*per 12. hujus*) eſſent lineæ PY, PO, æquales, quare circulus deſcriptus ex P, tanquam polo, per punctum O, tranſit etiam per Y, & eſſet parallelus circulo GBH, & ſegmentum BHD,

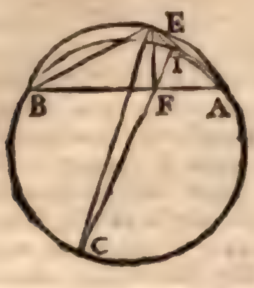
dividitur biſariam in H, & BGD, biſariam in G, igitur O K Y, dividitur biſariam in K. Pariter circuli N P, M P, cum tranſeant per polos circulorum tangentium, & circuli OKY, biſariam dividunt arcus YL, SO, qui conſequenter æquales erunt, quia eorum medietates OM, NY, & ſuppoſitione æquales ſunt; unde ſi ſubtenderentur lineæ LY, SO, illæ æquales eſſent, ſed tales lineæ ſubtendunt etiam arcus LTY, O R S: ergo arcus LTY, ORS, & eorum medietates TL, SR æquales ſunt, & ablato communi LS, erunt arcus TS, LR æquales, ſed cum arcus YK, KO eſſent æquales, eo quod circulus E P tranſeat per polum E, circuli ABCD; & per polum P, circuli OKY; ablatis æqualibus T Y, O R: item TS, LR; reſtabunt arcus KS, KL æquales, quibus ſi rurſus addas æquales ST, LR fient arcus TK, KR æquales. Unde erunt etiam æquales arcus M G, G N, *(per præcedentem)* circuli tangentes ſimiliter erunt inclinati.

THEODOSII SPHÆRICORVM LIBER TERTIVS.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Si circuli ſegmentum inſiſtat perpendiculariter lineæ quæ circuli diameter non ſit: & à puncto quod ſegmenti dimidium non ſit, in majorem circuli circumferentiam cadant plurimæ lineæ; omnium minima eſt, quæ minorem ſegmenti arcum ſubtendit, creſcuntque uſque ad circuli diametrum, decreſcuntque donec ad eam perveniat quæ majorem arcum ſegmenti ſubtendit.



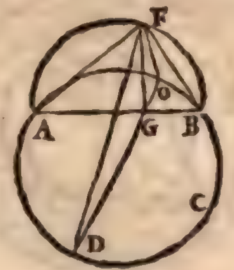
Supra lineam AB, quæ non ſit diameter circuli ACB, inſiſtat perpendiculariter ſegmentum circuli A E B, in quo aſſumatur punctum E, quod ejus dimidium non ſit, à quo ad majorem circumferentiam A C B cadant plurimæ lineæ: dico minimam eſſe A E quæ ſubtendit minorem arcum EA; maximam E C, ductam ad diametrum FC tranſeuntem per punctum F, in quod cadit perpendicularis E F. Creſcere item lineas à puncto A uſque ad C, & decreſcere à puncto C ad punctum B. Intelligatur enim circa puncta I, E, C, deſcriptum circuli ſegmentum quod inſiſtat perpendiculariter diametro IC, cum linea FE, ſit perpendicularis.

Demonſtr. *(Per cor. 12.)* EC maxima eſt, & quæ illi vicinior erit, major erit: ergo lineæ creſcunt ſemper ab A uſque ad C; decreſcunt autem à C uſque ad B; immò ſi ulteriùs progrederemur decreſcerent uſque ad I. *(Ut vidimus in primo lemmate ante penultimam præcedentis.)*

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si ſegmentum circuli inſiſtat recta linea, in alio circulo ducta; quæque non ſit iſtius ſecundi circuli diameter; ſitque ſegmentum prioris circuli inclinatum ex parte ſegmenti non majoris ſemicirculo eadem accident quæ prius.



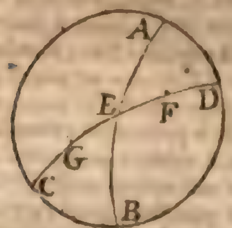
Segmentum AFB inſiſtat lineæ AB in circulo ABC ductæ quæ non eſt circuli ABC diameter, & inclinatum ſit ex parte ſegmenti A O B, non majoris ſemicirculo, hoc eſt ita ut linea FG, recta ad planum ABG, cadat in minus ſegmentum AOB ductâ diametro GD, in circulo ABC; dico quod ſi ſumatur punctum F, quod non ſit dimidium arcus AFB, & cadant plurimæ lineæ in circumferentiam majorem, nempe A C B, quod inquam FB minima erit; F D, maxima, &c. Producatur diameter D G uſque ad O, intelligaturque punctum F, in eadem Sphæra.

Demonſtr. *(Per Lemma I. ante prop. 17. præcedentis lib.)* FD maxima eſt, FO minima, & quæ proximior erit diametro GD major erit.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si duo circuli maximi ſe mutuò ſecent, & à communi ſectione in utroque æquales arcus aſſumpti ſint, lineæ hujuſmodi arcus connectentes æquales erunt.



Duo circuli maximi AB, CD, ſe mutuò ſecent in puncto E; abſcindanturque arcus æquales E A, EB, EF, EG, dico lineas BG, AF æquales eſſe. Ex puncto E, ut polo, intervallo majorum arcuum EA EB. deſcribatur circulus ACBD.

Demonſtr. Cùm circuli A B, C D tranſeant per polum E, circuli A C B D bifariam eum ſecabunt, & perpendiculariter (*per 15. 1. hujus*) quare perpendiculariter ejus diametro inſiſtent: eruntque ADB, ACB; DBC, DAC, ſemicirculi, & arcus A D, C B æquales. Cum ergo ſegmentum CD perpendiculariter inſiſtat diametro circuli D A C B, aſſumptaque ſint puncta G, & F, æqualiter à punctis D & C diſtantia, item arcus AD, CB æquales ſint, erunt (*per 12. 2. hujus*) lineæ AF, BG æquales.

L E M M A.

Si ſumantur duo puncta æqualiter diſtantia à medio lineæ ſubtenſæ alicui arcui; per quæ ducantur duæ parallelæ quarum una conveniat cum perpendiculari in medio excitatâ, altera verò non conveniat; quæ convenit minorem arcum abſcindit.



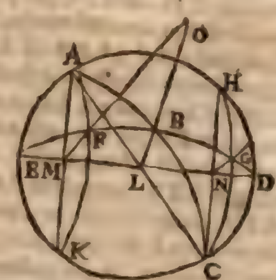
Linea AC ſubtendatur arcui A B C, quæ bifariam dividatur in puncto D. Sumantur autem lineæ DE, DF, æquales; & ducantur duæ parallelæ EG, FH, quarum una, nempe E G conveniat cum perpendiculari DB productâ, FH autem non conveniat verſus eaſdem partes; dico arcum GB minorem eſſe arcu B H.

Demonſtr. Si ducerentur perpendiculares EK, FI, eſſent arcus KB, BI æquales ut facilè eſt demonſtratu; ſed arcus BG minor eſt arcu KB, & BH major arcu B I; igitur arcus B H, major eſt arcu B G.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Si à communi interſectione circulorum maximorum, in eorum altero ſumantur puncta æqualiter diſtantia, per quæ ducantur duo plana parallela, quæ alium circulum interſecent in minori diſtantiâ à communi interſectione, & horum planorum unum conveniat cum interſectione circulorum productâ, aliud verò non conveniat; quod convenit minorem arcum abſcindit.



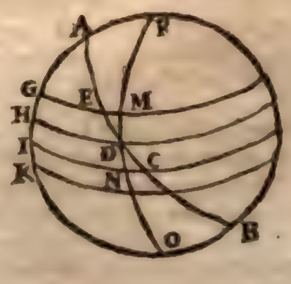
Duo maximi circuli ABC, EBD ſe mutuò interſecent in puncto B, in eorum altero duo arcus æquales AB, BC abſcindantur, tum per puncta A, & C, ducantur plana C G H, AFK, (*quæ per 1. 1. hujus*) circulos in Sphæra facient; hi duo circuli alterum circulum EBD, ſecent in punctis F, & G, ita tamen ut arcus BF, BG minores ſint arcubus AB, BC; unde ex puncto B, ut polo; intervallo BA, ductus circulus non attinget puncta G & F, cum autem circuli ABC, DBE tranſeant per polum circuli A E C D, bifariam eum ſecabunt, eruntque communes interſectiones AC, DE, diametri per centrum L tranſeuntes. Item linea L B recta eſt ad planum A E C D. Dico ergo quod ſi planum AFK convenit cum L O, productâ ad partes O, arcus BF, minor ſit arcu BG.

Demonſtr. Cum planum AFK ſupponatur convenire cum linea LO, in puncto O, punctum O erit in plano A F K; ſed etiam illud eſt in plano EBD, ergo punctum O erit in communi interſectione planorum; hoc eſt in linea MF; cum autem planum CGH non conveniat cum LO, neque N G, quæ (*per 16. 11. Eucl.*) eſt parallela ipſi MF, cum ea conveniet. Sunt etiam lineæ M L, L N æquales, eò quod triangula AML, LCN habeant angulos alternos ad M, & N, & oppoſitos ad L æquales, & latera AL, LC æqualia, quare (*per lemma præcedens*) arcus BF, minor erit arcu BG.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si arcus æquales ſumantur in circumferentia maximi circuli, & per punctum quod neque ſit ejus polus, neque ſit in ejus circumferentia, deſcribatur maximus circulus ad ipſum rectus; item ex eo puncto ut polo per extremitates arcuum, circuli paralleli ducantur; illi arcus inæquales abſcindent in hoc ultimo circulo, & qui à puncto prædicto magis diſtabit major erit.



In circumferentia maximi circuli A B, ſumantur arcus æquales C D, D E, & per punctum F, quod neque ſit in ejus circumferentia, neque ſit ejus polus, ducatur circulus F A B ad A B rectus. Item ex eodem puncto F, ut polo, deſcribantur paralleli EG, DH, CI, qui omnes ſint in eodem hemiſphærio; ita ut KN ſit maximus circulus illis parallelus. Dico quod iidem paralleli abſcindent in eodem circulo F A B, per polum F tranſeunte, arcus G H, H I, inæquales, ita ut arcus H I propior circulo maximo K N, major ſit quàm H G; per punctum D medium, & per polum F ducatur circulus maximus.

Demonſtr. Cum duo circuli maximi A B, FO ſe interſecent, ſumptique ſint arcus æquales E D, D C, & per C, & E ducta ſint plana parallela, ſcilicet circulorum GM, IC, ita ut ſi intelligeretur ex centro Sphæræ, duci linea per interſectionem D, tranſiens, cum ea conveniret planum GM, non autem I C, (*per 4. hujus*) arcus M D, minor erit arcu DN; ſed arcus MD, æqualis eſt (*per 10. 2.hujus*) arcui HG; ſicut DN, arcui HI, ergo arcus GH, minor eſt arcu H I.

COROLLARIUM.

Ex hoc vides quare licèt ſol circa ſolſtitia percurrat æquales arcus iis quos percurrit circa æquinoctia, non tamen tanta fiat parallelorum, ſeu declinationis mutatio.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si in circumferentia circuli maximi ſumantur arcus æquales; & per punctum quod polus ejus non ſit, ducantur per extremitates arcuum circuli maximi, illi inæquales arcus abſcindens in alio circulo maximo, cujus punctum illud polus eſt, illeque arcus major erit qui ex arcu viciniore, ipſi polo proveniet.



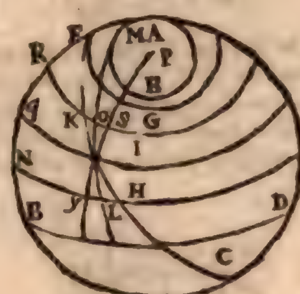
In circumferentia circuli A B ſumantur arcus æquales D I, D C, & ex puncto E, quod circuli A B polus non ſit, ducantur circuli maximi EIG, EDF, ECL, ita tamen ut HF ſit circulus maximus, cujus E polus eſt, & puncta I, D, C ſint in eodem hemiſphærio; dico arcum GF provenientem ex arcu DI, propiore ipſi polo E, majorem eſſe arcu F L, Per I, D, C ducantur paralleli IR, Dq, CP ex polo E; & quia (*per præcedentem*) arcus Pq major eſt arcu qR, abſcindatur arcus qS, æqualis arcui qR, ducaturque parallelus S O.

Demonſtr. Cum arcus DX, DV (*per 10. 2.hujus*) arcubus æqualibus qS, Rq æquales ſint, æquales erunt inter ſe. Item DI, & DC ſupponuntur æquales, quare (*per 3. hujus*) ſi ducerentur lineæ XI, VC, illæ æquales eſſent; aliunde cum circulus maximus LE tranſeat per polum paralleli SO, hic inſiſtet perpendiculariter circulo maximo EL, eſt autem OL ſi perficeretur circumferentia major ſemicirculo, ſi videlicet perficeretur donec iterum concurreret cum eodem parallelo SO, cum circulus H F ſit maximus; quare (*per 1. hujus*) linea VO minor erit quam VC; ergo minor quam IX, igitur linea major IX, ex minori circulo RX, ſegmentum majus abſcindit quàm ut ſimile ſit, ſegmento VO, ſed (*per 10. 2. hujus*) arcus IX, G F ſunt ſimiles ſicut VO, & FL: ergo arcus GF major eſt quàm ut ſimilis ſit arcui F L.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si circulus maximus parallelum minorem tangat, & maiorem ſecet, in puncto in quo alius circulus maximus eum tangit, ſumanturque in hoc circulo maximo arcus quales in eodem hemiſphærio, ducanturque paralleli: illi in primo circulo tangente, arcus inæquales abſcindent, & vicinior polo minor erit.



Circulus ABC tangat circulum minorem AE, & ſecet circulum F G in puncto F, in quo alius circulus F I C eundem parallelum FG, tangat. Sumantur in circulo FC arcus æquales HI, IK, in eodem hemiſpherio in quo eſt polus parallelorum. Dico quod ſi per puncta K, I H ducantur paralleli NH, Iq, RK, arcum N q majorem eſſe arcu qR, per punctum I. Ducatur circulus IM, tangens minorem circulum AE, item per polum P ducatur circulus I P.

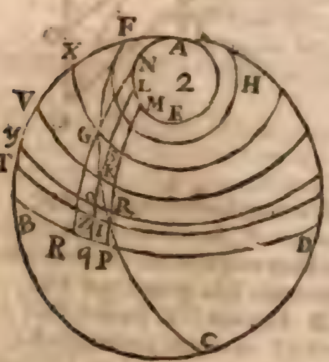
Demonſtr. Ex puncto I ductus eſt circulus maximus I P, rectus ad plana parallelorum N H, RS, cum per eorum polum tranſeat. Quare (*per 2. lemma ante 17. 2. huius*) arcus I Y minimus erit, & IL minor quam HI, & IO minor quàm I K; quia autem ducti ſunt duo majores circuli F I C, ML, ſe interſecantes in puncto I, ſuntque ſumpti in eorum altero arcus æquales I H, I K, ductaque ſunt plana parallela, &c. (*ſecundum propoſitionem 4 huius*) erit arcus IO minor quàm I L, ſed (*per 13, 2.huius*

2 *hujus*) arcus IO, qR, item IL, qN ſunt æquales: ergo arcus Nq, major eſt quàm qR.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Iiſdem poſitis ſumptiſque in circulo tangente majorem parallelum, arcubus æqualibus; ſi ducantur per eorum extremitates maximi circuli tangentes minorem parallelum; illi circuli tangentes intercipient in maximo parallelorum arcus inæquales, illeque major erit, qui ex arcu viciniore ipſi polo oritur.

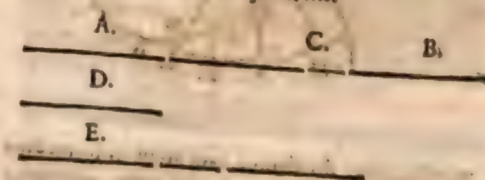


Circulus ABCD tangat minorem parallelum AE, in puncto A; & ſecet majorem FH in F; ſit etiam circulus FC tangens eundem parallelum FH, in F, & in eo ſumantur arcus æquales GK, KI, tum per puncta G, K, I ducantur circuli maximi RGN, qKL, PIM, tangentes minorem parallelum AE, in punctis M, L, N; dico arcum qP minorem eſſe arcu Rq. Ducantur per puncta G, K, I, circuli paralleli GX, KV, IT, & quia (*per præcedentem*) arcus TV major eſt arcu VX, abſcindatur arcus VY, æqualis arcui VX; erit arcus KO æqualis arcui KS, quia (*per* 15.2. *hujus*) KO, & KS æquales ſunt arcubus æqualibus Vy, VX.

Demonſtr. Cùm arcus KS, KO; item KG, KI æquales ſint (*per* 3. *hujus*) lineæ GS, OI, ſi ducerentur æquales eſſent; ſed OI major eſt quam OR, nam ſegmentum paralleli RY inſiſtit circulo RM, & inclinatum eſt ex parte M, quod patet ex eo quod ſi duceretur per polum 2. & per punctum R circulus maximus, ille tranſiret ad partes E, circumferentia etiam RP, producta major eſt ſemicirculo, cum BD ſit parallelorum maximus; ideoque (*per* 2. *huius*) OR eſt minima omnium cadentium ex O ad circumferentiam RP: quare OI major etiam eſt quàm OR; & conſequenter GS, major eſt quàm OR: Igitur GS major ex minori parallelo XS, majorem arcum GS abſcindet, quàm ut ſimilis ſit arcui OR, quem minor linea abſcindit ex majori parallelo YR; ſed arcus GS ſimilis eſt arcui Rq, & OR arcui Pq (*per* 13. 2. *huius*) ergo Rq, maior eſt quàm Pq.

LEMMA.

Datis duabus magnitudinibus inæqualibus invenire intermediam, quæ alteri cujuſcumque ſit commenſurabilis.

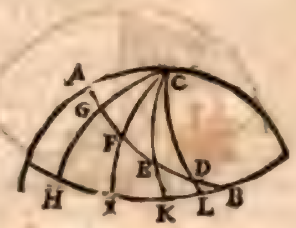


Sint datæ magnitudines AB, AC, inæquales; inveniendaque ſit alia intermedia, hoc eſt major quàm AC, minor quàm AB, quæ ſit commenſurabilis alteri D. Vel magnitudo D, minor eſt differentiâ CB, vel non minor. Si primò minor ſit, multiplicetur D, ita ut fiat E, proximè major quàm AC. Dico quod E non erit major quam AB, ſi enim major eſſet quàm AB, detractâ adhuc ſemel ipsâ D, quæ minor eſt quàm CB, major remaneret quàm AC; ergo non fuiſſet proximè accepta major quàm AC. Si verò D, non eſt minor quàm CB; dividatur D, per medium, & iterum per medium, donec inveniatur aliqua ejus pars aliquota minor quàm CB; multiplicetur hæc pars aliquota donec fiat magnitudo proximè major quàm AC: quæ etiam major non erit quàm AB, alioquin detrahi adhuc poſſet, hæc pars aliquota, quæ ſupponitur minor quàm BC. Hæc autem magnitudo producta major quàm AC, minor quàm AB, commenſurabilis eſt magnitudini D, cum ſit compoſita per multiplicationem partis ejus aliquotæ.

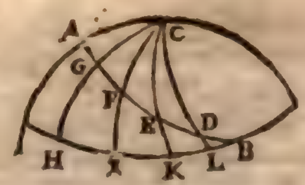
PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si in circulo maximo ſumantur duo arcus non continui æquales, ex eâdem parte & ex puncto quod polus ejus non ſit, ducatur circulus maximus ad ipſum rectus, & alij circuli majores per extremitates arcuum: Illi in parallelorum maximo, aſcindent arcus inæquales; illeque major erit, qui ex arcu viciniore ipſi polo orietur.



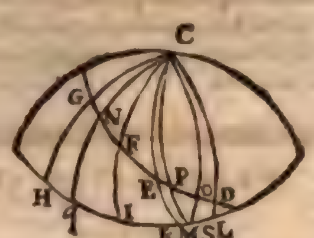
In circulo maximo AB, ex eâdem parte, aſſumantur duo arcus non continui æquales GF, ED, & ex puncto C, qui polus ejus non ſit, ducatur circulus maximus ad ipſum rectus CA, & per extremitates arcuum ducantur arcus maximorum circulorum, ex puncto C; nempe arcus CGH, CFI, CEK, CDL; dico autem KL, minorem eſſe arcu HI. Vel enim arcus intermedius FE commenſurabilis eſt arcubus æqualibus GF, ED, vel incommenſurabilis. Sit primò commenſurabilis



menſurabilis; dividantur tam arcus intermedius E F, quàm arcus F G, E D, in partes metientes utrumque arcum.

Demonſtr. Oſtendemus arcus factos in circulo H B, procedendo ex L verſus H, ſemper creſcere, quare ſi K L contineat tres arcus: H I continebit tres arcus ſingulos majores arcubus contentis in K L, quare arcus H I major erit quàm K L.

Si verò arcus intermedius F E ſit incommenſurabilis arcubus æqualibus G F, E D, dico adhuc arcum H I majorem eſſe arcu K L; neque enim minor eſſe poteſt neque æqualis. Sit enim ſi fieri poteſt minor, abſcindatur ex K L majore, arcus KM æqualis ipſi H I, ductoque circulo M P C, inveniatur arcus E O, major quàm E P, minor quàm ED, & commenſurabilis ipſi FE, & quia EO minor eſt quam ED qui æqualis, eſt ipſi GF, abſcindatur ex GF arcus EN, æqualis ipſi EO.



Demonſtratio. Quia arcus E O, F N æquales ſunt, & commenſurabiles arcui intermedio F E, erit *(per primam partem hujus)* arcus qI, major quam KS, quod eſt abſurdum, cum arcus KM poſitus fuerit æqualis arcui H I.



Si denique poſito E F incommenſurabili arcubus E D, G F, dicatur HI æqualis ipſi K L, dividantur GF, ED bifariam, ducanturque circuli per diviſiones.

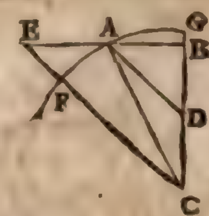
Demonſtr. Cum arcus G M, M F ſint æquales *(per 6 hujus)* erit arcus HP, major quàm PI, ſicut etiam KO, major quàm OL, & PI, minor eſt, quàm dimidium arcus HI, ſicut KO, major eſt quàm dimidium arcus KL, ponuntur enim arcus HI, KL, æquales, quare P I minor erit quàm K O; quod iam refutatum eſt ſecundâ parte.

COROLLARIUM.

Eadem methodo aliæ tres propoſitiones præcedentes probari poſſent in arcubus non continuis, quas Theodoſius, tantum demonſtravit in arcubus continuis.

LEMMA.

Si ab acuto angulo trianguli rectanguli linea ducatur ad latus oppoſitum, major erit ratio totius lateris ad partem qua eſt prope rectum angulum, quàm anguli ad angulum.



Sit triangulum rectangulum ABC, à cujus acuto angulo A, ducatur linea A D ad oppoſitum latus. Dico majorem eſſe rationem lateris B C ad ſegmentum DB, quàm anguli ADB, ad angulum ACB. Ducatur C E parallela lineæ A D, & ex puncto C ut centro, intervallo A C deſcribatur circulus GAF, qui cum latus A C majus ſit quàm CB, propter angulum B, rectum, ſecabit CB ultra B; & quia E C major eſt quàm C A, propter angulum obtuſum EAC, ſecabit C E, inter C & E, ſcilicèt in puncto F.

Demonſtr. Ut angulus FCA ad angulum ACG, ita ſector FAC ad ſectorem ACG, *(per ultimam 6.* ſed triangulum ECA, majus eſt ſectore FCA; ergo *(per 8. 5.)* major eſt ratio trianguli E C A ad ſectorem A C G, & adhuc multò major ad triangulum A C B, quàm anguli E C A ad angulum A C B; & componendo major erit ratio totius trianguli ECB ad triangulum ACB, quàm anguli ECB, ſeu ADB, ad ACB; ſed ut triangulum ad triangulum *(per 1. 6.)* ita baſis BE ad baſin AB; & cum AD, EC ſint parallelæ, ut EB ad AB, ita *(per 4. 6.)* BC ad BD: ergo major erit ratio B C ad BD, quàm anguli ADB ad angulum ACD.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si in circulo maximo ſumantur duo puncta ex eadem parte, per qua à puncto quod polus ejus non ſit, ducantur maximi circuli, uſque ad parallelorum maximum; ducatur item circulus ad ipſum rectus: major erit ratio arcuum maximi parallelorum, quàm arcuum circuli primi aſſumpti, incipiendo à circulo ad ipſum recto.

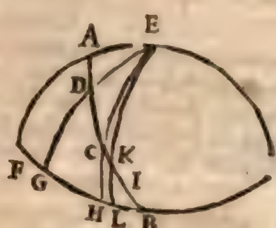
Sit maximus circulus AB, in quo ſumantur duo puncta C & D, eâdem parte, tum per punctum E quod polus ejus non ſit; ducatur maximus circulus EA, ad ipſum rectus, ducantur item maximi circuli EDG, ECH, terminati ad maximum parallelorum F B; dico eſſe majorem rationem arcus FG ad arcum CH, quàm arcus AD ad arcum DC. Vel enim arcus AD, DC ſunt commenſurabiles, vel incommenſurabiles. Sint primò commenſurabiles, inventâque

tâque communi menſurâ dividantur in I, K, & L, ducanturque circuli EIM, EKN, ELO.



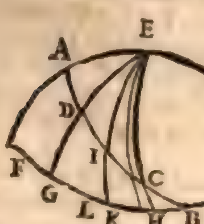
Demonſtr. Cum arcus AI æqualis ſit arcui IK, & F M major ſit quàm arcus MN; major erit ratio (*per 6.defin.5.*) arcus FM ad MN, quàm AI ad IK; pariter major erit ratio MN, ad NG, quàm I K ad KD; & ita deinceps; ergo(*per 28.5.*)major erit ratio totius FG ad G H quàm totius A D ad DC.

Si verò arcus A D eſſet incommenſurabilis cum DC; dico nihilominus majorem eſſe rationem arcus FG ad GH, quàm arcus A D ad D C. Si enim aliter ſe res habet erit ratio AD ad D C, aut æqualis rationi arcus FG, ad GH; aut major, oſtendo primò non eſſe majorem rationem, ſit enim ſi fieri poteſt major ratio AD ad D C, erit aliquis arcus major, quàm DC ad quem AC eandem rationem habebit, quàm habet FG ad GH. Sit ille arcus DI; inveniaturque (*per lemma proximè præcedens*) arcus DK commenſurabilis cum AD, & medius inter DI, DC: ducaturque circulus maximus E K L.



Demonſtr. Quoniam arcus AD, DK ſunt commenſurabiles, erit (*per primam partem huius propoſitionis*) major ratio FG ad GL, quàm AD ad DK; ſed major eſt ratio (*per 8.5.*) FG ad GH; quàm F G ad GL: ergo major ratior FG ad GH quàm A D ad DK, ergo multò major erit ratio FG ad GH, quàm AD ad D I, contra id quod dictum fuerat, nempe dari poſſe aliquem arcum D I, majorem arcu D C, ad quem AD eandem rationem habeat quàm FG ad GH.

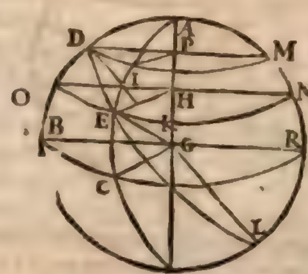
Denique ſit ſi fieri poteſt eadem ratio arcus AD ad DC, quæ F G ad GH; dividatur arcus DC bifariam in I, ducaturque circulus EIK.



Demonſtr. Quoniam arcus C I, I D ſunt æquales, & continui (*per 6. huius*) erit G K major quàm KH: ideoque GK, erit major dimidiò GH, ſit GL dimidius arcus GH, major eſt ratio GK ad DI, quàm GL, ad DI, ſed ut GL ad DI ita GH ad DC, & ex ſuppoſitione ita F G ad AD; ergo permutando major erit ratio GK ad FG, quàm DI ad A D, ideoque debebit dari arcus major quàm D I qui eandem rationem habeat ad AD, quàm GK ad FG; ſeu AD ad DI majorem habebit rationem quàm FG, ad GK, quod eſt contra id, quod eſt probatum ſecunda parte hujus.

PROPOSITIO XI.

Si in circumferentiâ maximi circuli ſit polus parallelorum: quorum unum tangat alius circulus, & alium ſecet: ducatur item per ſectionem, & per polum alius circulus, uſque ad maximum parallelorum, major erit ratio diametri Sphæræ, ad diametrum paralleli qui tangitur, quàm circumferentiæ maximi parallelorum inter duos circulos per polum tranſeuntes intercepta, ad circumferentiam obliqui circuli inter duos parallelos interceptam.



Sit polus A in circumferentia maximi circuli AB, ſit item maximus circulus DEL, qui parallelum DM tangat in puncto D, ſecet vero parallelum E N in puncto E; per quod & per polum A ducatur circulus maximus AE, dico majorem eſſe rationem diametri Sphæræ BR, ad diametrum paralleli DM, quàm circumferentiæ BC ad circumferentiam DE. AG eſt communis ſectio circulorum AEC & AB, ideoque (*per 15.1.huius*) tranſit per centra parallelorum, & recta eſt ad eorum plana; ſunt igitur recti anguli in P, H, G; lineæ DM, ON, BR ſunt diametri parallelorum, & DL diameter circuli obliqui, quia circuli maximi ſe bifariam ſecant, circulus DEL rectus eſt ad circulum AB, quia tangit circulum DM in puncto D; OEN, item rectus eſt, quare (*per 19.11.*) linea E I quæ vix apparet communis eorum ſectio, recta eſt ad planum A B: eruntque anguli EIH, EIG recti; ducantur lineæ HE, CG, EG: & quia in triangulo I H G angulus I H G rectus eſt, & conſequenter latus I G, majus quàm I H; abſcindatur I K æqualis lateri IH, ducaturque linea EK.

Demonſtr. Duo triangula EIH, EIK habentia commune latus EI, & latera IK, IH, æqualia, & angulos in I, rectos, (*per 4. 1.*) æqualia ſunt, & habent angulos IHE, IKE, æquales; quia autem ab angulo E acuto, ducta eſt linea EK, ad latus IG, major erit ratio totius I G ad IK, quàm anguli IKE, ſeu IHE, ad EGI, (*per lemma ſuperius.*) angulus autem EHI, æqualis eſt angulo BGC, cum arcus iis ſubtenſi ſint ſimiles (*per 10.2.huius*) ergo minor eſt ratio anguli BGC, ad angulum DGE, hoc eſt arcus BC, ad arcum DE (ſunt enim circuli

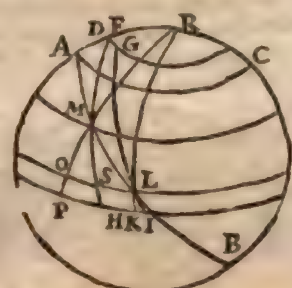
Digitized by Google

culi æquales) quam lineæ GI ad IK, ſeu IH: ut autem GI ad IH ita DG, radius ad DP, aut tota DL, diameter Sphæræ, ad totam DM, ergo major eſt ratio diametri BR, ad DM, quàm arcus BC, ad arcum DE.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Si circulus maximus tangens parallelum majorem quam ſit ille, quem tangunt duo alij circuli maximi, illos ſecet inter parallelum maximum, & parallelum minorem: major erit ratio diametri Sphæra ad diametrum paralleli illius maioris qui tangitur; quàm circumferentia maximi paralleli intercepta inter duos circulos tangentes ad circumferentiam circuli obliqui ab iis pariter interceptam.



Maximus circulus AB tangat parallelum AC, majorem quàm ſit DG, qui tangatur à maximis circulis FH, GI, circulus autem AB ſecet circulos FH, GI, in punctis M & L, inter parallelum DG, & parallelum maximum PI: dico majorem eſſe rationem diametri Sphæræ, ad diametrum paralleli AC, quàm arcus HI ad arcum ML. Per polum R, & puncta A,M,L, deſcribantur maximi circuli RA, RMP, RLK, & per L, parallelus LO.

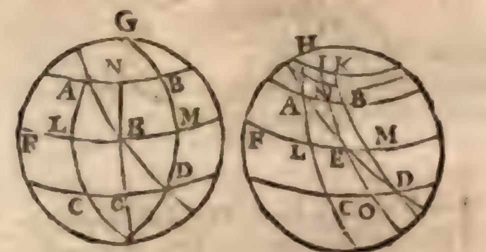
Demonſtr. Major eſt ratio diametri Sphæræ ad diametrum AC, quàm arcus NP, ad arcum AM, (*per* 11. *huius*) ſed (*per* 10. *huius*) eſt major ratio arcus NP ad PK, quam AM ad ML, & convertendo eſt major ratio NP ad AM, quàm PK, ad ML, ergo multo major erit ratio, diametri Sphæræ, ad diametrum AC, quàm PK ad ML; ſed arcus HI, minor eſt arcu PK, nam OL & PK ſunt ſimiles (*per* 10. 2. *huius*) SL, & HI, ſunt etiam ſimiles (*per* 13.2.*huius*) & OL, major eſt quàm SL; igitur & PK major erit quàm HI; ergo multo major erit ratio diametri Sphæræ ad diametrum AC quàm HI ad ML.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si duo paralleli ſecent eundem maximum circulum in duobus punctis utrinque æqualiter diſtantibus; ab interſectione maximi paralleli; & per hæc tria puncta ducantur tres maximi, aut per polum, aut tangentes eundem parallelum: illi in maximo parallelo arcus æquales intercipient.

Paralleli AB, CD ſecent maximum circulum AD, in punctis A & D æqualiter diſtantibus à maximo parallelo FE, hoc eſt ſint arcus AE, ED, æquales: & per puncta A, E, D ducantur circuli maximi; aut per polum G tranſeuntes, aut tangentes eundem parallelum HK qui ſecent parallelum maximum in punctis L, E, M: dico arcus LE, EM æquales eſſe.

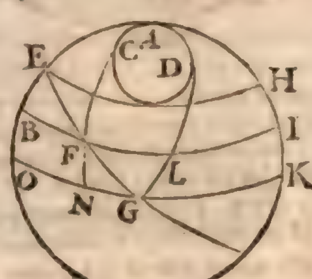


Demonſtr. Quoniam arcus AE, ED ſunt æquales erunt (*per* 17. 2. *huius*) paralleli AB, CD æquales, & (*per* 18.*eiuſdem*) arcus LA, BM, DM, LC, EN, EO æquales; quare (*per* 3. *huius*) lineæ AN, OD æquales erunt; & conſequenter arcus OD, AN æquales ſunt; ſed in prima figura (*per* 10.2.*huius*) arcus OD, EM; item AN, LE, ſunt ſimiles: igitur LE, EM ſunt ſimiles, & cum ſint ejuſdem circuli, æquales erunt. In ſecunda verò figura, arcus AN, LE, item OD, EM (*per* 13.2.*huius*) ſunt ſimiles; ergo arcus EM, LE æquales ſunt.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Si circulus maximus parallelum minorem tangat; & alius parallelum maiorem: illi intercipient in duobus aliis parallelis arcus diſſimiles, quorum ille plures gradus continet, qui polo conſpicuo, propior eſt.



Circulus AB tangat in puncto A minorem parallelum ACD, ſitque alius circulus maximus EFG, qui majorem circulum EH tangat, ſintque paralleli BF, KG; dico arcus FI, GK eſſe diſſimiles, ita ut FI qui propior eſt polo conſpicuo plures gradus contineat. Per F, & G ducantur circuli maximi tangentes parallelum CD, ita ut ſemicirculi ABO, CF, item DLG, AIK conveniant tantum poſt alterutrius contactum, quemadmodum requiſitum fuit in propoſitione decima tertia ſecundi hujus.

Demonſtr. Arcus LI, GK (*per* 13.2.*huius*) ſimiles ſunt: igitur FI plures gradus continet quam GK; viciſſim BF, ON, ſunt ſimiles; igitur GO, (qui vergit ad alium polum conſpicuum reſpectu illius hemiſphærij) plures gradus continet quàm BF; quod erat demonſtrandum.

TRACTA

TRACTATUS III.

DE SECTIONIBVS CONICIS.

APOLLONII *Conica omnia hôc tractatu complecti, itaque mollire ut Tyronum captum non ſuperarent in animo fuerat. Re tamen diligentiùs perpenſâ, cum in iis ſuperflua deprehendiſſem quàm plurima, ab immenſa rerum inutilium farragine hanc doctrinam expurgare, & ſelectis iis tantum, quæ ad ſectionum conicarum naturam explicandam ſpectarent, parabolam, hyperbolam, & Ellypſin, independenter etiam à cono conſiderare decrevi. Quamvis enim Conicarum ſectionum doctrinam eruditè, methodóque ſublimi Apollonius tradiderit, ſummuſque propterea Geometra ab omnibus jure habitus ſit; minutias tamen omnes, & apices ita eſt proſecutus, ut tædio quod affert, multum de hujus doctrinæ dignitate detrahat.*

Neque verò in aliquibus tantum propoſitionibus hanc labem operi ſuo inuſſit; ſed libros integros hoc vitio laborare deprehendet, qui in iis diligentiùs verſatus fuerit. Enim verò qui in Geometricis propoſitionibus delectum nullum habuerit, utileſque ab inutilibus non ſeparaverit; is jucundam alioquin, & utilem ſcientiam fœdiſſimè deturpabit; impoſſibilemque reddet. Inutilem autem voco cognitionem mathematicam, quæ aut ad uſum communem hominum, aut ad effectus alicujus phyſici explicationem nihil conducit. In ea mente jam fueram cum curſum meum mathematicum concinnavi; & quia ſectiones Conicas ad Catoptricam, & Dioptricam, immò & ad projectorum motum determinandum conferre judicabam; quantum ad hoc inſtitutum ſectiones Conicas etiam independenter à Cono conſideravi, traditiſque nonnullis earum deſcriptionibus, proprietates requiſitas lineis ita deſcriptis ineſſe demonſtravi. Id mihi tunc ſufficere videbatur, ea ratione maximè perſuaſus; quod ſi omnia quæ de Conicis dici poſſent ſine delectu colligerem, opus in ingentem pene molem excreſceret, nam præter quatuor antiquos Apollonij libros, tres nuper in lucem editos videbam: Conica item Patris à S. Vincentio occurrebant in quibus plures quàm mille propoſitiones, utiliores multò, quàm pleraque quæ in Apollonio habentur; Alia multa opuſcula de eadem materia preferebantur, ita ut de Conicis ſcribendi nullus finis, non magno tamen operæpretio videatur.

Quia tamen multos vidi qui in Conicis ſectionibus aliquid latere reconditioris ſecreti exiſtimarent, & in iis circuli quadraturam, duplicationem cubi, aliáque problemata diu expetita ineſſe ſuſpicarentur, laborem etiam hunc ſuſcipiendum exiſtimavi, quem ut faciliorem reddam in quinque libros partior. Primus erit de parabola. Secundus de hyperbola. Tertius de Ellypſi. Quartus has figuras in Cono conſiderabit, & ex tribus conſuetis eius ſectionibus generari demonſtrabit. Quintus Ellypſin in cylindro intuebitur.

LIBER PRIMUS.

De Parabola.

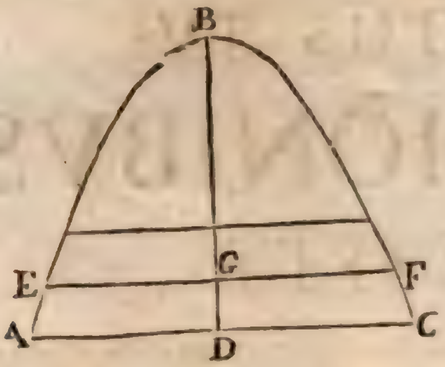
DEFINITIONES.

DIameter figuræ curvilineæ in eodem plano deſcriptæ, eſt linea recta omnes eidem rectæ parallelas bifariam dividens. Ut ſi proponatur figura curvilinea peripheriâ contenta, in qua

 ducantur

ducantur lineæ AC, EF, parallelæ, quas omnes linea BD bifariam dividat, erit BD diameter illius figuræ.

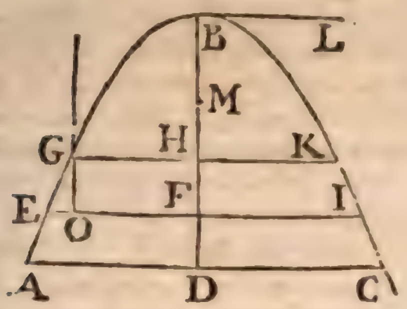
2. Ordinatìm applicata eſt una quælibet parallelarum à diametro bifariam diviſarum, ut EF, AC eſt ordinatìm applicata. communiter tamen intelligitur eius dimidia pars, ut EG.



3. Axis eſt diameter ordinatìm applicata, bifariam, & perpendiculariter dividens; ut ſi linea BD non tantum bifariam dividat rectas lineæ AC parallelas, ſed etiam ad angulos rectos, erit BD axis figuræ.

4. Vertex figuræ eſt extremitas axis, ut punctum B.

5. Sagitta eſt ſegmentum diametri, inter applicatam, & verticem interceptum, ut HB eſt ſagitta applicatæ GH.



6. Parabola eſt figura cujus ordinatìm applicatarum quadrata, eamdem rationem habent, ac ſagittæ. Proponatur figura, cujus diameter BD, ordinatim applicatæ AC, EI, GK, bifariam diviſæ, ſitque ut quadratum AD ad quadratum EF; ita ſagitta BD ad ſagittam FB, & ita de reliquis, ſintque conjunctæ applicatarum extremitates lineâ curuâ; voco hanc figuram parabolam. In qua clarum eſt quod ipſæ applicatæ erunt in ſubduplicata ratione ſagittarum, & ſagittæ in duplicata ratione applicatarum; nam quadrata ſunt in duplicata ratione laterum (*per* 2. 12.) & latera in ſubduplicata ratione quadratorum.

7. Latus rectum parameter, ſeu linea juxta quam menſurari poſſunt, eſt linea in extremitate diametri ad diametrum perpendiculariter ducta, quâ utimur tanquam menſurâ ad metiendum quadratum applicatarum; ut ſi linea BL ſit perpendicularis ad diametrum BD, oſtendamuſque, quam rationem habeat quadratum cujuſlibet applicatæ verbi gratia EF ad rectangulum comprehenſum ſub ſagitta FB, & parametro BL; erit BL parameter figuræ.

8. Umbilicus ſeu focus parabolæ eſt punctum in axe, diſtans à vertice quarta parte lateris recti; ut ſi BD ſit axis & BM ſit quarta pars parametri BL, erit punctum M umbilicus, ſeu focus parabolæ; ſic dictus quod peculiares habeat proprietates, præcipuè quod omnes radij axi paralleli in eo uniantur.

PROPOSITIO I.

Theorema.

In parabola tertia proportionalis ſagittæ, & applicata eſt parameter: ſuntque rectangula ſub illa, & ſingulis ſagittis comprehenſa, æqualia quadratis applicatarum.

Sit parabola ABC ſitque BL tertia proportionalis cuicumque ſagittæ BD, & applicatæ AD, hoc eſt ita ſit BD ad AD ſicut AD ad BL; dico BL eſſe parametrum parabolæ, & inſuper cæteras omnes ordinatas, eſſe medias proportionales inter ſuas ſagittas, & BL; ſeu earum quadrata æqualia eſſe rectangulis comprehenſis ſub BL & ſuis ſagittis.

Demonſtr. Facta eſt AD media proportionalis inter DB, & BL; ergo quadratum ex AD æquale eſt rectangulo comprehenſo ſub BL, BD; ſed ex definitione parabolæ quadratum AD ad quadratum EF ſe habet ut ſagitta BD, ad ſagittam BF, & ſumptâ eadem altitudine BL (*per* 1.6.) ut rectangulum DBL ad rectangulum FBL, ergo ita eſt quadratum AD ad quadratum EF; ut rectangulum DBL ad rectangulum FBL; ſed primum eſt æquale tertio, ergo & ſecundum quarto; idem demonſtrabo de reliquis omnibus ordinatis.

COROLLARIUM I.

Clarum eſt ordinatas vertici propiores fieri minores; ut GH eſt minor quam EF, aut AD; cùm ejus quadratum ſit minus; ſi ergo duceretur linea AG, hæc cum diametro BD concurreret extra ſectionem.

COROLLARIUM II.

Si ſagitta æqualis ſit parametro, ejus ordinata eidem æqualis erit ut ſi ſagitta BH, æqualis ſit parametro BL ordinata GH eidem æqualis eſt; nam quadratum GH, æquale eſt rectangulo HBL, & cum lineæ HB, BL ſupponantur æquales, rectangulum illud erit quadratum lineæ BL, aut BH; ſunt ergo tres lineæ GH, HB, BL æquales.

COROLLARIUM III.

Si ſagitta minor fuerit parametro, ordinata eodem minor erit: eſt enim ordinata media proportionalis inter ſagittam, & parametrum; ergo minor eſt parametro; pariter ſi major fuerit ſagitta parametro, eâ & ordinata major erit.

COROLLARIUM IV.

Omnis parallela diametro in uno tantum puncto

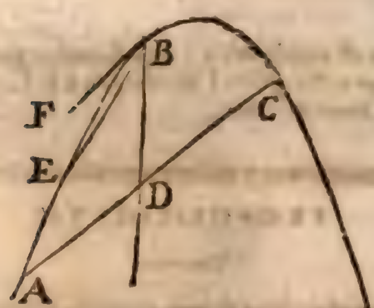
puncto parabolam ſecat, ut GO quia applicatæ ſupra GH, minores illâ erunt; ergo æquales extra parabolam cadent & infra GO majores ſunt.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si per extremitatem diametri ducatur linea ordinatim applicatis parallela: hæc erit tangens.

Sit parabola ABC cujus diameter BD ordinatim applicata AC, cui ſit parallela BF, dico illam eſſe tangentem. Si enim non ſit tangens, intra ſectionem cadat qualis eſt EB;



Demonſtr. Cum EB ſit parallela ordinatis, & intra ſectionem, (*per defin. diametri*) à diametro BD bifariam dividetur, ergo vel non eſt parallela, vel non pertingit ad punctum B extremitatem diametri.

COROLLARIUM I.

Linea intra ſectionem parallela tangenti bifariam dividitur à diametro, per punctum tactus tranſeunte. Si enim ſit parallela tangenti, erit parallela reliquis ordinatis: ergo ex definitione diametri, bifariam dividetur.

COROLLARIUM II.

Linea parallela ordinatis, aut tangenti, per aliquod punctum diametri ducta, bifariam dividitur, ſectionemque attingit in duobus punctis; id etiam ſequitur ex definitione diametri.

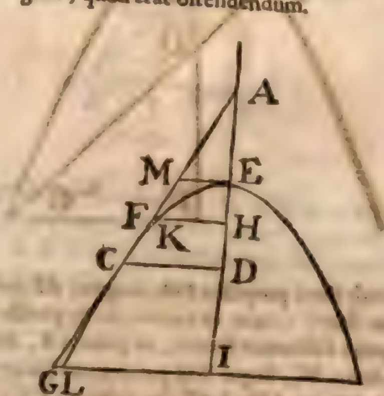
PROPOSITIO III.

Theorema.

Linea abſcindens in diametro productâ, ſegmentum ſagittæ æquale, tangit parabolam.

Ex aliquo puncto C periphæriæ parabolæ ducatur linea AC. ductâque ordinata CD, ſint DE, EA æquales; dico lineam AC tangere parabolam in puncto C, ita ut lineæ AC quodcumque aliud punctum F aut G ſit extra parabolam. Supponantur ex F, & G ductæ parallelæ lineæ CD, nempe FH, GI, oſtendo eas eſſe majores applicatis HK, IL.

Demonſtr. Quadratum CD ad quadratum FH, ſe habet ut quadratum DA ad quadratum HA, ſeu ut quadratum ED, quarta pars quadrati DA, ad quartam partem quadrati HA; ſed rectangulum HEA minus eſt quarta parte quadrati HA, (*per 7.2.*) ergo major eſt ratio quadrati ED ad rectangulum HEA, ſeu lineæ DE ad HE: cum ſit eadem altitudo EA, quam quadrati CD, ad quadratum FH; ſed ut DE ad HE, ita ex definitione parabolæ quadratum CD ad quadratum applicatæ KH; ergo quadratum CD ad quadratum KH majorem habet rationem quam ad quadratum FH, ergo FH major eſt quam KH, & punctum F lineæ CA eſt extra parabolam; idem & eôdem modô oſtendam de puncto G & quocumque alio, excepto puncto C; ergo linea ACG eſt tangens; quod erat oſtendendum.



COROLLARIUM I.

Sequitur tangentem illam in unico tantum puncto tangere parabolam, cum reliqua omnia puncta ſint extra.

COROLLARIUM II.

Si per E ducatur tangens ME, hæc erit dimidia ordinatæ CD, ejuſque quadratum erit quarta pars rectanguli comprehenſi ſub DE, aut AE, & parametro. Eſt enim quarta pars quadrati CD, item tangens AC dividitur bifariam in M.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Tangens parabolam abſcindit in diametro lineam ſagittæ æqualem.

Linea AC parabolam tangat in C, & ordinatim applicetur CD; dico DE, EA eſſe æquales, ſi enim non ſunt, æquales ſint HE, EA, & ordinatim applicetur KH intelligatur AK, hæc tangens eſſet, & producta lineam AF ſecaret: ergo duæ lineæ rectæ ſpatium clauderent.

Idem inconveniens ſequitur ſi AE, EI dicantur æquales, ducta enim AL eſſet tangens; & cum jam AC ſupponatur tangens, producta ſecaret tangentem AL.

COROLLARIUM.

Ex eodem puncto A duæ tangentes duci non poſſunt. Sicut neque ex eodem puncto C.

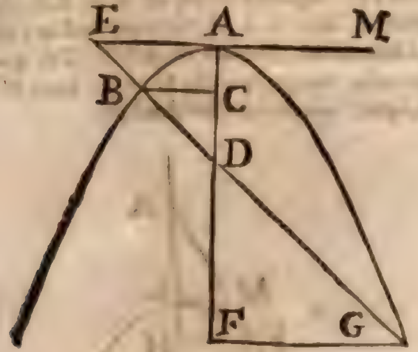
PROPOSITIO V.

Theorema.

Linea diametrum Parabolæ ſecans, producta utrinque parabolam ſecat.

Linea DE ſecet AF diametrum parabolæ, dico quòd

quod producta parabolam utrinque ſecabit. Intelligatur per punctum A ordinatim applicata parallela nempe A E, ſi hæc linea ſecans diametrum illi eſt parallela, *(per cor.1.2.)* bifariam à diametro dividetur & parabolam in duobus punctis ſecabit.



Si verò linea propoſita DB, tangenti AE parallela non fuerit; cum ea conveniet in puncto E, ergo prius ſectionem ſecabit, in puncto B, ducatur ordinata BC, ſitque AM parameter, fiatque ut AC ad AD, ita AD ad AF; & ordinata F G cum BD conveniat in G; dico punctum G eſſe in ſectione; atque adeò lineam BD convenire cum parabola in puncto G.

Demonſtr. Cum ita facta ſit AC ad totam AD, ut AD ad totam AF, ita erit reliqua CD ad DF, ut AD ad AF: & cum triangula BCD, FDG ſint ſimilia, ita erit BC ad FG ſicut CD ad FD: ergo & ut AD ad AF: quadrata autem BC, FG ſunt in duplicata ratione BC ad FG; ergo & in duplicata AD ad AF: hæc autem duplicata eſt ut AC ad AF, cum tres lineæ AC, AD, A F ſint continuè proportionales: ergo quadratum B C ad quadratum FG, erit ut ſagitta AC ad ſagittam AE: ergo *(per defin. parabolæ)* punctum G ad parabolam pertinet, quod erat demonſtrandum.

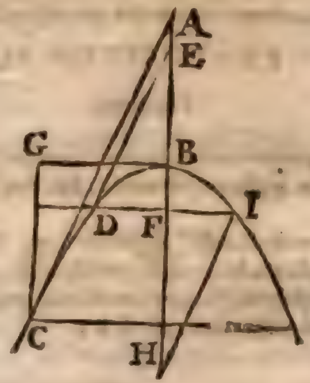
PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si ex quocumque puncto parabolæ, ducantur parallela tangenti, & ordinata in puncto contactus; erit triangulum ab his parallelis, & diametro factum, æquale rectangulo comprehenſo ſub applicata, & ſagitta.

Sit A C tangens parabolam in puncto C, per quod ducatur ordinata CH, & ex quocumque parabolæ puncto D, ducantur D E, D F, parallelæ tangenti, & ordinatæ: dico triangulum DEF his parallelis, & diametro comprehenſum, æquale eſſe rectangulo F G, comprehenſo ſub ſagitta F B, & ſub BG, ſeu ordinata CH.

Demonſtr. Sunt *(per 3.)* AB, BH æquales, & AH, dupla BH; ergo *(per 35. 1. Eucl.)* triangulum ACH rectangulo HG eſt æquale. Item *per defin. parabolæ*. ita eſt quadratum C H ad quadratum DF ut H B ad F B, ſeu *(per 1. 6.)* ut rectangulum H G ad rectangulum F G, ſed ut quadratum C H ad quadratum D F; ita triangulum A C H ad ſimile triangulum E D F; ergo ita eſt rectangulum H G ad rectangulum F G; ſicut triangulum A C H ad triangulum E D F, ſed pri-



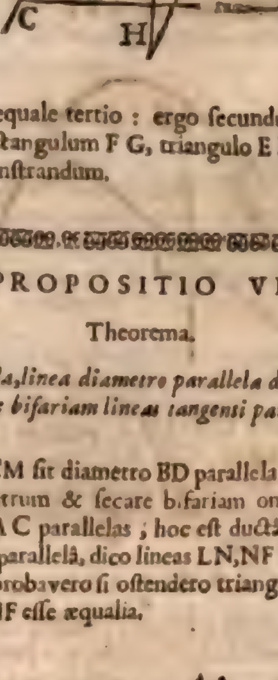
mum eſt æquale tertio: ergo ſecundum quarto, nempe rectangulum F G, triangulo E D F, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

In parabola, linea diametro parallela diameter eſt, ſecatque bifariam lineas tangenti parallelas.

Linea CM ſit diametro BD parallela; dico CM eſſe diametrum & ſecare bifariam omnes lineas tangenti A C parallelas; hoc eſt ductâ L F, tangenti AC parallelâ, dico lineas LN,NF eſſe æquales, quod probavero ſi oſtendero triangula ſimilia LNM, KNF eſſe æqualia.



Demonſtratio. *(per præcedentem)* rectangulum GH, triangulo EGF æquale eſt. Item eſt quadratum L D ad quadratum FG *(per defin. parabolæ)* ut D B ad G B; ſeu ut rectangulum DH ad rectangulum G H. Ut autem quadratum L D ad quadratum F G; ita triangulum L E D ad triangulum EFG, cum ſint pariter ſimiles figuræ: ergo ut triangulum L E D ad triangulum E F G ita rectang. D H ad rectangulum GH; ſed ſecundum eſt æquale quarto, ergo primum tertio æquale erit, nempe triangulum LED, rectangulo DH, & ablatis æqualibus triangulo E F G, & rectangulo G H, reſtat rectangulum D K, æquale trapezio GFLD; & ablato communi G F N M D, reſtant triangula æqualia LNM,KNF eſſe æqualia; quod demonſtrandum erat.

Notan

Notandum autem licet locutus ſim de rectangulis, tam benè procedere demonſtrationem, licet pro rectangulis, parallelogramma poſuiſſem.

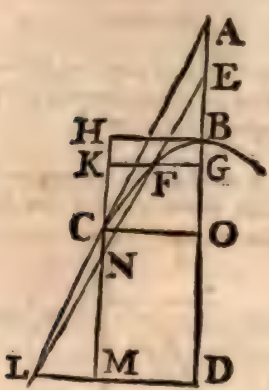
COROLLARIUM.

Sequitur per omne punctum etiam intra parabolam aſſumptum, duci poſſe diametrum, quia duci poteſt parallela diametro.

PROPOSITIO VIII.

In Parabola omnes diametri ſunt axi parallelæ.

Sit in parabolâ axis A D, ſitque HM diameter quæcumque, dico H M axi A D eſſe parallelam. Intelligatur per punctum C tangens C A, item per punctum B, tangens BH, quæ cum ſit parallela ordinatis quæ perpendiculares ſunt, & ipſa perpendicularis erit. Sit quæcumque LF parallela tangenti CA, & per punctum F. Agatur perpendicularis KFG, item LMD.



Demonſtratio. Cum L F ſit parallela tangenti C A; & C N ſit diameter, erit LF ordinata (*per cor. 1. 1.*) & bifariam diviſa in N. Quod ſi C N non ſit parallela axi AD, ducatur per punctum C alia quæcumque parallela axi, hæc divideret bifariam lineam L F, in alio utique puncto quàm N, quod eſt abſurdum; igitur alia parallela duci non poteſt, quàm CN; ergo CN parallela eſt, quod erat demonſtrandum.

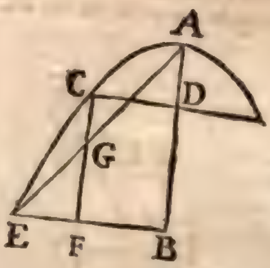
PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si in axe, & aliâ diametro abſcindantur æquales ſagittæ, & ordinatim applicentur; quæ ad axem applicabitur, minor erit.

Sit axis A B parabolæ. Dico quod ſi in eo abſcindatur quæcumque ſagitta, & in alia diametro æqualis abſcindatur, & per utramque applicata ducatur, quæ ad axem applicabitur minor erit. Sit enim diameter quæ debeat per punctum C tranſire; ducatur applicata CD, fiatque AB quadrupla ipſius AD, & ducatur perpendicularis BE, quæ dividatur bifariam in F; jungaturque FC, ducaturque A E.

Demonſtratio. A B facta eſt quadrupla A D, ergo (*per definitionem parabolæ*) quadratum E B, quadruplum eſt quadrati C D, & quadratum F B



æquale eſt quadrato C D, ergo F B, C D ſunt æquales, ſed ſunt etiam parallelæ, ergo CF & A B ſunt parallelæ; ergo CF (*per 8.*) eſt diameter, & E G applicata major eſt quam E F, ſeu FB, aut CD. Oſtendo autem C G, AD eſſe æquales, eſt enim A B quadrupla AD, & dupla GF, cum ita ſit EF ad EB; ſicut FG ad AB, quare reſtabunt AD, CG eſſe æquales, quod erat propoſitum.

Cum autem ſe habeant ſingula quadrata applicatarum ad eamdem diametrum ſicut ſagittæ, ſemper quadrata applicatarum ad axem erunt minora; quam applicatarum ad quamcumque aliam diametrum.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Latus Rectum axis minimum eſt.

Sit axis parabolæ AB, & quæcumque alia diameter CF; dico latus rectum axis, nempe quo utimur ad metienda quadrata applicatarum ad axem, minus eſſe latere recto diametri C F. Sint enim duæ ſagittæ æquales AD, CG, & applicatæ EG, C D, quadratum CD (*per 1.*) æquale eſt rectangulo ſub ſagitta AD & parametro axis. Pariter quadratum EG, æquale eſt rectangulo ſub CG, & parametro diametri CF; ſed quadratum E G, majus eſt quadrato C D (*per præcedentem*) ergo rectangulum ſub CG: & parametro diametri CF, majus eſt rectangulo ſub AD, & parametro axis; & cum AD, CG ſint æquales (*per 1. 6.*) erit parameter diametri C F, major parametro axis; quod erat demonſtrandum.

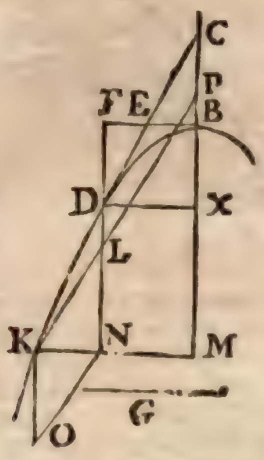
PROPOSITIO XI.

Theorema.

Tertia proportionalis quadruplæ ſagittæ, & duplæ tangenti, eſt parameter diametri per contactum ductæ.

Linea C D tangat parabolam in puncto D,

ducatur diameter F D N, ſitque alia quæcumque diameter C M, ad quam ſit applicata D X, & ſit ſagitta X B, eruntque X B, BC æquales (*per* 3.) quæratur tertia proportionalis duplæ X C, & duplæ D C, ſitque G. Dico lineam G eſſe parametrum diametri DN, hoc eſt quadratum KL æquale eſſe rectangulo comprehenſo ſub DL & G.



Demonſtratio. (*Per* 3.) lineæ CB, BX ſeu FD, ſunt æquales & conſequenter ſimilia triangula BEC, F E D æqualia ſunt; addatur communis figura DEBMND, fiet parallelogrammum F M, ſeu (*per* 6.) triangulũ PKM, æquale figuræ DCMND, & auferendo quod commune eſt, reſtat triangulum L K N, æquale parallelogrammo DCPL, & cum habeant angulum in L æqualem; rectangulum KLNO erit duplum parallelogrammi DLPC, & æquale parallelogrammo ſub D L, & dupla DC. Fecimus autem ut quadrupla B X aut F D ad duplam DC, ſeu quadruplam DE, hoc eſt ut D F ad DE; aut L N ad K L propter ſimilitudinem triangulorum, ita dupla ad DC ad G; erit ergo permutando ut LK ad LN, ita G ad duplam DC, & ſumptâ eadem altitudine L K; ut quadratum LK ad rectangulum KLN; ita rectangulum ſub G, & DL ad rectangulum ſub dupla D C & DL, ſed ſecundum & quartum ſunt æqualia; ergo quadratum K L æquale eſt rectangulo ſub ſagitta DL & G; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

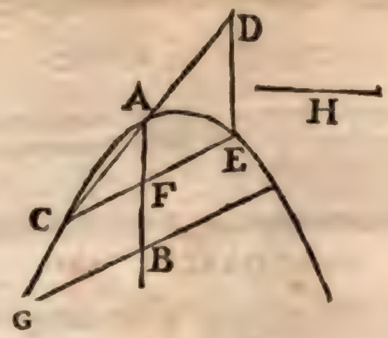
Ad datam parabolæ diametrum, ex dato puncto lineam ordinatim applicare: item lineam datæ æqualem.

Sit parabolæ data diameter A B ad quam ex puncto C ordinatim applicanda ſit. Ducatur linea CA, quæ producatur, ita ut fiant C A, A D æquales, ſitque D E parallela A B; dico CE, eſſe ordinatim applicatam.

Demonſtratio. (*Per* 3. 6.) ita eſt CA ad AD; ſicut C F ad F E; ſed C A & AD ſunt æquales: ergo & C F, F E.

Si punctum datum fuerit in diametro ut B. Primò ex puncto C in peripheria ordinatim applicetur C E, cui per punctum B, aut etiam aliud quodcumque datum ducatur B G, parallela C F.

Denique ſi linea ordinatim applicanda debeat eſſe æqualis lineæ H applicata CF, fiatque ut quadratum CF ad quadratum H, ita AF ad A B, & per B ducatur B G parallela C F; dico B G, eſſe ordinatim applicatam, & æqualem lineæ H; cum ad ejus quadratum ſe habeat quadratum CF; ut AF ad AB.

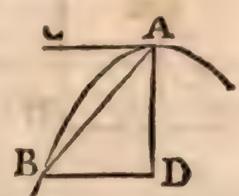


PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Linea dividens angulum tangentis, & diametri bifariam, ſecat parabolam in puncto per quod applicatur æqualis lateri recto.

Linea A B dividat bifariam angulum C A D, tangentis cum diametro AD: dico applicatam BD, æqualem eſſe lateri recto.



Demonſtratio. Tangens AC eſt parallela applicatæ BD, (*per* 2.) ergo anguli alterni CAB, ABD ſunt æquales, & (*per* 5. 1. *Eucl.*) lineæ B D, A D æquales ſunt. Sed latus rectum eſt tertium proportionale lineis AD, BD, tertium autem proportionale æqualibus, æquale eſt: ergo lineæ B D, & A D ſingulæ ſunt æquales lateri recto; quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Invenire latus rectum.

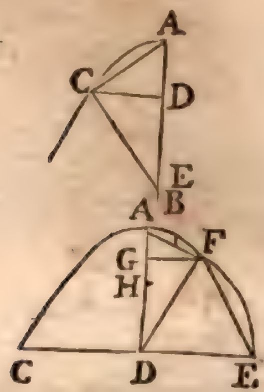
Sit quæcumque diameter AB; ad eam applicetur ordinata C D ad rectos; ducaturque A C, ad quam ſit perpendicularis C E: dico D E eſſe latus rectum.

Demonſtratio. Cum angulus A C E rectus ſit, erit C D media proportionalis inter AD, & DE; ergo quadratum CD, æquale eſt rectangulo ſub AD, DE, ergo DE eſt latus rectum.

Aliter fiat A D axis quæ major ſit latere recto, per punctum C applicetur ordinatim CE, tum ex D ut centro, intervallo D E, fiat arcus E F ſecans parabolam in F, & applicetur ordinatim FG, dico GD æqualem eſſe lateri recto.

Demonſtr.

Demonſtr. Quadratum DE, ſeu FD, ſe habet ad quadratum F G, ut A D ad A G, & ſumptâ eâdem altitudine DG, ut rectangulum A D G ad



rectangulum AGD, ſed (*per 47. 1.*) quadratum DF æquale eſt quadratis GF, GD; ergo quadrata GF, GD ſimul ad quadratum GF, ſe habent ut rectangulum ADG ad rectangulum AGD, & dividendo erit quadratum G D ad G F ut quadratum GD ad rectangulum A G D; quare quadratum GF æquale eſt rectangulo AGD. Ergo G D eſt latus rectum.

Poteſt item inveniri punctum F, ſi diviſâ A D bifariam in H, deſcriberetur ſemicirculus, fieret angulus A F D rectus, quia eſſet in ſemicirculo: ergo per primam partem hujus, eſſet G D latus rectum.

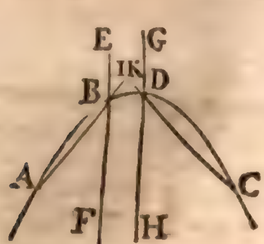
Facto igitur in F angulo recto, inventoque puncto D, erunt DF, FE æquales.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si parabolam duæ lineæ ita ſecent, ut puncta ſectionum unius, non contineantur intra puncta alterius; hæ lineæ extra parabolam convenient.

Lineæ AB, CD, parabolam ABCD ſingulæ in duobus punctis ſecent, ita ut puncta ſectionum



unius non contineantur intra puncta ſectionum alterius; dico has lineas extra ſectionem concurrere. Ducantur per puncta B & D duæ diametri EF, GH, quæ (*per 8.*) ſunt inter ſe parallelæ, & ſectionem ſingulæ in uno tantum puncto ſecabunt, & intelligatur ducta BD.

Demonſtratio. Anguli EBD, GDB ſunt duobus rectis æquales (*per 30. 1. Eucl.*) ergo anguli IBD, KDB ſunt duobus rectis minores: ergo concurrunt hæ lineæ.

PROPOSITIO XVI.

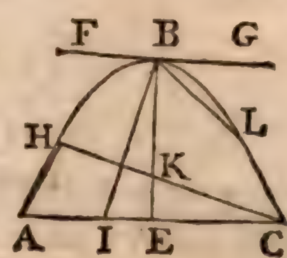
Theorema.

Si Parabolæ diameter lineam quampiam bifariam dividat, quæ per ejus extremitatem ducitur tangens, illi eſt parallela, & viciſſim quæ illi eſt parallela, ſectionem tangit.

Sit parabola ABC cujus diameter B E dividat bifariam lineam AC in puncto E, dico tangentem F B G, ductam per extremitatem diametri eſſe parallelam lineæ A C. Si enim non eſt parallela, ducatur per C parallela tangenti quæ ſit C H.

Demonſtr. (*Per 7.*) diameter BE dividit bifariam in K lineam HC, ſed ſupponebatur AC diviſa bifariam in E: ergo ita eſt CK ad C H, ut C E ad C A: ergo (*per 4. 6.*) A H, E K ſunt parallelæ (*contra coroll. 1. primæ hujus.*)

Viciſſim dico parallelam lineæ AC per extremitatem diametri ductam, eſſe tangentem, ſi enim



non ſit tangens, parabolam ſecabit in duobus punctis qualis eſt B L, ergo (*per 15. hujus*) cum AC conveniet.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Linea per contactum ducta bifariam dividens parallelam tangenti, diameter eſt.

Parabolam A B C tangat recta linea FBG, & parallelam AC, dividat bifariam in E, linea BE; dico eam eſſe diametrum.

Demonſtr. Si BE non eſt diameter, ſit BI, quæ per præcedentem dividet bifariam lineam AC, in puncto I, quod eſt abſurdum, cùm jam ſupponatur diviſa bifariam in E: ergo alia diameter duci non poteſt quam BE.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

In Parabola, linea duas parallelas bifariam dividens eſt diameter.

Sint in parabola duæ lineæ parallelæ AB, CD, quas linea FE bifariam ſecet in E & F; dico lineam FE eſſe diametrum. Si enim non ſit ducatur per F diameter F G.

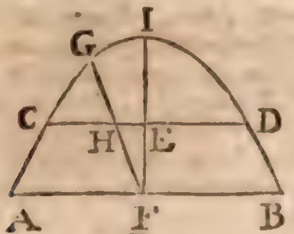
Demonſtr. (*Per 16.*) tangens per punctum G ducta, erit parallela lineæ A B, ergo & parallela lineæ CD: ergo(*per 17.*) CD erit bifariam diviſa in H, quod eſt abſurdum cum jam ſupponatur bifariam diviſa in E.

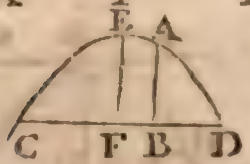
PROPOSITIO XIX.

Problema.

Data in parabola linea diametrum ducere, Item per quodcumque punctum.

Sit data in parabola, Linea AB, cujus diameter ducenda eſt.





Illi ducatur parallela C D, & utraque dividatur bifariam in F & B, clarum eſt *per ſuperiorem* lineam F B eſſe diametrum lineæ A B.

Si per punctum C ducenda ſit diameter, quæratur quæcumque diameter FE, cui per punctum C ducatur parallela, hæc etiam erit diameter per punctum C ducta.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Data parabola axem ducere.

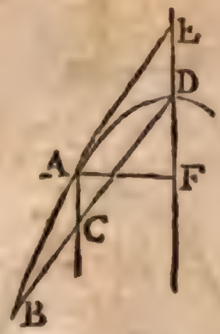
Inveniatur (*per præcedentem*) quæcumque diameter AB, ad quam ducatur perpendicularis CD, quæ dividatur bifariam. Si punctum medium coincidit cum B, linea A B erit axis cum illi conveniat definitio. Si autem non coincidit cum B, ſit punctum F; ducatur F E, parallela A B: dico E F eſſe axem, cum illi conveniat definitio, dividatque bifariam lineas ad ipſum perpendiculares.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Per datum quodcumque punctum tangentem ducere.

Sit datum primò in circumferentia punctum A per quod ducenda eſt tangens: per punctum A ducatur (*per 19.*) diameter AC, cui ſit ordinatim applicata BD (*per 11.*) huic ducatur parallela AE, clarum eſt (*per 16.* AE tangentem eſſe. Vel ducatur quæcumque diameter E F, ad quam ex puncto A ducatur ordinatim applicata A F, fiantque FD, D E æquales; clarum eſt (*per 4.*) A E tangentem eſſe.



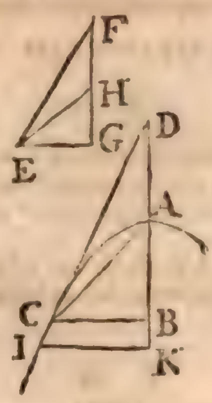
Sit propoſitum punctum E, ex quo ducenda eſt tangens. Primò per punctum E ducatur quæcumque diameter E D, ſintque E D, DF æquales, & per punctum F ordinatim applicetur FA; dico lineam E A tangentem eſſe.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

In parabola tangentem ducere, quæ cum axe determinatum angulum comprehendat.

Sit parabola in qua ducenda eſt tangens, quæ cum axe A B angulum comprehendat æqualem angulo E F G. Ex quocumque puncto E ad F G:



ducatur perpendicularis EG, dividatur F G, bifariam in H; ducaturque EH, tum angulo FHE fiat æqualis angulus D A C, ducaturque CB perpendicularis, ſintque A B, A D æquales: dico lineam DC eſſe tangentem, & angulum C D A æqualem eſſe angulo F.

Demonſtr. Triangula HEG, ACB ſunt æquiangula ut patet; ergo (*per 4.6.*) ita erit EG ad GH; ut CB ad BA, & conſequenter ita EG ad GF, duplam HG, ut CB ad BD. Quare (*per 5. 6.*) æquiangula ſunt triangula EFG, CBD: ergo anguli D & F ſunt æquales.

Et cum omnes diametri ſint parallelæ faciet æqualem angulum cum omnibus parallelis.

Poterat hæc propoſitio fieri univerſalior, ſi nempe proponeretur pro axe quælibet diameter AB ad quam ordinatim applicanda eſſet IK, tum angulo A K I fieret æqualis H G E, cætera eſſent ſimilia.

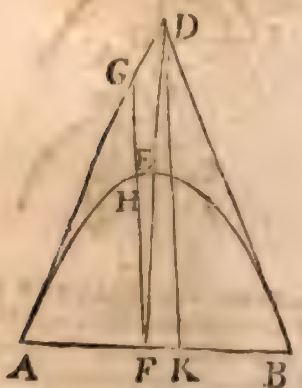
PROPO

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Tangentes ductæ per extrema applicatæ, In eodem puncto illius diametrum ſecant.

Sint duæ tangentes AD, BD ductæ per extremitates ordinatim applicatæ A B; dico eas concurrere in eodem puncto D diametri DF.



Demonſtr. Cum AD ſit tangens (*per 4 huius*) erit punctum D concurſus, ita ut EF, ED ſint æquales; idem dicendum de linea D B: ergo conveniunt in puncto D; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Si duæ tangentes conveniant, & à concurſu ducta, dividat biſariam conjungentem contactus; hæc diameter erit.

Duæ lineæ AD, BD parabolam tangentes concurrant in puncto D, & linea D F dividat A B conjungentem contactus, biſariam in puncto F; dico FD diametrum eſſe. Si enim D F non ſit diameter, ſit GF, & AB quæ eſt biſariam diviſa, erit ejus ordinata, & cum AG ſit tangens, erunt (*per 4.*) HF, HG æquales, quod ſi duceretur GB, (*per eandem*) eſſet tangens, ergo DB non eſſet tangens contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Si tangentes conveniunt: diameter per concurſum ducta biſariam dividit conjungentem puncta contactuum.

Tangentes parabolam conveniant in puncto D, ſitque diameter D F: & linea conjungens contactus ſit AB; dico AB diviſam eſſe biſariam in F, ſi enim non ſit diviſa biſariam in F, dividatur biſariam in K, ducaturque DK.

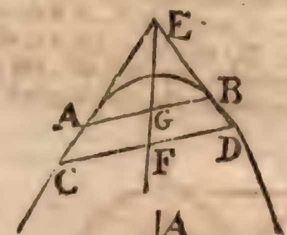
Demonſtratio. Linea DK, (*per 24.*) eſſet diameter; ergo & parallela diametro D F, quod eſt abſurdum cum in puncto D conveniant.

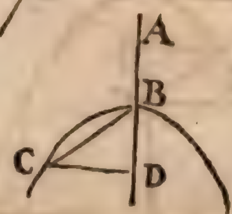
PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Conjungentes extrema applicatarum diametrum in eodem puncto ſecant & quæ à concurſu ducta unam biſariam dividit eſt diameter.

Sint duæ quævis ordinatæ A B, C D quarum extrema conjungant duæ lineæ C A, DB, quæ (*per coroll. 1.*) cum diametro E F convenient dico illas convenire in eodem puncto E diametri.





Demonſtratio Cum EF ſit ordinatarum diameter, erunt diviſæ biſariam in G & F, eritque ut CF ad A G, ita FD ad GB: ſed ut CF ad AG; ita C E ad AE; & FE ad G E, & pariter ut FD ad G B, ita DE ad B E, & FE ad GE; ergo punctum E, eſt concurſus trium linearum C A, F G, D B.

Secundam partem hujus propoſitionis facile eâdem methodo demonſtrare poſſumus, nempe ſi ex concurſu E; ducatur linea biſariam dividens unam parallelarum, dividere & aliam & eſſe diametrum.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Si in axe producto ſumatur latus rectum, quæcumque chorda per verticem ducta eſt media proportionalis inter ſagittam, & compoſitam ex ſagitta, & latere recto.

Sit A B latus rectum ſumptum in axe, ſitque chorda quæcumque B C, per verticem tranſiens, & ducatur ordinata C D, dico C B eſſe mediam proportionalem inter AD & DB, ſeu quod idem eſt quadratum C B eſſe æquale rectangulo A D B.

Demonſtratio. Quadratum B C (*per 47. 1.*) æquale eſt quadratis D B & C D, pro hoc ultimo ſubſtitue rectangulum B D A, illi æquali (*per 1.*) erit quadratum BC, æquale rectangulo DBA, & quadrato B D, quæ duo efficiunt rectangulum

ADB (*per* 3. 1.) ergo quadratum B C, rectangulo ADB æquale eſt; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

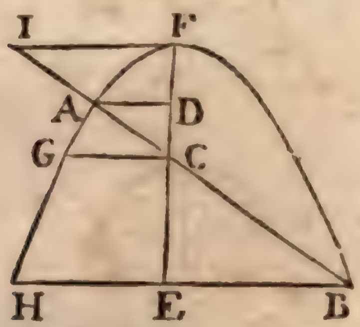
Hæc propoſitio poteſt eſſe utilis ad deſcriptionem parabolæ.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Si diametrum ſecet utcumque linea per cujus extrema ducantur ordinatæ, ſecabitur diameter in tres continuè proportionales, & applicata erunt continuè proportionales.

Ducatur linea AB ſecans utcumque diametrum in puncto C, & per puncta A, & B ducantur applicatæ AD, BE: dico lineas FD, F C eſſe continuè proportionales. Item AD, GC, HE eſſe continuè proportionales. Ducatur tangens I F.



Demonſtr. (*Per primam hujus*) ratio FE ad FD eſt ſicut quadrati B E ad quadratum AD hoc eſt duplicata lineæ E B ad lineam A D, ſeu duplicata lineæ EC ad CD. Tota ergo EF ad ſegmentum DF eſt ut quadratum E C ad quadratum C D. Ponatur verum eſſe quod quæritur, hoc eſt FC mediam eſſe proportionalem inter FD, & FE. Quia ita eſt tota FE ad ablatam F C ſicut tota FC ad ablatam FD, erit & reliqua C E ad reliquam C D ut tota FE ad totam FC; & cum FE ad FD ſit in duplicata ratione FE ad FC, erit etiam in duplicata ratione CE ad CD, ſeu EB ad AD.

Hæc conſideratio utilis eſt ad inveniendum punctum B in quo linea AC ſecat parabolam.

Secunda pars probatur nempe A D, G C, HE eſſe continuè proportionales, quæ ſunt enim in ſubduplicata ratione continuè proportionalium, ſunt etiam continuè proportionales. Sed HE, GC, AD (*per primam hujus*) ſunt in ſubduplicata ratione ſagittarum: ergo & continuè proportionales ſunt.

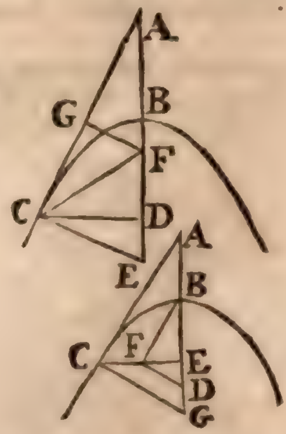
PROPOSITIO XXIX.

Problema.

Parabolæ umbilicum reperire.

Primò umbilici inventio facilis eſt. Cum enim ex definitione umbilicus diſtet à vertice parabolæ quarta parte lateris recti, dederimuſque ſuprà plurimas methodos inveniendi lateris recti. Conſequenter, facile umbilicum cujuſcumque parabolæ aſſignabimus.

Proponatur parabola BC cujus axis AE; ſitque tangens A C ad quam ſit perpendicularis CE, dividatur AE bifariam in F; dico punctum F eſſe umbilicum, & DF mediam partem lateris recti.



Demonſtratio. Cum angulus A C E ſit rectus, erit C D media proportionalis inter AD & D E, ergo ejus quadratum æquale eſt rectangulo ſub AD, DE, (*per* 1.) idem quadratum C D, æquale eſt rectangulo ſub B D, & latere recto & rectangulum ſub BD, & latere recto æquale rectangulo ſub AD, DE, & *per* 14. 6.) AD, BD, & latus rectum, & DE ſunt proportionales, ſed AD eſt dupla ipſius D B; ergo latus rectum duplum eſt lineæ D E.

Secundò, quia AE diviſa eſt bifariam in F, ita erit A E ad AF ſicut ablata A D ad ablatam A B; ergo reliqua D E ad reliquam B F eſt ut tota ad totam, nempe ut AE ad AF, nempe dupla; ergo BF eſt media pars ipſius DE.

PROPOSITIO XXX.

Theorema.

Si fiat angulus ad contactum æqualis angulo tangentis cum axe, habebitur focus; viciſſim ſi linea à foco ad tactum, æqualis eſt linea intercepta inter focum & concurſum tangentis cum axe.

Fiat in eadem figura angulus ACF æqualis angulo CAF, dico punctum F eſſe umbilicum. Ducatur ad AC perpendicularis CE.

Demonſtr. Cum anguli CAF, ACF ſint æquales, erunt lineæ AF, FC æquales, ideoque ſemicirculus ductus ex F, ut centro, intervallo FC, tranſit per C, & cum angulus A C E ſit rectus, tranſit etiam per E; & AE diviſa eſt bifariam in F; ergo F focus eſt. quod erat primum.

Secundò F ſupponatur focus. Cum angulus ACE ſit rectus, & AE diviſa bifariam in F, ſi deſcribatur ſemicirculus, hic neceſſario tranſit per C; ergo lineæ F A, F C ſunt æquales.

COROLLARIUM I.

Anguli item FAC, ACF ſunt æquales (*per* 5. 1.)

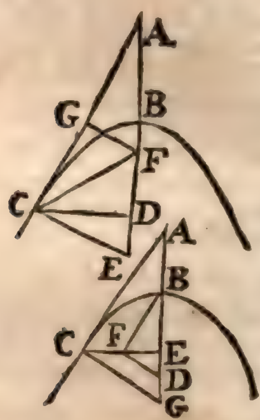
COROLLARIUM II.

Si ex F ut centro deſcribatur circulus quocumque intervallo FA, qui ſecet parabolam in C, jungaturque AC, hæc erit tangens.

COROL.

COROLLARIUM III.

Si ex umbilico F ad tangentem AC ducatur perpendicularis F G, hæc ſecabit bifariam lineam AC in puncto G, fiunt enim triangula ſimilia AGF, GFC; & AF, FC ſunt æquales.



COROLLARIUM IV.

Aliter inveniri poteſt focus. Sit axis BD, ducatur quæcumque ordinata CE, quæ dividatur bifariam in F, ducatur linea BF ad quam ſit perpendicularis FD, dico ED eſſe diſtantiam foci à vertice B. Fiat enim BA æqualis BE, jungaturque AC ad quam ſit perpendicularis CG.

Demonſtravimus EG eſſe dimidium lateris recti, ſed E D eſt dimidia pars EG; eſt enim AC tangens, & cum tam CF ſit ſemiſſis C E, quam AB ipſius AE, erunt AC, BF parallelæ; ſunt item anguli ACG, BFD recti, quare E D erit ſemiſſis EG; ergo ED eſt quarta pars lateris recti.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

Omnis radius axi parallelus in ſuperficiem parabolicam & reflexivam incurrens, in focum reflectitur.

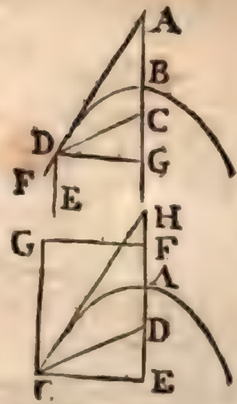
Hæc eſt celebris illa propoſitio, & proprietas parabolæ, propter quam ſolam multi parabolæ doctrinam tradiderunt. Suppono ergo dari corpus parabolicum reflexionis capax, ſi nempe intelligeretur parabola circa immotum axem circumvolui, & ſuperficiem aliquam parabolicam produxiſſe; & ad illius formam ex materia ſolida conflatum eſſe vas aliquod intus lævigatum; dico omnem radium luminis axi parallelum reflecti in focum.

Suppono autem omnem reflexionem fieri ad angulos æquales incidentiæ, & reflexionis: ſuppono item angulos ad ſuperficies curvas, ſumi penes tangentes.

Sit ergo AB axis parabolæ DB, ſitque tangens quæcumque AD, & focus C; & radius incidens E D parallelus axi; dico hunc radium reflectendum in focum C.

Demonſtr. Cùm lineæ ED, CA ſint parallelæ; erunt anguli internus & externus ex eadem parte, nempe FDE, DAC æquales, ſed anguli DAC, CDA ſunt æquales: ut oſtendimus ergo anguli incidens EDF, & reflexus CDA ſunt æquales; quod erat demonſtrandum.

Quod autem demonſtravi de puncto D de alio quovis oſtendi poteſt.



PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

Si ſumatur in axe linea æqualis diſtantiæ foci, à vertice per quam ducatur perpendicularis, omnes parallelæ axi, ab ea ad parabolam incurrentes, æquales ſunt diſtantiæ foci.

Sit parabola AC umbilicus D, ſint lineæ AD, AF æquales, & per punctum F, ducatur perpendicularis FG; ſumatur punctum quodcumque C, ſitque CG parallela axi, dico C G & C D eſſe æquales; ſit tangens C H, & ordinata C E.

Demonſtr. (*Per 4. huius*) AE, AH ſunt æquales, & additis æqualibus AD, AF fiunt F E, ſeu CG, & DH æquales, & cum (*per 30.*) DC, DH ſint æquales, erunt DC, GC æquales.

Ex hac propoſitione deduci poteſt praxis aliqua deſcribendæ parabolæ.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Diameter ad quam eſt ordinatim applicata, omnium diametrorum ad eamdem ordinatam terminatarum maxima eſt.

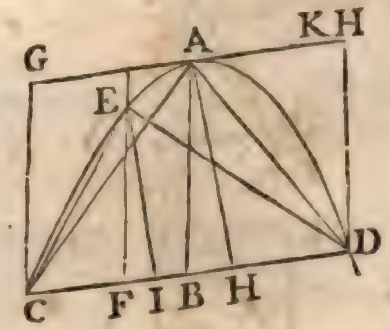
Sit in parabola diameter quæcumque A B, ad quam ſit ordinatim applicata C B D, ſitque alia quæcumque diameter E F, terminata eâdem lineâ C D; dico E F minorem eſſe quam A B, per punctum A ducatur G A ordinatim applicatæ C D parallela, hæc (*per 4. huius*) erit tangens cadens extra parabolam, ergo linea E F ad eam non pervenit, ergo F E minor eſt quam BA.

COROL

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

C A D eſt maximum omnium triangulorum in parabola CAD inſcriptibilium. Si enim ex pun-



ctis A & E ducantur ad C D, perpendiculares AH, EI, fient triangula æquiangula FEI, BAH, & cum EF minor ſit, quam AB; E I minor erit quam AH, quare triangulum C A D majus eſt triangulo CED (*per* 1.6.) cum habeat eamdem baſin, & majorem altitudinem.

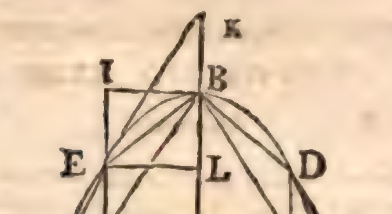
COROLLARIUM II.

Triangulum CAD majus eſt dimidiâ parabolâ, eſt enim dimidia pars CGHD majoris, quam ſit parabola CAD.

PROPOSITIO XXXIV.

Si maxima triangula in parabola bifariam dividantur, & ſuper ſegmentis alia triangula inſcribantur, dico primum triangulum cæterorum eſſe quadruplum.

Sit maximum triangulum ABC in parabola inſcriptum, & in ſegmentis BDC, AEB, inſcribantur alia maxima triangula AEB, BDC, quod fiet ſi diviſis bifariam lateribus AB, BC, in punctis G,& F ducantur diametri EF, GD; dico triangulum ABC, quadruplum eſſe triangulorum ſimul AEB, BDC. Per B ducatur B I occurrens diametro productæ in I, ducatur item per E tangens EK, & applicata E L.



Demonſtr. Tangens EK eſt parallela ordinatæ AB (*per* 4.) ſunt etiam diametri EF,BH parallelæ (*per* 8.) eſt ergo parallelogrammum FK,& lineæ EF, KB æquales. Sed (*per* 3.) KB, BL ſeu EI ſunt etiam æquales, ergo E I, E F ſunt æquales; ergo triangulum I B F, trianguli E B F eſt duplum. Et cum triangula E F A, E B F eundem verticem, & baſes æquales habentia ſint æqualia, erunt ergo triangula IBF, & AEB æqualia; ſed IBF & BFM ſunt æqualia, & cum triangula BFM, ABH ſint ſimilia, & latus AB duplum lateris FB, erit triangulum ABH quadruplum trianguli FBM, ut pote in duplicata ratione laterum; ergo triangulum ABH quadruplum eſt trianguli A E B. Similiter oſtendam triangulum H B C quadruplum eſſe trianguli BDC. Ergo totum ABC,duorum AEB, & BDC ſimul quadruplum eſt.

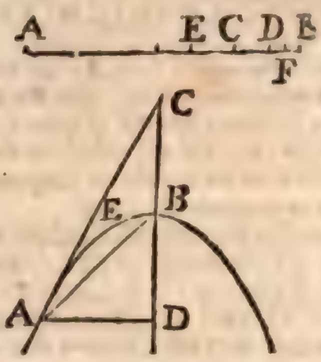
COROLLARIUM.

Oſtendere ſimiliter poſſumus triangulum AEB, quadruplum eſſe duorum triangulorum, quæ fieri poſſunt ſuper BE, EA.

LEMMA.

Si detur ſeries infinita quantitatum decreſcentium in ratione quadrupla, erit aggregatum omnium ad primum terminum, ut quatuor ad tria.

Sit primò quantitas aliqua AB, ſitque AC tres ejus quadrantes, ſit item A C ad C D ut AB ad



BC, eritque CD quadrans ipſius AC minor quàm CB, quæ eſt quadrans totius AB. Abſcindatur EC ipſi CD æqualis; cum ſit tota AB ad ablatam CA ſicut tota AC ad ablatam EA, erit reliqua CB ad EC ſeu CD, ut tota AB ad AC, nempe ut 4 ad 3. igitur CD ad DB ſe habet ut 3 ad 1. ſicut AC ad C B ſe habebat ut 3 ad 1. ita oſtendam ſi D B ita dividatur in F, ſicut CB in D, aut AB in C, ita eſſe CD ad DF ut 4 ad 1. & DE ad FB ut 3 ad 1. Et ita conſequenter nunquam pervenietur in B licet ſit infinita ſeries terminorum in proportione quadrupla, & ſemper id quod reſtabit erit proportionale,& erit cum libuerit minus quacumque quantitate propoſita. Igitur ſi ſit quantitas AB quæ ſe habeat ad primum terminum, ut 4 ad 3. & terminus quilibet ad ſequentem ut 4 ad 1. infinita ſeries terminorum hujuſmodi ſe habebit, ad primum terminum ut 4 ad 3.

PROPOSITIO XXXV.

Parabola eſt ſeſquitertia trianguli maximi in ipſa inſcripti.

Theorema.

Sit quæcumque parabola cui inſcribatur maximum triangulum. Dico parabolam eſſe ſeſquitertiam

tiam trianguli illius : cum enim triangulum maximum ſit quadruplum triangulorum in ſegmentis inſcriptibilium (*per* 34.) & hæc ſint quadrupla aliorum , & ita conſequenter , & per ſingulas inſcriptiones auferatur pluſquam dimidium reliquæ parabolæ ; ita ut exceſſus parabolæ ſuper triangula inſcripta poſſit oſtendi minor quâlibet quantitate , erit in Parabola ſeries infinita terminorum in proportione quadrupla, ergo per Lemma ſuperius tota ſeries eſt ſeſquitertia termini, ſeu trianguli maximi ; quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Parabolæ terminatæ ſe habent inter ſe, ut triangula per axem.

COROLLARIUM II.

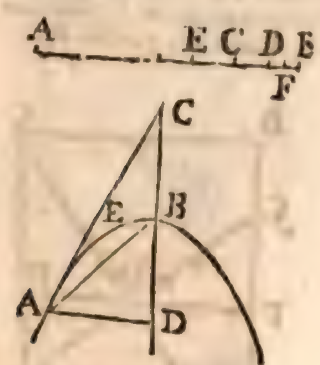
Facile dato ſegmento parabolæ æquale triangulum aſſignabimus, nempe ſi baſin trianguli per axem quarta parte augeamus.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Triangulum mixtum concavum parabolicum duplum eſt ſegmenti convexi.

Sit ſegmentum parabolæ A E B C concavum terminatum parabolæ peripheria A B diametro BC, & tangente AC , dico illud ſegmentum concavum , eſſe duplum ſegmenti convexi AEBA , nempe comprehenſi lineâ rectâ A B , & peripheria parabolæ. Ducatur ordinata AD.



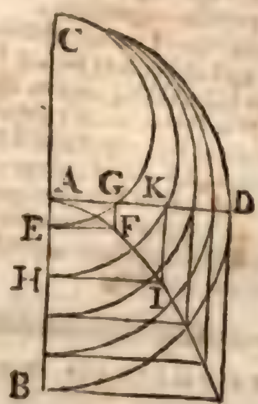
Demonſtr. Per ſuperiorem triangulum A B D ſeu ABC illi æquale propter lineas D B & B C æquales,ſe habet ad ſegmentum ABEA ut 3 ad 1; ergo ſegmentum AEBC ad AEBA ſe habet ut 2 ad 1 ; quod erat demonſtrandum. Alia multa in hunc modum excogitari poſſunt.

PROPOSITIO XXXVII.

Problema.

Datâ Rectâ lineâ pro diametro Parabolæ , item angulô quem applicatæ efficere debeant ; & parametrô parabolam deſcribere.

Sit data recta A B pro diametro futuræ parabolæ , ſit item A C æqualis parametro ejuſdem , deſcribantur plurimi ſemicirculi tranſeuntes per C, & dividentes diametrum AB , in quotcumque partes ſive æquales ſive inæquales parum intereſt, quò plures & crebriores erunt , eò exactiùs deſcribetur parabola, ducatur per A perpendicularis AD ſecans omnes circulos.



Fiat prima applicata comprehendens cum diametro A B quemcumque angulum A E F æqualis primæ lineæ AG , ſecunda H I æqualis ſecundæ AK,& ita conſequenter ; dico puncta F, I & reliqua, eſſe in peripheria parabolæ.

Demonſtr. Cum ducta ſit AG perpendicularis ad C E diametrum primi circuli erit media proportionalis inter AC,& AE, ergo quadratum AG, ſeu EF, æquale eſt rectangulo ſub AE, & parametro A C. Pariter oſtendam AK ſeu H I , eſſe mediam proportionalem inter ſagittam HA, & parametrum AC : ergo puncta F, I, & alia hac praxi inventa , ſunt in peripheria parabolæ ; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Si ita ſit GF ad K I ut quadratum A G ad quadratum AK ; puncta F & I pertinebunt ad parabolam , quia cum AG , EF; AK , HI ; AE , GF; AH, KI ſint æquales erunt quadrata EF , HI , ut ſagittæ AE, AH juxta definitionem parabolæ.

PROPOSITIO XXXVIII.

Problema.

Alia deſcriptio Parabolæ.

Proponatur triangulum ABC , cujus punctum



A debeat eſſe vertex parabolæ , tranſeuntis

per C, quærantur alia puncta ejuſdem parabolæ. Dividatur latus AB in quotcumque partes in punctis E, F, G; dividatur & BC in totidem partes prioribus proportionales, in punctis H, I, K; ducanturque radij AH, AI, AK, & per puncta E, F, G lineæ ED, FM, GL parallelæ BC; dico puncta D, M, L, pertinere ad parabolam.

Demonſtr. Ita eſt ex conſtructione AE ad AF ſicut BH ad BI; ſed (*per* 4 6.) ita eſt BH ad BI ſicut ED ad EO; ergo ita eſt AE ad AF ut ED ad EO. Pariter ita eſt (*per* 4.6.) EO ad FM ſicut AE ad AF; ergo ED ad FM eſt in duplicata ratione AE ad AF, nempe ut quadrata; ſe habent ergo ED ad FM ſicut quadrata linearum AE, AF: ergo per corollarium præcedens, puncta D, M & C; pertinent ad periferiam parabolæ quod erat demonſtr.

PROPOSITIO XXXIX.

Problema.

Alia Parabolæ deſcriptio.

Proponatur. Idem triangulum ABC, ſitque deſcribenda parabola cujus vertex A & quæ debeat tranſire per C; & habere diametrum parallelam lineæ BC, ducantur quæcumque lineæ BC, GP, FN, ET parallelæ lineæ BC. Pariter ut BC ad GP, ita fiat GP ad GL; dico puncta A, L, C pertinere ad parabolam.

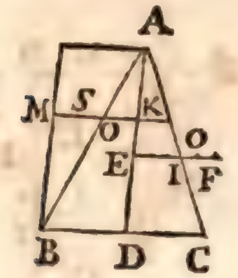
Demonſtratio. BC ad GL eſt in duplicatâ ratione BC ad GP; ſed ut BC ad GP ita eſt AB ad AG; ergo BC ad GL eſt in duplicata ratione AB ad GA, nempe ut quadratum AB ad quadratum AG; ergo puncta A, L, C pertinent ad parabolam (*per coroll.* 36.)

PROPOSITIO XL.

Problema.

Circa propoſitum triangulum Parabolam deſcribere.

Proponatur deſcribenda parabola circa triangulum ABC, hoc eſt, cujus peripheria tranſeat per puncta A,B,C, quærenda ſunt alia puncta; dividatur baſis BC bifariam in D, ducaturque AD,



tum EF ſumatur æqualis DC, & inter EF, & EI quæratur media proportionalis EO, punctum O pertinebit ad parabolam, quia DC ad EO erit in ſubduplicata ratione AD ad AE.

COROLLARIUM I.

Pariter datâ diametrô AD, & applicatâ BC, facilè totam parabolam deſcribemus, ſi nempe ducamus BM parallelam AD; tum AD dividamus in quotcumque partes, ſitque AK una diviſio; ducatur KM parallela BC; ſitque KS media inter KM, & KO; clarum eſt punctum S pertinere ad parabolam.

COROLLARIUM II.

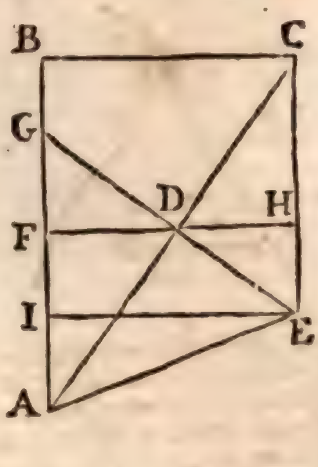
Conſtat cum EO ſit media proportionalis inter EI, & EF quadratum EO æquale eſſe rectangulo ſub EF, ſeu DC, & EI, & cum idem quadratum æquale ſit rectangulo ſub AE & parametro, rectangulum ſub AE & parametro æquale erit rectangulo ſub DC, EI; quare ita erit AE ad EI ſicut DC ad parametrum.

PROPOSITIO XLI.

Theorema.

Si trianguli rectanguli baſis biſariam dividatur, & per punctum diviſionis ducatur parallela uni lateri & perpendicularis occurrens parallelæ alteri lateri, illud punctum occurſûs pertinebit ad parabolam cujus focus eſt in extremitate baſis, & vertex à prima parallela determinatur.

Sit triangulum rectangulum ABC, cujus hypothenuſa AC bifariam dividatur in D, & per punctum D ducatur perpendicularis GDE occurrens lineæ CE parallelæ lateri AB, ducatur item HDF parallela DE, dico punctum E pertinere ad parabolam cujus vertex F, umbilicus A, tangens GE; ducatur EI parallela BC.



Demonſtratio. Cùm AC ſit dupla AD, (*per* 3.6.) erit AB dupla AF; item FD dimidia BC, ſeu FH, ſunt igitur FD, DH æquales, & cùm triangula GDF, DHE ſint ſimilia, & FD, DH æquales, erunt FG, & HE, ſeu FI æquales, & (*per* 4.1.) in triangulis ADG, ADE, erunt baſes AE, AG æquales, quare (*per* 29.) ſi F ſit vertex parabolæ tranſeuntis per E, GE erit tangens, & A umbilicus.

Poteſt tamen oſtendi quadratum IE eſſe æquale rectangulo ſub FI, & quadrupla AF; cum angulus GDA ſit rectus, & in ſemicirculo, FD erit media proportionalis inter FG, ſeu FI & AF, ejuſque quadratum æquale erit rectangulo IFA,

&

& quadratum totius F H ſeu I E prioris quadruplum æquale eſt rectangulo ſub F I, & quadruplâ A F, quæ erit parameter; quod erat demonſtrandum.

Coroll. AE, AG ſunt æquales; item AF, FB, & ablatis æqualibus FG, FI, AI & GB ſuperſunt æquales, & addita communi IG, ſunt AG, IB, AE æquales.

PROPOSITIO XLII.

Problema.

Dato vertice, & umbilico, parabolam deſcribere.

Sit parabolæ umbilicus A; B vertex, perficiendaque ſit parabolæ deſcriptio; ſumantur AB, BC æquales, excitenturque ad B, C, perpendiculares C E, BD; ducantur utcumque lineæ ADE ſecantes BD in punctis D, ducanturque per D perpendiculares DF, occurrentes EF parallelæ AC in punctis F, quæ dico eſſe in ſuperficie parabolæ.

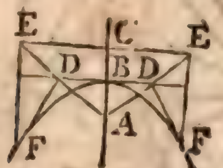
Demonſtr. Cum A B, B C ſint æquales, erunt A D, DE æquales (*per 2. 6.*) ergo (*per præcedentem*) puncta F ſunt in ſuperficie parabolæ.

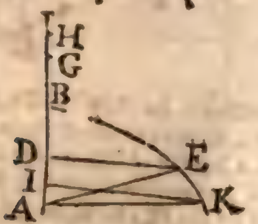
PROPOSITIO XLIII.

Problema.

Dato umbilico & vertice, parabolam deſcribere.

Sit datus umbilicus A, vertex B, ſitque perficienda parabola. Producatur axis A B, dividaturque in plurimas partes, & per diviſiones du-





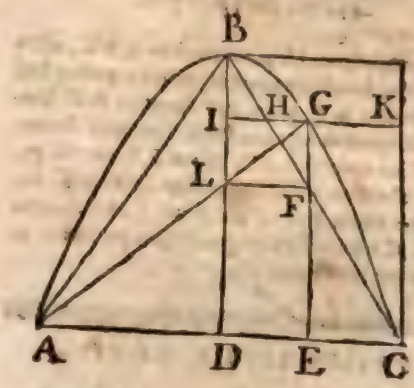
cantur ordinatim applicatæ ad axem ut D E, ſit BG æqualis ſagittæ BD, fiatque AE æqualis AG; clarum eſt (*per 41.*) punctum E ad parabolam pertinere. Sit pariter B H æqualis ſagittæ I B, & A K æqualis A H, punctum K erit in peripheriâ parabolæ.

PROPOSITIO XLIV.

Problema.

Si intra parabolam triangulum inſcribatur, ducaturque diametro parallela ſecans latus trianguli; erunt ejus ſegmenta, proportionalia baſi, & applicatæ.

Proponatur parabola in qua ſit inſcriptum triangulum A B C: diviſâque baſi AC bifariam; ducatur diameter B D, & E F G illi parallelâ, ſecans latus trianguli; ducatur item K G I baſi A C parallela: dico ita eſſe DC ad IG ſicut EF ad FG.



Demonſtr. Cum oſtenderimus (*in 39.*) IG eſſe mediam proportionalem inter DC, ſeu IK & HI; ita erit tota DC ad totam I G, ſicut ablata D E ad ablatam I H; ergo erit reliqua E C ad reliquam G H, ſicut tota DC ad totam I G; & cum triangula E F C, F G H ſint ſimilia; erit ut EC ad G H ita E F ad F G: ergo ita erit D C ad IG ſeu DE, ut E F ad FG: quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

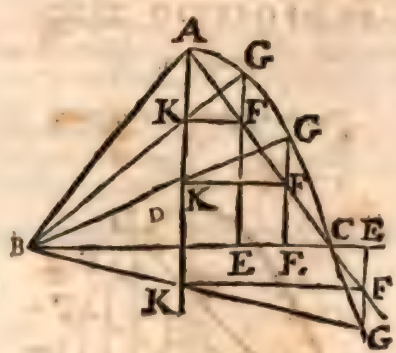
Per punctum F ducatur FL parallela DE, jungaturque AL LG; cum ſit ut AD ad DE, ſeu LF, ita EF, ſeu DL ad FG; ita etiam erit alternando AD ad DL; ſicut LF ad FG, & componendo ut AE ad EG, ita AD ad DL: ergo AL, LG ſunt unica recta linea.

PROPOSITIO XLV.

Problema.

Circa datum triangulum parabolam deſcribere.

Sit triangulum A B C circa quod deſcribenda proponitur parabola. Diviſâ B C bifariam in D



ducatur diameter AD, dividatur baſis BC in quotcumque partes in punctis E, per quæ ducantur EF parallelæ diametro A D, fiantque ut D C ad D E, ita EF ad FG: dico puncta G ad parabolam pertinere, quæ ſi appoſitè conjungas lineâ curvâ habebitur parabola (*per 44.*)

PROPOSITIO XLVI.

Problema.

Alia Parabolæ deſcriptio.

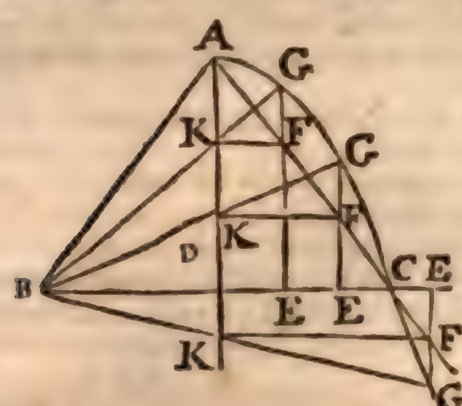
Sit propoſitum idem triangulum A B C, circa quod deſcribenda ſit parabola: diviſâ pariter baſi BC bifariam in D; ducatur diameter A D dividenda in quotcumque puncta K, per quæ ducantur KF parallelæ baſi BC, & per F, lineæ FG parallelæ diametro; ducantur item lineæ B K occurrentes lineis F G in punctis G; Habebuntur puncta G quæ aſſero ad parabolam pertinere ut conſtat (*ex eadem* 44.)

PROPOSITIO XLVII.

Problema.

Parabolam continuare.

Sit propoſitum parabolam A C continuare: ſit

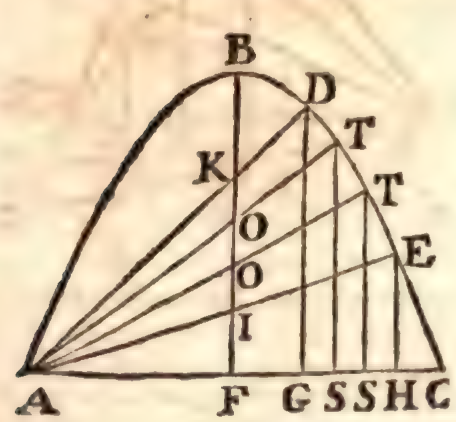


ducta diameter AD, & ordinata CD quæ ulterius producatur in E; ducatur EF parallela diametro, ducatur item F K ordinata, ducatur ex puncto B, linea B K G, ſecans E F in G, dico punctum G ad parabolam pertinere (*per* 44.)

PROPOSITIO XLVIII.

Problema.

Parabolæ ſegmentum reſtituere.



Proponatur Parabola A B C, cujus ſegmentum D E ſit reſtituendum. Ducatur quæcumque diameter B F, ducanturque AD AE ſecantes diametrum BF in punctis K & I. Ducantur item D G, E H parallelæ diametro BF, dividatur K I in quotcumque partes æquales in punctis O, & GH in totidem, in punctis SS, per quæ ducantur parallelæ diametro, occurrentes lineis A O in punctis T, quæ aſſero ad parabolam pertinere.

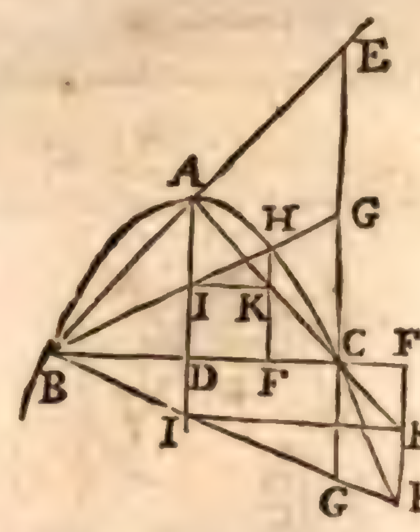
Demonſtratio eſt eadem.

PROPOSITIO XLIX.

Problema.

Si circa triangulum deſcribatur Parabola & fiat ut dimidia baſis ad ſegmentum ſuum, ita parallela diametro ducta per extremitatem baſis ad ſuum, ducaturque ab alia extremitate baſis ad tale punctum recta linea; hæc occurret parallelæ diametri per diviſionem baſis ductæ, in puncto pertinente ad parabolam.

Sit deſcripta parabola circa triangulum ABC, & diviſâ baſi bifariam in D, ſit diameter A D, & illi parallela CE; fiatque ut DC ad C F; ita E C ad CG; ducaturque linea BG, occurrens FH parallelæ diametro in puncto H: dico punctum H pertinere ad parabolam. Ducatur linea K I.



Demonſtratio. Ita eſt DC ad C F, ſicut AD ad FK. (*per* 4. 6.) & ex conſtructione ut CE ad CG, & (*per* 4. 6.) ut CE ad CG, ita AD ad DI; ergo DI & F K ſunt æquales ſicut I K & D F. Eſt item ut BD ad DI, ſeu FK; ita IK, ſeu DF, ad KH: ergo permutando ita erit B D ad D F, ſicut FK ad K H: ergo (*per* 44.) punctum H pertinet ad parabolam.

COROLLARIUM

Si dividatur D C in quotcumque partes æquales, & E C in totidem; ſingulæ parallelæ diametro, ductæ per diviſiones lineæ D C, occurrent lineis ductis à puncto B, ad diviſiones lineæ E C.

PROPOSITIO L.

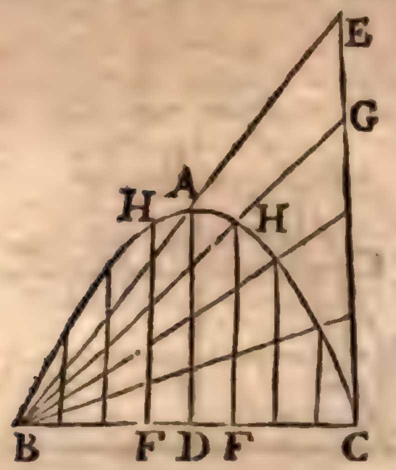
Problema.

Circa datum triangulum Parabolam deſcribere.

Proponatur triangulum A B C circa quod deſcribenda

Digitized by Google

ſcribenda eſt parabola. Diviſâ B C biſariam in D, ducatur diameter AD, & ei parallela C E, quæ uti



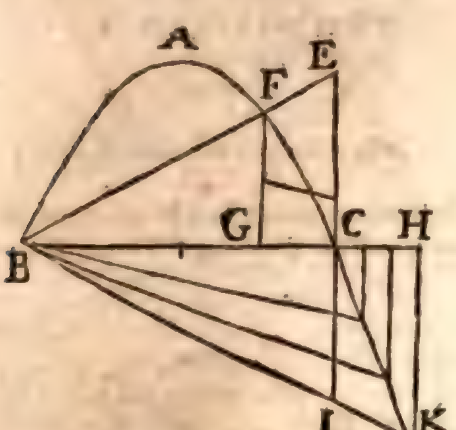
baſis B C, in totidem partes æquales diviſæ ſint in punctis ſcilicet F & G. Ducantur ex puncto B lineæ BG, & per F parallelæ diametro quæ priores ſecent in punctis H. Clarum eſt *(per præcedentem)* hæc puncta H pertinere ad parabolam.

PROPOSITIO LI.

Problema.

Parabolam continuare.

Sit Parabolæ portio B A C continuanda. Per punctum C ducatur C E parallela diametro, quæ ulteriùs producatur, ducatur & BE ſecans ſectionem in puncto F. Ducaturque F G parallela C E,



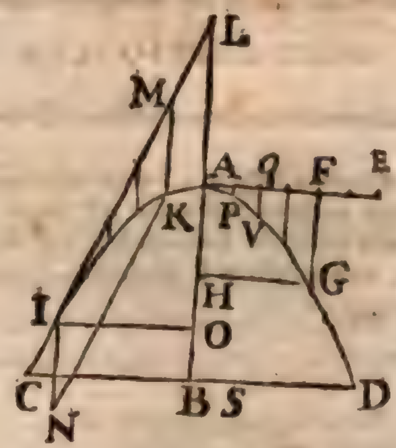
fiant GC, CH; ſicut GF, CI æquales; dividanturque CI, & CH in totidem partes æquales, & per diviſiones CH, ducantur diametro parallelæ. Item ducantur ex puncto B lineæ per diviſiones C I: dico *(per 48.)* puncta concurſuum eſſe in peripheria parabolæ.

PROPOSITIO LII.

Problema.

Alia deſcriptio Parabolæ.

Supponitur data diameter A B futuræ parabolæ, unà cum ordinatìm applicata C D, quâ bifariam diviſâ in B, ſit diameter AB: ſit item A E æqualis, & parallela B D, dividaturque in quotcumque partes æquales verbi gratia 6. Dividatur autem diameter AB, in partes æquales ſecundum numerum unitatum; quæ in quadrato lineæ A E continentur nempe in 36. prima A P contineat unam particulam, ſecunda quatuor, tertia 9. & ita conſequenter dico hæc omnia puncta ad parabolam pertinere. Ducatur enim G H.



Demonſtr. Ita ſe habet AB ad AH; ſicut quadratum B D ad quadratum GH: ergo ex definitione parabolæ punctum G ad parabolam pertinet.

COROLLARIUM I.

Eâdem methodo parabolæ mutilæ ſegmentum reſtituemus, ut ſi parabolæ ſegmentum K I reſtituendum ſit. Ducatur applicata IO ſumanturque in diametro æquales OA, A L, ducaturque L I quæ tanget parabolam in puncto I. Ducantur per puncta K & I parallelæ diametro, & æquales K M, I N erit I N diameter tranſiens per contactum I. Dividatur I M in quotcumque partes æquales, & I N, in partes reſpondentes numero quadrati, lineæ I M. Sicut priùs, tum per diviſiones tangentis I M; ducantur parallelæ diametro, quarum proximior puncto I, contineat unam particulam, lineæ I N. Secunda 4. tertia 9. & ita conſequenter, clarum eſt hæc; puncta pertinere ad parabolam.

COROLLARIUM II.

In idem recidit alia praxis nempe B D dividatur in partes æquales verbi gratia 6. per quas ducantur parallelæ diametro A B, quæ dividantur in tot partes æquales, quot ſunt unitates in quadrato lineæ BD, & prima parallela ſeu SP deficiat unitate à linea A B, ſecunda deficiat quatuor particulis, & ita conſequenter habebuntur puncta ad parabolam pertinentia.

PROPOSITIO LIII.

Problema.

Datis tribus punctis, non in directum poſitis; & linea per unum tranſeunte pro una diametro, parabolam deſcribere.

Proponantur tria puncta A,B,C, non in eâdem lineâ rectâ conſtituta; detur & linea B D, quæ debeat eſſe una diameter, ſitque perficienda parabola; ducatur linea AC, quæ dividatur bifariam

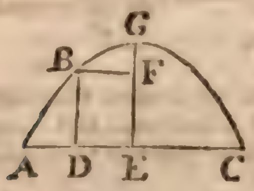
in E,& ducatur EFG, parallela BD, fiatque ut AE quadratum ad quadratum BF,ita GE ad FG. Clarum eſt parabolam per B & G tranſeuntem, tranſire etiam per A & C.

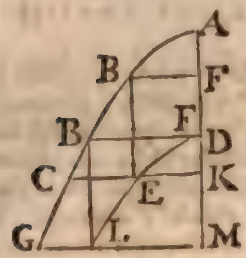
Eodem modò datis duabus lineis AC, B D ſe interſecantibus in puncto D, inveniemus parabolam cujus BD ſit diameter.

PROPOSITIO LIV.

Datâ parabolâ, aliam æqualem deſcribere.

Sit Parabola ABC in 2 fig. cui aliam æqualem deſcribere volumus. Aſſumatur AD,ſitque D vertex futuræ parabolæ. Ducatur B E æqualis & parallela; dico punctum E pertinere ad parabolam æqualem priori.





Demonſtr. Applicentur BF, EK, cum AD, BE ſint æquales, & parallelæ; item BE & FK; erunt AF, D K æquales, quare eadem erit ratio B F ad ſagittam FA, quæ EK ad ſagittam K D, quare eſt omnimoda æqualitas.

COROLLARIUM.

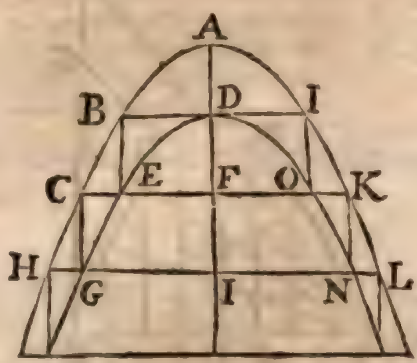
Clarum eſt hujuſmodi parabolas,ita nempe deſcriptas non convenire: ergo erunt aſymptoti.

PROPOSITIO LV.

Parabolæ aſymptoti ſemper minus inter ſe diſtant.

Sint Parabolæ aſymptoti productæ nempe eo modò quo diximus: dico illas ſemper minùs, & minùs diſtare. Ducatur enim per punctum D verticem interioris linea B D quæ erit tangens interioris,& applicata exteriori; ex puncto B ducatur B E, æqualis AD; & per punctum E ducatur ordinata CEF. Per punctum G alia ducatur. Oſtendo primo rectangula C E K, H G L eſſe æqualia quadrato B D.

Demonſtratio. Linea A F eſt dupla lineæ A D, ſed ut AF ad AD, ita *(per defin. parabolæ)* quadratum C F ad quadratum BD; quadratum autem CF *(per 5. 2.)* æquale eſt rectangulo C E K, & quadrato EF ſeu B D. Ergo rectangulum C E K cum quadrato BD duplum eſt quadrati BD. Ergo rectangulum CEK æquale eſt quadrato BD.



Pariter quadratum HI eſt ſeſquialterum quadrati C F & æquale rectangulo HGL, & quadrato G I, ſeu CF; ergo ablato quadrato G I, reſtat rectangulum H G L eſſe dimidium quadrati CF; ergo æquale quadrato BD, & ita conſequenter: ergo omnia rectangula quæ fient ſunt inter ſe æqualia, nempe CEK, HGL: ergo *(per 13.6.)* ita eſt CE, ad HG ſicut GL ad EK; ſed GL *(per 1.)* eſt major quam EK; ergo & CE, eſt major quàm HG.

COROLLARIUM.

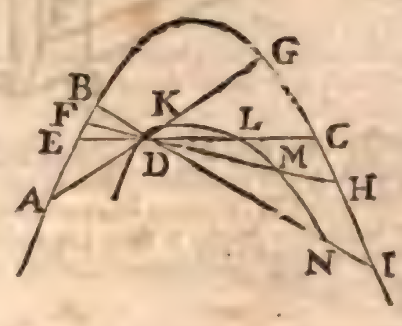
Patet etiam in his parabolis rectangula LGH, HNL eſſe æqualia & conſequenter lineas N L, H G eſſe æquales.

PROPOSITIO LVI.

Problema.

Alia deſcriptio parabolæ aſymptoti.

Proponatur parabola ABC aſſumaturque intrà illam quodlibet punctum D, à quo ducantur li-



neæ rectæ ADG, EDC, FDH, BDI, ſintque AD, KG: ED, LC; FD, MH: BD, NI æquales. Clarum eſt *(per coroll. præcedentis)* puncta K,L,M,N pertinere ad parabolam.

LIBER

LIBER SECVNDVS
De Ellypſi.

DEFINITIONES.

1 Ellypſis eſt figura unâ lineâ curvâ contenta, cujus ordinatim applicatarum ad Axem quadrata, eandem rationem habent, ac rectangula ſub ſegmentis Axis contenta; illis tamen æqualia non ſunt.

Hîc Ellypſin definio, ut diverſam à circulo, quamvis circulus aliquam affinitatem habeat cum Ellypſi, eique conveniat principalis proprietas, quæ Ellypſi hoc nomen indidit; ut autem meliùs intelligatur ſenſus hujus definitionis. Pro-



ponatur circulus in quo ſit diameter A B, & ordinatim applicata C D, quæ neceſſario debet eſſe perpendicularis ad diametrum, neque enim in circulo, quæ perpendicularis non eſt, poteſt eſſe ordinatim applicata, quia nempe non poteſt bifariam dividi, niſi quæ perpendicularis eſt ad diametrum. Certum eſt CD mediam eſſe proportionalem inter A C & C B, atque adeò ejus quadratum eſſe æquale rectangulo ACB. Pariter quadratum E F æquale eſt rectangulo AEB, ideoque erunt ut quadrata inter ſe, ita & rectangula. Volo igitur ut in Ellypſi quadrata applicatarum ſe habeant, ut rectangula ſub ſegmentis, non tamen illis ſint æqualia, ſed aut majora, aut minora; ut ſi ita ſit quadratum CG ad quadratum EH; ut rectangulum ACB ad rectangulum AEB, prima autem non ſint ſecundis æqualia: Hanc figuram voco Ellypſin. Pariter, ſi quadratum C K ad quadratum EI, ſit ut rectangulum ACB ad rectangulum AEB, ſintque prima ſecundis majora: voco illam figuram Ellypſin.

Poſui autem in definitione applicata ad axes, quia in Ellypſi, accidit; ut certæ duæ diametri conjugatæ ſcilicèt, ſint æquales: & tunc quadrata applicatarum ſunt æqualia ſuis rectangulis. Sed illæ diametri obliquæ ſunt ad invicem.

Volui definire Ellypſin independenter à Cono, & eam quaſi abſolutè conſiderare, ut totam hanc doctrinam in unico plano poſitam faciliorem redderem.

2. Conjugatæ diametri ſunt diametri, quarum utraque alteri æquidiſtantes bifariam dividit; ut diametri L N, & A B. Si nempe A B dividat bifariam omnes lineas parallelas lineæ LN, & viciſſim L N dividat bifariam omnes parallelas diametro A B.

3. Axes conjugati ſunt diametri conjugatæ ſe ad angulos rectos ſecantes.

4. Umbilici ſeu poli, aut puncta ex comparatione, ſunt puncta in Axe majore ſumpta ita eum dividentia, ut rectangulum ſub ſegmentis ejus, æquale ſit quartæ parti figuræ, hoc eſt æquale ſit quadrato ſemiaxis majoris.

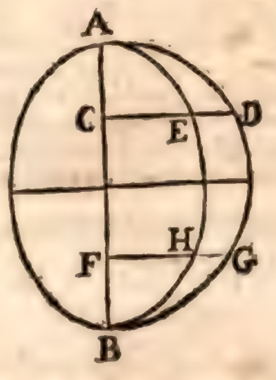
5. Centrum Ellypſis eſt punctum quod bifariam dividit illius diametros.

6. Diameter dicitur quæ ordinatim ei applicatas bifariam dividit.

PROPOSITIO I.

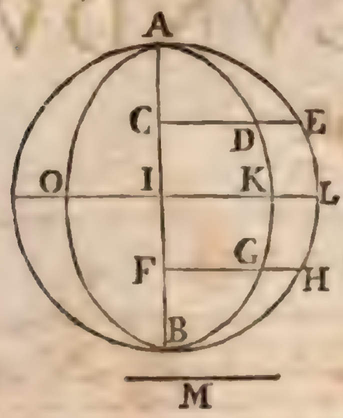
Theorema.

In Ellypſi ordinatim applicatæ ad Axem, eandem rationem habent ad ordinatim applicatas ad diametrum circuli, circa Axem deſcripti ſibi reſpondentes.



Sit AB Axis Ellypſis, ſintque ordinatim applicatæ

catæ CD, FG. Deſcribatur item circa Axem A B, circulus AEB, in quo ſint ordinatim applicatæ CE, FH, dico ita CD ad CE ſicut FG ad FH.



Demonſtratio. (*Per definitionem Ellypſis*) ita eſt CD ad FG; ſicut rectangulum ACB, ſeu quadratum CE illi æquale, ad rectangulum A F B ſeu quadratum F H illi æquale, & alternando, ita eſt quadratum C D ad quadratum C E, ſicut quadratum FG ad quadratum FH; & cum quadrata ſint in duplicata ratione ſuorum laterum; ita erit CE ad CD; ſicut FH ad FG.

COROLLARIUM I.

Clarum eſt ita eſſe C D ad D E, ſicut FG ad GH, dividendo ſcilicet.

COROLLARIUM II.

Ita eſt tota Ellypſis ad circulum deſcriptum circa majorem Axem, ut minor ad majorem Axem, per methodum ſcilicèt Indiviſibilium. Ductis enim omnibus ordinatis ad Axem majorem, cùm ſit ut CD ad CE, ita I K ad IL, ſeu AI, ita erunt omnes ordinatæ Ellypſeos ſeu ipſa Ellypſis ad omnes ordinatas circuli, ſeu ad circulum, ut IK ad IL, aut ut dupla IK ſeu minor Axis ad majorem AB; quod erat demonſtrandum. Eodem modò ſi deſcribatur circulus circa minorem axem, ita erit Ellypſis ad eum; ut major Axis ad minorem.

COROLLARIUM III.

Ordinatæ æqualiter à verticibus diſtitæ, aut à centro, ſunt æquales; ut ſi linea AC, BF ſint æquales, erunt rectangula A C B, BFA æqualia, & cum quadrata C E, FH eodem modò ſe habeant, ac rectangula (*per definitionem Ellypſis*) & ipſa æqualia erunt: ergo & lineæ æquales erunt.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Circulum cujus diameter medius proportionalis eſt inter majorem axem & minorem, eſſe æqualem Ellypſi.

Sit linea M media proportionalis inter majorem axem A B, & minorem OK; dico ſi circa lineam M deſcribatur circulus, eum æqualem eſſe Ellypſi.

Demonſtratio. Circa majorem axem AB, intelligatur deſcriptus circulus; qui ad circulum M, erit in duplicata ratione lineæ A B ad lineam M; & cùm A B, M, O K ſint continuè proportionales, erit AB ad M in ſubduplicata ratione A B ad OK, ut autem quadrata, ita & circuli (*per 2. 12. Eucl.*) & per corollarium præcedens circulus AB ad Ellypſin eſt ut AB ad OK; ergo Ellypſis propoſita, & circulus M æquantur. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Ellypſes ſe habent ut Axium rectangula, nempe illæ Ellypſes quarum æquales Axes majores ſe habent ut minores; & viciſſim Ellypſes, quæ reciprocant Axes, ſunt æquales.

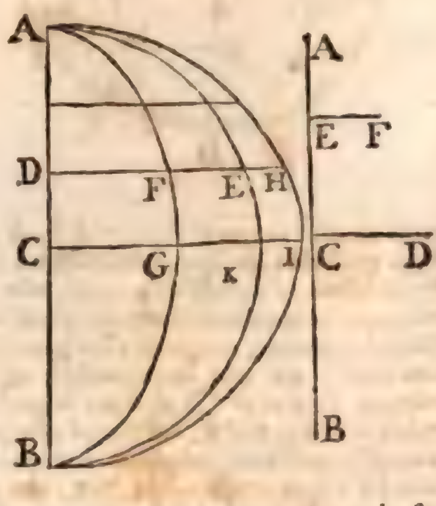
Aliæ multæ conſiderationes adhiberi poſſunt.

PROPOSITIO III.

Problema.

Ellypſis deſcriptio.

Proponatur Ellypſis deſcribendæ diameter AB, ſuper quâ deſcribatur ſemicirculus AEB, tum diviſâ A B in quotcumque partes, ſive æquales, ſive inæquales in C & D, & alias; ducantur perpendiculares CK, DE, quæ ſimiliter dividantur in punctis F & G; hoc eſt ita ſit D F ad DE, ſicut CG ad CK. Dico puncta A, F, G, B pertinere ad eandem Ellypſin.



Demonſtratio. Quadratum D E æquale eſt rectangulo A D B, & quadratum C K, rectangulo ACB, & cùm ſit ut DF ad DE; ita CG ad KC, ita etiam erit quadratum D F ad quadratum D E, ut quadratum C G ad quadratum K C: ergo ita erit quadratum DF ad quadratum C G, ut rectangulum ADB ad rectangulum A C B: ergo ex definitione Ellypſis, puncta A, F, G, B in eâdem Ellypſi erunt.

Pariter ſi fiat, ut DE ad DH; ita CK ad C I, puncta H & I in eadem Ellypſi erunt, (*per defin.*

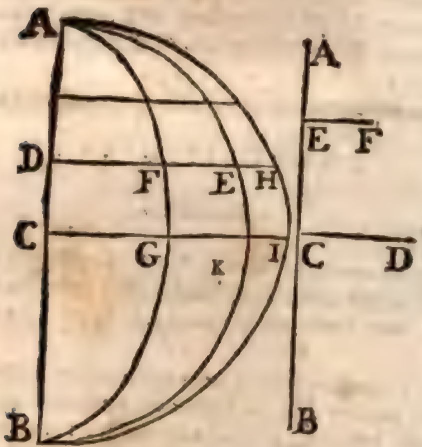
PROPO

PROPOSITIO IV.

Problema.

Secunda Ellypſis deſcriptio.

Proponatur primò linea AB, tanquam axis major Ellypſis deſcribendæ; quia autem infinitæ poſſ-



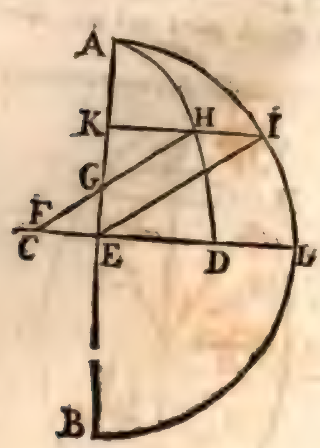
ſunt deſcribi Ellypſes, dividatur AB bifariam in C, exciteturque perpendicularis CD, pro ſemiaxe minore. Si applicetur quæcumque EF, fiatque ut quadratum AC; ſeu rectangulum ACB ad quadratum CD; ita AEB rectangulum ad quadratum EF, punctum F ex definitione Ellypſis erit in ejus circumferentia: ſi quadrato CD, fiat æquale rectangulum AEB, habebitur ejus focus E.

PROPOSITIO V.

Problema.

Alia deſcriptio Ellypſis.

Proponatur major Axis AB, minor CD, ſe interſecantes ad rectos in puncto E, intelligatur



linea FGH, æqualis majori ſemiaxi AE, ita ut punctum ejus G, quod in diametrum AE cadit, tam ita dividat, ut GH ſit æqualis minori ſemi-Axi, & FG ſit differentia inter majorem, & minorem ſemiaxem, ſitque ejus extremum F in minore ſemiaxe; dico punctum H eſſe in Peripheria Ellypſis; ut hoc demonſtrem, circa majorem Axem intelligatur deſcriptus ſemicirculus AIB, & ex puncto H ducta perpendicularis IHK, jungatur & EI.

Demonſtr. Lineæ FH, EI æquales ſunt, nempe utraque æqualis ſemiaxi majori, conjunguntque parallelas HI, FE, ergo parallelæ ſunt. In triangulo autem EIK, ita eſt EI major ſemiaxis ad GH æqualem minori ſemiaxi, ut KI applicata in circulo, ad KH applicatam ad Ellypſin: ergo (*per defin.*) punctū H pertinet ad Ellypſin; cum enim quadratum KI, æquale ſit rectangulo AKB, & quadratum EL, rectangulo AEB, ſitque ut AE ad ED, ita KI ad KH; ita erit rectangulum AKB ad quadratum KH, ut rectangulum AEB ad quadratum ED, quæ omnia ſunt juxta definitionem Ellypſis.

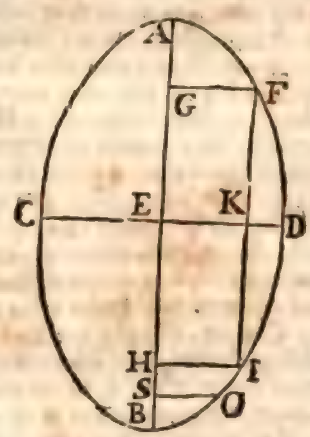
Praxis facilis eſt. Primò, ſi BM ſit æqualis minori ſemiaxi, erit ME æqualis differentiæ inter utrumque ſemiaxem: ſi ſumantur in axe AE plurima puncta, ut G ex quibus ſingulis intervallo differentiæ ME arcum GF deſcribas ſecantem CE in F, & ducas lineam FGH, æqualem majori ſemiaxi, habebitur punctum H. Pariter ſi in materia quacumque ſolida notes lineam æqualem lineæ FH, pariterque diviſam in G, & ita illam moveas, ut punctum G non diſcedat ex majore Axe, & punctum F ſemper inſiſtat minori Axi, extremum H deſcribet Ellypſin (*per hanc prop.*) cui innituntur aliqua inſtrumenta ad deſcriptionem Ellypſis accommodata.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Axis minor omnes Axi majori æquidiſtantes, bifariam dividit.

Sit Axis major BA, minor CD; dico axem minorem CD, dividere bifariam omnes Axi majori



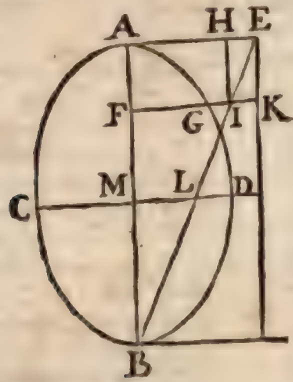
parallelas; abſcindantur EH, EG æquales, ducanturque perpendiculares HI, GF, quæ (*per coroll. 1.*) erunt æquales, & FI, erit parallela AB, quia conjungit æquales, & parallelas, & cum HF ſit parallelogrammum, & EG, EH æquales, erunt etiam KI, KF æquales. Idem oſtendam de quacumque alia linea. Ergo CD dividit omnes lineas majori Axi parallelas, atque adeò erunt AB, CD, Axes conjugati.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Axis Ellypſis parametrum invenire.

Sit propoſitæ Ellypſis Axis AB, cujus quæritur parameter ſeu latus rectum A E, fiat ut A B ad conjugatum Axem CD; ita CD, ad AE; dico A E eſſe parametrum Axis AB, ſeu menſuram quadratorum ordinatim ad Axem AB, ita ut qua-



dratum cujuſlibet applicatæ FG, æquale ſit rectangulo FI, HA, comprehenſo ſub ſagitta FA, & linea FI quæ eſt minor latere recto, ita ut defectus hujus rectanguli à rectangulo FE, comprehenſo ſub latere recto, & ſagitta, ſit rectangulum IE, habens eandem latitudinem, nempe ſagittam AF, & ſimile ſit comprehenſo ſub AB, AE; cum enim rectangulum IE ſit circa diagonalem BE, ſimile eſt rectangulo BE. Propter hunc defectum nempe quod quadrata applicatarum minora ſint rectangulo comprehenſo, ſub ſagitta, & latere recto, huic ſectioni indictum eſt nomen Ellypſis deficiens.

Demonſtr. (*Per definitionem Ellypſis*) ita eſt quadratum FG ad quadratum MD, ut rectangulum AFB ad rectangulum AMB, ſeu quadratum AM, nempe in ratione compoſita laterum, AF ad AM, & FB ad AM. Sed rationem ex iiſdem compoſitam, habet rectangulum FI, HA, ad rectangulum AML, nempe AF ad AM, & FI ad ML quæ eſt eadem (*per* 4. 6.) ac FB ad AM, aut MB: ergo ita eſt rectangulum FIHA ad rectangulum AML, ut quadratum FG ad quadratum MD: ſed quadratum MD æquale eſt rectangulo AML, ut probabo; ergo & rectangulum FIHA æquale eſt quadrato FG. Probo igitur ultimam minorem. Cum AB, CD, AE ſint continuè proportionales, erit rectangulum ſub extremis æquale quadrato mediæ CD, & eorum quadrantes æquales erunt; ſed quadratum MD eſt quadrans quadrati CD & rectangulum AML ſeu LMB eſt quadrans rectanguli BAE, ſunt enim ſimilia; ergo ſunt in duplicata ratione BA ad BM.

COROLLARIUM I.

AE parameter Axis majoris, Axis minor CD, Axis major AB, parameter axis minoris, ſunt quatuor lineæ continuè proportionales, quare ſi quis datis parametris Ellypſin exhiberet, is duas medias proportionales inveniret.

COROLLARIUM II.

Ita eſt quadratum applicatæ FG ad rectangulum AFB, ſub ſegmentis ut parameter AE, ad diametrum AB; nam ſunt tres continue proportionales, AB, CD, AE; ergo ita eſt AB ad AE, ut quadratum AB ad quadratum CD, & ut quadratum AM ad quadratum MC; ergo invertendo ut AE ad AB; ita erit quadratum CM ad quadratum AM, ſeu rectangulum AMB; ſed ut quadratum CM ad rectangulum AMB, ita eſt quadratum FG ad rectangulum AFB; ergo ut quadratum FG ad rectangulum AFB, ita AE ad AB.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Quadratum axis minoris, æquale eſt rectangulo ſub majore axe, & parametro; & quadratum minoris Semi-axis eſt quarta pars figuræ.

Propoſitio per ſe patet ex inventione parametri majoris axis: voluimus enim minorem axem, eſſe medium proportionalem inter majorem axem, & parametrum; ergo ejus quadratum æquale eſt rectangulo comprehenſo ſub majore axe & eius parametro; quod rectangulum communiter vocant figuram; unde ſequitur ſemiaxis quadratum æquale eſſe quartæ parti figuræ.

COROLLARIUM.

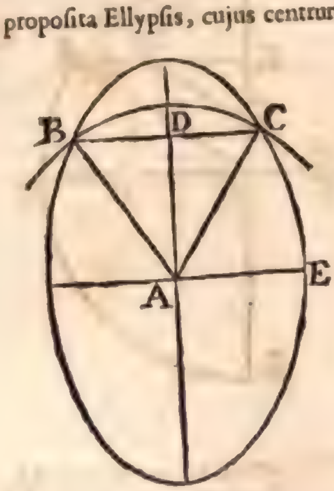
Quod diximus de majore axe, intelligendum eſt de minore; cujus parameter eſt tertia proportionalis minori axi, & majori. Atque adeò quadratum majoris axis æquale eſt rectangulo comprehenſo ſub minore axe & ejus parametro, & quadratum ſemiaxis majoris æquale erit ejus quartæ parti.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Data Ellypſis centrô datô axes ducere.

Sit propoſita Ellypſis, cujus centrum A; Ex



eo ut centro circulus deſcribatur, ſecans Ellypſim

ſim in duobus punctis B & C ; ducatur linea BC, quæ dividatur bifariam in D , ducaturque A D pro majore axe , cui perpendicularis ducatur AE pro minore axe.

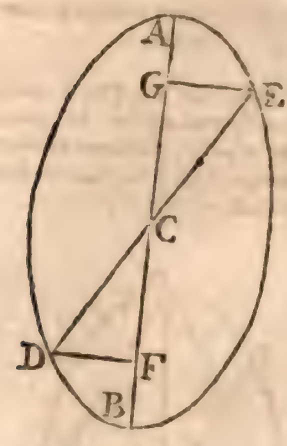
Demonſtratio. Linea BC (*per* 4.1.) & diviſa eſt bifariam in D,& perpendicularis eſt ; ergo AD eſt major Axis, & conſequenter AE erit minor.

PROPOSITIO X.

Theorema.

In Ellypſi omnes lineæ per centrum ductæ, bifariam dividuntur in ipſo centro.

Sit Ellypſis cujus axis AB , ſitque centrum C; dico quamcunque lineam D E per centum C ductam bifariam dividi. Ducatur ex D perpendicularis DF , quæ erit ordinatim applicata , ſumatur linea CG æqualis FC, & per G perpendicularis GE , & jungatur C E.



Demonſtr. GE , DF (*per coroll.* 3. 1.) ſunt æquales, & (*per* 4.1.) DC , C E ; Et cum omnia latera unius trianguli ſint æqualia ſingulis alterius, erunt anguli GCE, DCF æquales ; ergo , lineæ DC , CE componunt unam lineam , ergo ſi producatur DC , cadet in E , eruntque DC , CE æquales ; quod demonſtrandum erat.

COROLLARIUM I.

Omnis diameter per centrum tranſit ; cum omnis diameter debeat dividere bifariam omnes lineas alicui parallelas ; & quacunque propoſita poſſit illi duci parallela per centrum , ſi per centrum non tranſiret, illam bifariam non divideret ; cum omnis linea per centrum ducta , in ipſo bifariam dividatur.

COROLLARIUM II.

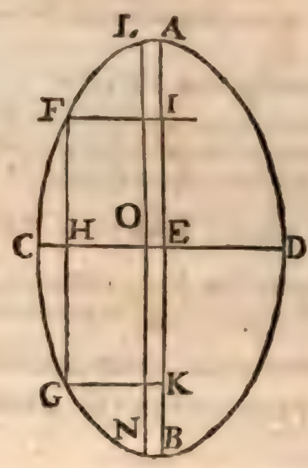
In quacumque diametro, applicatæ æqualiter à centro diſtantes, ſunt æquales. Sit enim quæcunque diameter AB, etiam ſi non ſit Axis, tranſiens nempe per centrum , in qua ſumantur duæ lineæ æquales CG , CF ; applicentur duæ FD, GE, quæ parallelæ erunt *ex definitione applicatarum* ; dico illas eſſe æquales. Ducatur per centrum linea D C , quam contendo productam concurrere in E. Nam ſi ex puncto E ad G , ducatur linea recta, hæc erit parallela lineæ DF , nam , (*per* 4.1.) triangula GEC, DCF ſunt omnino æqualia ; ergo & anguli GEC , CDF æquales erunt ; qui cum ſint alterni (*per* 29. 1.) G E , D F parallelæ erunt , & æquales. (*Per eandem*) viciſſim oſtendam ordinatas æquales,æqualiter à centro diſtare. Addo illam applicatam eſſe majorem, quæ eſt centro vicinior.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Ad diametrum ordinata ducta per centrum , eſt illius conjugata diameter.

Ad diametrum A B ſit ordinatim applicata C D , per centrum E tranſiens ; dico C D eſſe conjugatam diametrum , reſpectu AB , hoc eſt C D bifariam dividere omnes parallelas lineæ AB. Sit enim FG parallela lineæ AB , hanc aſſero dividi bifariam in puncto H. Ducantur FI,GK ipſi CD parallelæ.



Demonſtr. Cùm tam FG , IK ſint parallelæ quàm FI , GK ; FK parallelogrammum erit ; FI , KG erunt æquales, & (*per coroll.* 2. *præcedentis*) erunt diſtantiæ IE, EK æquales : ergo F H , H G æquales erunt, quare FG diviſa eſt bifariam in H; quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Cuicunque diametro , & conjugatam diametrum invenire,& applicatam, & centrum Ellypſis.

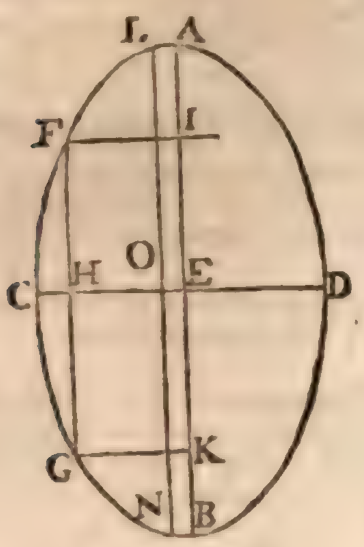
Sit diameter AB , quæ dividatur bifariam in E, ducatur & F G illi parallela quæ bifariam dividatur in H ; dico lineam CHE eſſe conjugatam diametrum. Si enim duceretur alia conjugata diameter,tranſiens per E, divideret bifariam lineam FG, quod eſt abſurdum.

2. Lineæ CD ducatur quæcunque parallela FI; hæc erit ordinata ad AB , cùm à linea AB dividatur bifariam (*per præcedentem.*)

3. Sit inveniendum centrum , ducantur duæ quæcunque lineæ AB, FG , parallelæ , & diviſæ

Digitized by

biſariam in H & E, dico lineam C D tranſire per centrum ; ſi enim non tranſiret per centrum ; ſit illud centrum , O , per quod ducatur diameter LON , parallela lineis AB , FG ; inveniatur il-



lius conjugata diameter , quæ debebit dividere biſariam parallelas LN,nempe AB,FG, in H & E, quod eſt abſurdum; duæ enim rectæ ſpatium clauderent.

COROLLARIUM I.

Sequitur ex eo, quod ſi diameter dividat, biſariam aliquam lineam non ductam per centrum, dividit etiam biſariam omnes illi parallelas.

COROLLARIUM II.

Quæcunque linea duas parallelas biſariam dividens, eſt diameter & per centrum tranſit.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Axis major eſt maxima omnium diametrorum , & axis minor minima ; & diametri æqualiter ab axibus remota, æquales ſunt.

Sit axis major A C, dico omnem aliam diametrum eo minorem eſſe : ex centro F deſcribatur circulus intervallo F A, clarum eſt , quod tan-



get Ellypſin in puncto A. Si enim ſecaret eam , ex eo puncto ſi duceretur perpendicularis ad diametrum , ejus quadratum eſſet æquale rectangulo ſub ſegmentis, cum tamen id ſit contra definitionem Ellypſis pro ut diſtinguitur à circulo : ergo nulla alia diameter ad circulum perveniet : ergo minor erit Axe A C.

Pariter circulus ex eodem centro F , intervallo FD deſcriptus, totus intra Ellypſin cadet, propter eandem rationem ; ergo omnis alia diameter, major erit Axe BD.

Tertiò ſit quæcunque diameter FH, & ex puncto H perpendicularis ducatur H I G ; quæ erit ordinatim applicata, eruntque G I , I H, æquales, & (*per* 4. 1.) FH, FG æquales.

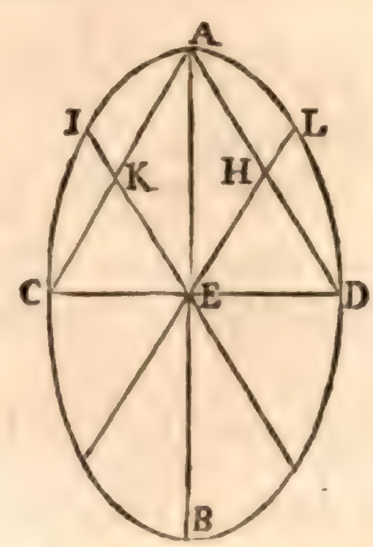
Quod ſi intervallo FH, deſcriberetur circulus , is ſecaret Ellypſin in puncto H , & ducta quælibet diameter , ut F K, ad illum non pertingeret ; ergo diameter , quæ magis ab axe minore diſtat , minùs diſtante major eſt.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Datis axibus invenire duas conjugatas diametros æquales.

Sit Ellypſis cujus axes AB, CD, & inveniendæ ſint diametri conjugatæ æquales. Ducantur A C, AD quæ erunt æquales, dividantur biſariam in H & K, ducanturque E H, E K ; dico eas diametros eſſe conjugatas, & æquales.



Demonſtratio. Primò in triangulis AEC,AED, anguli ſunt æquales, & baſes , quare in triangulis CEK, DEH, cum latera CE, ED. Item DH,CK, & anguli C & D ſint æquales ; erunt baſes EH, EK, æquales,& anguli KEC, HED,quibus ſublatis ex angulis rectis,reſtant AEK, AEH æquales; ergo (*per præcedentem*) ſemidiametri EKI, EHL ſunt æquales : deinde cum angulus CEA ſit rectus circulus deſcriptus ex K per A , tranſit per E ; ergo KA, KE ſunt æquales,& anguli KEA,KAE, ſunt oſtenſi æquales : ergo alterni KEA , EAH ſunt æquales , & conſequenter lineæ A D , I E ſunt parallelæ.

PROPO

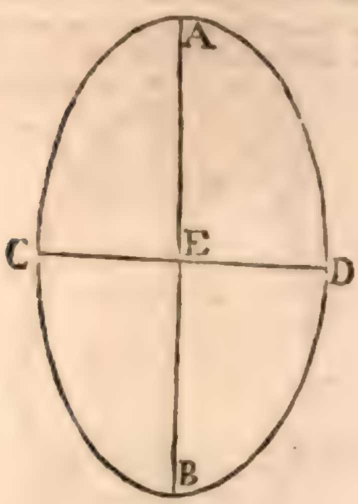
Digitized by Google

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Omnis diameter Ellypſin bifariam dividit; diametri conjugatæ Ellypſin quadrifariam dividunt, & ſectores oppoſiti ad verticem ſunt æquales.

Sit primò diameter A B, dico Ellypſin ab ea dividi bifariam, per ſingula enim puncta A B, intelligantur ductæ ordinatim applicatæ, cum omnes, & ſingulæ bifariam dividantur (*ex defin. diametri*) tota Ellypſis bifariam dividetur.



Secundò, ſint duæ diametri A B, C D ſe interſecantes in centro E, clarum eſt ſectores ad verticem eſſe æquales.

Demonſtratio. Cum enim AB, & C D bifariam dividant Ellypſin; erunt ſectores ACB, CAD ſemiſſis Ellypſeos: ergo æquales, & ablato communi CEA, reſtant æquales AED, CEB oppoſiti ſcilicèt ſectores.

Tertiò, ſint AB, CD, diametri conjugatæ: dico Ellypſin diviſam eſſe quadrifariam. Cùm enim omnes lineæ applicatæ ad E A ſint parallelæ lineæ CD & ſint diviſæ bifariam; erunt ſectores CEA, AED æquales, ſunt item oppoſiti æquales: ergo Ellypſis quadrifariam eſt diviſa.

PROPOSITIO XVI.

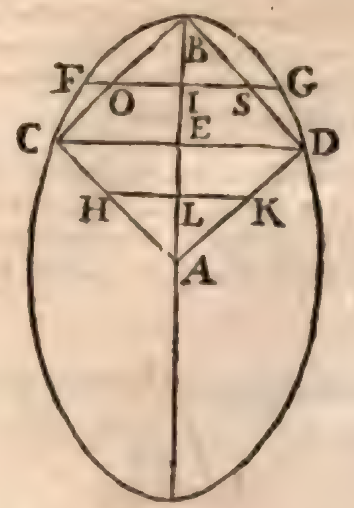
Theorema.

Linea ex centro dividens Subtenſam bifariam, dividit & ſectorem, & ducta aliæ Subtenſæ, à vertice abſcindunt ſegmenta æqualia.

Sit diameter AB dividens bifariam in E ſubtenſam C D: dico totum ſectorem CAD diviſum eſſe bifariam.

Intelligantur enim ductæ parallelæ lineæ C D, quia linea CD dividitur bifariam à diametro A B, omnes lineæ FG illi parallelæ, dividentur bifariam (*per coroll. 12.*) ergo totum ſegmentum CBD diviſum eſt bifariam. Pariter ductis in triangulo CAD parallelis C D, qualis H K, cum omnes, (*per 4.6.*) bifariam dividantur, totum triangulum C A D bifariam dividitur.

Secundò ductis CB, BD, erunt ſegmenta CBF, DGB æqualia, ſi nempe ex ſegmentis æqualibus CEB, DEB, auferantur æqualia triangula CEB, D E B vel cum lineæ IF, I G ſint æquales, ablatis



æqualibus IO, IS, reſtant FO, FG æquales; quod cum de omnibus probari poſſit, erunt ſegmenta æqualia.

COROLLARIUM.

Dato ſectori D A B, æqualem abſcindemus, ſi ex puncto D ad diametrum A B ordinatim applicatam DEC ducamus.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Si ab extremitatibus diametri ducantur parallelæ intra Ellypſin, illæ æquales erunt & linea illas conjungens erit diameter.

Ex punctis A & B diametri AB, ducantur parallelæ AD, BC; dico illas eſſe æquales, dividantur enim bifariam in E & F; ducaturque F E hæc erit diameter (*per coroll. 1. 12.*) & tranſibit per



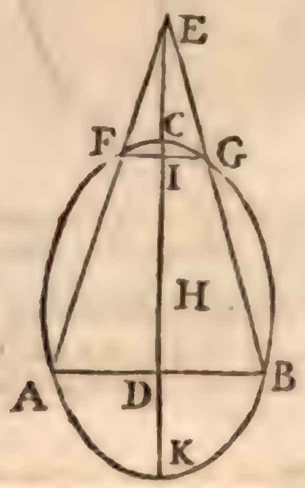
centrum G, & cum triangula A G E, BGF ſint æquiangala & AG, B G æquales, erunt AE, F B æquales; & conſequenter A D, C B: ducantur CG, GD, patet angulos ad verticem EGD, CGF eſſe æquales; ergo & lineas C G, G D in directum jacere.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si ex duabus extremitatibus ordinatim applicatæ duæ lineæ in eodem puncto diametri concurrentes, ſectionem ſecent, linea conjungens erit ordinatim applicatæ parallela.

Sit diameter CD, ordinatim applicata AB, eruntque AD, DB æquales; ducantur AE, BE, convenientes in E, & ſecantes Ellypſin in punctis F & G; dico lineam F G eſſe ordinatam, & parallelam A B.



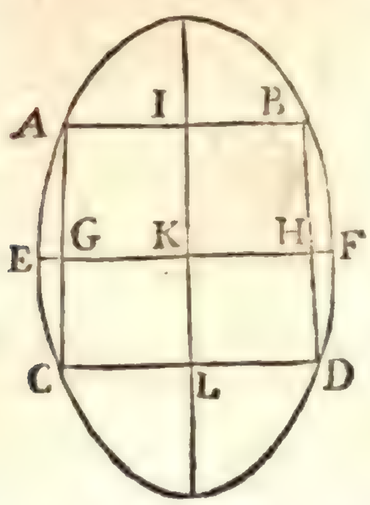
Demonſtr. Ducatur ex F linea FI parallela AB, donec ſecet lineam E B in puncto G; dico punctum G eſſe in Ellypſi; nam (*per* 4.6.) cum A D, FG ſint parallelæ, erit ut DE ad EI; ita tam D A ad FI, quàm DB ad IG; ergo F I, I G ſunt æquales, ergo punctum G eſt in Ellypſi; ergo in puncto concurſus.

Converſæ item facilè probantur, nempe ſi fuerint AB, FG parallelæ, & AB dividatur bifariam in D, ED eſſe diametrum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Si duas parallelas in Ellypſi, jungant duæ lineæ, quas ſecet alia parallela; erunt ſagittæ illius æquales.



Lineas A B, C D parallelas jungant duæ lineæ AC, BD, & in eas incidat alia parallela EF; dico ſagittas ejus EG, HF eſſe æquales.

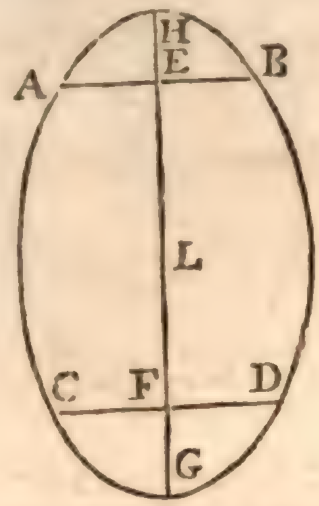
Demonſtratio. Diviſis lineis AB, CD bifariam in I & L, ducatur diameter IL, quæ omnes applicatas, ut EF bifariam dividet; erunt ergo KE, KF æquales, & ablatis æqualibus GK, KH, eo quod AI, IB; CL, LD ſint æquales, reſtabunt EG, HF æquales.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Data Ellypſis centrum reperire.

Proponatur Ellypſis, cujus centrum reperiendum ſit; ducantur utcumque duæ parallelæ A B, CD, quæ bifariam dividantur in E & F; ducatur



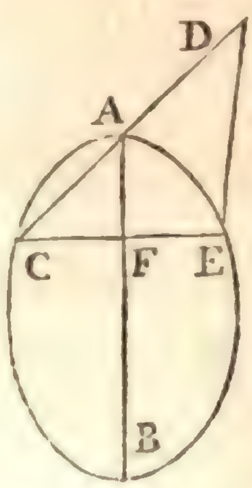
linea EF, hæc (*per cor.*12.) erit diameter; quare ſi H G bifariam dividatur in L, erit L centrum Ellypſeos.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Data diametro ordinatam ducere ex quocumque puncto.

Sit data diameter A B, ſitque ducenda ordinatim



applicata ex C. Ducatur CAD, ſintque CA, AD æquales, tum AB ducatur parallela DE, Ellypſin attingens

attingens in puncto E; dico CFE eſſe ordinatim applicatam, ſeu bifariam diviſam.

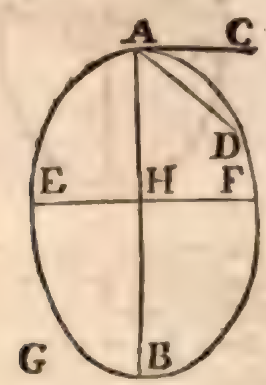
Demonſtratio. (*Per 4. 6.*) ita eſt CA ad A D, ſicut FC ad FE; ſed primæ ſunt æquales; ergo & ſecundæ.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Omnis linea per extremitatem diametri ducta, ordinatim applicatis parallela, eſt tangens.

Linea AC ducatur per extremitatem diametri AB parallela ordinatim applicatis: dico A C eſſe tangentem. Si enim non ſit tangens, intra ſectio-



nem cadat ut AD; cum AD ſit parallela EF ordinatim applicatæ, bifariam à diametro dividi debet; ergo non attinget diametrum in puncto A.

COROLLARIUM I.

Sequitur ex eo, duas tangentes per extremitatem diametri ductas eſſe parallelas, ut AC, BG.

COROLLARIUM II.

Facilè per datum punctum A tangentem ducemus; nam invento centro & ducta diametro AB, ductâ item ordinata quacumque; ſi per A, ei ducamus parallelam, tangentem duxerimus.

COROLLARIUM III.

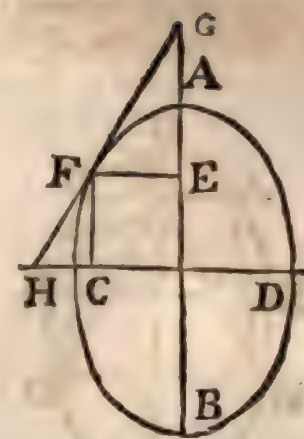
Diameter per tactum ducta, dividit bifariam parallelas tangenti; ſi enim non eſſent ordinatæ, duci poſſent aliæ ordinatæ, quibus tangens eſſet parallela.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Omnis linea inter duas diametros Ellypſin tangens, cum utraque diametro convenit extra ſectionem.

Sint diametri conjugatæ AB, CD, & Ellypſin tangat linea HG inter duas diametros: dico lineam HG cum utraque diametro convenire extra Ellypſin. Ex puncto contactûs F ducantur FE, FC applicatæ ad diametros: erunt igitur FC, AB parallelæ, & cum linea HF, conveniat in F, cum una parallelarum, nempe CF, producta cum alia conveniet, nempe in G.



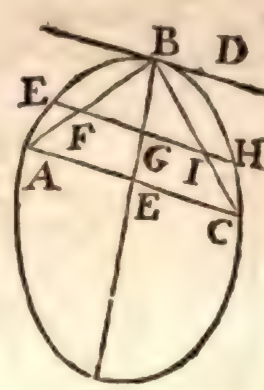
PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

In quocumque ſegmento, maximum triangulum, habet verticem in diametro dividente bifariam baſin illius: Et tam ſegmentum, quàm triangulum bifariam ab eâ dividitur.

Sit ſegmentum ABC, cujus baſis AC bifariam dividatur in E, à diametro BE: dico triangulum ABC eſſe maximum, quod intra tale ſegmentum inſcribi poſſit.

Intelligatur enim tangens BD.



Demonſtr. Cum alia omnia triangula non attingant tangentem B D, quæ eſt parallela lineæ AC, minora erunt quam ABC.

2. Certum eſt omnes lineas baſi AC parallelas dividi bifariam à diametro. Remanent item æquales ſagittæ EF, IH, quod de aliis omnibus oſtendi poteſt: ergo ſegmenta A E B, B H C ſunt æqualia.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

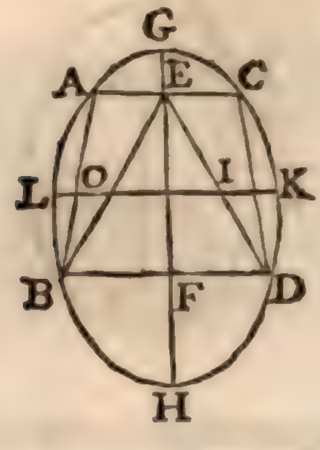
In Ellypſi lineæ conjungentes parallelas, abſcindunt ſegmenta æqualia & viciſſim.

Multiplex eſt caſus iſtius propoſitionis.

Proponantur lineæ AB, CD conjungentes parallelas AC, BD; dico ſegmenta ALB, CKD eſſe æqualia. Diviſis lineis AC, BD bifariam in F & E; Ducatur E F quæ (*per coroll. 12.*) erit diameter, dividetque

Digitized by Google

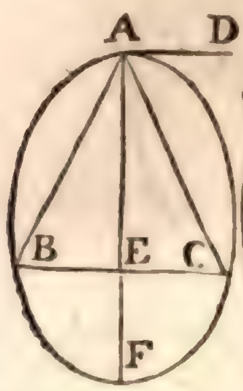
dividetque totam Ellypſin bifariam. Item ſegmenta AGC, BGD dividuntur bifariam: nam ſi

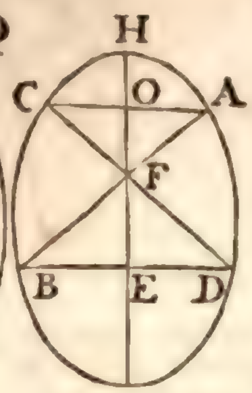


ducerentur quotcunque volueris applicatæ, in ſegmento B H D, ſingulæ bifariam à diametro dividerentur; ergo & totum ſegmentum ſecundum methodum indiviſibilium. Pariter triangula BEF, FED, ſuper æqualibus baſibus BF, FD ſunt æqualia, & triangula ABE, EDC; quibus omnibus hinc inde ſublatis, reſtant ſegmenta AB, CD æqualia.

Vel (*per 19*) ſagittæ LO, IK, & aliæ quæcumque ſunt æquales: ergo & ſegmenta A B, C D, quæ in hujuſmodi ſagittas reſolvi poſſunt, erunt æqualia.

Secundò lineæ AB, AC conjungant lineas BC, AD parallelas, hoc eſt A D tangens ſit parallela lineæ BC; dico ſegmenta AB, A C eſſe æqualia; diviſâ enim BC bifariam in E, linea AE erit diameter (*per 22.*) dividetque bifariam Ellypſin, ſegmentum BFC, & triangulum BEC; quibus partibus hinc inde ſublatis reſtant ſegmenta æqualia AB, AC.





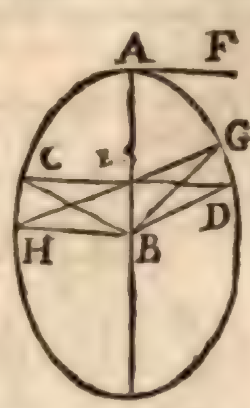
Denique lineæ AB, CD conjungant parallelas AC, BD; dico ſegmenta ACB, DAC eſſe æqualia. Dividatur BD bifariam in E, ducaturque E F. Oſtendam facile AC dividi bifariam in O; quia ita eſt AO ad BE, ſicut OF ad FE, propter ſimilitudinem triangulorum. Pariter ita eſt C O ad E D, ſicut OF ad FE, & cum BE, ED ſint æquales, CO, OA æquales erunt; quare OF erit diameter dividens Ellypſin æqualiter, ſicut & ſegmentum BGD, & triangulum BFD, quibus ſublatis reſtant DFH, BFH æqualia, & additis ſegmentis C F H, AFH, fiunt ſegmenta C A D, ACB æqualia. Converſæ hujus propoſitionis facile probari poſſunt, nempe ſi ſegmenta fuerint æqualia, lineas, quæ his lineis conjunguntur, eſſe parallelas, quia ſi parallelæ non eſſent ductis parallelis fierent alia ſegmenta æqualia: & pars & totum æqualia eſſent.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Linea ſectores æquales hinc inde à diametro ſumptos conjungens ab ea bifariam dividitur, eſtque tangenti parallela.

Sint ſectores æquales ABC, ABD; dico lineam CD à diametro bifariam dividi, & eſſe tangenti AF



parallelam; ſi enim non eſſet parallela tangenti, ſeu non eſſet ordinatim applicata, ſit HEG: ſegmenta GAE, HAE eſſent æqualia, quia nempe ſi omnes parallelæ H G ducerentur, dividerentur omnes bifariam à diametro BA. Pariter triangula HBE, BEG, habentia eundem verticem, & baſes æquales, eſſent æqualia contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Sectores ſegmentorum æqualium æquales ſunt, & triangula maxima ſegmentis inſcripta æqualia ſunt.

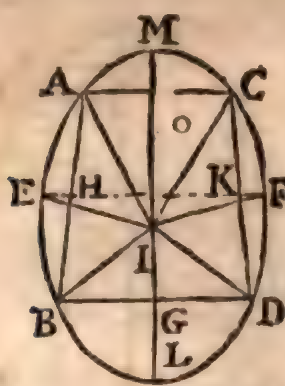
Sint ſegmenta AEB, CFD æqualia, eruntque (*per 25. hujus*) lineæ AC, BD parallelæ; quibus diviſis bifariam in G & O, linea O I G erit diameter. Dividatur hæc diameter bifariam in I. ducanturque lineæ AI, I B, C I, ID: dico ſectores AIB, CID æquales eſſe.



Demonſtr. Triangula A I C, B I D, ſegmenta AMC, BLD dividuntur bifariam; quare hinc inde ſublatis partibus æqualibus, reſtant ſectores AIB, CID inter ſe æquales.

Item ablatis ſegmentis æqualibus AEB, CFD, reſtabunt triangula AIB, CID æqualia, dividantur A B, C D bifariam in H & K, ducanturque diametri I H E, I K F, fiantque triangula A E B, CFD, hæc (*per 24.*) erunt maxima, aſſero ea æqualia eſſe. Nam dividuntur bifariam à diametris, quare ſectores

ſectores A I E, C I F, erunt æquales, & additis æqualibus AIM, C I M, fient totales MIE, M I F



æquales, eritque linea E F parallela tangenti per punctum M ductæ, & lineæ AC (*per præcedentem*) ergo (*per 25.*) ſegmenta AE, CF æqualia ſunt, quæ ablata ex dimidiis ſegmentis æqualibus, nempe AHE, CKF, relinquunt triangula AHE, CKF æqualia, & conſequenter tota triangula AEB, CFD æqualia ſunt.

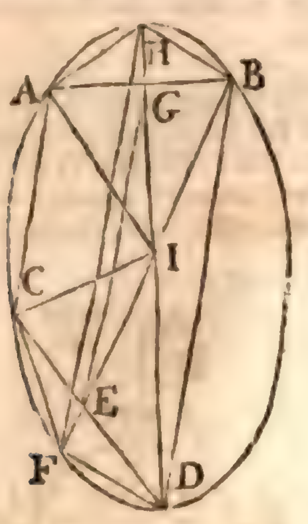
In omnibus aliis caſibus idem oſtendere poſſumus.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Diametri proportionaliter ſecantur, à lineis auferentibus ſegmenta Ellypſis æqualia.

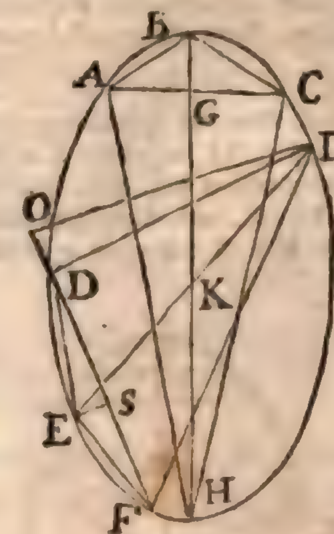
Lineæ AB, CD auferentes ſegmenta Ellypſis æqualia, dividant ſuas diametros, à quibus ſcilicet dividuntur bifariam in punctis E & G, dico ita eſſe IG ad GH, ut IE ad EF; Ducantur CI, ID, AI, IB, AH, HB, CF, FD, item BD, EG, FH, AC.



Demonſtr. Cum ſegmenta AB, CD ſint æqualia, erunt (*per 25.*) AC, BD parallelæ, quia autem in præcedente demonſtravimus, ſegmenta AH, CF eſſe æqualia, erunt AC, FH parallelæ; demonſtravimus item triangula IGB, IDE eſſe æqualia, item AHG, CFE, ergo ita eſt triangulum IGB, ad triangulum AGH, ut IG ad GH cum habeant baſes ſimiles, & angulos in G æquales, pariter triangulum E I D ad triangulum C E F, ſe habet, ut EI ad EF, ergo ita eſt EI ad EF, ut IG ad GH; quod erat demonſtrandum. Poſſet idem probari oſtendendo lineam E G eſſe parallelam lineæ F H.

COROLLARIUM

Non tantum triangula maxima in ſegmentis æqualibus minoribus inſcripta ſunt æqualia, ſed etiam in ſegmentis majoribus; Sint enim ſegmenta æqualia ABC, DEF; Sintque triangula ABC, DEF æqualia, dico triangula DLF, AHC eſſe æqualia.



Demonſtr. Cum (*per præcedentem*) ita ſit BG ad GK, ut E I ad I K, componendo ita erit EK, ſeu KL ad EI, ſicut KH ad BG, & iterum componendo, ita erit I L ad E I, ſicut HG ad BG; Eſt autem ut E I ad I L, ita triangulum DEF ad triangulum DLF, cum habeant eandem baſin, & ut BG ad GH, ita triangulum ABC, ad triangulum AHC, ergo ut triangulum ABC ad triangulum AHC, ita triangulum D E F ad triangulum DLF, ſed primum & tertium æqualia ſunt: ergo ſecundum & quartum æqualia ſunt; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Si Axis & altera diameter à ſuis ordinatis proportionaliter ſecentur, erit ut rectangulum ſub ſegmentis Axis ad rectangulum ſub perpendicularibus alterius diametri, ita viciſſim quadratum applicatæ huic diametro, ad quadratum applicatæ ad Axem.

Sit Ellypſis, cujus Axis BH, & quæcumque diameter EL, ab applicatis AC, DF, proportionaliter ſecentur in G & I, ducanturque perpendiculares LO, ES; Dico ita eſſe quadratum AC ad quadratum DF, ut rectangulum ſub perpendicularibus LO, E S ad rectangulum ſub BG, GH.

Demonſtr. (*Per præcedentem & ejus coroll.*) ſegmenta ABC, DEF; AHC, DLF ſunt æqualia, ut etiam triangula, quare (*per 5.6.*) ita eſt AC ad DF, ſicut perpendicularis ES ad BG, item & ſicut LO ad GH, cùm triangula æqualia reciprocent baſes & altitudines, ſed quadratum ES ad rectangulum ES.LO, ſe habet ut ES ad LO, ſeu ut BG ad GH, ſeu ut quadratum B G ad rectangulum BGH, ergo ut quadratum ES ad rectangulum ES, LO, ita quadratum BG, ad rectangulum BGH, & permutando ut rectangulum ES, O L ad rectangulum BGH, ita quadratum E S ad quadratum BG; ſunt autem ut ES ad BG, ita reciprocè AC ad DF & earum quadrata ſimiliter reciproca erunt, ergo ut rectangulum E S, LO ad rectangulum BGH, ita quadratum AC, ad quadratum FD.

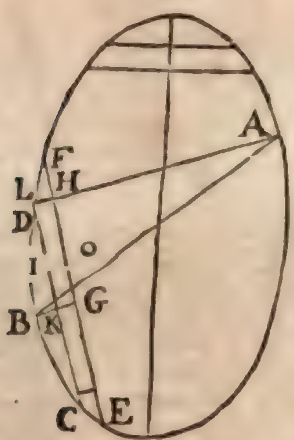
Digitized by Google

PROPOSITIO XXX.

Theorema.

Si diameter obliqua dividatur utcumque ab applicatis, erunt rectangula ſub perpendicularibus ad invicem, ſicut rectangula ſub partibus diametri.

Sit Ellypſis diameter quæcumque A B, diviſa ab applicatis CD, EF, in punctis I, & O, ſintque ductæ perpendiculares BG, AL; dico ita eſſe rectangulum BK, AL ad rectangulum BG, HA, ut rectangulum BIA ad rectangulum BOA.



Demonſtratio. Triangula B I K, L A I ſunt æquiangula ut patet: ergo ita eſt BK ad LA, ſicut BI ad IA. Pariter ita eſt BG ad AH, ſicut BO ad OA. Ratio rectanguli BK, LA ad rectangulum BG, HA, componitur ex ratione BK ad BG, ſeu BI ad BO, & ex ratione LA ad HA, ſeu IA ad OA, quæ eſt BIA ad BOA: ergo ita eſt rectangulum BK, LA ad rectangulum BG, HA; ſicut rectangulum BIA ad rectangulum BOA.

PROPOSITIO XXXI.

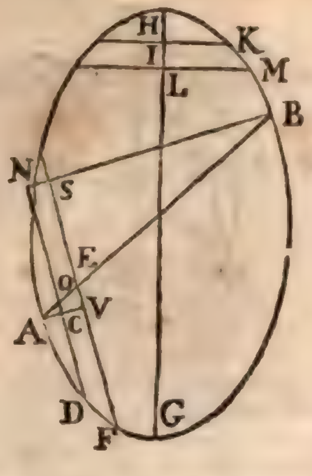
Theorema.

In Ellypſi quadrata applicatarum, ad quamcumque diametrum, ſunt inter ſe, ut rectangula ſub ſegmentis diametri.

Definitio Ellypſis ferebat quadrata applicatarum ad axem ſe habere ut rectangula ſub ſegmentis diametri; poterat tamen dubitari, an hanc proprietatem haberent omnes applicatæ ad alias diametros, quod demonſtro hîc.

Sit ergo Ellypſis diameter quæcumque AB, ſintque applicatæ OD, EF; dico ita eſſe quadratum OD ad quadratum EF, ut rectangulum A O B ad rectangulum A E B. Sit enim axis H G qui dividatur proportionaliter ſicut A O B diameter diviſa eſt in punctis I & L, applicenturque IK, LM, & agantur ad rectos BSN, ACV.

Demonſtratio. Ita eſt rectangulum A C, B N ad rectangulum HIG, ut quadr. IK ad quadratum OD. Et pariter ita eſt rectangulum AV, SB ad rectangulum H L G, ut quadratum L M ad quadratum E F. (*per* 29.) & convertendo. Sed ut quadratum I K ad quadratum L M, ita rectang. HIG ad rectangulum HLG; ergo ita erit rectangulum ſub A C, N B, ad rectangulum ſub AV, SB, ut quadratum OD ad quadratum EF. Sed (*per* 30.) Ita eſt rectangulum A O B ad rectangurum ſub AC, N B, ſicut rectangulum AEB ad rectangulum ſub AV, SB. Ergo ex æquo ita erit rectangulum A O B ad rectangulum AEB ſicut quadratum O D ad quadratum E F. Quod erat demonſtrandum.

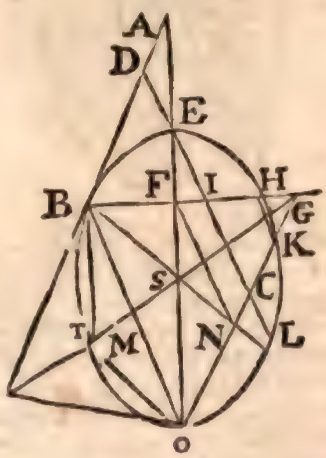


PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

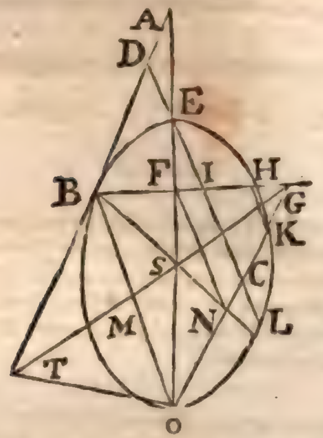
Si tangens Ellypſin conveniat cum diametro, & per tactum ducatur ordinata, & alia conjungens extremitatem diametri, cui parallela ducatur per verticem, hæc in eo puncto bifariam ſecabitur.

Linea AB Ellypſin tangat in B, ſitque ordinata BH, & BO per extremitatem diametri O, cui ſit parallela D E I: dico DE, EI eſſe æquales. Diviſâ BO bifariam in M; ducatur diameter MS, concurrens cum BH in G, ducatur OKG, H K, & F N.



Demonſtratio. Primò (*per* 18.) BO, HK ſunt parallelæ, ſicut ex conſtructione D L. Oſtendo item F N eſſe parallelam B O; ſume enim M T æqualem

æqualem M S, ducanturque TO , TB ; facile ob ſimilitudinem triangulorum oppoſitorum ad M, oſtendam lineas TO , BS ; BT , SO eſſe paralle-



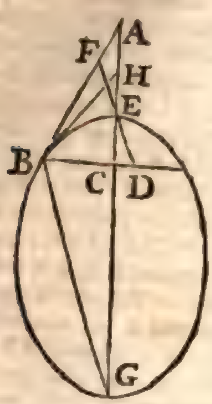
las, ergo (*per 4.6.*) ita erit ON ad NG, ſicut TS, ad SG, & pariter ita BF ad FG, ſicut TS ad SG ; ergo ita erit BF ad FG, ſicut ON ad NG ; ergo per eandem BO , & FN ſunt parallelæ, & cum HK ſit adhuc parallela ; erit ut B F ad F H, ita ON ad NK ; ſed primæ ſunt æquales, ergo & ſecundæ, ergo OK eſt ordinatim applicata ad diametrum B SN , & (*per 22.*) erit parallela tangenti AB ; item cum EL, BO, HK ſint parallelæ; erunt ſagittæ CL, EI æquales ; ſunt item æquales EL, BO, & BO, DC , (*per 34.1.Eucl.*) ergo DC, EL ſunt æquales inter ſe , & abjecta communi E C , reſtant DE , CL æquales , & conſequenter DE, EI ; æquales erunt , quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Si linea tangat Ellypſin & ducatur ordinata ; ut majus ſegmentum ad minus , ita ſecans ad exteriorem lineam & viciſſim.

Sit ordinatim applicata B C, & AB tangens; dico eſſe, ut C G ad CE, ita GA ad AE ; ducatur FED lineæ B G parallela, eruntque F E, ED (*per præcedentem*) æquales.



Demonſtratio, Triangula BCG, EDC, ob parallelas F D, BG ſunt æquiangula : ergo ita eſt C G ad C E ; ſicut BG ad ED , (*per 4.6.*) hoc eſt ad FE, & *per eandem*, ut BG ad FE ita GA ad EA, quod demonſtrandum erat.

Converſa hujus facile demonſtrari poteſt , ſi nempe ita ſit GC ad CE , ſicut AG ad AE , AB eſſe tangentem ; ſi enim non ſit tangens ponatur B H eſſe tangens ; ergo ita erit GC ad CE ; ſicut GH ad HE , ſed jam ita erat G A ad A E : ergo ita eſſet GA ad AE , ſicut GH ad HE , quod fieri non poteſt ; nam ita eſſet alternando tota A G ad totam G H, ſicut ablata AE ad ablatam H E ; ergo ita eſſet reliqua EG ad reliquam E G , ſicut tota AG ad totam HG, quod evidenter falſum eſt, cum EG & EG ſit eadem ſibi ipſi æqualis ; ergo AG & HG æquales eſſent.

COROLLARIUM.

Cum ſit ut GC ad CE , ita GA ad AE, erit rectangulum ſub extremis G C , AE æquale rectangulo ſub mediis GA, CE.

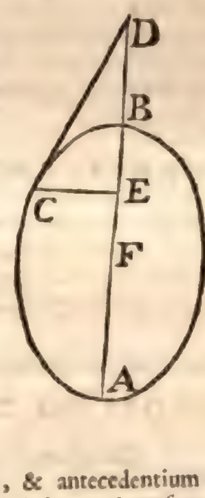
PROPOSITIO XXXIV.

Theorema.

Si tangens Ellypſin , aut circulum cum diametro conveniat, & à tactu ordinatim applicetur linea : erit quadrato ſemidiametri æquale rectangulum ſub diſtantiis applicata, & ſecantis à centro.

CD tangens Ellypſin , aut circulum, cum diametro A B conveniat in D , dico rectangulum DFE, quadrato FB eſſe æquale.

Demonſtratio. Ita eſt (*per præcedentem*) A D ad D B , ſicut A E ad B E , & componendo ut utraque AD , B D ad DB , ita utraque AE , EB ;



ſeu AB ad BE , & antecedentium dimidia eandem rationem habebunt ad conſequentia , nempe ita erit D F ad D B , ſicut F B ad BE, & alternando ita erit tota DF ad totam FB , ſicut ablata DB ad ablatam BE ; ergo ita erit reliqua B F ad reliquam EF, ut tota DF ad totam BF ; quare rectangulum ſub extremis B F , ſeu quadratum B F æquale eſt rectangulo ſub mediis DF , FE ; quod erat demonſtrandum.

Digitized by Google

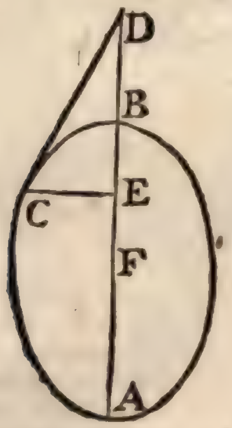
PROPOSITIO XXXV.

Theorema.

Si tangens Ellypſin aut circulum cum diametro conveniat, & à tactu ordinatim applicetur; erit rectangulum ſub diſtantiis applicatæ, tum à centro, tum à ſecante, ad quadratum applicatæ, ut diameter ad parametrum.

Si fiat eadem conſtructio; dico rectangulum DEF ad quadratum C E eſſe, ut A B ad parametrum.

Demonſtratio. Rectangulum DFE æquale eſt, (*per* 3.2.) rectangulo D E F, plus quadrato F E; item quadratum B F æquale rectangulo D F E, eſt etiam æquale (*per* 5. 2.) rectangulo A E B, plus



quadrato FE; quod ſi utrumque auferatur, erunt rectangula DEF, AEB æqualia, ſed rectangulum AEB ad quadratum CE ſe habet ut diameter A B ad parametrum (*per coroll.*2. 7. *hujus*) ergo ita erit rectangulum DEF ad quadratum CE, ut diameter A B ad parametrum.

COROLLARIUM.

Sequitur FE diſtantiam applicatæ à centro, ſemidiametrum BF, & FD, à ſecante ad centrum uſque eſſe continuè proportionales, cum quadratum mediæ æquetur rectangulo ſub extremis.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Si tangens cum diametro conveniat, erit rectangulum comprehenſum ſub ſecante & exteriori, æquale rectangulo comprehenſo ſub ſecante ad centrum uſque; & ſub exteriori ad applicatam uſque.

Tangens C D cum diametro conveniat; dico rectangulum ADB æquale eſſe rectangulo FDE.

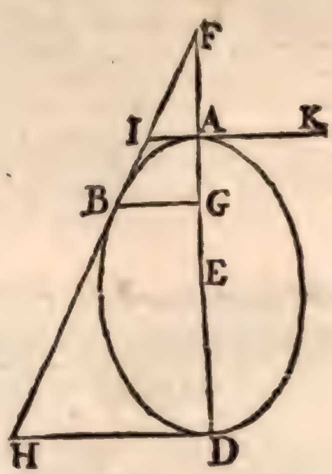
Demonſtratio. (*Per præcedentem*) ita eſt tota DF ad totam BF ſicut ablata BF ad ablatam E F; ergo eſt reliqua DB ad reliquam EB, ut tota D F ad totam BF; & componendo ut A D ad FB, ita DE ad BE; & rurſus dividendo, ut AD ad F D, auferendo ſcilicet AF ex AD, ita DE ad DB, hinc rectangulum comprehenſum ſub extremis A D, B D, ſeu rectangulum A D B, æquatur rectangulo ſub mediis FDE; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Si linea Ellypſin, aut circulum tangat, ſitque per tactum ordinatim applicata, & per extremitates diametri ei parallela ducta tangentem uſque, rectangulum ſub iis comprehenſum, æquale erit quartæ parti rectanguli ſub diametro & parametro comprehenſi.

Tangens BF cum diametro concurrat in F, ſitque ordinatim applicata BG, & per extremitates ejuſdem diametri A & D ducantur tangentes DH, AI ad tangentem uſque, ſit item parameter AK; dico rectangulum, ſub HD, AI contentum, eſſe æquale quartæ parti rectanguli ſub A D, AK comprehenſi.



Demonſtratio. (*Per* 36.) rectangulum G F E æquale eſt rectangulo DFA; erit ergo ut quadratum GF ad rectangulum GFE, ſeu ut G F ad E F, ita quadratum GF ad rectangulum DFA; ſed ratio quadrati GF ad rectangulum DFA, componitur ex ratione GF ad DF, ſeu B G ad H D, & ex ratione GF ad FA, ſeu BG ad AI, quare componendo ut quadratum G F ad rectangulum D F A, ſeu ut GF ad FE, ita erit quadratum B G ad rectangulum comprehenſum ſub AI, HD; ut autem GF ad F E, ita eſt rectangulum E G F ad rectangulum GEF, ſeu (*per* 31.) ad quadratum AE, quare ita erit rectangulum EGF ad AE quadratum ut quadratum B G ad rectangulum H D, AI & permutando, ut rectangulum EGF ad quadratum BG, ſeu ut DA ad A K, ita erit quadratum AE ad rectangulum H D, A I, ſed ut DA ad AK; ita eſt quadratum DA ad rectangulum DAK, & ita quadratum A E ad quadrantem rectanguli DAK; ergo ut quadratum A E ad quadrantem rectanguli D A K, ita idem quadratum A E ad rectangulum ſub H D, A I: ergo rectangulum H D, A I æquale eſt quadranti rectanguli DAK. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

Eadem propoſitio poteſt intelligi de quibuſcunque parallelogrammis, & Rhombis æquiangulis, qui ſe habent ut rectangula, & quadrata.

COROLLARIUM II.

Superiores propoſitiones intelligi debent de ſecunda diametro; ſunt enim univerſales: quare ſi tangens cum ſecunda diametro conveniat, & à tactu ordinata ducatur, erit pariter quadratum ſecundæ ſemidiametri æquale rectangulo comprehenſo ſub diſtantia applicatæ à centro, & ſub ſecante ad centrum uſque.

Pariter ita erit rectangulum ſub ſegmentis ſecantis ad centrum uſque ſumptæ ad quadratum applicatæ, ut parameter ad diametrum.

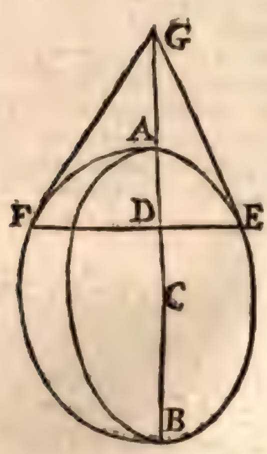
Denique ita ſunt ſegmenta diametri ad tangentem, ut ſegmenta ad applicatam.

PROPOSITIO XXXVIII.

Theorema.

Si circa diametrum Ellypſis, circulus deſcribatur, & ordinatim applicetur per idem punctum in circulo, & in Ellypſi, tangentes per hæc puncta ducta in eodem puncto diametri convenient.

Sit Ellypſis diameter A B, circa quam deſcribatur circulus A F B, & ex eodem puncto D, applicentur in circulo quidem D F, quæ perpendicularis eſt, in Ellypſi DE; educanturque tangentes FG, GE: dico illas concurrere in eodem puncto G.



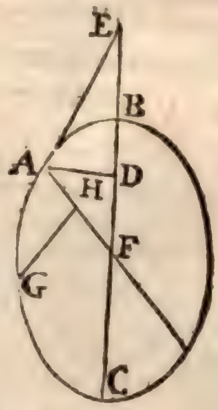
Demonſtratio. (*Per* 35.) CD, CA & CG, tam reſpectu circuli, quàm reſpectu Ellypſis ſunt continuè proportionales; ergo in utroque reſpondet eadem CG. Ergo idem punctum G.

PROPOSITIO XXXIX.

Problema.

Ex dato puncto ad Ellypſin tangentem ducere.

Proponatur primò quodcunque punctum A, in peripheria Ellypſis; ducaturque quæcumque diameter BC ad quam ordinetur A D, & BC, biſariam dividatur in F, tum fiant FD, FB, FE continuè proportionales, clarum eſt (*per* 34.) lineam AE tangentem eſſe; vel ducatur diameter AF, cui ſit applicata GH, fiatque AE, parallela



GH, erit AE tangens. Punctum ex quo ducenda eſt tangens ſit E; ducatur diameter E F, fiantque EF, BF, FD proportionales, & per D educatur ordinata DA; clarum eſt EA tangentem eſſe.

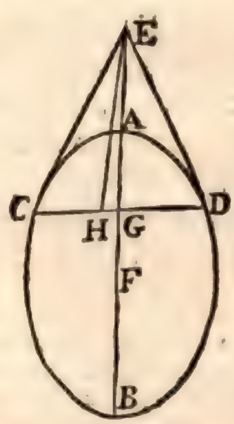
PROPOSITIO XL.

Theorema.

Tangentes per extremitates ejuſdem ordinatæ ductæ diametrum in eodem puncto ſecant; & viciſſim ſi ex eodem puncto, &c.

Sit Ellypſis diameter AB, ad quam ſit ordinata CD; educantur per C, & D tangentes CE, DE; dico illas occurrere diametro in eodem puncto E.

Demonſtratio. Quia enim applicata ſecat diametrum in uno puncto G, tam reſpectu tangentis C E, quàm reſpectu DE, ſemper verum erit, ita eſſe FG ad FA, ſicut FA ad FE; ergo eadem F E utrique reſpondet.



Secundò ex eodem puncto E, ducantur tangentes EC, ED, dico lineam CD eſſe ordinatim applicatam, nam ex C & D ducantur duæ ordinatim applicatæ, oſtendam facile eas convenire in eodem

puncto G, & cum debeant eſſe parallelæ, debent neceſſario eſſe una eademque linea.

COROLLARIUM.

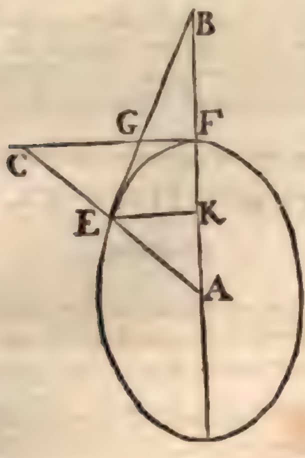
Si EC, ED tangentes conveniant in puncto E, ſitque CD diviſa bifariam in G, linea EG erit diameter. Si enim alia eſſet diameter, ſit E H; ergo (*per primam partem,*) CD erit applicata, ergo (*ex defin.*) diviſa bifariam in H contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XLI.

Theorema.

Si per extremitates duarum diametrorum ducantur tangentes ad diametros uſque, fient triangula æqualia.

Sint duæ diametri AB, AC; per quarum extremitates E & F ducantur tangentes F G, E B ad diametros uſque; dico triangula BEA, CFA eſſe æqualia; ducatur enim applicata EK, quæ erit tangenti CF parallela.



Demonſtratio. Triangula AKE, AFC ſunt ſimilia, ut patet; ergo ſunt in duplicata ratione AK ad A F; hæc autem ratio duplicata eſt ut AK ad AB, cùm (*per* 34.) tres lineæ A K, AF, A B ſint continuè proportionales; ergo ita eſt triangulum AKE ad triangulum ACF, ut AK ad AB, & (*per* 1.6.) ita eſt triangulum AKE ad triangulum ABE, ut baſis AK ad baſin AB. Ergo triangula A C F, AEB ſunt æqualia. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIUM.

Ablatô communi trapeziô AEGF, erunt triangula CGE, BGF æqualia.

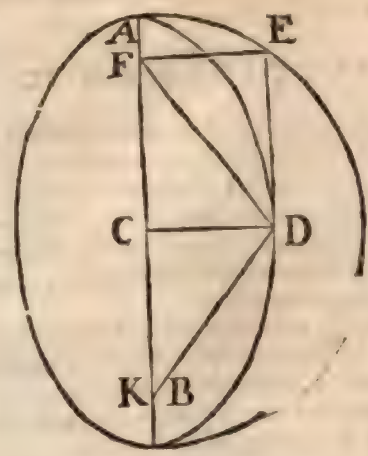
PROPOSITIO XLII.

Theorema.

Si intervallô majoris Axis deſcribatur circulus, & per extremitatem minoris Axis ducatur tangens occurrens illi circulo, ducaturque ex eo puncto applicata: erit rectangulum ſub ſegmentis Axis æquale quartæ parti figuræ.

Sit Axis major A B, minor ſemiaxis C D; ducatur per D tangens D E, & applicetur E F, dico rectangulum A F B æquale eſſe quartæ parti figuræ.

Demonſtratio. Rectangulum A F B æquale eſt quadrato FE, hoc eſt ſemiaxis CD; ergo eſt æquale quartæ parti figuræ.



COROLLARIUM.

Vides quomodo inveniendus ſit focus. Nam in Ellypſi focus, ſeu polus, aut punctum ex comparatione, eſt illud quod ita dividit Axem majorem, ut rectangulum A F B, æquale ſit quartæ parti figuræ, aut quadrato ſemiaxis.

PROPOSITIO XLIII.

Theorema.

Linea ab umbilico ad extremitatem minoris Axis ducta, æqualis eſt ſemiaxi majori.

Sit umbilicus F, jungaturque FD, dico eam æqualem eſſe lineæ AC.

Demonſtr. (*Per præcedentem*) rectangulum AFB æquale eſt quadrato CD, & addito quadrato FC utrinque, cum rectangulum AFB plus quadrato FC, æquale ſit (*per* 5.2.) quadrato AC; & quadratum CD, plus quadrato FC, æquentur quadrato FD, (*per* 47. 1.) erunt quadrata AC, FD æqualia, & conſequenter lineæ; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Facilè ex his data Ellypſi ejus umbilicum inveniemus; ſi enim ex puncto D, intervallo ſemiaxis majoris AC, arcum deſcribamus, ſecantem axem majorem in puncto F, aut K, ea puncta erunt foci, ut patet.

PROPOSITIO XLIV.

Theorema.

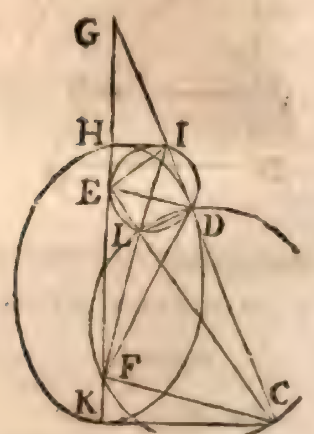
Si ab umbilicis ad tactum ducantur lineæ; hæ cum tangente æquales angulos comprehendent.

Sint umbilici E & F, & linea tangens C D G, tactus D, ducantur ED, DF; dico angulos EDG, FDC æquales eſſe. Ducantur tangentes HI, KC. Junganturque EC, IF, LD, FC, EI,

Demonſtr. Primò (*per* 37.) rectangulum ſub KC, HI, eſt æquale quartæ parti figuræ; ergo & rectang.

K E H.

KEH quare (*per* 14. 6.) ut KC ad KE, ita EH ad HI, & cum anguli ſint recti in K, & H, triangula EHI, EKC erunt ſimilia, & anguli KEC, & HIE æquales: ſunt autem HEI, & HIE æquales uni recto, ergo HEI, & FEC æquantur uni recto, ergo reliquus IEC æqualis eſt uni recto, Eôdem modô oſtendam rectum eſſe CFI.



Secundò oſtendere debeo lineam LD eſſe perpendicularem ad IC. Supponatur non ducta tangens ID, & ſuper LI, LC, quæ non jacent in directum, deſcribantur circuli, hi ſe ſecabunt in duobus punctis, ſint hæc puncta L & D, tum ducantur lineæ ID, CD. Cum anguli LDC, LDI ſint recti lineæ ID, DC in directum jacent, ergo coincidunt cum priore tangente.

Denique cum anguli ELI, FLC oppoſiti ad verticem ſint æquales; & angulo ELI, æqualis ſit EDI, ut pote inſiſtens eidem arcui; item angulo FLC, æqualis ſit FDC, propter eandem rationem erunt EDI, FDC æquales.

COROLLARIUM I.

Anguli IEC, IFC ſunt recti.

COROLLARIUM II.

Linea LD perpendicularis eſt ad IC.

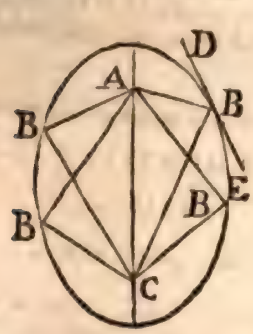
COROLLARIUM III.

Anguli LDE, LDF ſunt æquales.

PROPOSITIO XLV.

Theorema.

Si luminoſum ſtatuatur in uno foco, ſpeculi Ellypticí, reflexio fiet ad alium focum.



Mirabilis eſt hæc proprietas Ellypſis. Sit igitur corpus reflexivum Ellypticum; ſitque radius quilibet AB, procedens ab uno foco A, & incidens in ſuperficiem Ellypticam, dico radium reflexum illi reſpondentem, tranſire per punctum C. Cum enim in lineis curvis, angulos metiamur in ordine ad tangentem, ſi per B intelligatur duci tangens DBE, cum anguli ABD, CBE ſint æquales, & anguli incidentiæ & reflexionis tales eſſe debeant, radius AB, reflectetur in BC.

PROPOSITIO XLVI.

Theorema.

Si Ellypſin tangat recta linea, & à tactu ad focos ducantur duæ lineæ, & à centro ducatur parallela minori ad tangentem uſque, linea ducta à verticibus ad tale punctum, comprehendent angulum rectum.

Linea AB tangat Ellypſin in puncto A; ducanturque ex focis E & G, duæ lineæ EA, AG, & ex puncto F, ducatur FC lineæ AE parallela, junganturque DC, LC, dico angulum DCL eſſe rectum. Producatur AC in K, ſintque AC, CK æquales, jungaturque GK. Ducantur item perpendiculares, ſeu tangentes DB, LI, item GI, BG.

Demonſtratio. Cùm EF, FG ſint æquales, ſicut



AC, CK; & EA, FC ſint parallelæ, erit GK iiſdem parallela; ergo angulus EAB, ſeu (*per* 44.) GAC erit angulo K æqualis; ergo latera AG, GK ſunt æqualia; & in triangulis AGC, GCK, cum latera ſingula ſingulis ſint æqualia, erunt anguli in C æquales, & conſequenter recti. Deſcribatur ſuper linea GI, circulus tranſiens per G & I, & cum anguli GCI, GLI ſint recti, tranſit hic circulus per L & C. Pariter ſi ſupra lineam BG deſcribatur alius circulus, cum anguli BCG, BDG ſint recti, tranſibit per D & C, eruntque anguli DCB, DGB eidem arcui DB inſiſtentes, æquales: ſicut anguli GCL, GIL, eidem arcui GL inſiſtentes, ſed jam probavimus ſuprà, angulos DGB, LIG eſſe æquales, ergo anguli GCL, DCA erunt æquales. Quare ſi ab angulo recto ACG, auferas angulum ACD, & pro illo ſubſtituas angulum æqualem GCL, erit angulus DCL rectus. Quod erat demonſtrandum.

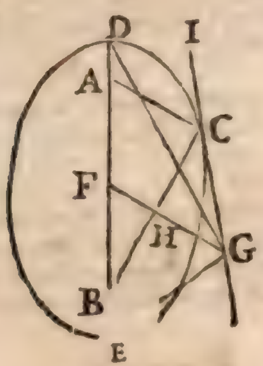
PROPO

PROPOSITIO XLVII.

Theorema.

Si ex focis Ellypſis, duæ lineæ in idem peripheriæ punctum concurrant; illæ ſimul ſumptæ erunt æquales axi majori.

Sint foci A & B, à quibus ducantur duæ lineæ AC, BC, concurrentes in idem punctum C peripheriæ Ellypticæ; dico lineas AC, BC ſimul ſumptas, æquales eſſe axi majori DE. Ex centro F, ducatur GF parallela AC, & per punctum C tangens GC.



Demonſtr. Cùm FG, AC ſint parallelæ, erunt anguli FGC, ACI æquales, ſed ACI, BCG, (*per* 44.) ſunt æquales, ergo HGC, HCG ſunt æquales; ergo (*per* 5.) HC, HG ſunt æquales, & HG erit dimidia lineæ CB; FH item eſt dimidia lineæ AC, (*per* 4. 6.) cum FB ſit dimidia lineæ BA, ergo linea FG eſt dimidia linearum AC, CB ſimul; ſed FG æqualis eſt ſemiaxi majori, cum angulus DGE (*per præcedentem*) ſit rectus; ergo FG eſt æqualis ſemiaxi DF; & conſequenter AC, CB æquales ſunt toti axi; quod erat demonſtrandum.

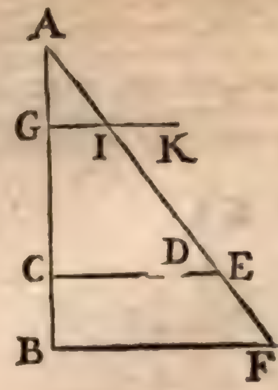
Huic propoſitioni innititur vulgaris methodus deſcribendæ Ellypſis, ope funiculi.

PROPOSITIO XLVIII.

Theorema.

Circa datam diametrum datâ unâ applicatâ Ellypſin deſcribere.

Sit data diameter AB, & applicata CD, in quocumque angulo DCA; perficienda proponitur Ellypſis. Quadrato CD, æquale fiat rectangulum BCE, ducatur linea AE, occurrens parallelæ BF in puncto F, ſumptis quibuſlibet punctis G, fiat rectangulo BGI æquale quadratum GK erit (*per* 7.) punctum K in peripheria Ellypſis.

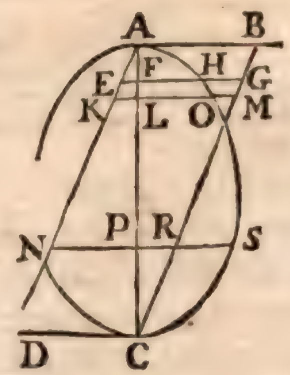


PROPOSITIO XLIX.

Problema.

Alia geneſis Ellypſis.

Proponatur parallelogrammum ABCD in quo diagonalis AC, ducatur EFG, ſitque FH media proportionalis inter EF, & FG, & LO media proportionalis inter KL & LM, & PS media inter NP, & PR, dico puncta H, O, S, pertinere ad Ellypſin.



Demonſtr. Ratio rectanguli EFG, ad rectangulum KLM, componitur ex ratione EF ad KL, ſeu AF ad AL, & ex ratione FG ad LM ſeu CF ad CL: ſed ratio rectanguli AFC ad rectangulum ALC, componitur ex iiſdem rationibus, nempe ex ratione AF ad AL, & ex ratione CF ad CL: ergo ita eſt rectangulum EFG, ſeu quadratum FH ad rectangulum KLM, ſeu quadratum LO; Ergo (*per def. Ell.*) puncta H & O pertinent ad Ellypſin. Idem ſimiliter de quibuſcumque aliis demonſtrabo.

PROPOSITIO L.

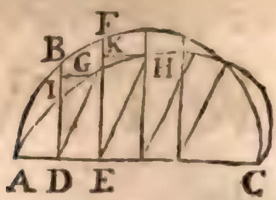
Problema.

Alia geneſis Ellypſis.

Sit ſemicirculus ABC, in quo ad diametrum AC, ſint ductæ perpendiculares DB, EF, & aliæ quæcumque, quibus æquales ducantur inclinatæ eâdem inclinatione, hoc eſt, parallelæ inter ſe DG,

EH,

EH, & aliæ quæcumque, dico puncta G, H eſſe in eadem Ellypſi, cujus diameter AC,



Demonſtratio. Cum DG, DB; EF, EH ſint æquales, erunt eorum quadrata æqualia, ſed quadratum DB æquale eſt rectangulo ADC, & quadratum E F, rectangulo A E C. Ergo ita eſt quadratum DG ad quadratum EH, ſicut rectangulum ADC ad rectangulum AEC; ergo puncta G, H, & alia pertinent ad Ellypſin. Adde quod ſi ducantur GI, HK, & aliæ perpendiculares, puncta I & K ad aliam Ellypſin pertinebunt.

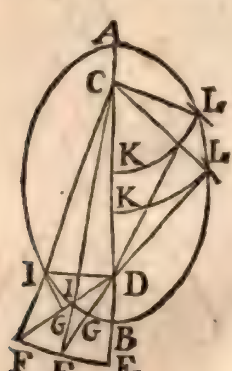
Demonſtr. Cum lineæ DG,EH, ſint parallelæ, erunt triangula EGD, KHE, æquiangula; ergo ita erit DI ad DG, ſeu DB; ſicut EK ad EH, ſeu EF. Ergo pariter oſtendam, ita eſſe quadratum DI ad quadratum EK; ſicut rectangulum A D C ad rectangulum AEC, ergo (*ex defin.*) puncta A, I, K, C, ad eandem Ellypſin pertinent, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LI.

Problema.

Ellypſin deſcribere.

Praxis per funiculum vix in Charta adhiberi poteſt, eò quòd nec clavos umbilicis, nec funes



adhibere poſſumus. Proponatur linea AB pro futura Ellypſis diametro, in qua determinentur umbilici C & D ſit BE æqualis BD, & ex puncto C, ut centro, intervallo C E, circulus deſcribatur, eritque C E æqualis axi majori A B; ducantur quæcumque lineæ C F, junganturque D F, quæ dividantur bifariam in puncto G, educanturque perpendiculares G I, dico puncta I, pertinere ad Ellypſin.

Demonſtratio. In triangulis IGF, IGD, (*per 4. 1.*) ſunt latera I D, I F æqualia; ergo latera CI, I D æqualia ſunt lineæ C F, ſeu C E, hoc eſt axi majori: ergo puncta I (*per 45.*) pertinent ad Ellypſin.

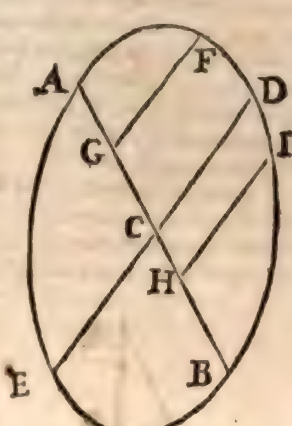
In idem recidit alia praxis. Sit pariter CE æqualis axi majori, fiat ex C, ut centro, quilibet arcus K L, ſumaturque circino reliquum intervallum K E, & ex D, ut centro, intervallô K E, arcus ſecans priores in punctis L; dico puncta L pertinere ad Ellypſin propter eandem rationem.

PROPOSITIO LII.

Theorema.

Si in Ellypſi conjugatæ diametri æquales fuerint; erunt applicatarum quadrata, æqualia rectangulis ſub ſegmentis.

Proponantur in Ellypſi duæ diametri æquales A B, E D. Dico quadrata applicatarum, ut G F æqualia eſſe rectangulis ſub ſegmentis, nempe rectangulo AGB.



Demonſtratio. Cum ita ſit quadratum G F ad quadratum C D, ſicut rectangulum A C B ad rectangulum A G B, & quadratum C D æquale ſit rectangulo ACB, ſeu quadrato AC, cùm diametri AB, CD ſint æquales; quadratum G F æquale erit rectangulo AGB.

COROLLARIUM.

Si fieret circulus circa diametrum A B; quæ ſimiliter divideretur in G, applicata in circulo in puncto G, æqualis eſſet applicatæ G F, ſed incideret perpendiculariter, in Ellypſi non item,

Digitized by Google

LIBER TERTIUS
De Hyperbola.

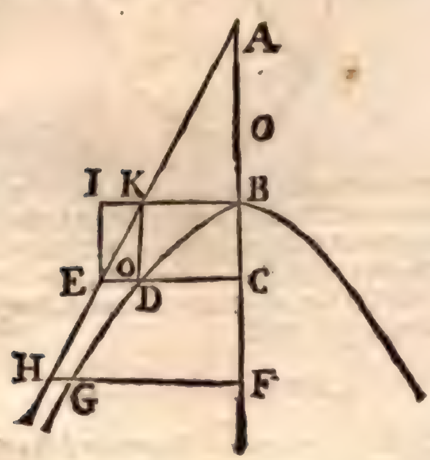
DEFINITIONES.

I. Hyperbola eſt figura lineâ curvâ contenta, in qua ordinatarum quadrata, magis creſcunt, quàm creſcant ſagittæ, ſeu interceptæ inter ordinatas & verticem. Ut autem non inconcinnè, ſed cum aliqua regula creſcant; hanc regulam ponimus, nempe ut aſſumatur extra hyperbolam aliqua linea quæ ſit A B pro diametro, fiatque ut B C ad CD, ita CD ad CE. Ducaturque AE quæ producatur, natura hyperbolæ hoc habet, ut G F ſit media proportionalis inter ſagittam B F & H F, nempe ut quadratum GF æquale ſit rectang. BFH.

Ex qua proprietate datum eſt illi nomen hyperbolæ; ductâ enim lineâ BK, quæ ſumatur pro menſurâ quadratorum applicatarum, dicaturque parameter, ſeu latus rectum; in parabola rectangulum comprehenſum ſub latere recto & ſagittâ æquale eſt quadrato applicatæ.

In Ellypſi quadratum applicatæ deficit à rectangulo ſub ſagittâ, & latere recto.

In hyperbola verò quadratum applicatæ ut CD æquale rectangulo C I, atque adeò ſuperat rectangulum CK comprehenſum ſub ſagittâ, & latere recto, ita ut exceſſus ſit parallelogrammum IO, cujus unum latus KO, æquale eſt ſagittæ BC, & eſt ſimile rectangulo comprehenſo ſub AB, BK.



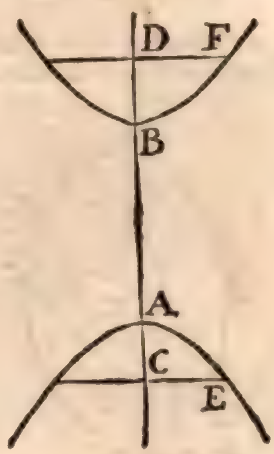
Atque ſunt hæ proprietates quas oſtendit ineſſe hyperbolæ Apollonius.

Volo igitur ut aſſumptâ lineâ AB, & quæſitâ, duabus B C, C D, tertiâ proportionali C E; lineis B F, F H, ſit mediâ proportionalis F G, & aliæ eandem obſervent regulam: tum extremitates harum applicatarum intelligantur conjungi lineâ curvâ, quod fieri non repugnat, hanc figuram voco hyperbolam, & ex hac ejus naturâ, nihil attendendo quod ex cono deſumpta ſit, cæteras omnes ejus proprietates demonſtrandas ſuſcipio.

II. Linea exteriùs aſſumpta ut A B vocetur tranſverſa diameter, hæc ſi dividatur bifariam in O, punctum O dicatur centrum hyperbolæ.

III. Oppoſitæ hyperbolæ ſunt quarum vertices opponuntur, eandemque diametrum habent; ſuntque omninò ſimiles.

Quamvis generatio propria hyperbolarum oppoſitarum oriatur ex ſectione conorum oppoſitorum ad verticem, ut tamen etiam hyperbolas oppoſitas independenter à Cono conſideremus, aliquas illis conditiones adhibemus, nempe ut communem habeant diametrum: Deinde ut ſint ſimiles, nempe ut applicatæ eidem diametro in unâ, æquales ſint, & parallelæ applicatis eidem diametro in aliâ, intelligendo ſcilicet ſub iiſdem ſagittis ut ſi ſagittæ A C, B D ſint æquales: applicatæ C E, D F ſint inter ſe parallelæ, & æquales.



PROPOSITIO I.

Theorema.

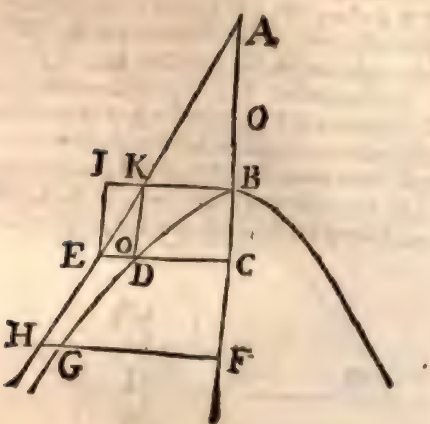
In hyperbolâ, quadrata applicatarum ſe habent ad invicem ſicut rectangula ſub ſagittis, & lineâ compoſitâ ex ſagittâ, & diametro.

Sit hyperbola BDG, in qua applicatæ DC, GF; ſagittæ BC, BF; diameter AB, dico ita eſſe quadratum D C ad quadratum C F, ſicut rectangulum ACB ad rectangulum AFB.

Demonſtr.

Digitized by Google

Demonſtr. (*Per definitionem hyperbolæ*) quadratum DC, æquale eſt rectangulo BCE, & quadratum GF rectangulo BFH, ſed rectangulum



BCE, ſe habet ad rectangulum ACB, cujus eadem altitudo BC, ut EC ad AC, ſeu ut HF ad AF (*per* 4. 6.) & rectangulum BFH ad rectangulum AFB ejuſdem altitudinis, FB ſe habet ut FH ad AF; ergo ita ſe habet quadratum DC ad quadratum GF ut rectangulum ACB ad rectangulum AFB, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

Ita ſe habet quadratum DC ad rectangulum ACB, ſicut latus rectum ad diametrum; nam vidimus rectangulum BCE æquale quadrato DC, ſe habere ad rectangulum ACB, ut CE ad AC, hoc eſt ut KB ad BA.

COROLLARIUM II.

Si duceretur linea GD, hæc producta cum diametro conveniet. Cùm enim rectangulum ACB minus ſit rectangulo AFB, quadratum CD minus erit quadrato GF, ergo linea CD minor eſt lineâ GF, & cum ſint parallelæ, linea GD conveniet cum AB.

COROLLARIUM III.

Ex his vides quòd ſi fieret ut rectangulum ACB ad rectangulum AFB, ita quadratum CD ad FG; puncta D & G eſſent in hyperbolâ.

PROPOSITIO II.

Theorema.

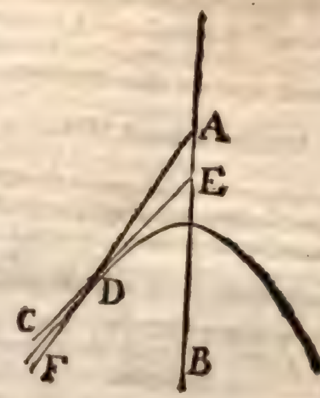
Si linea occurrens hyperbolæ utrimque extra ſectionem cadat hæc producta cum diametro conveniet.

Hyperbolæ cujus diameter AB occurrens recta linea CDE in puncto D, utrinque producta extra ſectionem cadat: dico lineam CDE cum diametro AB convenire. Aſſumatur in peripheriâ quodlibet punctum F, ducaturque recta FD.

Demonſtr. Linea FD (*per coroll.* 2.1.) producta cum diametro conveniet; conveniat igitur in puncto A; cum linea CDE ſit inter ſectionem & punctum A, neceſſariò cum diametro conveniet; Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Si ducatur linea diametro hyperbolæ parallela, hæc in uno tantum puncto hyderbolæ peripheriam attinget, ſi enim in duobus cum diametro



conveniret (*per coroll.* 2.1.) contra ſuppoſitionem, ſupponitur enim ei parallela.

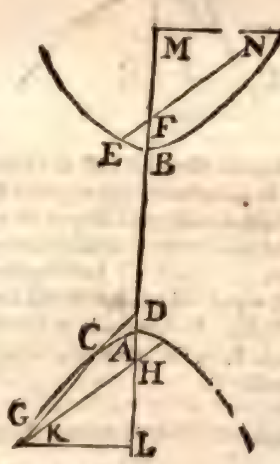
PROPOSITIO III.

Theorema.

Si unam oppoſitarum ſectionum tangat recta linea cui intra alteram ducatur parallela, hæc producta utrinque ſectionem attinget.

Sint oppoſitæ hyperbolæ quarum communis diameter AB, ſitque tangens CD, cui intra oppoſitam hyperbolam ducatur parallela EF, dico lineam EF utrinque cum hyperbola concurrere.

Demonſtr. (*Per præcedentem*) linea CD cum diametro AB convenit; ergo EF illi parallela cum eadem conveniet; conveniat in puncto F, ſumatur AH æqualis BF, ducatur HK parallela CD; ducaturque quæcumque GC.



Cùm CD conveniat cum lineâ GC, lineâ HK, cum eadem conveniet; vel intra, vel extra ſectionem, & utroque modo, fieri non poteſt ut ſectionem non attingat. Attingat igitur ſectionem in puncto K, ex quo intelligatur ordinatim applicata KL, ſumatur FM æqualis HL, & ordinatim applicata MN occurrens lineæ EFN in puncto N, quod aſſero eſſe in peripheria hyperbolæ;

perbolæ; triangula enim KHL, MFN ſunt ſimilia & æqualia ob parallelas FN, KH, & MN, KL. (*Ex definitione oppoſitarum hyperbolarum*) debet punctum N eſſe in ſuperficie hyperbolæ.

Eodem modo oſtendam lineam EF convenire cum ſectione ad partes E; ergo convenit utrinque cum ſectione; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

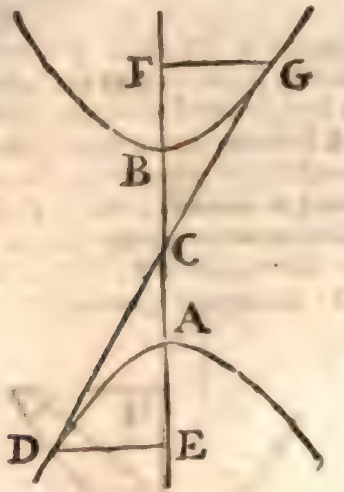
Linea tangenti parallela convenit utrinque cum ſectione, ut linea KH, & quæcumque diametrum intra ſectionem ſecat.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si linea recta per centrum oppoſitarum hyperbolarum tranſiens uni earum occurrat, alteri etiam occurret.

Sit punctum C centrum oppoſitarum hyperbolarum, ducatur recta CD, occurrens uni hyperbolæ in puncto D; dico lineam CD productam, alteram quoque hyperbolam attingere. Intelligatur ordinatim applicata DE, ſintque AE, BF æquales, ducaturque ordinatim applicata FG.



Demonſtratio. Cum EA, BF ſint factæ æquales, & AB ſit communis; rectangulum BEA rectangulo AFB æquale erit; & quia ut rectangulum BEA ad quadratum DE ita diameter AB ad parametrum (*per cor. 1. 1.*) rectangulum etiam AFB priori æquale ad quadratum FG eandem rationem habebit. Eodem modo & punctum G in ſectione erit. Ergo DC producta, attinget ſectionem in puncto G.

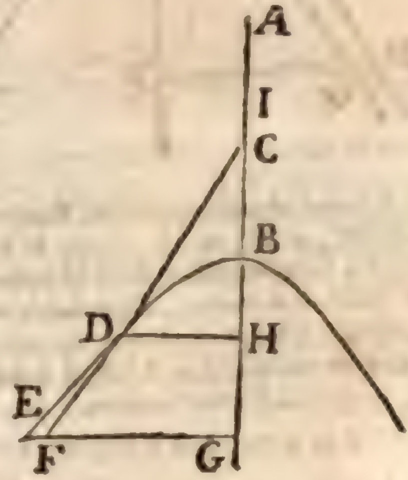
PROPOSITIO V.

Theorema.

Si ab aliquo puncto diametri hyperbolæ quod non minus diſtet ab ejus vertice quàm ſemidiametro linea recta hyperbolæ occurrat; eam ſecabit.

Sit punctum C centrum hyperbolæ, AB diameter, punctum I non minus diſtet à vertice B, quàm ſemidiametro, & linea CD ſectioni occurrat in puncto D, dico eam productam intra ſectionem cadere ſeu illam ſecare. Sit enim primò punctum C centrum hyperbolæ, hoc eſt lineæ AC, CB ſint æquales, & linea CD dicatur ulterius producta cadere extra ſectionem in E. Ordinatim applicatæ intelligantur DH, FG.

Demonſtratio. Si CD producta caderet extra hyperbolam in E, quadratum EG ad quadratum DH majorem rationem haberet quam quadratum FG, ſed ut quadratum EG ad DH; ita quadratum CG ad quadratum CH (*per 4. & 22. 6.*) & ut quadratum FG ad quadratum DH, ita (*per 1 hujus*)



rectangulum AGB ad rectangulum AHB. Ergo major eſſet ratio quadrati CG ad quadratum CH, quam rectanguli AGB ad rectangulum AHB. Et permutando major eſſet ratio quadrati CG ad rectangulum AGB, quàm quadrati CH ad rectangulum AHB. Cum autem linea AB ſit diviſa bifariam in C, eique recta adjiciatur BG, (*erit per 6. 2.*) rectangulum AGB, unà cum quadrato CB, æquale quadrato CG, & rectangulum AHB unà cum quadrato CB, æquale quadrato CH; quare dividendo, auferendo ſcilicet conſequens ex antecedenti, erit major ratio quadrati BC ad rectangulum AGB, quam quadrati CB ad rectangulum AHB, quod eſt abſurdum, nempe ut idem ad majus majorem habeat quàm ad minus. Non ergo CD producta cadit extra ſectionem, ſed intra.

Multò magis ſi punctum aſſumptum eſſet inter A & C quale eſt punctum I, & duceretur linea ID, hæc intra ſectionem caderet.

COROLLARIUM.

Tangens hyperbolam, ſi producatur ſecat diametrum inter verticem, & centrum.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

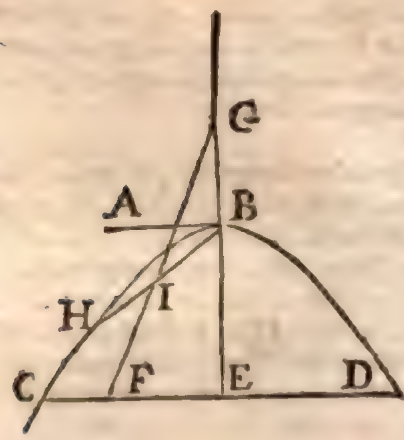
Omnis linea per verticem hyperbolæ ducta & parallela ordinatis ad eandem diametrum, eſt tangens.

Sit linea AB per verticem B ducta, & parallela lineæ CD ordinatæ ad diametrum GE. Dico lineam AB extra ſectionem cadere. Si enim caderet intra ſectionem, ut BH, dividatur BH in I, bifariam

riam

Digitized by Google

riam,eritque H B ad diametrum ordinatim applicata; ergo diameter G I F, lineam C D biſariam divideret in F, (*ex definitione diametri,& applicata* ;



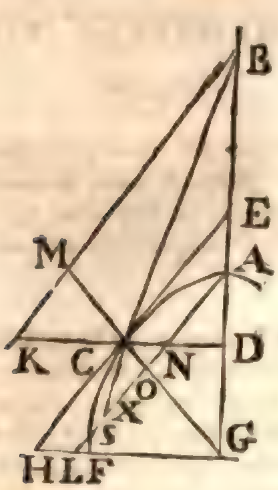
quod eſt abſurdum; cum jam ſupponatur diviſa biſariam in E.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si ducatur ordinata & ita ſit compoſita ex diametro, & ſagittâ ad ſagittam, ſicut partes diametri, linea erit tangens.

Sit AB diameter hyperbolæ, à cujus puncto C ducatur ordinata C D, ſitque ut BD ad D A; ita BE ad E A; dico lineam E C eſſe tangentem. Si enim fieri poteſt ſecet hyperbolam; ſit ECF linea recta; per F ordinatim applicetur G F H, & per puncta A & B ducantur parallelæ EC, nempe AL, BK; jungaturque BCX, DCK.



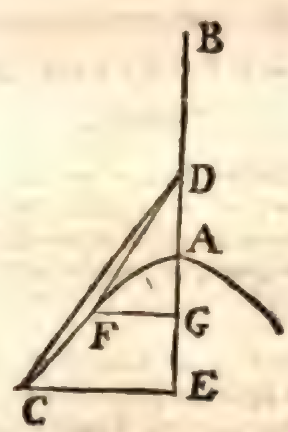
Demonſtratio. Supponitur eſſe B D ad D A, ſeu *(per 4. 6.)* B K ad A N, ut BE ad EA; ſeu BC ad CX *(per eandem)* & B K ad X N, ob ſimilitudinem triangulorum BCK, XCN. Ergo ita eſt B K ad A N, ſicut B K ad X N. Sunt igitur A N, X N æquales, & cum AX ſit diviſâ biſariam in N, erit rectangulum A N X majus rectangulo A O X; ergo erit major ratio lineæ N X ad XO, quàm OA ad AN. Nam ſi fieret rectangulum A O S æquale rectangulo A N X, ita eſſet N X ad O S, ut A O ad A N; ſed major eſt ratio NX ad XO, quàm OA ad AN: ſed ut NX ad XO, ita BK ad BM,propter ſimilitudinem triangulorum: Igitur rectangulum ſub K B, A N, majus eſt rectangulo B M, A O; & conſequenter primum ad quadratum C E majorem habet rationem quàm ſecundum. Sed ut rectangulum K B, A N ad quadratum C E, ſic rectangulum B D A ad quadratum D E *(per 4. 6.)* Pariter ut rectangulum ſub M B, A O ad quadratum C E, ita rectangulum B G A ad quadratum G E. Major igitur eſt ratio rectanguli B D A ad quadratum D E, quàm rectanguli B G A ad quadratum G E; & permutando major erit ratio rectanguli primi ad ſecundum quam quadrati primi ad ſecundum; ſed *(per 1.)* ut rectangulum B D A ad rectangulum AGB, ita quadratum CD ad quadratum GH; & ut quadratum DE ad quadratum GE, ita quadratum CD ad quadratum FG. Major eſt ergo ratio quadrati C D ad quadratum G H, quam quadrati C D ad quadratum GF; quod eſt abſurdum. Non igitur E C producta intra ſectionem cadet, ſed extra.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si recta tangat hyperbolam, & à puncto contactus ducatur ordinata; ita erit compoſita ex diametro, & ſagittâ ad ſagittam, ſicut partes diametri.

Sit hyperbolæ diameter A B, linea tangens C D, & C E ordinata, dico ita eſſe BE ad A E, ſicut B D ad D A. Si enim non ita ſit, fiat ut B D



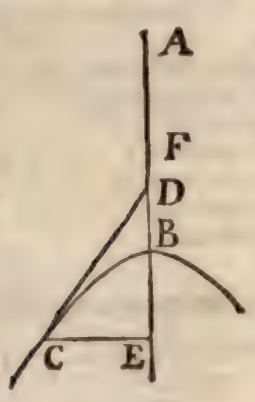
ad D A, ſic B G ad G A; ducatur applicata GF; eſſetque (*per præcedentem*) linea D F tangens, quæ poſt tactum in puncto F extra ſectionem erit; ergo rurſus ſecabit lineam D C, quod eſt abſurdum; duæ enim lineæ rectæ clauderent ſpatium.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si per contactum ducatur ordinata, erit quadratum ſemidiametri æquale rectangulo comprehenſo ſub compoſitâ ex ſemidiametro, & ſagittâ, & ſub interjectâ inter tangentem & centrum.

Sit hyperbolæ diameter A B, & centrum F, tangens C D, ordinata C E. Dico quadratum F B, rectangulo E F D eſſe æquale.



Demonſtr. Ita eſt (*per* 8.) AD ad DB, ſicut AE ad E B; ergo componendo ut utraque AD, DB ad DB, ita AE, EB ad EB, & antecedentium ſemiſſes, nempe ita erit FB, ſeu AF ad DB, ſicut FE ad EB; nam F E eſt dimidia linearum A E, E B. Ergo per converſionem rationis, ita erit E F ad F B, ſicut F B ad F D. Ergo quadrato FB æquale eſt rectangulum E F D; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si per contactum ducatur applicata, erit ejus quadratum, ad rectangulum ſub compoſitâ ex ſemidiametro, & ſagittâ, & ſub diſtantiâ applicata à tangente, ut rectum latus ad diametrum.

Sit tangens C D, applicata C E; dico ita eſſe rectangulum FED, ad quadratum CE, ut diameter A B ad parametrum. Vidimus enim in ſuperiori ita eſſe FE ad EB; ut AF ad BD; ergo permutando ut FE ad AF ita DB ad EB, & componendo, ut AE ad EF, ita DE ad BE. Quare (*per* 14 6.) rectangula AEB, FED ſunt æqualia; ſed rectangulum AEB, eſt ad quadratum CE, (*per corell.* 1. 1.) ut diameter A B ad parametrum; ergo rectang. F E D eſt ad quadratum C E, ut diameter, ad parametrum; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Si per tactum ducatur ordinata; erit rectangulum ſub ſegmentis diametri, æquale rectangulo ſub diſtantiâ applicata à tangente, & ſub diſtantiâ tangentis à vertice.

Sit eadem ſuppoſitio quæ priùs, dico rectangulum ADB, rectangulo EDF eſſe æquale.

Demonſtr. Vidimus (*in* 9.) ita eſſe E F ad FB ſicut FB ad DF. Ergo componendo, ut EA ad FA; ita AD ad FD, & permutando, ut EA ad AD; ita FA ad FD, & dividendo, ut ED ad AD; ita BD ad DF. Quare rectangula ſub mediis & extremis æquantur, nempe ADB, & EDF; quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Si per tactum ducatur ordinata, erit rectangulum ſub ſagittâ, & ſub compoſitâ ex ſagittâ & diametro, æquale rectangulo ſub compoſitâ ex ſemidiametro, & ſagittâ, & ſub diſtantiâ ordinata, ab applicatâ.

Sit eadem ſuppoſitio dico rectangulum AEB æquale eſſe rectangulo F E D.

Demonſtr. (*Per* 9.) ita eſt E D ad BF; ut BF ad DF; & per converſionem rationis, ut EF ad EB; ita FB ad DB; & permutando ut EF ad FB; ita EB ad BD, & componendo, ut EF ad AE, ita EB ad ED. Quare pariter rectangula ſub mediis & extremis æquantur, nempe AEB, & FED; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIII.

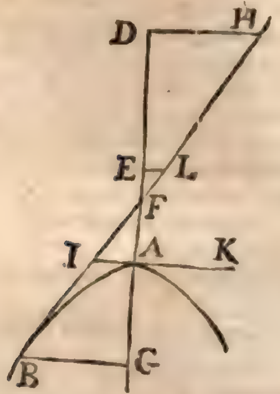
Theorema.

Si in hyperbola per contactum applicetur ordinata, & per extremitates diametri ducantur duæ parallelæ ordinatis, ad tangentem uſque; rectangulum ſub ipſis comprehenſum æquale eſt quartæ parti figuræ.

Sit linea B F tangens, ordinata B G, cui per extremitates diametri A, & ducantur parallelæ IA, DH, ad tangentem uſque, ſitque parameter AK; dico rectangulum comprehenſum ſub A I, D H eſſe quartam partem rectanguli ſub AD, A K comprehenſi; quod rectangulum, figuram vocat Appollonius.

Demonſtratio. Cùm F B ſit tangens, erunt (*per* 11.) rectangula GFE, DFA æqualia; eritque ut GF quadratum ad rectangulum GFE, ſeu ut G F ad E, ita quadratum G F ad rectangulum DFA, quæ ratio componitur ex ratione G F ad D F, ſeu B G ad DH; & ex ratione G F ad FA, ſeu BG ad IA; & hæ duæ rationes componunt rationem quadrati B G ad rectangulum ſub AI, DH comprehenſum, igitur ita ſe habet GF ad

ad E F; ſeu rectangulum EGF ad rectangulum GEF, hoc eſt (*per 9.*) quadratum AE, ſicut quadratum BG ad rectangulum DH, AI, & permutando, ut rectangulum EGF ad quadratum BG eu (*per 10.*) ut diameter DA ad parametrum AK,



ita erit quadratum AE ad rectangulum AI, DH: ſed ut DA ad AK, ita eſt quadratum DA, ad rectangulum DAK; ergo ita eſt quadratum AE ad rectangulum AI, DH, ſicut quadratum DA ad rectangulum DAK; ſed primum eſt quarta pars ſecundi, nempe quadratum AE, quadrati AD; ergo rectangulum AI, DH, eſt quarta pars rectanguli DAK; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Si in hyperbola per tactum ducatur ordinata, & per centrum, ei parallela ad tangentem uſque; erit rectangulum ſub applicatâ, & parallelâ comprehenſum, æquale quartæ parti figuræ.

Linea FB tangat hyperbolam in B, & applicetur B G, cui per centrum E ducatur parallela E L ad tangentem uſque; dico rectangulum ſub E L, B G æquale eſſe quartæ parti figuræ, ſeu rectangulo DAK.

Demonſtr. (*Per 11.*) rectangula DFA, GFE, ſunt æqualia, ergo ita eſt DF ad GF, ſeu DH, ad BG, ſicut FE ad FA, ſeu ut EL ad IA; (*per 4.6.*) Ergo ita eſt DH ad BG, ut EL ad IA; & rectangulum BG, EL, æquatur rectangulo DH, IA, ſeu (*per precedentem,*) quartæ parti figuræ; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

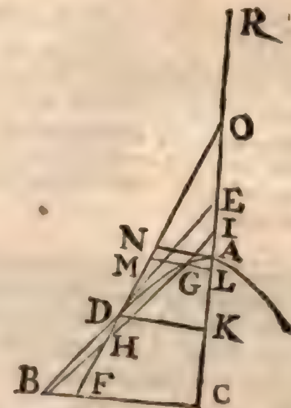
Ex his plurimos modos eliciemus tangentem ducendi, qui ex his propoſitionibus faciles ſunt.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si hyperbolam tangat recta linea, & per contactum ducatur ex centro linea, hæc omnes parallelas tangenti, bifariam ſecat.

Sit hyperbola cujus diameter, aut etiam axis AC, centrum O, quam tangat linea DE; huic parallela ducatur BG; ducatur ex centro O, per contactum D, linea ODF; dico lineam BG, à linea OD, bifariam ſecari.



Demonſtr. Quadrato OA æquale eſt rectangulum KOE; hoc eſt, ita eſt KO ad OA, ut OA ad OE. Quare ita eſt KO ad OE, ſicut quadratum KO ad quadratum OA, ſeu triangulum KOD, ad ſimile triangulum AON; ſed ut KO ad OE; ita eſt triangulum KOD ad triangulum ODE; (*per 1.6.*) habent enim eundem verticem D. Ergo ita eſt triangulum KOD ad triangulum ODE, ut idem triangulum KOD, ad triangulum AON; ſunt ergo æqualia triangula, AON, ODE; & ablato eo quod commune eſt & addito communi, fient quadrilaterum NK, & triangulum DEK, æqualia. Vidimus item ita eſſe quadratum OK ad quadratum OA, ut triangulum KOD ad triangulum AON; & permutando ita erit totum quadratum OK ad totum triangulum KOD, ut ablatum quadratum OA ad ablatum OAN; ergo ita erit reliquum ex quadratis, nempe rectangulum RKA, ad reliquum quadrilaterum NK, ut totum ad totum, nempe quadratum OK, ad triangulum OKD. Eodem modo oſtendam, ita eſſe totum quadratum OL ad triangulum OLM, ut reliquum rectangulum RLA ad reliquum quadrilaterum NL. Item oſtendam, ita eſſe quadratum CO, ad triangulum COF, ut reliquum rectangulum RCA, ad quadrilaterum NACF; eſt enim ſimilis ratio: ſed triangulo DKE, oſtenſum eſt æquale quadrilaterum NK; ergo & triangulo GLI, æquale erit quadrilaterum NL, & triangulo BIC, æquale quadrilaterum NC; ablatis ergo hinc inde æqualibus primò triangulo GIL, & quadrilatero NL, erit reliquum quadrilaterum LMFC, quadrilatero BGLC, æquale; & ablato eo quod commune eſt, erunt triangula BHF, GMH, æqualia; quæ cum ſint ſimilia ob angulos ad verticem in puncto H æquales, & parallela MG, BF habent neceſſariò baſes BH, HG, æquales, ergo linea ODF, per centrum O, & tactum D ducta, dividit bifariam lineam BG, tangenti parallelam; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Conſtat ex his lineam OD, eſſe diametrum,

PROPO

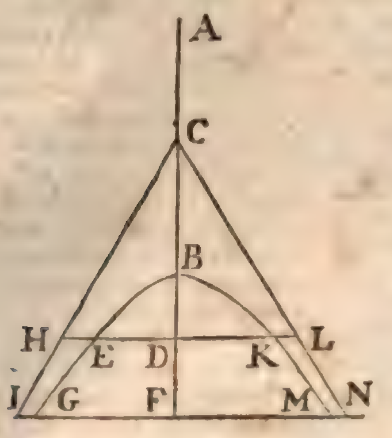
PROPOSITIO XVI.

Theorema.

In hyperbola, ſi fiat ut rectangulum ſub compoſitâ ex diametro & ſagittâ, & ſub ſagittâ, ad idem rectangulum, plus quadrato ſemidiametri; ita quadratum applicatæ ad quadratum alterius; linea ex centro ducta conjungens hac puncta recta erit, & aſymptotos; & quo magis producetur, eò magis ad hyperbolam accedet.

Supponatur hyperbola, cujus diameter AB, centrum C, eritque (*per* 1. *hujus*) ut rectangulum ADB ad rectangulum AFB, ita quadratum DE, ad quadratum FG, fiat ut rectangulum ADB ad rectangulum ADB plus quadrato CB, ita quadratum DE ad quadratum DH.

Pariter fiat ut rectangulum AFB ad rectangulum AFB, plus quadrato CB, ita quadratum GF ad quadratum FI; dico CHI eſſe lineam rectam aſymptoton, &c.



Demonſtr. Cùm recta AB diviſa ſit bifariam in C, & addita BD, erit rectangulum ADB, unà cum quadrato BC, æquale quadrato CD, (*per* 7. 2.) Pariter rectangulum AFB, unà cum quadrato BC, æquatur quadrato CF; ergo ita erit rectangulum ADB ad quadratum CD, ſicut quadratum DE ad quadratum DH; & ut rectangulum AFB ad quadratum CF, ita quadratum FG ad quadratum FI; ergo ita erit quadratum CD, ad quadratum DH, ut quadratum CF ad quadratum FI; & lineæ eandem etiam rationem habebunt; ergo CHI eſt linea recta, (*per* 4. 6.) Quia autem quadratum FI ſuperat quadratum FG, puncta G, & I non coincidunt.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Si fuerint aſymptoti, & applicatæ; erunt rectangula applicatarum inter ſe æqualia.

Sint aſymptoti CI, CN, & applicatæ eo ordine quo explicuimus in præcedenti; dico rectangula HEL, IGN, eſſe æqualia.

Demonſtr. Ita eſt quadratum CD, ad quadratum CF, ut quadratum DH, ad quadratum FI; & pariter ita eſt rectangulum ADB ad rectangulum AFB, ſicut quadratum DE ad quadratum FG, quæ ſunt partes quadratorum CD, CF, DH, FI; ergo & reliqua in eadem ratione erunt; nempe ut quadratum CB ad quadratum CD, ita rectangulum HEL ad rectangulum IGN; ſupponitur enim DL æqualis HD, & IF, æqualis FN; cum ergo HL diviſa ſit bifariam in D, & non bifariam in E, erit quadratum dimidiæ DH, æquale rectangulo HEL. Quare conſtat rectangula HEL, IGN, eſſe æqualia; immò cum ED, DK ſupponantur æquales, ex definitione applicatæ; erunt rectangula HEL, HKL, æqualia.

COROLLARIUM.

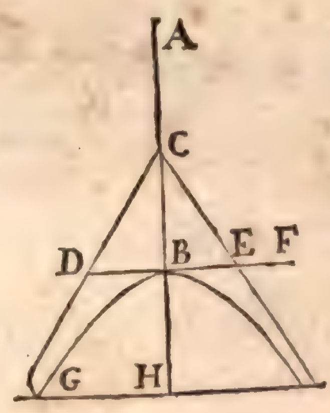
IG minor erit quam HE; cum enim rectangula HEL, IGN, ſint æqualia, erit ut HE ad IG, ita GN ad EL; ſed GN, major eſt quam EL; ergo & HE, major quam IG.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si hyperbolam linea per verticem tangat, cujus quadratum æquetur quartæ parti figuræ; linea ex centro per ejus extremitates ducta erit aſymptotos.

Sit hyperbolæ diameter AB, centrum C, linea DE ſectionem tangat in puncto B, vertice ſcilicet, ſitque quadratum BD, aut BE æquale quartæ parti figuræ, hoc eſt rectanguli comprehenſi ſub diametro AF & parametro BF; dico lineas CD, CE, eſſe aſymptotos, ſeu non convenire, cum ſectione: conveniat enim ſi fieri poteſt CD, cum hyperbola in puncto G, & ordinatim applicetur GH, quæ erit parallela DB.



Demonſtr. Ita eſt AB ad BF, ut quadratum AB ad rectangulum ABF, ſed quadratum BC eſt quarta pars quadrati AB, & quadratum BD, ſupponitur quarta pars rectanguli ABF; ergo ita eſt AB ad BF, ut quadratum BC, ad quadratum BD, ſeu (*per* 4.6.) ut quadratum CH, ad quadratum HG; ſed (*per* 1. *hujus*) ut AB ad BF, ita eſt

rectan

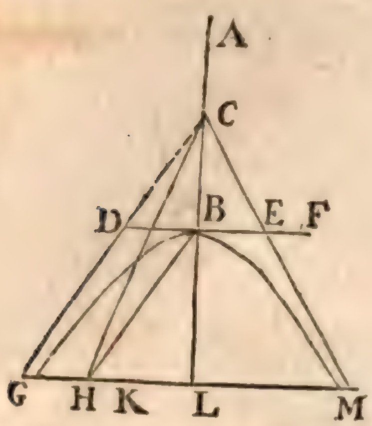
rectangulum A H B ad quadratum HG; ergo ita erit rectangulum AHB ad quadratum HG, ut quadratum CH ad quadratum HG; eſſent ergo æqualia rectangulum AHB & quadratum CH (*contra 6.2. Eucl.*) Quare linea CD producta non convenit cum ſectione; Eſt ergo aſymptotos.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Ex centro nulla intra aſymptoton duci poteſt, quæ cum hyperbola non conveniat.

Factâ eâdem ſuppoſitione, dico intra aſymptotos C G, C M, ex centro C, nullam aliam aſymptoton duci poſſe: ſit enim ducta quæcumque C H, hanc aſſero cum hyperbola convenire. Ducatur enim B H aſymptoto CDG parallela; quia igitur CH convenit in C, cum CDG, unâ parallelarum, conveniet etiam cum alterâ nempe B H; conveniat in H, fiantque æquales DG, BH; ducatur G H, hæc erit parallela tangenti D B E, & conſequenter producta erit ordinatim applicata; eruntque GL, LM, æquales, eò quod DB, BE ſint æquales: ſunt item G H, D B æquales; quare ſi dicatur punctum H eſſe extra ſectionem, ita ut ſectio ſecet lineam GL in puncto K, quod ſit intra punctum H eſſet GK major quam DB.



Demonſtr. (*Per 6.2*) rectangulum A L B cum quadrato B C, æquale eſt quadrato CL. Item rectangulum MKG majus eſt rectangulo DBE, ſeu quadrato DB; eſt autem ut AB ad BF, ita quadratum AB ad rectangulum ABF, & quadratum CB ad quadratum B D, quartam ſcilicet partem rectanguli ABF: & ut AB ad BF, ita (*per coroll.1.*) rectangulum ALB ad quadratum LK; & ut quadratum BC ad quadratum BD, ita quadratum CL, ad quadratum L G: ergo ita eſt quadratum C L ad quadratum LG, ut rectangulum ALB ad quadratum LK: cum ergo ſit totum quadratum C L ad totum quadratum L G, ut ablatum rectangulum A L B ad ablatum quadratum LK; erit reliquum quadratum B C ad reliquum rectangulum MKG, ut totum ad totum; nempe ut quadratum CL ad quadratum L G, ſeu ut quadratum B C ad quadratum BD: ergo ita erit quadratum B C ad quadratum BD, ut idem quadratum BC ad rectangulum MKB; quod fieri non poteſt, cum rectangulum MKB, in hac ſuppoſitione haberet lineas GK, KM, majores quàm DB, BE.

COROLLARIUM.

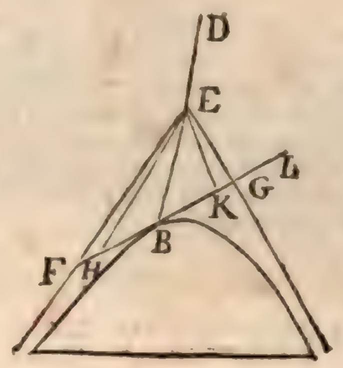
Oſtendimus in hac propoſitione rectangulum MKG æquale eſſe quadrato B C: Quare rectangulum quodcumque applicatarum cum aſymptotis, eſt æquale quartæ parti figuræ.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Omnis tangens hyperbolam; utramque ſecat aſymptoton, bifariamque in puncto tactûs ſecatur; & quadratum dimidiæ æquatur quartæ parti figuræ.

Linea BL tangat hyperbolam ABC, in puncto B: ſit E centrum, & aſymptoti EF, EG, dico



primò tangentem BG, ſecare utramque aſymptoton. Ducatur BE, ſintque BE, ED æquales; eritque BD diameter (*per 7. hujus*) abſcindantur hinc inde B K, B H æquales, ita ut totius quadratum æquale ſit rectangulo comprehenſo ſub diametro B D, & parametro; eſſentque EK, EH, aſymptoti quod eſt contra præcedentem: Quare neceſſariò B L producta utramque aſymptoton ſecat; & BG, BF quadrata æqualia ſunt quartæ parti figuræ; alioquin abſcindendo lineas, quarum quadrata æqualia eſſent quartæ parti figuræ, darentur aliæ aſymptoti.

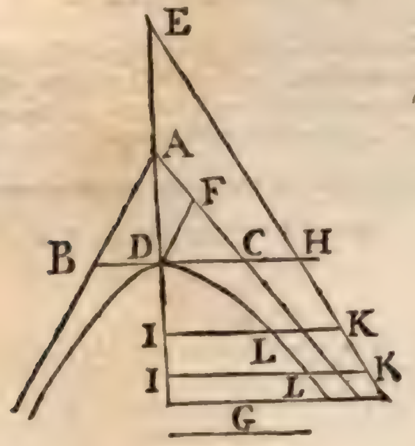
PROPOSITIO XXI.

Problema.

Datis duabus lineis angulum comprehendentibus, per punctum intra angulum poſitum, hyperbolam deſcribere, cujus prædictæ lineæ ſint aſymptoti.

Sint datæ duæ lineæ AB, AC, angulum BAC, comprehendentes, ſitque aſſignatum punctum D, per quod deſcribenda eſt hyperbola, cujus AB, AC ſint aſymptoti; ducatur D A, ſintque D A, AE,

AE, æquales; ducatur DF, parallela AB, fiantque AF, FC, æquales, & ducatur BDC; eruntque (*per 4. 6.*) BD, DC æquales; tum lineis ED,



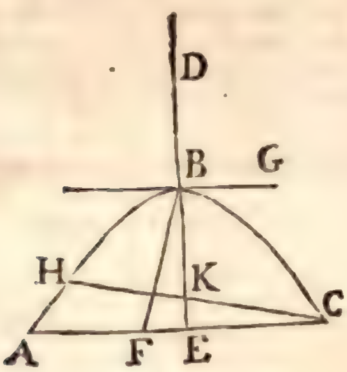
BC quæratur tertia proportionalis G, quæ aſſumatur parameter. Datâ autem diametro DE, & parametro G, facilè hyperbolam deſcribes. Ponatur enim DH, æqualis parametro, ducaturque EH, quæ ulterius producatur; fiantque ſingulis rectangulis DIK, ſingula quadrata IL, æqualia; habebitur hyperbola, cui nempe conveniet definitio: & cum BC ſit media inter ED & DH parametrum, erit quadratum BC, æquale rectangulo EDH; & conſequenter quadratum DC, erit quarta pars rectanguli EDH; ergo (*per 18.*) AB, AC ſunt aſymptoti.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Si hyperbolæ diameter lineam bifariam ſecet: quæ per verticem ducitur tangens, ei eſt parallela.

Hyperbolæ diameter BD dividat bifariam lineam AEC, in puncto E, ducaturque per punctum B, tangens BG, dico tangentem BG, eſſe parallelam lineæ AEC; ſi enim non ſit parallela; ducatur CKH, parallela lineæ BG, quæ (*per 15.*) bifariam dividetur in K; & cum jam AEC, ſupponatur diviſa bifariam; erit ut CK ad KH,



ita CE ad AE; ergo (*per 2. 6.*) AH, erit parallela KE; cum tamen (*per corol. 2. 1.*) cum illâ conveniat extra ſectionem.

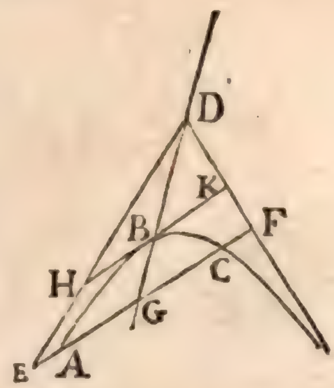
COROLLARIUM.

Si ſit BG, tangens hyperbolam, in puncto B, ſitque ei parallela AC, diviſa bifariam in E, clarum eſt lineam BE, eſſe diametrum: ſi enim daretur alia, ut BF hæc divideret bifariam lineam AC in puncto F.

PROPOSITIO XXIII.

Linea ſecans hyperbolam in duobus punctis, utramque aſymptoton ſecat; & ejus ſegmenta ſunt æqualia.

Linea AC hyperbolam ſecet in punctis A & C, dico AC productam, cum utraque aſymptoto DE, DF convenire; item ſegmenta AE, CF eſſe æqualia: dividatur AC bifariam in G, ducaturque ex centro D linea DG, ſectionem ſecans in puncto B, per quod ipſi AC parallela ducatur HBK.



Demonſtr. DG (*per 22.*) eſt diameter, & HK, eſt tangens (*per 22.*) quæ (*per 20.*) utramque ſecat aſymptoton; ergo & AC ipſi parallela cum utraque conveniet, eruntque (*per 20.*) HB, BK æquales; ergo EG, GF æquales erunt, & ſubtractis AG, GC, reſtabunt EA, CF, æquales.

COROLLARIUM.

Si recta linea utramque aſymptoton ſecans, bifariam ab hyperbola ſecetur, in uno tantum puncto ſectionem ſecat.

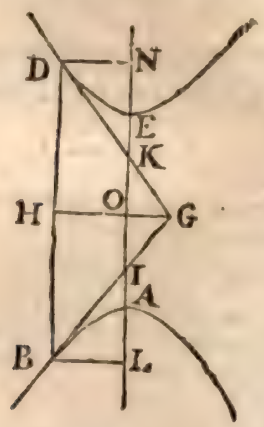
PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Si duæ rectæ tangentes hyperbolas oppoſitas conveniant; & à concurſu ad medium lineæ conjungentes contactus, recta ducatur, hæc erit diameter conjugata illi diametro, conjungenti parallela.

Sint lineæ BG, DG tangentes hyperbolarum oppoſitarum, & hæ conveniant in puncto G; ſit BD conjungens contactus B & D, quæ dividatur

tur bifariam in H ; Dico lineam G H eſſe diametrum conjugatam diametro E A , parallelæ ipſi DB. Sint ad diametrum A E applicatæ ordinatim BL, D N , quæ erunt parallelæ inter ſe ; & cum DB, AE, ſupponantur parallelæ , erunt DN, BL, æquales ; & (*per 1. hujus*) rectangula A N E , ELA , erunt æqualia , & conſequenter dividendo erunt EN , AL , æquales , ſicut AN , EL.



Demonſtr. Cùm DG ſit tangens , & DN , applicata , ita erit (*per 7.*) A N ad N E , ſicut AK ad KE : pariter cum BI ſit tangens, ita erit EL ad LA ; ſicut E I ad IA ; ſed ita ſe habet E L ad LA , ſicut AN ad N E ; ergo ita erit AK ad KE, ſicut E I ad IA , & componendo ut AE ad EK; ita EA ad AI ; ſunt ergo æquales IA , KE. Item cum DH , HB, ſint æquales ex conſtitutione , & ſint DB , KI , parallelæ , erunt IO, OK æquales; quare OE , OA , æquales erunt , & punctum O erit centrum ; & (*per defin.*) GOH erit conjugata diameter ipſi AE, cum eam dividat bifariam, ſicut lineam B D.

COROLLARIUM.

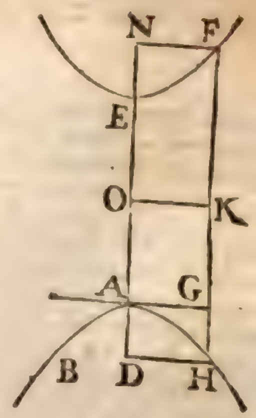
Si recta utrinque oppoſitis ſectionibus occurrens dividatur bifariam in H, & ex centro O ducatur linea O H ; hæc erit conjugata diameter ipſi AE , quæ ducitur parallela BD.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Si unam ex oppoſitis hyperbolis , recta linea tangat cui per centrum ducatur parallela , hæc erit conjugata diameter diametro per contactum ducta.

Unam ex oppoſitis ſectionibus tangat linea AG, cui per centrum O, ducatur parallela OK ; dico eſſe conjugatam diametro OA , per contactum A tranſeunti : Ducatur enim quæcumque H F, ipſi AO parallela, occurrens utrique hyperbolæ in punctis H, & F, ducanturque FN , DH, ordinatim applicatæ ; quæ ſicut in antecedente oſtendentur æquales eſſe, ſicut A D , E N ; item O N , O D, & illis parallelæ F K , K H : quare H F , bifariam diviſa eſt in puncto K ; quod cum de quacumque aliâ parallela demonſtrari poſſit , erit OK diametri A E , conjugata diameter.

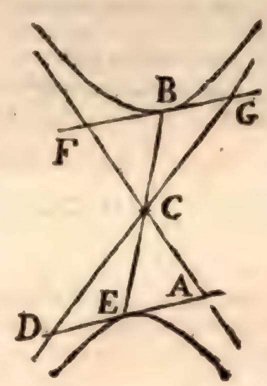


PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

Oppoſitarum hyperbolarum aſymptoti communes ſunt.

Sint oppoſitæ hyperbolæ , quarum aliquâ diameter E B , centrum C ; dico aſymptotos communes eſſe utrique. Ducantur per puncta E, & B duæ tangentes FBG , DEA , quæ erunt parallelæ ordinatim applicatis ; ſint lineæ AE, ED, B F , B G , æquales , ſitque ſingularum quadratum æquale quartæ parti figuræ , quæ ad diametrum AB conſtituitur , junganturque C D , C G, C A , C F.



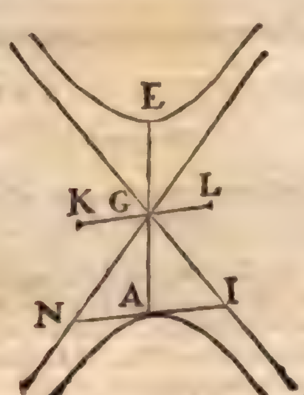
Demonſtr. Cùm lineæ BG , DE ſint parallelæ, erunt alterni anguli CDA , CGB æquales , & cum tam BG, DE, quam BC , CE, ſint æquales , (*per 4. 1.*) triangula E C D, B G C ſunt æqualia, & anguli BCG , ECD æquales, qui cum ſint oppoſiti ad verticem , lineæ D C , C G, in directum jacebunt ; & quia lineæ DE , AE , FB, BG poſſunt quartam partem figuræ , erunt (*per 18. hujus*) D G , F A aſymptoti , reſpectu utriuſque hyperbolæ.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Si tangenti unam hyperbolarum oppoſitarum, aſymptotis terminata, ducatur per centrum æqualis parallela, & biſariam diviſa; hæc erit hyperbolarum communis ſecunda diameter.

Sint oppoſitæ hyperbolæ quarum commune centrum G, aſymptoti NG, GI; tangat autem alterutrum linea NAI, terminata aſymptotis, cui æqualis & parallela ducatur KGL biſariam ſecta in puncto G; dico KGL eſſe oppoſitarum hyperbolarum ſecundam diametrum. Ducatur per contactum A diameter AGE.

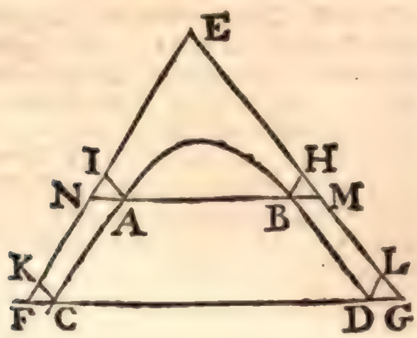


Demonſtratio. (*Per* 20.) quadratum AI æquale eſt quartæ parti figuræ, ſeu rectanguli ſub A E & parametro contenti; & conſequenter quadratum totius N I, ſeu K L, erit æquale rectangulo ſub diametro A E, & parametro; ergo K L, eſt media proportionalis inter diametrum AE, & parametrum; & cum tranſeat per centrum G, ſitque biſariam diviſa, habebit omnes conditiones ſecundæ diametri.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Si hyperbolam inter aſymptotos conſtitutam ſecent duæ parallelæ, & per puncta ducantur lineæ aſymptotis parallelæ; illæ erunt proportionales.



Lineæ AB, C D parallelæ inter ſe, ſecent hyperbolam inter aſymptotos EF, E G conſtitutam & per puncta ſectionum A,B,C, D, ducantur AI, CK parallelæ EG; item BH, DL, parallelæ E F, dico ita eſſe DL ad BH, ſicut KC ad IA.

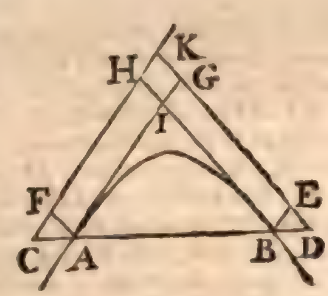
Demonſtratio. (*Per* 17.) NA, BM; FC, DG, ſunt æquales; ſunt item triangula D L G, BHM, ſimilia; cum conſtent parallelis lineis; ſicut FKC, NIA, quæ tam inter ſe quam prioribus ſunt ſimilia; ergo habent latera proportionalia; nempe ita eſt DL ad BH, ſicut KC ad IA.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Si linea hyperbolam ſecet, & per puncta ſectionum ducantur aſymptotis parallelæ, formabuntur rectangula æqualia.

Linea AB, ſecet hyperbolam inter ſectionem A & B; ducantur B E, A F parallelæ aſymptotis, dico rectangulum F A G æquari rectangulo E B H.



Demonſtratio. (*Per* 17.) CA, DB ſunt æquales & triangula B E D, CFA ſimilia; ergo erunt BE, CF, ED, AF, æquales. Pariter cum ſimilia ſint triangula EBD, DKC; ita erit B E ad K C, ſicut DE, ſeu FA ad DK; & dividendo, ut B E ad K F, ita FA ad K E. Ergo rectangulum, aut parallelogrammum æquiangulum ſub extremis BE & KE æquabitur parallelogrammo ſub mediis KF, FA.

PROPOSITIO XXX.

Theorema.

Si uni aſymptoto ducantur parallelæ, erunt ſegmenta aſymptoti reciproca parallelis.

Ducantur in figura ſequenti lineæ AB, CD, quæ ſint parallelæ aſymptoto EF, dico ita eſſe CD ad AB ſicut BE ad DE. Ducatur enim linea C A F, ſecans hyperbolam in A & F, & per A, & C. Lineæ C H, A G, aſymptoto DE parallelæ; eruntque parallelogramma AGEB, CDEH, æqualia, ergo latera habent reciproca: nempe ut C D ad AB, ita BE ad ED.

COROLLARIUM.

Conſtat item ductis EC, EA, triangula E B A, EDC æqualia eſſe.

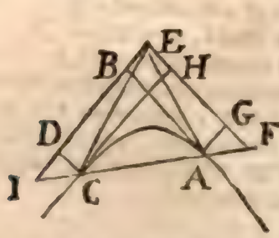
PROPO

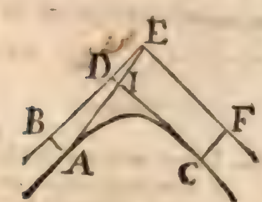
PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

Si eidem aſymptoto ducantur parallelæ, & cum minore earum conjungatur ex angulo linea; hæc minor linea erit media proportionalis inter majorem, & ejus ſegmentum.

Sint in 2. fig. aſymptoti, BE, EF; & EF ducantur parallelæ AB, CD; ducatur EA, ſecans CD, in I, dico ita eſſe DI ab BA, ut BA ad CD.





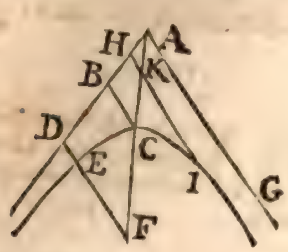
Demonſtratio. Per præcedentem ita eſt CD ad BA, ſicut BE ad DE: ſed ſicut BE ad DE, ita eſt BA ad DI; ergo CD, BA, DI, ſunt tres continuè proportionales; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

Si uni aſymptoto ducantur duæ parallelæ, ducaturque ex angulo ad unam linea recta, fient tres continuè proportionales.

Sint aſymptoti AD, AG; fiantque lineæ AG, duæ parallelæ BC, DE; ducatur ACF, & producatur DEF. Dico DE, BC, DF, eſſe continuè proportionales.



Demonſtratio. *(Per penultimam)* ita eſt DE ad BC, ſicut AB ad AD; ſed ſicut AB ad AD, ita eſt BC ad DF; ergo DE, BC, DF ſunt continuè proportionales.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Si per diviſiones unius aſymptoti proportionales, ducantur alteri aſymptoto parallelæ, illæ erunt proportionales.

Sit ut AH ad AB, ita AB ad AD; ducanturque parallelæ alteri aſymptoto per H, B, D, nempe DE, BC, HI, dico lineas DE, BC, HI proportionales eſſe.

Demonſtratio. *(Per 30.)* ut AH ad AB, ita eſt BC ad HI, & ut AB ad AD, ita DE ad BC: & AH, AB, AD ſupponuntur proportionales: ergo DE, BC, HI proportionales ſunt.

COROLLARIUM I.

HI & DF, ſunt æquales; vidimus enim in ultimâ DE, BC, DF, proportionales eſſe; ita erunt HK & DE æquales.

COROLLARIUM II.

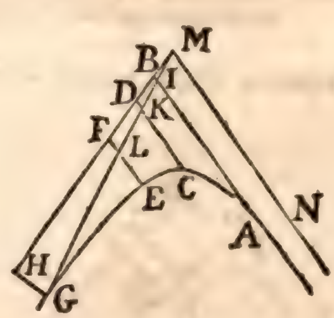
Sequitur item in eadem ſuppoſitione, AK, AC, AF proportionales eſſe.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema.

Si ducantur plurimæ parallelæ uni aſymptoto, & proportionales; & ad ultimam earum ex centro ducatur recta linea, continuabitur eadem proportio.

Aſymptoto MN, ducantur parallelæ AB, CD. FE, HG, proportionales, jungaturque MG. Dico AB, CD, FE, HG, FL, DK, BI eſſe in eadem proportione.



Demonſtratio. Cum AB, CD, EF, GH ſint continuè proportionales, etiam MB, MD, MF, MH in eadem erunt ratione, ſed inverſo ordine; nempe erit, ut EF ad GH, ita HM ad FM *(per 30.)* ſed ut HM ad MF, ita HG ad FL *(per 4. 6.)* Ergo continuatur eadem ratio.

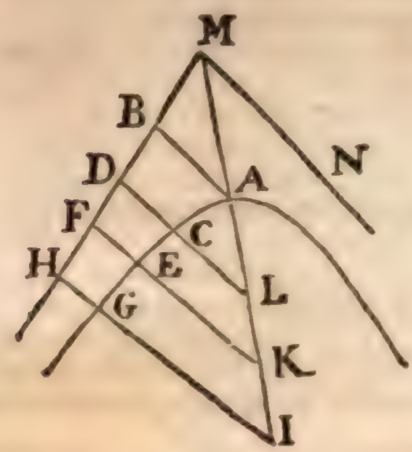
Digitized by Google

PROPOSITIO XXXV.

Theorema.

Si ducantur plurimæ proportionales parallelæ uni aſymptoto, & ducatur ex centro ad primam recta linea; continuabitur eadem proportio.

Sint AB, CD, EF, GH, parallelæ MN, & proportionales; dico HG, FE, DC, AB, DL, FK, HI, eſſe proportinnales.



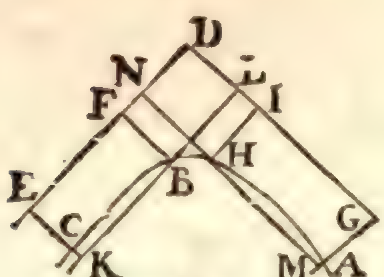
Demonſtr. Ita eſt (*per* 29.) D C ad A B ſicut B M ad M D, ſed ut MB ad MD ita eſt BA ad D L; ergo continuatur eadem ratio DC, AB, DL, &c. quod erat demonſtrandum.

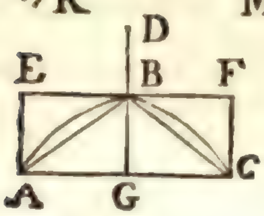
PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Si duabus aſymptotis ducantur utrinque bina parallela proportionales; fient duo quadrilatera æqualia.

Sit hyperbola CBHA; ducantur aſymptotis





parallelæ AG, HI; EC, FB proportionales; dico quadrilaterum AGIH, quadrilatero BFEC, eſſe æquale. Fiant EK, FB; HI, MG, æquales, producanturque lineæ ad aſymptotos ut figura exhibet.

Demonſtr. Supponitur ita eſſe AG ad HI, ſicut EC ad BF; ſed (*per* 29.) ut AG ad HI, ita DI ad DG, & ut EC ad BF, ſic DF ad DE: ergo ita eſt DI ad DG, ſicut DF ad DE; ergo ut rectangulum DH ad rectangulum DM, ita rectangulum DB ad rectangulum DK; ſed duo prima ſunt æqualia (*per* 29.) ergo & rectangula DM, DK æqualia ſunt, ſicut reſidua IM, FK. Item quia ita eſt AG ad HI, ſeu GM, ſicut EC ad FB, ſeu EK; ita erit AG ad AM, ſicut EC ad CK; & componendo GM ad AM, ſicut EK ad CK: ſed ut MG ad AM, ita rectangulum MI, ad rectangulum AMH; & ut EK ad CK, ita rectangulum KF ad rectangulum CKB: ſed rectanguli AMH, dimidium eſt triangulum AHM, & rectanguli CKB, triangulum CKB; ergo ea triangula ſunt æqualia, quibus utrinque ablatis reſtant ECBF, AHIG, quadrilatera æqualia; quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Triangulum habens verticem cum hyperbola communem, eſt maximum omnium quæ illi inſcribi poſſunt, majuſque eſt dimidia hyperbolâ.

Sit hyperbola ABC, terminata lineâ AC; ſit centrum D, dividatur AC bifariam in G, ducatur diameter DG, eritque B vertex. Per B ducatur BF parallela AC; quæ tanget hyperbolam in puncto B, ductis AB, BC; dico triangulum ABC eſſe maximum quod in hyperbolâ inſcribi poteſt. Pertingit enim ad tangentem BF; alia omnia ad eam non pertingerent, & conſequenter ſub eadem baſi minorem haberent altitudinem: ergo (*per* 1.6.) minora eſſent.

Addo triangulum ABC majus eſſe dimidiâ hyperbolâ. Ducantur enim AE, CF, parallelæ BG; triangulum ABC æquale eſt dimidio parallelogrammo AEFC; ſed parallelogrammum AEFC majus eſt hyperbolâ ABC; ergo triangulum ABC majus eſt dimidiâ hyperbolâ.

PROPOSITIO XXXVIII.

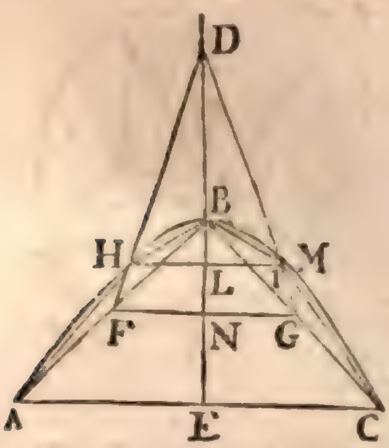
Theorema.

Si ſegmento hyperbolæ inſcribatur maximum triangulum; triangula maxima inſcripta ſegmentis ſibi hinc inde reſpondentibus ſunt inter ſe æqualia.

Triangulum ABC ſit maximum quod in hyperbolâ inſcribi poteſt, ſit D centrum, & linea DBE dividat bifariam lineam AC; diviſis bifariam AB, BC in F, & G, ducantur diametri DIG, DHF; dico triangula AHB, BIC, quæ (*per præcedentem*) ſunt maxima, quæ in ſegmentis AHB, BIC inſcribi poſſunt, eſſe æqualia. Ponatur ex H ordinatim applicata HM, quæ bifariam dividetur

Digitized by Google

dividetur in L ; ducatur item FG , quæ erit parallela A C , dividetur biſariam in N. Applicata H M eſt parallela AC ; ergo & parallela FG , & biſariam dividitur in L, ſicut H I biſariam dividitur ; ergo H M , H I coincidunt.



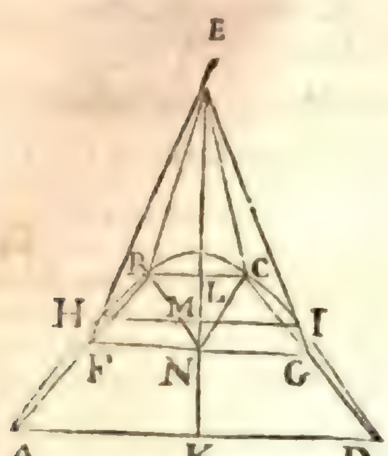
Demonſtr. Cùm F G , H I, ſint parallelæ, erit (*per* 3.6.) ut G I ad M D , ita F H ad HD ; cum FN , N G ſint æquales ; erunt triangula D N F, DNG æqualia , ſicut FBN , NBG ; ergo reliqua FBD, GBD erunt æqualia, & cum ut GI ad ID, ita ſit triangulum GBM ad triangulum IBD (*per* 1. 6.) & ut GI ad ID, ita ſit HF ad HD, & triangulum FBH ad triangulum HBD ; ita erit G B I ad I B D, ſicut FBH ad HBD ; & componendo FBD ad HBF , ut GBD ad GIB ; ſed primum & tertium ſunt æqualia ; ergo ſecundum & quartum, nempe FBH , GIB, ſunt æqualia , & eorum dupla AHB , BIC , ſunt æqualia ; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema.

In hyperbolâ , conjungentes duas parallelas , auferunt ſegmenta , quorum triangula maxima ſunt æqualia.

Lineæ AB, DC conjungant in hyperbolâ duas parallelas AD,BC,dico triãgula maxima ſegmen-



totum AB, CD eſſe æqualia. Dividatur AD, biſariam in K , ducatur ex centro E diameter EK ; hæc dividet biſariam lineam BC ; dividantur item biſariam AB , CD in F , & G , ducaturque FG; Item ducantur diametri E H F , E I G ; ducatur item ordinata H M , quæ ut in præcedenti oſtendetur incidere in punctum I, item H I eſſe parallelam AD, & conſequenter FG ; eritque (*per* 3.6.) ut GI ad IE, ita FH ad HE ; ducantur item BN, CN, BE, CE.

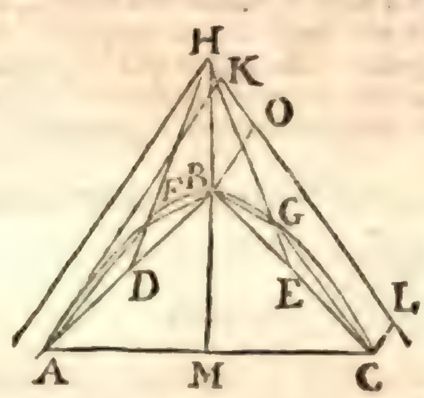
Demonſtr. Cùm BC, A D ſint parallelæ, ſintque AB , D C biſariam diviſæ in F , & G , erunt FG , A D parallelæ , & FG , erit biſariam diviſa, ſicut BC & AD : ſunt ergo triangula FBN,NCG; BNL , CNL ; BEL , CEL æqualia ; quibus ſublatis ex triangulis æqualibus EFN,EGN,reſtant æqualia triangula FBE, GEC : & cum H I ſit parallela FG, erit ut G I ad I E , ita FH ad H E ; & ductis BH, CI, oſtendam ſicut in priore ſimiliter dividi triangula FEB , IEC , & conſequenter triangula CIG,BHF, & eorum dupla CID, ABH eſſe æqualia ; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XL.

Theorema.

Si ad diametrum ordinatim applicentur ducta ab eius extremitatibus ad verticem lineæ auferunt ſegmenta convexa æqualia; & ductis per eaſdem extremitates & verticem parallelis uni aſymptoto ; auferuntur ſegmenta concava æqualia.

Sit diameter HM, ad quam applicetur AC,& à punctis A, & C, ducantur ad verticem B , lineæ AD, BC ; dico ſegmenta AFB, BGC eſſe æqualia. Nam diviſis AB, B C biſariam in D & E, ductiſque diametris HD, & HE ; ductiſque AF,BF,BG, CG, fiunt triangula æqualia ; tum ſupra BF,BG, poſſunt fieri alia duo æqualia , & ſuper FA , CG, poſſunt fieri (*per præcedentem*) æqualia trian-



gula ; & per has ſubdiviſiones tot fient in uno ſegmento, quot in alio ; & cum ſingula triangula auferant ex ſegmento cui inſcribuntur pluſquam mediam partem , tot fient diviſiones in uno, ut id quod relinquetur , ſit omni quantitate minus : cum ergo quodlibet triangulum in uno ſegmento habeat ſibi æquale reſpondens in alio , erunt ſegmenta æqualia.

Per puncta A, C, & B, ducantur tres lineæ parallelæ AK , BO , CL , dico ſegmenta concava CLOB, ABOK, eſſe æqualia.

Demonſtr. (*Per* 28.) tres lineæ CL , BO, AK ſunt continuè proportionales , & rectilinea CL BO,ABOK, (*per* 30.) ſunt æqualia; à quibus ſi auferas ſegmenta æqualia convexa, reſtabunt ſegmenta concava CLOB , ABOK æqualia ; quod ſecundo loco propoſitum fuerat.

PROPO

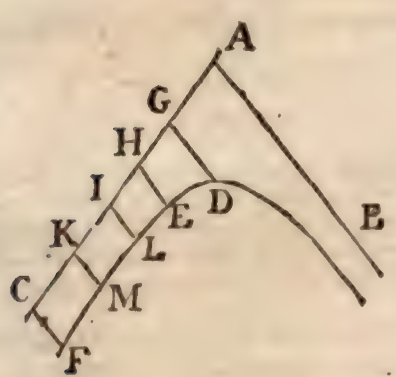
Digitized by Google

PROPOSITIO XLI.

Theorema.

Si in hyperbola ſecetur una aſymptotos proportionaliter, & per ea puncta ducantur lineæ alteri parallelæ; illæ erunt proportionales, & intervalla erunt æqualia. Ergo decreſcentibus lineis Geometricè, intervalla habebunt rationem logarithmorum.

Aſymptotos A C dividatur proportionaliter, hoc eſt ſint lineæ AG, AH, AI, AK, AC in continua proportione; dico ſegmenta concava GHED, HILE, IKLM eſſe æqualia.



Demonſtratio Cum AG, AH, AI, &c. ſint in continua analogia, ergo (*per præcedentem*) erunt ſegmenta concava CM, KL, IE, HD, æqualia.

Atque hæc eſt proprietas mirabilis hyperbolæ à P. à S. Vincentio primùm demonſtrata, & à nonnullis non citato authore propoſita, exhibens logarithmos & numeros ipſis reſpondentes. Parallelæ enim numeros Geometricè creſcentes exhibent, & ſegmenta eorum logarithmos.

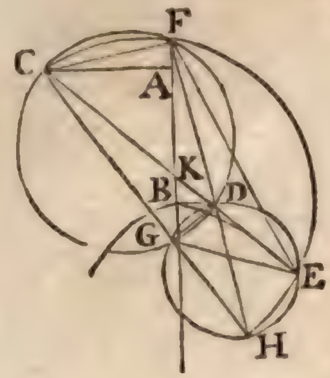
PROPOSITIO XLII.

Theorema.

Lineæ ab umbilicis ad contactum ductæ æquales angulos cum tangente comprehendunt.

Sint hyperbolæ umbilici G & F; hoc eſt ſit AB axis & rectangula AGB, BFA ſint ſingula æqualia quartæ parti figuræ; & recta EDC, hyperbolam tangat in puncto E, dico ſi ducantur ab umbilicis G & F, lineæ F E, G E, angulum GED angulo FED eſſe æqualem. Ordinatim applicentur AC, BD ad tangentem uſque in punctis C & D.

Demonſtratio. (*Per 13. hujus*) rectangulum AC, BD æquale eſt quartæ parti figuræ, ergo & rectangulo A G B, aut BFA: quare ut AC ad AG, ita GB ad BD; & cum anguli in A & B, ſint recti, triangula C A G, BGD, erunt ſimilia, & angulus BDG angulo AGC æqualis, & conſequenter C G D erit rectus: eodem modò oſtendetur rectus CFD; ſi ergo fiat circulus circa diametrum CD, is per puncta F & G tranſibit. Sit EH perpendicularis ad D E, occurrens lineæ FD productæ in H; ducatur item H G, quam contendo unam lineam efficere cum C G; fientque triangula



CFD, DEH, æquiangula, cum anguli CFD, DEH ſint recti, & anguli in puncto D ad verticem æquales; quare ita erit FD ad DC, ut DE ad DH; ſunt item triangula CDF, CAG, ſimilia cum præter angulum rectum in A & F habeant angulos CGA, CDF, eidem arcui inſiſtentes æquales; ſed CAG triangulum eſt jam oſtenſum ſimile triangulo GBD; ſunt igitur triangula CDF, CGA, GBD ſimilia, triangulum H D E, habens angulum E rectum, & HDE æqualem oppoſito CDF, illis adhuc erit ſimile. Angulus B GD eſt complementum anguli CGA ad angulum rectum, cum angulus C G D fuerit oſtenſus rectus; Sunt ergo æquales anguli CGA & B D G; eſt ergo ut FD ad DC, ita BD ad DG: ergo ut B D ad D G, ita eſt ED ad DH, & permutando, ut BD ad DE, ita GD ad DH; item ut GD ad DH, ita F C ad CG; quare CG, GH ſunt una eademque linea: Si ergo circa CH deſcribatur circulus, is tranſibit per puncta E, & F; cum anguli in E & F ſint recti: Pariter circulus deſcriptus circa DH, tranſit per G & E. Jam in majori circulo CFEH, anguli CEF, CHF, eidem inſiſtentes arcui CF, ſunt æquales: in parvo circulo GHED anguli CHD, G E D, eidem inſiſtentes arcui G D, ſunt etiam æquales; ergo anguli G E D, D E F ſunt inter ſe æquales.

COROLLARIUM.

Cum angulus GEB dividatur bifariam, ita erit GK ad KF, ſicut GE ad FE.

PROPOSITIO XLIII.

Theorema.

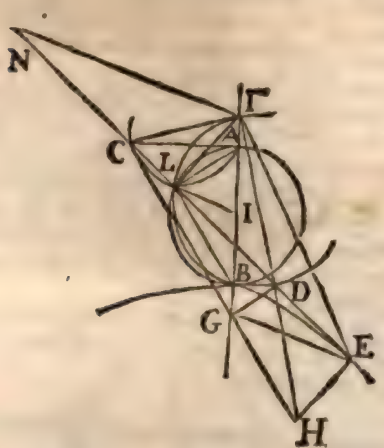
Si ab utroque umbilico, ad idem ſuperficiei hyperbolicæ punctum, duæ ducantur lineæ; quæ uni earum parallela per centrum ducetur ad tangentem uſque, erit æqualis ſemidiametro.

Fiat eadem conſtructio quæ in præcedenti, & per centrum I, ducatur IL, parallela GE; dico IL eſſe æqualem ſemidiametro IA. Ducatur FN parallela G E, erunt anguli alterni G E N, F N E, æquales.

Demonſtr. Habemus ex præcedenti, angulos GEN, FEN eſſe æquales; ergo anguli FNE, FEN ſunt

Digitized by Google

ſunt æquales ; & conſequenter lineæ NF,FE, ſunt quoque æquales : & cum L I, ſint parallelæ N F,



GE,ſintque GI,IF æquales, erunt EL,LN, æquales ; & (*per 7. 1.*) erunt anguli FLN, FLE æquales & recti. Cum igitur anguli CLF, CAF ſint recti, circulus diametro CF deſcriptus tranſit per L, & per A. Pariter cum anguli FLD, FBD, ſint recti, circulus circa lineam FD deſcriptus tranſibit per B & L. Probavimus autem(*in ſuperiori*)angulos FCA, BFD, eſſe æquales eo quod lineæ AF, CA, BD, BF ſint proportionales, cum tam rectangulum ſub extremis quàm ſub mediis æquetur quartæ parti figuræ. Sunt autem anguli FCA, FLA æquales, item BFD, BLD, cum inſiſtant eidem arcui ; ergo anguli FLA,BLD erunt æquales : quare ſi loco prioris ſubſtituas ſecundum, fiet angulus ALB rectus ; & conſequenter ſi centro I, deſcriberetur circulus intervallo I A, aut IB, tranſibit per B ; ſunt igitur LI,IA æquales; quod erat demonſtrandum.

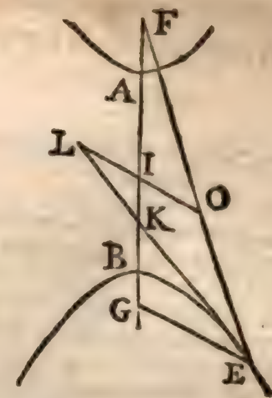
PROPOSITIO XLIV.

Theorema.

In hyperbola ſi ab umbilicis ad idem peripheriæ punctum, duæ inclinentur lineæ, major minorem ſuperabit quantitate tranſverſi axis.

Sit AB axis tranſverſus hyperbolæ, umbilici F & G, ad idem peripheriæ punctum E, ducantur duæ lineæ FE, GE; dico rectam G E ſuperari à lineâ FE,quantitate axis AB. Sit tangens EKL; ducaturque per centrum I, linea L I O, parallela GE.

Demonſtratio. (*Per præcedentem*) anguli KEO & KEG æquales ſunt, item æquales alterni KEG, KLO ; ſunt igitur æquales anguli KLO, OEK ; ergo lineæ OL,OE, ſunt æquales. Pariter (*per 4. 6.*) ita eſt FO ad OE, ſicut FI ad IG, quæ ſunt æquales; ergo FO, OE æquales erunt ; quare FE ipſius OE, aut LO, erit dupla; ſed (*per præcedentem*) LI, æqualis eſt IB ; ergo FE eſt dupla IB, IO ; ſed AB eſt dupla IB, & GE dupla IO, (*per 4. 6.*) Ergo FE eſt æqualis AB, GE. Quod erat demonſtrandum.

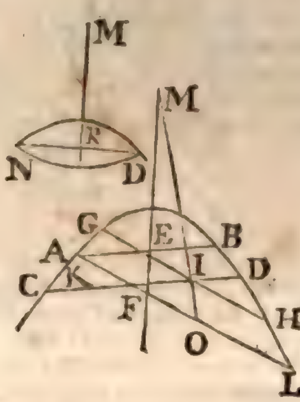


PROPOSITIO XLV.

Problema.

Data hyperbolæ diametrum, centrum, axem reperire.

Proponatur hyperbola, cujus quæritur primò diameter. Ducantur duæ lineæ utcumque parallelæ AB, CD, quæ dividantur bifariam in E & F ; ducatur linea FE, hæc (*per 15.*) dividet omnes parallelas AB bifariam ; ergo diameter erit.



2. Quæritur centrum. Ducantur aliæ duæ parallelæ GH, KL, quæ pariter dividantur bifariam in punctis I & O, ducatur diameter OI, hæc ſecabit priorem diametrum in puncto M : clarum eſt (*per def.*) punctum M eſſe centrum.

3. Ducendus ſit axis ex centro M. deſcribatur arcus ſecans hyperbolam in duobus punctis N & D ; ducat ND, dividaturque bifariam in R ; linea MR erit axis; incidit enim ut patet perpendiculariter in applicatam ND.

PROPOSITIO XLVI.

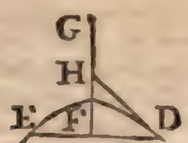
Problema.

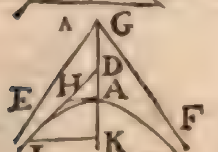
Ex dato puncto lineam ducere quæ hyperbolam tangat.

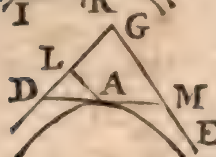
Sit datum punctum D fig.1. in peripheria hyperbolæ. Ducatur linea DE utcumque; quâ diviſâ bifariam in A, inventoque (*per præcedentem*) centro G, ducatur diameter GA; tum quadrato FG, æquale fiat rectangulum AGH; dico lineam eſſe tangentem.

Demonſtratio. Oſtendimus (*in* 9.) ſi ducatur tangens HD, ſemidiametrum FG eſſe mediam proportionalem inter AG, HG.

Secundò. Si punctum per quod ducenda eſt illa tangens, ſit in aliqua diametro, inter verticem ſcilicet F, & centrum G, ut in H; fiat quadrato FG æquale rectangulum HGA; ad diametrum per A applicetur EAD; erit pariter HD, tangens.



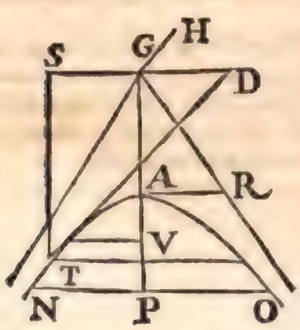




Sit rurſus datum punctum D fig.2. intra aſymptotos GE, GF. Ducatur diameter GDAK; fiatque ut GD ad DA, ita GA ad AK; & per punctum A ducatur tangens AH, cui fiat parallela IK. Dico lineam DI eſſe tangentem.

Sit datum punctum D in unâ aſymptoto. Dividatur DG bifariam in L; ducaturque LA, parallela GE; dico lineam DAM eſſe tangentem cum dividatur bifariam in A.

Denique punctum datum ſit in angulo qui



deinceps eſt. Inveniatur centrum G; ducaturque DGS; ducaturque item NO, diviſâque bifariam in P, ducatur diameter GP, ſecans ſectionem in puncto A; ducatur AR, parallela NO, & quadrato AR æquale fiat rectangulum DGS; ducatur ST, parallela GP & TV, parallela AR; dico lineam DT eſſe tangentem.

Demonſtratio. Clarum eſt GP eſſe diametrum, NO applicatam, AR item eſſe tangentem; & (*per* 18.) quadratum AR æquale erit quadrati figuræ, ſeu quartæ parti rectanguli ſub parametro comprehenſi, huic autem quadrato AR, æquale fecimus rectangulum DGS, ſeu DG, TV: ergo (*per* 14.) linea DT, hyperbolam tanget in puncto T.

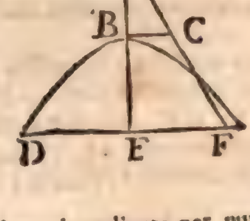
Si punctum datum eſſet in angulo oppoſito ad verticem, ei qui continet hyperbolam, impoſſibile erit problema.

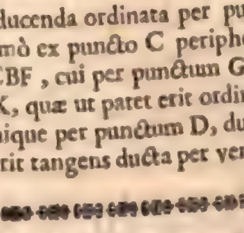
PROPOSITIO XLVII.

Problema.

In hyperbola ad datam diametrum ordinatam applicare ex dato puncto; & tangentem per verticem ducere.

Sit in hyperbola data diameter AB, ſitque ducenda ordinatim applicata per punctum C, in peripheria. Ducatur CDE, per verticem D; fiantque CD, DE, æquales & ducatur EF diametro AB parallela, clarum eſt ita eſſe CD ad DE, ſicut CB ad BF, & conſequenter CF eſſe diviſam bifariam & ordinatim applicatam.





2. Sit ducenda ordinata per punctum G diametri. Primò ex puncto C peripheriæ, ducatur ordinata CBF, cui per punctum G, duces parallelam HGK, quæ ut patet erit ordinata.

3. Denique per punctum D, ducta LD, parallela HK, erit tangens ducta per verticem.

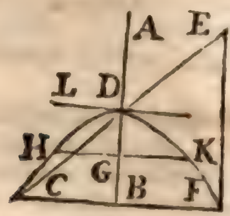
PROPOSITIO XLVIII.

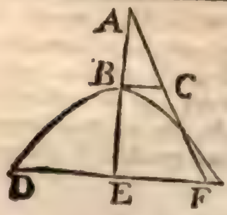
Problema.

Datâ hyperbolæ diametro parametrum invenire.

Sit hyperbolæ quæcumque diameter AB, tum (*per præcedentem*) ducatur per punctum B, tangens

gens BC, & applicata DE: fiat item quadrato DE æquale rectangulum BEF; ducatur FA ſe-





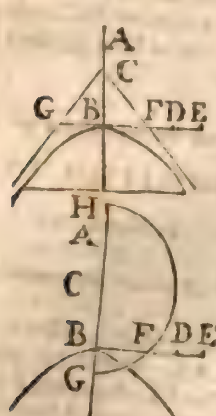
cans tangentem BC in puncto C; dico lineam BC eſſe diametri contiguam parametrum, ut conſtat (*ex prima.*)

PROPOSITIO XLIX.

Problema.

Data hyperbola aſymptotos reperire.

Inveniatur datæ hyperbolæ quæcumque diameter AB, & centrum C, & per præcedentem inveniatur BD; tum inter AB, BD ſit media proportionalis BE, quæ dividatur biſariam in F: fiat item BG æqualis BF. Ducantur ex centro C, lineæ CG, CF. Dico CG, CF eſſe aſymptotos.



Demonſtratio. Quadratum BG, aut BF, eſt quarta pars quadrati BE, cum BE diviſâ ſit biſariam in F, & cum BE, ſit media proportionalis inter diametrum AB & parametrum BD; ergo ejus quadratum æquale eſt figuræ, ſeu rectangulo comprehenſo ſub AB, DB; Ergo quadratum BF æquale eſt quartæ parti figuræ & erit CF, aſymptotos, ſicut & CG.

PROPOSITIO L.

Problema.

Hyperbolæ umbilicos reperire.

Proponantur hyperbolæ aſſignandi umbilici. Quærantur per præcedentes, axis hyperbolæ; qui ſit AB, & parameter BD, ductâ ſcilicet tangente perpendiculari BD, ſit BE media proportionalis inter AB, BD, quæ dividatur biſariam in F; tum ex C, ut centro, intervallô CF, fiat ſemicirculus GFH; hic dabit umbilicos H, & G.

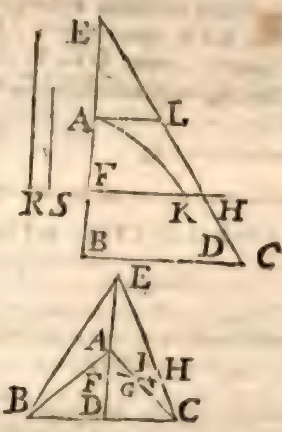
Demonſtratio. Oſtendam ut in præcedenti quadratum ex BF, æquale eſſe quartæ parti figuræ, ſed rectangulum HBG, ſeu AGB, æquale eſt quadrato BF, ut patet: eſt enim BF media proportionalis inter HB & BG, ſeu AG, GB; ergo puncta G & H, ſecundum definitionem, ſunt umbilici.

PROPOSITIO LI.

Problema.

Circa datam diametrum, & applicatam, hyperbolam cujuſcumque ſpeciei deſcribere.

Sit futuræ hyperbolæ diameter AB, & applicata BD: ſit etiam ratio diametri tranſverſæ ad contiguam parametrum, eadem quæ lineæ R ad S. Primò quadrato BD æquale fiat rectangulum ABC, hoc eſt ſit BD, media inter AB, BC; fiat-



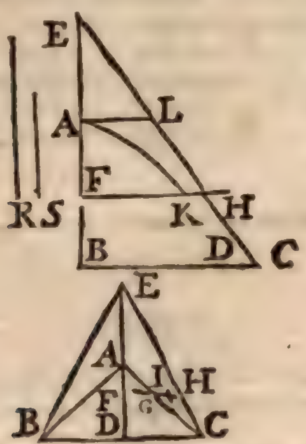
que ut S ad R, ita BC ad BE, juxtà EC, ducantur AL per verticem, & FH utcumque parallelæ BD; ſit FK media proportionalis inter AF, FH, punctum K, pertinebit ad hyperbolam, cujus vertex A, tranſverſa diameter AE, parameter AL. Atque ita habebis quotcunque volueris puncta, quæ lineâ curva conjunges.

PROPOSITIO LII.

Problema.

Circa triangulum hyperbolam deſcribere.

Sit datum quodcunque triangulum ABC; baſis BC, bifariam dividatur in puncto D, ducatur DA producenda in E, quantum libuerit; ducatur EC; ducatur quæcunque FG, parallela BC, ſitque FI media inter FG, FH, hoc eſt ſit quadratum FI, æquale rectangulo GFH; dico puncta B, A, I, C, in eadem eſſe hyperbola.



Demonſtr. Ita eſt (*per* 4.6.) DC ad FH, ſicut DE ad FE; & ut DC ad FG, ita eſt AD, ad AF: ratio autem quadrati DC, ad rectangulum GFH, componitur ex ratione DC ad FH, & ratione DC ad FG, ſeu DE ad FE & DA ad AF; quæ duæ componunt rationem rectanguli EDA ad rectangulum EFA: quare (*per* 1.) ſi AE ſit tranſverſa diameter, erunt DC, FI ordinatim applicatæ. Sunt igitur puncta B,A,I,C, in eadem hyperbola.

Demonſtrationi ſervit 1. fig.

PROPOSITIO LIII.

Problema.

Dato utroque umbilico & axe tranſverſo, hyperbolam deſcribere.

Sint dati umbilici A, & B vertex C, abſcindatur CE æqualis CB; tum intervallo AE, deſcribatur arcus EFG, ducatur quæcumque recta AFH ſecans arcum EG, in puncto F, jungaturque BF quæ dividatur bifariam in I, ductâ perpendiculari IH, quæ occurrat lineæ AF, in puncto H; dico punctum H pertinere, ad hyperbolam, cujus ſint umbilici A, & B, vertex C.

Demonſtr. Patet (*per* 4.1.) BH, FH, eſſe æquales; AH autem ſuperat FH, lineâ AF, ſeu diametro AE; ergo AH ſuperat BH, diametro AE, ſeu DC; ergo lineæ AH, BH ſunt ad idem punctum peripheriæ ab umbilicis A, & B, ductæ, (*per* 43.)

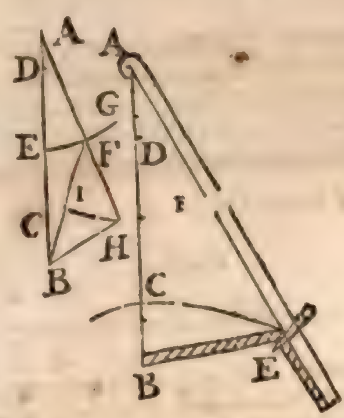
Demonſtrationi ſervit ſequentis 1. fig.

PROPOSITIO LIV.

Problema.

Alia deſcriptio hyperbolæ.

Proponatur deſcribenda hyperbola cujus umbilici A & B, vertex D, diameter DC. Habeatur regula volubilis circa umbilicum A, in qua notetur AF æqualis diametro tranſverſæ DC: aſſumatur funiculus BEG, æqualis lineæ FG, illiuſque unum extremum B annectatur umbilico B, aliud verô puncto extremo regulæ G; habeatur autem ſtylus, qui ita applicet funem ipſi regulæ, ſut cum illa congruat ſecundum ſegmentum EG; dico punctum E ad hyperbolam pertinere.



Demonſtr. Cùm funiculus æqualis ſupponatur lineæ GF, & funiculus EG ſit æqualis lineæ EG, reliquum BE æquabitur reſiquo EF, quare tota AE, ſuperabit lineam BE, lineâ AF, quam æqualem fecimus diametro DC; ergo (*per* 43.) lineæ BE AE, ſunt ad idem punctum E, ſuperficiei inclinatæ.

PROPOSITIO LV.

Problema.

Datis umbilicis & vertice hyperbolam deſcribere.

Sint dati umbilici A & B, vertex C, aſſumatur CD æqualis AC; ideoque erit reliqua BD, æqualis diametro EC. Ex centro B fiat quicunque arcus AF, & ex centro A intervallo FD fiat arcus G ſecans arcum AG in puncto G; dico punctum G, pertinere ad hyperbolam. Pariter ſi ex B, ut centro, intervallo BH, fiat arcus HI; & ex A intervallo HD fiat arcus ſecans arcum HI, in I; dico punctum I pertinere ad hyperbolam cujus vertex C, & umbilici A & B.

Demonſtr. Lineæ AE, BF ſunt æquales, item AG, FD, ex conſtitutione; ſed BF ſuperat FD, diametro BD; ergo BG, ſuperat AG diametro, ergo, (*per* 43.) AG, BG, ſunt inclinatæ, ad idem punctum peripheriæ.

Hanc deſcriptionem facilè in numeris abſolves. Supponatur enim BC eſſe partium 100. & AC, 20,

Digitized by Google

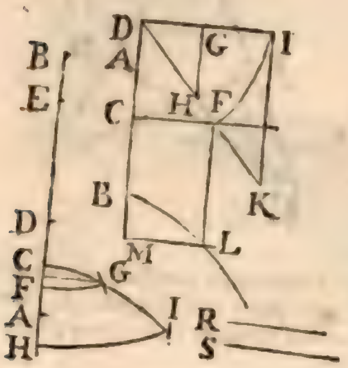
10, eritque differentia inter utramque ſeu BD, partium 80. Supponatur AG, 24. partium, debebit BG eam ſuperare diametro, ſeu partibus 80. Erit ergo 104. Si fuerit AG, 25. Erit BG, 105. & ita conſequenter habebis omnes inclinatas, ex punctis B, & A, ſibi reſpondentes, quibus facilè totam deſcriptionem abſolves.

PROPOSITIO LVI.

Problema.

Dato axe & ratione illius ad parametrum deſcribere hyperbolam.

Sit data diameter AB, quæ bifariam dividatur in puncto C; ſitque ratio diametri ad parametrum ut R, ad S. Fiat ut R ad S, ita BC, quadratum ad quadratum CD, tum productis perpendicularibus DG, CH ſit DG, æqualis DC; & GH, æqualis AC, aut BC; tum producatur DH: aſſumatur quodcunque punctum I, per quod ducatur perpendicularis IK, & ex centro D, fiat arcus IF; per punctum F, ducatur perpendicularis FL, æqualis IK; dico punctum L eſſe in hyperbolâ, cujus vertex B, diameter AB, ratio diametri ad parametrum ut R, ad S. Ducatur perpendicularis LM.



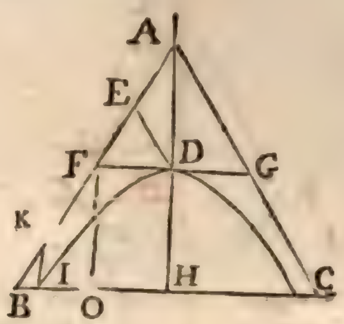
Demonſtr. Ita eſt quadratum DF ad quadratum FL, ſicut quadratum DI, ad quadratum IK, aut DG ad GH, ſeu DC ad BC, hoc eſt ut S ad R: eſt autem DF; æquale quadratis DC, CF; & FL quadratum quadrato CM, hoc eſt rectangulo AMB plus quadrato BD (*per* 7. 2.) Cùm ergo ita ſit totum quadratum DF ad rectangulum AMB, plus quadrato BC, ut ablatum quadratum DC, ad ablatum quadratum BC, erit reliquum quadratum CF ſeu ML, ad reliquum rectangulum AMB, ut totum ad totum, aut ut ablatum ad ablatum, nempe ut quadratum DC ad BC, nempe ut S ad R, ſeu ut parameter ad diametrum: ergo (*per coroll.* 1. 1.) punctum L, eſt in hyperbolâ; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LVII.

Problema.

Datis hyperbolæ aſymptotis, & puncto pro vertice, hyperbolam perficere.

Sint datæ aſymptoti AB, AC, & punctum D, pro vertice ducatur AD pro diametro; tum per D ducatur DE, parallela AC, ſitque EF, æqualis AE, jungatur FDG, eritque FDG, bifariam diviſa in D; cùm enim ED, AC, ſint parallelæ; erit ut FE ad EA, ita FD ad DG; ſed primæ factæ ſunt æquales, ergo & ſecundæ. Ducantur quæcunque parallelæ BC, quæ pariter erunt diviſæ bifariam in H; ex ſingulis quadratis HB, auferantur quadrata FD, ita ut relinquantur quadrata HI: Erit ut in ſuperiori punctum I, in hyperbola.



Quod ſi volumus ut punctum datum non ſit vertex, ſed inveniatur in peripheria hyperbolæ. Supponatur punctum datum eſſe I. Dividatur angulus BAC bifariam lineâ ADH, & ex I, ducatur ad AH, perpendicularis IH: ex quadrato BH, ut in præcedente auferatur quadratum HI, & ſupponatur reſtare quadratum HO: ducatur per O linea OF parallela AH, ſecans AB in F, & per F agatur, FG parallela BC; punctum D, erit vertex; cætera ut priùs perficientur.

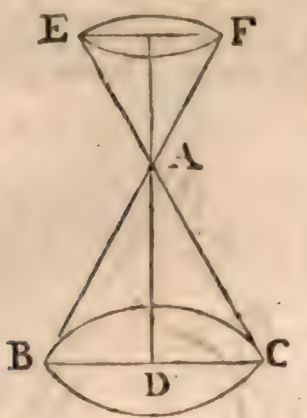
LIBER QVARTVS

De Conicis Sectionibus.

QVAS ſeorſim, & abſolutè conſideravimus figuras nempe Parobolam, Ellypſin, & hyperbolam, in ipſo cono intuebimur; oſtendemuſque facile eaſdem eſſe quas ſuperioribus libris deſcripſimus, eaſdemque proprietates habere. Quia autem Ellypſis & circulus non tantum ex coni ſectione generantur, ſed in cylindro locum etiam habent, de ſectione cylindri aliquid dicemus in ſequenti.

DEFINITIONES.

1. Conica ſuperficies ea eſt, quæ deſcribitur à linea percurrente integram circuli circumferentiam, circa punctum extra planum circuli aſſumptum.



Ut ſi linea AB ex puncto A immoto, & extra planum circuli BC poſito ducta, percurrat totam circuli BC circumferentiam; duæ generabuntur coni ſuperficies ABC, EAF, concurrentes in puncto A.

2. Vertex coni aut ſuperficiei conicæ, eſt punctum illud immotum A.

3. Axis coni, aut ſuperficiei conicæ, eſt recta linea, à vertice coni ad centrum circuli ſupradicti ducta, ut AD.

4. Conus eſt figura ſolida, conicâ ſuperficie, & circulô comprehenſa, ut ABC.

5. Vertex coni idem qui ſuperficiei conicæ, ſicut & axis.

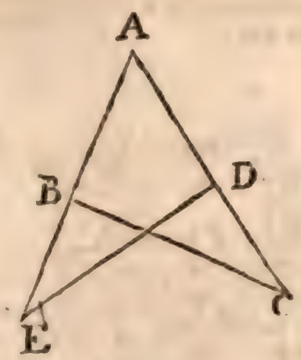
6. Baſis coni, aut ſuperficiei conicæ, eſt circulus cujus circumferentiam percurrit linea, conicam ſuperficiem producens.

7. Conus rectus cujus axis ad planum ſuæ baſis rectus eſt. *ut ſi linea AD ad planum baſis BC fuerit recta.*

8. Conus ſcalenus cujus axis ad planum ſuæ baſis obliquus eſt.

9. Subcontraria poſitio duorum triangulorum, eſt duorum triangulorum ſimilium & eundem angulum verticalem habentium, diſpoſitio, quâ baſes nec congruentes, nec parallelas habent.

Ut ſi triangula ſimilia ABC, ADE communem angulum A habentia, baſes BC, DE, parallelas non habeant, ſed angulus ABC angulo ADE ſit æqualis.



10. Subcontraria coni ſectio ea eſt quâ conus ita ſecatur, planis ad triangulum per axem rectis, ut fiant duo triangula ſubcontrariè poſita.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Recta linea à vertice coni ad quodcumque ſuperficiei conicæ punctum ducta, in ipſa eſt ſuperficie.

A vertice coni A fig. 1. ad punctum quodcumque B, ſuperficiei conicæ ducatur recta AB, dico hanc lineam totam eſſe in ſuperficie conica.

Demonſtratio. Cùm ſuperficies conica, producta ſit motu rectæ per punctum A ſemper tranſeuntis; hæc linea motu ſuo aliquando per punctum B tranſibit, alioquin eſſet aliqua pars ſuperficiei conicæ quæ à tali linea non deſcriberetur: ergo linea recta à puncto A ad B ducta tota eſt in ſuperficie conica; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

Si à vertice coni, ad punctum intra ſuperficiem

ſiciem Conicam poſitum ducatur linea recta; hæc tota intra ſuperficiem Conicam cadet.

COROLLARIUM II.

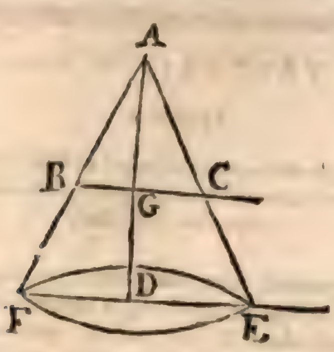
Si à vertice Coni ad aliquod punctum extra ſuperficiem Conicam aſſumptum, ducatur recta linea, hæc tota extra ſuperficiem Conicam erit.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si linea duo quælibet puncta ſuperficiei Conicæ conjungens, per verticem non tranſeat; intra Conum erit; & producta cadet extra.

Superficiei Conicæ duo quælibet puncta B & C conjungat linea recta BC, quæ per verticem A non tranſeat; dico totam lineam AC, intra Conum cadere, à puncto A per puncta B & C ducantur duæ rectæ AB, AC, quæ productæ baſin attingent in F & E; linea EF (*per* 2. 3.) tota intra circulum erit, fietque triangulum AFE.



Demonſtr. Trianguli AFE latera AF, AE ſunt (*per* 1.) in ſuperficie Conica, ergo triangulum AFE eſt totum intra ſuperficiem Conicam; ergo linea BC, quæ lineis AF, AE, clauditur; erit intra conum, & producta ex cono egredietur.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si Conus per verticem plano ſecetur; communis plani, & Coni ſectio erit triangulum.

Conus cujus vertex A, baſis EF, ſecetur plano per verticem A; dico communem plani ſecantis, & coni ſectionem eſſe triangulum. Si enim FE communis ſectio plani ſecantis, & baſis, hæc (*per* 3.11.) erit linea: ducantur AF, AE, quæ erunt in ſuperficie conica (*per* 1.) & in eodem plano, in quo & linea EF (*per* 1.11.*Eucl.*) ergo communis ſectio plani ſecantis, & coni erit triangulum AFE.

COROLLARIUM.

Si conus plano per axem ſecetur communis ſectio erit triangulum.

PROPOSITIO IV.

Si in triangulo per axem omnes ordinatim applicatæ ad axem ſeu parallelæ baſi fuerint, biſariam ab eo dividuntur, ſuntque inter ſe ſicut diſtantiæ à vertice.

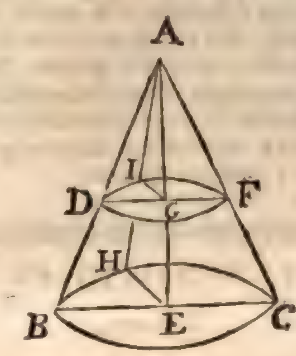
Sit AFE communis ſectio coni, & plani per axem ducti; eritque (*per* 3.) AFE triangulum; dico omnes parallelas lineæ EF, ut BGC biſariàm dividi ab axe; nam ita eſt (*per* 4.6.) AD ad DE; ſicut AG ad GC; item AD ad DF, ſicut AG ad BG, & cum FE ſit circulus ſunt FD & DE æquales; ergo & BG, GC æquales erunt, eritque ut EF ad BC; ita AD ad AG, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si conus plano baſi parallelo ſecetur; communis ſectio, erit circulus, cujus centrum in axe.

Conus ABC ſecetur plano DF, parallelo baſi BC; dico DIF communem plani ſecantis, & coni ſectionem, eſſe circulum, cujus centrum ſit in axe AE.



Sit enim conus ſectus per axem plano, ſeu triangulo ABC, eruntque communes ſectiones planorum parallelorum, & trianguli ABC, BC, DF, parallelæ (*per* 16. 11.) ergo (*per* 3.6.) cum BC, DF ſint parallelæ, ita erit AG ad AE, ſicut DG ad BE, & ſicut GF ad EC; & poſito quocumque alio plano AEH per axem; ita erit AG ad AE; ſicut GI ad HE; & cum tres conſequentes BE, EC, HE, (*ex defin.*) circuli æquales ſint, tres antecedentes GD, GI, GF æquales erunt; ergo DIF eſt circulus cujus centrum eſt in axe AE.

COROLLARIUM

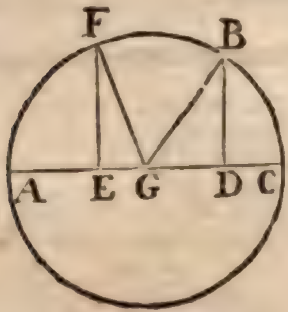
Figura DAF eſt etiam conus.

LEMMA

LEMMA

Si in figura curvilinea perpendiculares ad aliquam, eam ita dividant; ut quadrata perpendicularium, æqualia ſint rectangulis ſegmentorum, circulus erit hæc figura.

Sit figura curvilinea in qua ducantur DB, EF perpendiculares ad AC, ſitque quadratum DB æquale rectangulo ADC, aut quadratum EF æquale rectangulo AEC, dico figuram ABC eſſe circulum, & AC ejus diametrum. Dividatur AC bifariam in G, ducanturque GB, & GF.



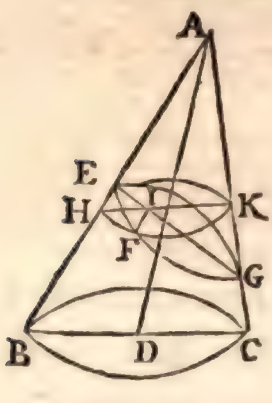
Demonſtr. Cùm AC ſit diviſa bifariam in G, & non bifariam in D, erit (*per 5.2. Eucl.*) rectangulum ADC plus quadrato GD æquale quadrato GC; ſed rectangulo ADC æquale ſupponitur quadratum BD, ergo quadratum DB cum quadrato GD, æquale erit quadrato GC; ſed (*per 47.1.*) quadrato DB & quadrato GD æquale eſt quadratum GB, ergo quadrata GB, GC, AG ſunt æqualia & conſequenter lineæ: ergo ABC eſt circulus; quod erat demonſtr.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Coni ſcaleni ſectio ſubcontraria circulum exhibet.

Sit conus ſcalenus ABC, ſitque ABC trian-



guli per axem planum, ad baſin coni rectum; ſecetur item conus plano EFG recto ad planum ABC, ſitque communis planorum ſectio linea EG & triangulum AEG, triangulo ABC ſimile, ſed ſubcontrarie poſitum; dico EFG communem coni, & plani ſecantis ſectionem circulum eſſe. Ducatur enim in eo plano ſecante, recta IF perpendicularis ad EG, quæ (*per 3. def.11.*) erit recta ad planum ABC, ducatur per IF planum HFK parallelum baſi, cujus conſequenter communis ſectio HIK erit parallela baſi BC, & (*per 5.hujus*) erit HFK circulus.

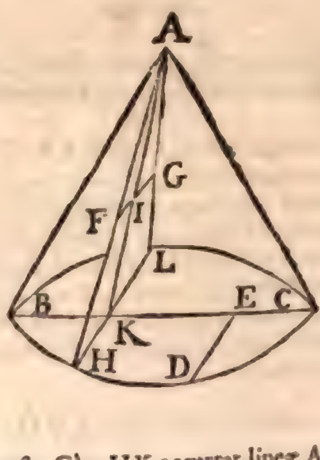
Demonſtr. Linea FI communis ſectio utriuſque plani recta eſt ad planum ABC, ergo erit perpendicularis ad HK, & media proportionalis inter HI, & IK, ſeu quadratum FI æquale eſt rectangulo HIK; ſed rectangulum EIG æquale eſt rectangulo HIK ſunt enim triangula EIH, KIG, ſimilia cum anguli ad verticem in puncto I ſint æquales, & angulus EHI æqualis angulo B, ſupponatur æqualis angulo EGK, ergo (*per 5.6. Eucl.*) ita eſt EI ad HI; ſicut IK ad IG. Ergo (*per 13.6.*) rectangulum EIG ſub extremis, æquale eſt rectangulo HIK ſub mediis; ergo quadratum IF æquale eſt rectangulo EIG, & (*per lemma ſuperius*) figura EFG circulus eſt; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Omnis parallela perpendiculari ad baſin trianguli per axem plano eius occurrit, ab eoque bifariam dividitur.

Proponatur conus ABC ſectus per axem plano, ſeu triangulo ABC, cujus baſis BC ad quam perpendicularis ſit DE; tum ex quolibet ſuperficiei conicæ puncto F ducatur FG parallela DE; dico lineam FG occurrere plano ABC, trianguli per axem, & productam ad ſuperficiem uſque conicam, ab eo plano dividi bifariam. Per punctum F ex A ducatur recta AFH ſecans baſin in puncto H (*per 1.*) ducaturque HKL perpendicularis ad BC & conſequenter parallela lineis DE, FG, jungantur AL & AK.



Demonſtr. Cùm HK occurrat lineæ AK, ipſi parallela FG, in eodem plano exiſtens, occurret eidem in puncto ſcilicet I, & cum AK ſit communis ſectio trianguli per axem, linea FI

occurret

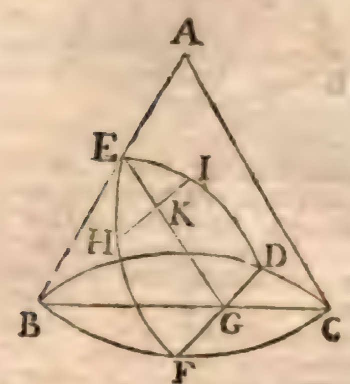
occurret plano trianguli per axem quod eſt primum. Deinde cum ita ſit AK ad AI; ut HK ad FI & ut KL ad IG, ſintque HK, & KL æquales: erunt FI, IG æquales; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Si Conus plano per axem ſecetur, ſecetur & alio plano; cujus communis ſectio cum baſe Coni perpendicularis ſit ad baſin trianguli per axem, communis ſectio utriuſque plani ſecantis, dividet biſariam omnes lineas in ſecundo plano ductas parallelas huic perpendiculari. In Cono quidem recto perpendiculariter, in Cono ſcaleno non ſemper.

Conus ABC ſecetur per axem triangulo ABC, cujus baſis BC; ſecetur idem Conus alio plano DEF, ſitque DF communis ejus ſectio cum baſe Coni, perpendicularis ad BC baſin trianguli per axem, ſit item communis ſectio hujus ſecundi plani, & ſuperficiei Conicæ curva DEF in qua ducatur HI parallela FD; dico HI biſariam dividi à linea EG communi ſectione utriuſque plani.



Demonſtr. (*Per 7.*) linea HI parallela perpendiculari DF, occurrit plano trianguli per axem, & ab eo biſariam dividitur; non occurrit autem huic plano niſi in communi ſectione, utriuſque plani, nempe EG; ergo communis ſectio EG dividit biſariam lineam HI, & quamcumque illi parallelam dicatur EG diameter ſectionis.

Secundò ſi triangulum per axem ſit rectum ad baſin Coni erit FG, quæ ſupponitur perpendicularis ad BC, recta ad planum trianguli ABC, (*cor.4. def.11.*) ideoque angulus FGE rectus erit; & cum HI ſit parallela DF; angulus HKG rectus erit, quod in Conis rectis ſemper verum eſt, eò quòd cum axis rectus ſit ad baſin coni, omne planum per axem ad eandem baſin rectum erit, in ſcalenis id tantum aliquandò accidit.

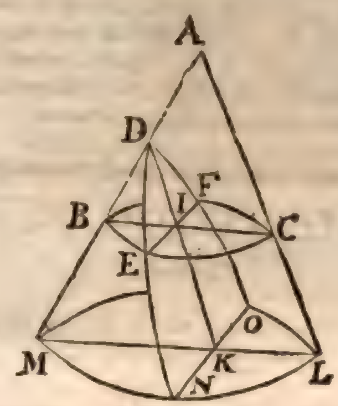
Notandum poſſe planum ſectionis, ſecare lineam BC extra conum, in quo caſu non deſinit demonſtratio totam ſuam vim obtinere.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si ſectionis diameter alterum latus trianguli per axem, infra verticem non ſecet; in infinitum produci poterit ſectio.

Suppono dari Coni ſectionem obſervatis legibus ſupra poſitis, quas deinceps ſemper obſervari ſupponemus, nempe ut Conus ABC plano ABC per axem ſecetur, item alio plano EDF cujus communis ſectio cum baſe Coni ſit EF perpendicularis ad BC baſin trianguli per axem. Volo autem ut ſectionis diameter DK, non attingat infra verticem rectam AL, latus ſcilicet trianguli per axem; ſed aut illi ſit parallela, aut attingat AL productam ſupra verticem A. Dico ſectionem EDF augeri poſſe quantum libuerit; ſit enim linea DK cujuſcumque longitudinis, & intelligantur produci tam planum ſectionis EDF, quàm Conus; & per punctum K ducatur linea NKO parallela EF & ML parallela BC.



Demonſtr. Planum per lineas ML, NO ductum parallelum eſt plano BEC, & (*per 5. hujus*) MNLO circulus erit, eruntque N & O in ſuperficie Conica, & in plano DEF: ergo in communi utriuſque ſectione, quæ conſequenter producta erit; quod intendebatur.

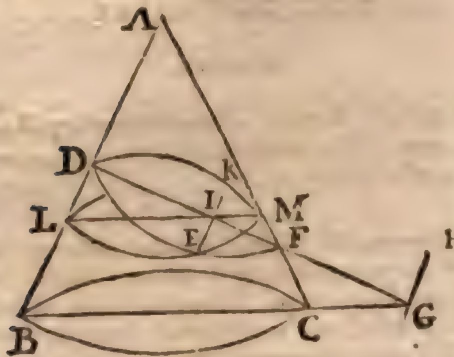
PROPOSITIO X.

Theorema.

Si ſectionis diameter cum utroque latere trianguli per axem conveniat; nec ſit parallela baſi, aut ſubcontrariè poſita; ſectio circulus non erit.

Ponantur omnia ut priùs, ſed DF diameter

ſectionis ſecet utrumque latus trianguli per axem, non tamen ſit aut parallela baſi BC, aut ſubcontrariè poſita: dico ſectionem D E F non eſſe circulum.



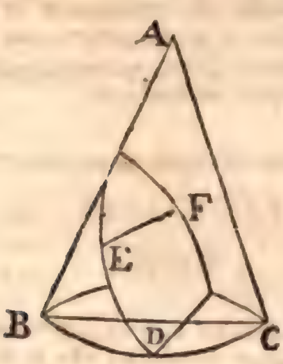
Demonſtr. Si D E F eſſet circulus, D F eſſet ſubcontrariè poſita, contra ſuppoſitionem, quod ita demonſtro. Sit E I parallela G H, quæ perpendicularis ſupponitur ad BC, ducaturque LIM parallela B C, eritque E I perpendicularis ad LIM parallela BC, eritque E I perpendicularis ad LIM, & planum per IE & LIM ductum parallelum erit baſi B C, & (*per 5. hujus*) circulus. Igitur I E media eſt proportionalis inter LI, IM; ſed dicitur etiam DEF circulus eſſe; ergo & I E eſt media proportionalis inter D I, I F; ſunt igitur æqualia rectangula DIF, LIM, ut pote æqualia eidem quadrato IE. Quare (*per 14. 6.*) ita erit L I ad DI; ſic ut I Fad I M; & cum anguli ad verticem in puncto I ſint æquales, erunt triangula LID, FIM æquiangula, & conſequenter ſectio ſubcontraria; contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Recta conjungens duo puncta ſectionis intra ſectionem & Conum cadit.

Sit ſectio DEF, puncta E & F, quæ conjungantur lineâ rectâ EF; dico lineam EF totam & intra Conum, & intra ſectionem eſſe.



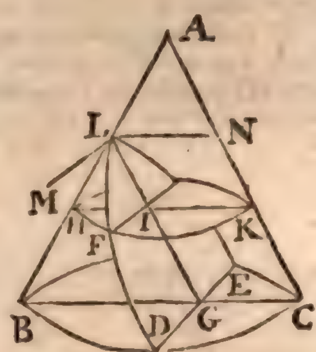
Demonſtr. Linea E F non tranſit per verticem: ergo (*per 2.*) eſt intra Conum, & cum D E F ſit in ſuperficie Conica, linea EF intra ſectionem erit.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Sectio cujus diameter parallela eſt lateri trianguli per axem, parabola eſt.

Supponitur ſectio facta ſervatis conditionibus conſuetis, nempe ut Conus ſecetur triangulo per axem, ſecetur & alio plano DLE ita ut DE communis ejus ſectio cum baſi Coni ſit perpendicularis ad BC, & diameter LG, ſit parallela lineæ AC lateri trianguli per axem; dico ſectionem DLE eſſe parabolam. Sit enim FI parallela DE, hæc ſecabitur bifariam à diametro LG in puncto I (*per 8.*) ducatur item per punctum I linea H K parallela B C.



Demonſtr. Cùm HK, BC; FI, DE ſint parallelæ, planum per H K, IF ductum, parallelum erit plano per BC, DE ducto, hoc eſt baſi Coni: ergo (*per 5.*) HFK circulus erit, & cum F I ſit perpendicularis ad H K, ſicut D E parallela ad BC; F I erit media proportionalis inter HI, IK; ſicut G D inter BG, GC; quare quadratum F I æquale erit rectang. HIK, & quadratum GD rectangulo BGC. Rectangulum autem BGC ad rectangulum H I K, cum habeant latera GC, IK æqualia ob parallelas LG, AC; ſe habet ut BG, ad HI; ſeu (*per 4. 6.*) ut LG ad L I, ergo ita eſt quadratum DG, ad quadratum F I; ut ſagitta LG ad ſagittam L I; ergo (*per definitionem parabolæ*) ſectio DLE erit parabola; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

Ea omnia quæ de parabola primo libro demonſtravimus huic ſectioni parallelæ conveniunt.

COROLLARIUM II.

Si uni ſagittæ, & ordinatæ quæratur tertia proportionalis L M hæc erit parameter, ſeu latus rectum, ut ſi F I, ſit media proportionalis inter ſagittam L I, & lineam M L, erit ML latus rectum; nempe quadratum F I, ut patet æquale erit rectangulo I LM.

Addo quod aliarum applicatarum quadrata æqualia erunt, rectangulo ſub ſagitta, & linea ML, ut quadratum DG æquale eſt rectangulo GLM,

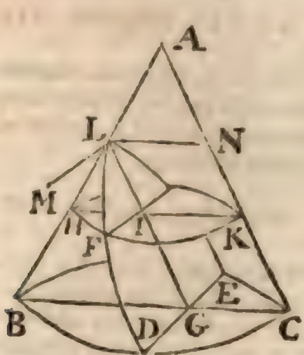
GLM, eſt enim quadratum DG, ad quadratum FI, ut GL ad IL & ſumptâ eâdem altitudine ML, ut rectangulum GLM ad rectangulum ILM, ſed quadratum FI æquale eſt rectangulo ILM: ergo quadratum DG rectangulo GLM æquale erit.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

In parabola parameter ſe habet ad interceptam Coni, & ſectionis verticibus; ut quadratum baſis trianguli per axem, ad rectangulum ſub ejuſdem cruribus.

Sit Parabola DLE, cujus parameter LM dico ita eſſe LM ad LA, ut quadratum BC, ad rectangulum BAC. Ducatur LN parallela BC.



Demonſtr. Primò conſtat LG, AC eſſe parallelas, ſicut & LN, GC, eſt ergo parallelogrammum, GN & lineæ oppoſitæ LN, GC ſunt æquales. Certum eſt item (*per* 12.) quadratum DG æquale eſſe rectangulo MLG. Sed rectangulum MLG ad quadratum LG ſe habet ut ML ad LG, (*per* 6.1.) cum habeant eamdem altitudinem LG, ſeu ſumptâ eâdem altitudine LA ut rectangulum MLA ad rectangulum GLA, ita erit rectangulum MLG ſeu quadratum DG, aut etiam rectangulum BGC ad quadratum LG, & permutando ut rectangulum BGC ad rectangulum MLA, ita quadratum LG, ad rectangulum GLA, eſt autem ut quadratum LG ad rectang. GLA ita LG ad LA & ſumpta eadem altitudine GL, ut rect. GLA ad quadratum LG: ergo ita erit rectang. BGC ad rectang. MLA, ut rectang. GLA ad quadratum LA; & permutando ita erit rect. BGC ad rect. GLA, ut rect. MLA, ad quadratum LA; ſeu ut LM ad LA; ſed ratio rectanguli BGC ad rectangulum GLA componitur ex ratione BG ad GL, ſeu BC ad CA; quæ eadem eſt: & ex ratione GC ſeu LN ad LA; ſeu BC, BA. Ratio autem ſic compoſita eſt eadem ac quadrati BC ad rectangulum BAC: ergo ut ML ad LA; ita quadratum BC ad rectangulum BAC; quod erat demonſtrandum. Breviùs.

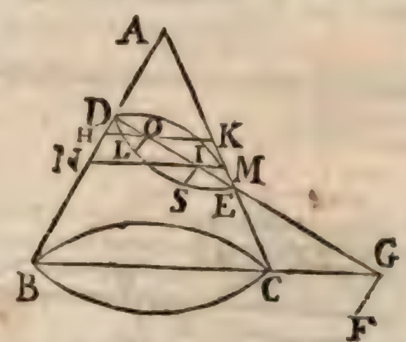
Demonſtr. Quadratum BC eſt ad rectangulum BAC, in ratione compoſitâ, 1. ratione BC ad BA, ſeu CG ad AL; 2. Ratione BC ad CA, ſeu GB ad LG; hoc eſt ut rectangulum CGB, vel quadratum GD, vel rectangulum MLG ad rectangulum ALG; hoc eſt ut ML ad AL; quod erat probandum.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Si ſectionis diameter cum utroque latere trianguli per axem conveniat non ſub contrariè ſectio erit Ellypſis.

Sit Conus ABC qui ſecetur per axem triangulo ABC, item alio plano DLE, cujus communis ſectio cum baſi Coni ſit FG perpendicularis ad BG, baſin trianguli per axem; DE communis plani ſecantis, & trianguli per axem ſectio, cum utroque latere AB, AC infrà verticem conveniat; dico ſectionem DLE eſſe Ellipſin. Sint enim LO, SI lineæ FG parallelæ, & conſequenter ordinatim applicatæ (*per* 7.) tum per O, & I ducantur HOK, NIM, parallelæ BC.



Demonſtr. Cùm HK, OL; SI, MN ſint lineis BG, FG parallelæ, plana per eas ducta baſi Coni erunt parallela, & (*per* 5.) circuli erunt, & LO ad HK; SI ad NM, ſicut FG ad BG perdiculares erunt: ergo quadratum LO æquale erit rectangulo HOK, ſicut quadratum SI, rectangulo NIM; ratio autem rectanguli HOK, ad rectangulum NIM, componitur ex ratione HO ad NI, ſeu DO ad DI, & ex ratione OK ad IM; ſeu OE ad IE, ratio autem ſic compoſita ex ratione DO ad DI; & OE ad IE eſt eadem ac ratio rectanguli DOE ad rectangulum DIE, ergo ita ſe habet quadratum LO ad quadratum SI, ut rectangulum DOE ad rectangulum DIE ergo (*ex definitione Ellypſis traditâ*), ſectio DLE eſt Ellypſis. Si eſſet ſub contraria ſectio & triangula DOH, KOE eſſent ſimilia; rectangulum HOK eſſet æquale rectangulo DOE, atque adeò quadratum LO æquale eſſet rectangulo DOE, fieretque circulus, ſaltem ſi LO eſſet perpendicularis ad DO.

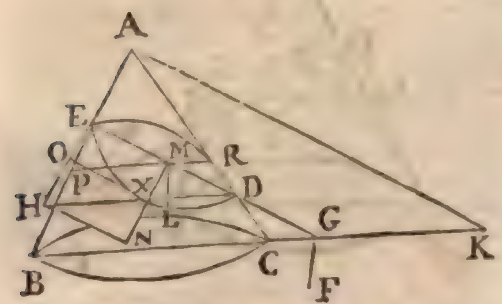
PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si fiat ut quadratum parallelæ diametro Ellypſis, per verticem ductæ, ad rectangulum ſub baſis ſegmentis; ita ſectionis diameter ad quartum terminum; hic parameter erit: deficietque quadratum applicatæ à rectangulo comprehenſo ſub ſagitta & parametro, rectangulo ſub ſagitta, cujus latera eam rationem habent quam diameter, ad parametrum.

Conus ABC ſecetur per axem triangulo ABC,

item alio plano E L D, cujus communis ſectio cum plano baſis ſit EDG ducaturque FG, perpendicularis ad BCK baſin trianguli,per axem,ſitque ſectio ELD, cujus diameter ED, utrumque trianguli per axem latus ſecet in E & D, non tamen ſubcontrariè, ſit E H perpendicularis ad ED, ductaque per verticem A, lineâ A K, parallela diametro E D; fiat ut quadratum AK ad rectangulum BKC; ita DE ad E H; E H erit parameter. Perficiatur E N rectangulum; tum ductâ lineâ DH fiat rectangulum MEOX, ſitque ML ordinatim applicata ad diametrum E D, dico quadratum ML æquale eſſe rectangulo MO, & deficere à rectangulo M H comprehenſo ſub ſagitta ME, & parametro E H, rectangulo X O H N, cujus unum latus eſt ſagitta EM, aut O X habetque ad alterum latus H O rationem quam diameter D E ad parametrum EH. Ducatur per M linea P M R parallela B C.



Demonſtratio. Ita eſt DE ad EH, ut quadratum AK ad rectang. BKC, ex ſuppoſitione, quæ ratio componitur ex ratione AK ad KB; ſeu EG ad GB, aut EM ad MP, & ex ratione AK ad KC; ſeu D G ad G C, aut D M ad MR: quare ratio DE ad E H componetur ex ratione EM ad M P, & ex ratione DM ad MR. Sed ratio ſic compoſita eadem eſt ac rectanguli E M D ad rectang. PMR; ergo ita eſt DE ad EH ſicut rectangulum EMD ad quadratum ML, ut autem DE ad E H, ita DM ad MX *(per 4. 6.)* & ſumptâ eâdem altitudine ME, ita rectangulum DM E ad rectangulum XM E; ergo ita eſt rectangulum EMD ad quadratum M L, ſicut idem rectangulum E M D ad rectangulum XME; ergo quadratum ML æquale eſt rectangulo XME.

Propter hunc defectum inditum eſt huic ſectioni nomen Ellypſis.

COROLLARIUM I.

Hæc Ellypſis habet omnes conditiones & proprietates Ellypſis deſcriptæ ſecundo libro, atque adeò applicatæ æqualiter à centro diſtantes æquales ſunt. Contra ſenſum aliquorum qui eò quòd Conus verſus apicem ſit gracilior, exiſtimant Ellypſin ex Coni ſectione generatam, eſſe graciliorem ex parte verticis, quod tamen falſum eſt: cum oſtenderimus poſita ſimplici definitione Ellypſis ſequi applicatas à centro æqualiter diſtantes æquales eſſe, & huic figuræ convenire definitionem Ellypſis.

COROLLARIUM II.

Ita eſt quadratum majoris ſemidiametri, ad quadratum minoris, ut quadratum parallelæ diametro per verticem Coni ductæ; ad rectangulum ſub ſegmentis baſis trianguli per axem. Ut in ſuperiori figura ſi E D eſſet bifariam diviſa in M, ita eſſet quadratum FM ad quadratum ML ut quadratum A K ad rectangulum B K C, nam ratio quadrati EM ad quadratum M L, eſt eadem ac quadrati EM ad rectangulum P M R: quæ componitur ex ratione E M ad P M, ſeu A K ad BK; & ex ratione EM, ſeu MD ad M R, ſeu A K ad KC. Ratio autem quadrati AK ad rectangulum BKC eiſdem rationibus componitur, nempe AK ad B K, & A K ad KC; ergo ita eſt quadratum EM ad quadratum ML, ut quadratum AK ad rectangulum BKC.

COROLLARIUM III.

Ut univerſalius fiat præcedens Coroll. ita erit rectangulum ſub ſegmentis diametri nempe EMD ad quadratum applicatæ ML, ut quadratum A K ad rectangulum BKC.

COROLLARIUM IV.

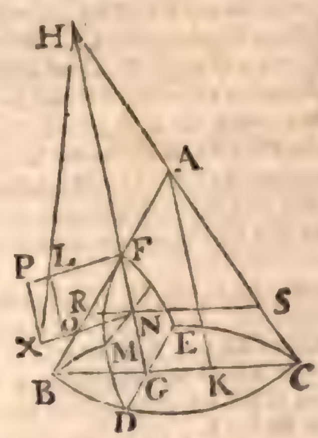
Ita eſt rectangulum E M D ad quadratum ML, ut rectangulum E G D ad rectangulum B G C, quia ita eſt E M ad PM ut EG ad BG, & ita eſt MD ad M R, ſicut DG ad GC; ergo ita eſt rectangulum EMD ad rectangulum PMR, ſeu quadratum ML, ut rectangulum E G D ad rectangulum B G C.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

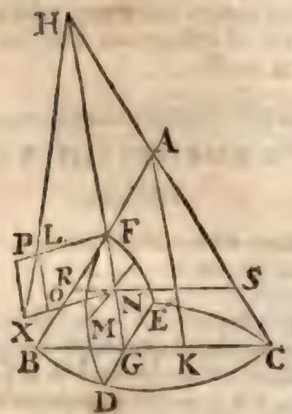
Si ſectionis diameter cum utroque latere trianguli per axem extra conum conveniat; ſectio erit hyperbola.

Proponatur Conus, cujus ſectio per axem ſit ABC, ſectus item alio plano DFE, cujus communis ſectio cum baſi Coni ſit D E perpendicularis



ad B C baſin trianguli per axem, diameter item ſectionis cum CA latere trianguli per axem conveniat

veniat ſupra verticem, in puncto H; dico ſectionem DFE eſſe parabolam. Ducatur M N parallela DE, qua bifariam dividetur (*per 7.*) agatur per N lineæ RNS baſi BC parallela.



Demonſtratio. Cum R S, BC; MN, DG ſint parallelæ erit planum per RS & MN ductum baſi BDC parallelum, & (*per 5.*) circulus erit; ergo quadratum M N rectangulo R N S æquale erit. Sicut quadratum DG æquale eſt rectangulo BGC, ergo quadrata ſe habent ut rectangula. Sed ratio B G C ad R N S, componitur ex ratione G C ad NS, ſeu HG ad HN; & ex ratione B G ad RN, ſeu F G ad FN, & ratio ſic compoſita eſt ratio rectanguli H G F ad rectangulum H N F. Ergo ita eſt quadratum D G ad quadratum M N; ut rectangulum H G F ad rectangulum H N F: ergo (*ex definitione hyperbola*) ſectio D F E eſt hyperbola.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

In hyperbola ſi ſit ut quadratum parallela diametro per verticem Coni ducta, ad rectangulum ſub ſegmentis baſis, ita diameter ad aliam, hac erit parameter & quadratum applicata ſuperabit rectangulum ſub ſagitta & parametro, rectangulo quod unam ſagittam habeat pro uno latere, & ad aliud ſe habeat ut diameter ad parametrum.

Sit hyperbola producta ex ſectione Coni priùs deſcriptâ, ſitque diameter F H, & ei parallela A K per verticem ducta, ſitque ut quadratum AK ad rectangulum B K C; ita diameter H F ad parametrum L F. Sitque ordinatim applicata MN, dico ejus quadratum æquale eſſe rectangulo N P, hoc eſt excedere rectangulum ſub ſagitta N F, & parametro FL, rectangulo OP, cujus latus OL æquale ſit ſagittæ F N, & ſit ad aliud O X, ut HF ad LF: per N agatur RNS lineæ BC parallela eritque, ut priùs quadratum M N rectangulo RNS æquale.

Demonſtratio. Supponitur ita eſſe HF ad F L, ut quadratum A K ad rectangulum B K C, quæ ratio componitur ex ratione A K ad K C; ſeu HG ad GC; aut HN ad NS; & ex ratione A K ad KB ſeu FG ad GB aut FN ad N R; ergo ratio H F ad F L componitur ex ratione H N ad NS; FN ad N R quæ ratio ſic compoſita eſt eadem ac rectanguli H N F ad rectang. R N S, ſeu quadratum MN. Ergo ita eſt rectangulum H NF ad quadratum MN ut HF ad FL ſeu HN ad NX, & ſumptâ F N communi altitudine ut rectangulum HMF ad rectangulum F N X; quare rectangulum HNF ita ſe habet ad quadratum MN, ac ad rectangulum F N X: ſunt ergo æqualia quadratum MN & rectangulum FNX; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

Propter hunc exceſſum, quo quadratum applicatæ ſuperat rectangulum ſub ſagitta, & parametro; huic ſectioni inditum eſt nomen hyperbolæ, ſeu excedentis.

COROLLARIUM II.

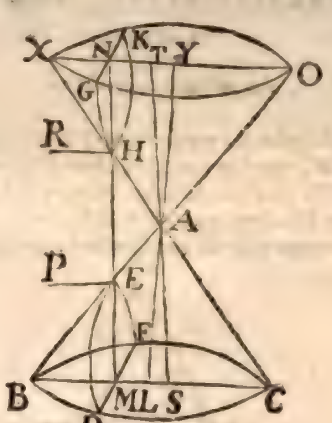
Vides lineam F H quam in hyperbola abſolutè conſiderata ſine ullo reſpectu ad Conum conſideravimus, eſſe interceptam inter verticem hyperbolæ, & latus Coni productum.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si duo Coni contrapoſiti eôdem plano ſecentur, producetur in utroque hyperbola; & utriuſque erit eadem diameter. Ideoque tranſverſum latus, ſeu diameter, & latera recta erunt æqualia.

Sint duæ Conicæ ſuperficies quarum idem axis Y L idem vertex A, & productæ motu ejuſdem lineæ circa punctum A, hæ ſuperficies ſecentur eôdem plano faciente communes ſectiones DEF, G H K dico eas ſectiones eſſe hyperbolas: Sit enim circulus BDCF baſis Coni ABC cui pa-



rallelum ſit planum GOKX; producatur linea LY ducaturque per punctum Y, linea XO parallela BC; oſtendam facile ſicut BC bifariam dividitur in L, XO bifariam dividi in Y, & alias omnes ex centro Y ductas, lineæ Y O eſſe æquales: ſuppono autem adeſſe omnes conditiones quas. Supra poſuimus, nempe DF eſſe perpendicularem ad BC, baſin trianguli per axem, quare GK quæ (*per 13. 11.*) DF eſt parallela, erit etiam ad XO perpendicularis. Triangulum per axem ſecent ſectiones in E & H, eritque E H communis ſectio plani ſecantis & trianguli per axem, & producta attinget baſes

 triangulorum

triangulorum per axem in M, & N ducantur per E & H, EP, HR perpendiculares ad MN; & per verticem A linea TAS parallela diametro EH, fiatque ut quadratum AS ad rectangulum BSC ita HE ad EP; & ut quadratum AT ad rectangulum XTO, ita HE ad ER.

Dico Primò utranque ſectionem eſſe hyperbolam.

Demonſtr. Uterque Conus ſectus eſt plano per axem, ſecatur & uterque altero plano ſecante baſin trianguli perpendiculariter, ita ut diameter ſectionis, alterum latus trianguli per axem ſecet ſupra verticem ergo utraque ſectio eſt hyperbola.

Secundò clarum eſt lineam HE eſſe utriuſque tranſverſum latus.

Tertiò dico parametros ſeu latera recta utriuſque ſectionis eſſe æqualia.

Demonſtratio. Ita eſt AS ad SC, ſicut AT ad TX ob ſimilitudinem triangulorum, pariter ita eſt AS ad SB, ſicut AT ad TO; quare ita erit quadratum AT ad rectangulum TXO, ſicut quadratum AS, ad rectangulum BSC, ſed ut quadratum AT ad rectangulum XTO, ita ſuppoſuimus lineam HE ad HR, & ut quadratum AS ad rectangulum BSC, ita voluimus eſſe HE ad EP: ergo ita eſt HE ad RH, ſicut ad EP ergo parametri, HR, EP ſunt æquales.

COROLLARIUM.

Sequitur hyperbolas prædictas eſſe omninò ſimiles, nam cum applicatæ in una, ſint parallelæ applicatis in alia, & ſit eadem parameter, applicatæ æqualiter à verticibus diſtantes, æquales erunt: iis igitur convenient omnes proprietates, quas hyperbolis oppoſitis tribuimus.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Parabolam deſcribere.

Sit deſcribenda parabola proponatur triangulum ABC repreſentans triangulum per axem, ponatur DE parallela AC, ducanturque FH, IL parallelæ BC, tum applicentur OG, MK, NE, in quocumque angulo, quæ ſint mediæ proportiona-



les, OG quidem inter FG, GH; MK inter IK KL: NE inter BE, EC, dico figuram DOMN eſſe parabolam.

Demonſtr. Quadratum OG æquale eſt rectangulo FGH, quadratum MK rectangulo IKL, ergo ita eſt quadratum MK, ad quadratum OG, ut rectangulum IKL ad rectangulum FGH; habent autem altitudines æquales KL, HG, ergo rectang. IKL ad rectangulum FGH ſe habet ut IK ad FG, ſeu ut KD ad GD, ergo quadratum MK ad quadratum OG ſe habet ut ſagitta KD ad ſagittam GD.

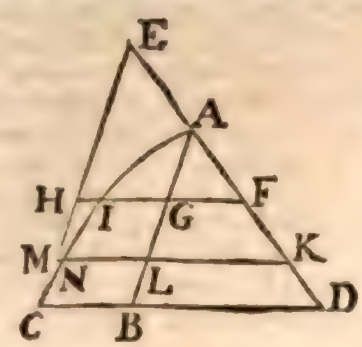
Quod ſi ulterius determinare velis; fiat ut quadratum BC ad rectangulum BAC ita parameter ad DA, & viciſſim.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Circa datas diametrum, & baſin in quocumque angulo convenientes, parabolam deſcribere.

Sit data diameter AB, baſis CD diviſa bifariam in B, conveniant in quocumque angulo, ex puncto C ducatur CE, diametro AB parallela, cui occurrat DA in puncto E, ducantur FH, KM baſi parallelæ, quæraturque lineis FG, GH, media proportionalis GI; lineis KL, LM media proportionalis LN; dico figuram AINC eſſe parabolam.



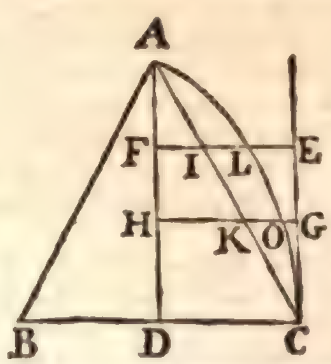
Demonſtr. Quadratum IG rectangulo FGH æquale eſt, ſicut quadratum NL, rectangulo KLM; rectangula autem æquales habent altitudines HG, ML; ergo ſe habent ut KL ad FG, ſeu ut ſagitta AL ad AG; ergo quadratum NL ad quadratum IG, ſe habet ut ſagitta AL ad ſagittam AG: ergo figura AI, NC eſt parabola; quod erat demonſtr.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Aliter Parabolam deſcribere circa datum triangulum.

Sit datum triangulum ABC circa quod ſit deſcribenda parabola; dividatur BC bifariam in D, ducaturque AD & CE illi parallela, ducantur FE,



GH parallelæ baſi BC, fiantque FL, HO mediæ proportionales inter FE, FI, HK, HG, dico ALOC eſſe parabolam.

Demonſtr.

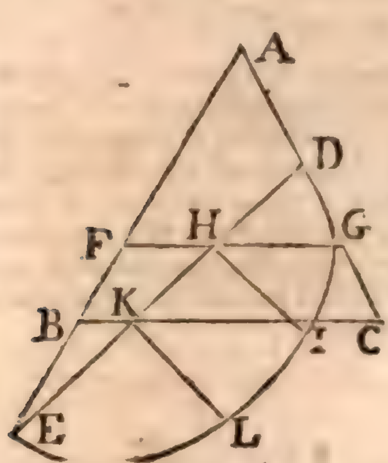
Demonſtr. Quadratum FL æquale eſt rectang. EFI, & quadratum HO, rectangulo GHK, ſed rectangula habentia eamdem altitudinem FE, HG, ſe habent ut HK ad FI, ſeu AH ad AF, ergo quadratum HO, ad quadratum FL ſe habet ut AH, ad AF; ergo figura ALOC eſt parabola (*per definitionem parabolæ.*)

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Ellypſin deſcribere.

Proponatur quodcumque triangulum ABC, in quo ducatur linea DE, ſecans utrumque latus trianguli in D & E ducanturque quotcumque lineæ ut FG baſi BC parallelæ, applicenturque HI, media proportionalis inter FH, HG & KL inter BK, KC dico figuram DIL eſſe Ellypſin.



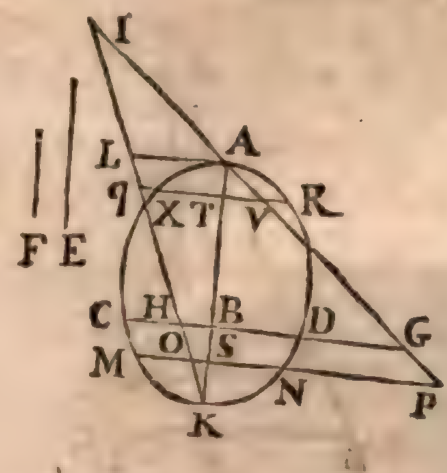
Demonſtr. Quadrata HI, KL ſunt rectangulis FHG, BKC, æqualia; ratio autem rectanguli FHG ad rectang. BKC, componitur ex ratione FH ad BK: ſeu HE ad EK; & HG ad KC, ſeu HD ad HK. Sed ratio rectanguli DHE ad rectangulum DKE, ex iiſdem componitur, nempe ex ratione HD ad DK, & ex ratione HE ad KE, ergo ita eſt rectangulum GHF ad rectangulum, BKC, ſeu quadratum HI ad quadratum KL, ut rectangulum DHE ad rectangulum DKE; ergo (*per defin. Ellyp.*) DILE eſt Ellypſis; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Circa datam diametrum, & baſin; in dato angulo, Ellypſin ſpecie notam deſcribere.

Sit data diameter AB non quidem integra & baſis CD convenientes in quocumque angulo, ſitque poſita Ellypſis perficienda ſpecie nota, cujus nempe datur ratio diametri ad parametrum, ſitque ut E ad F. Sit BG æqualis AB, fiatque ut BG ad BD, ita BD ad BH. Fiat item ut F ad E, ſeu ut parameter ad diametrum, ita BH ad BK, ducanturque KH, GA convenientes in puncto I: ducantur quæcumque parallelæ QR, MP, fiatque inter TV; QT media proportionalis TX, ſicut inter OS & SP media proportionalis SM, aut SN, & ita de aliis, dico figuram ARDK eſſe Ellypſin propoſitam. Ducatur AL parallela CD, hæc erit parameter, eſt enim ut KB ad BH; ſeu E ad F; ita AK ad AL.



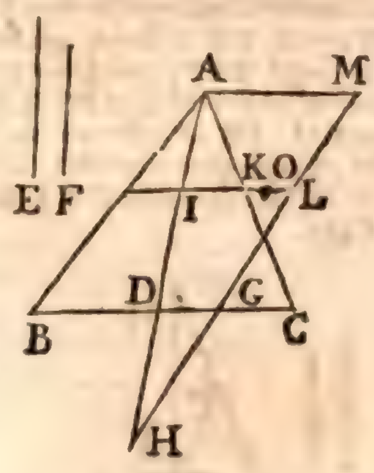
Demonſtr. Quadratum BC (*ex conſtructione*) æquale eſt rectangulo GBH ſeu ABH, ſunt enim AB & BG æquales, item quadratum SM æquale eſt rectangulo PSO ſeu ASO, ergo (*per 14.*) figura eſt Ellypſis.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Circa datum triangulum Ellypſin ſpecie notam deſcribere.

Proponatur circa triangulum ABC deſcribenda Ellypſis ſpecie nota, nempe cujus diameter ad parametrum ſit ut E ad F; diviſâ baſi BC bifariam in D, ſit DC media proportionalis inter AD, DG, fiatque ut parameter ad diametrum ſeu ut F ad E, ita DG ad DH.



Fiat rectangulo AIL æquale quadratum IO, dico punctum O eſſe in Ellypſi tranſeunte per ABC, cujus parameter AM ſe habet ad diametrum AH, ſicut DG ad DH patet.

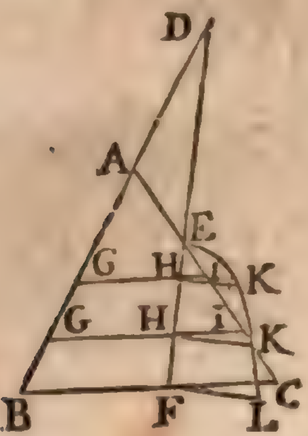
PROPOSITIO XXV.

Problema.

Hyperbolam deſcribere.

Proponatur triangulum ABC repræſentans triangulum

angulum per axem, ducatur linea DF ſecans latus AB ſupra verticem in puncto D, ducantur GHI parallelæ baſi, ſit HK media proportionalis inter GH, HI, ſicut F L inter BF, FC dico figuram EKL eſſe hyperbolam.



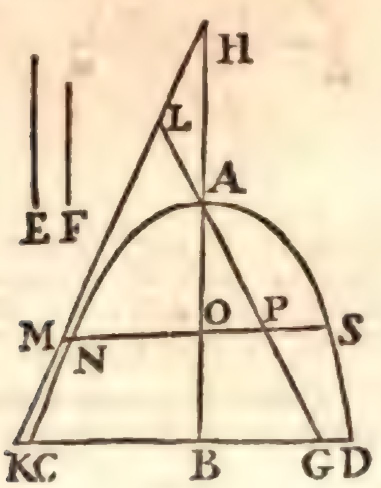
Demonſtr. Ita eſt DF ad DH ſicut BF ad GH, & EF ad EH ſicut FC ad H I. Sed ratio rectanguli BFC ad rectangulum G H I componitur ex rationibus BF ad GH, & FC ad HI; & ratio rectanguli DFE ad rectangulum DHE componitur ex rationibus DF ad DH,& EF ad E H; ergo ita eſt rectangulum DFE, ad rectangulum DHE, ſicut rectangulum B F C ad rectangulum GHI, ſeu ut quadratum FL ad quadratum HK,ergo(*ex defin.*) EKL eſt hyperbola.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Circa diametrum & baſin hyperbolam ſpecie notam deſcribere.

Proponatur diameter AB,baſis CD, diviſâ baſi C D biſariam in B, factoque quôcumque angulo ABC, ſit deſcribenda hyperbola ſpecie nota, id eſt cujus diameter ad parametrum ſit ut E ad F; ſit lineæ AB æqualis B K; fiatque quadrato B C æquale rectangul. KBG, item fiat ut parameter ad diametrum, ſeu ut F ad E, ita BG ad BH, junganturque GAL, HK, ducatur quæcumque parallela MS; fiatque quadratum NO, O S æquale rectangulo MOP;dico puncta N & S eſſe in hyperbola CAD.



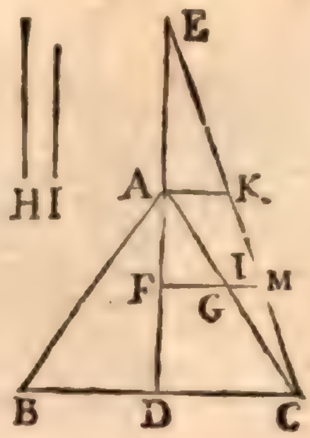
Demonſtr. Quadratum C B æquale eſt rectangulo KBG, & quadratum N O rectangulo MOP ex conſtructione,ſed ratio rectanguli KBG, ad rectangulum M O P componitur ex ratione KB ad MO, ſeu HB ad HO, & ex ratione BG ad OP; ſeu A B ad AO, ratio autem rectanguli HBA ad rectangulum HOA, ex iiſdem componitur, nempe ex ratione HB ad HO & AB ad AO; ergo ita eſt rectangulum HBA ad rectang. HOA, ſicut quadratum BC ad quadratum N O: igitur jam habemus eſſe hyperbolam; eritque ita diameter tranſverſa ad parametrum ut rectangulum HBA ſeu HBK ad quadratum BC, ſeu rectangulum KBG. Et cum eadem ſit altitudo KB ſeu AB, ſe habet rectangulum HBA ad rectangulum KBG ut HB ad BG; ergo ita diameter tranſverſa ad parametrum,ſicut HB ad BG, ſeu ut E ad F,quod faciendum erat.

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Circa datum triangulum hyperbolam ſpecie notam deſcribere.

Proponatur triangulum ABC circa quod deſcribenda ſit hyperbola ſpecie nota, nempe cujus data ſit ratio diametri, ad parametrum, qualis eſt H ad I, diviſâ baſi BC biſariam in D; ductâque diametro DA, fiat ut parameter, ad diametrum, ita quadr.DC,ad rectang. ADE, jungaturque EC. Tum inter FD, & FG quæratur media proportionalis F I; dico punctum I pertinere ad eandem hyperbolam.



Demonſtr. Cum ratio quadrati DC ad rectangulum GFD, ſeu quadratum F I componatur ex rationibus DC ad FG; ſeu DA ad AF; & DC ad FD; ſeu ED ad EF, & ex iiſdem rationibus componatur AD ad AF, & E D ad E F, ex quibus componitur ratio rectanguli E D A ad rectangulum EFA; ita erit rectangulum EDA ad rectangulum EFA ſicut quadratum CD ad quadratum F I, eritque diameter ad parametrum ut rectangulum EDA ad quadratum CD; ergo eſt parabola propoſita.

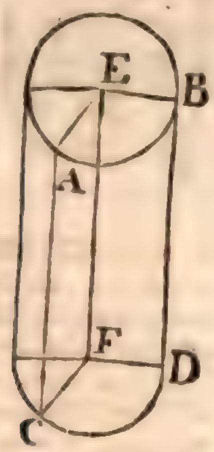
Google

LIBER QVINTVS
De Sectionibus cylindricis.

PARABOLAM Ellypſin & hyperbolam abſolutè, & in Cono conſideravimus, æquum eſt ut circulum & Ellypſin in cylindrocont emplemur; parabola enim & hyperbola in eo locum non habent. Primus hanc materiam attigit Serenus philoſophus qui in eo præcipuè verſatur, ut Ellypſin ex cylindro quocumque progenitam eandem eſſe cum Conica Ellypſi oſtendat. Nos ejus veſtigiis inhærentes paucis propoſitionibus complectemur totam hanc materiam.

DEFINITIONES.

1. CYlindrica ſuperficies ea eſt quæ producitur motu lineæ conjungentis radios circulorum æqualium, & parallelorum æquidiſtanter tranſlatæ. *Sint duo circuli æquales & paralleli AB, CD, quorum radij AE, CF moveantur*, ita ut paralleli ſemper ſint, linea AC conjungens extremitates radiorum deſcribet cylindricam ſuperficiem.



2. Cylindrus eſt figura ſolida tali ſuperficie, & circulis parallelis comprehenſa.

3. Baſis cylindri ſunt quilibet ex prædictis circulis.

4. Axis cylindri eſt recta linea centra circulorum conjungens.

5. Latus cylindri eſt recta linea cujus tranſlatione producitur cylindrica ſuperficies.

6. Cylindrus Rectus ille eſt cujus axis eſt ad baſes rectus.

7. Cylindrus ſcalenus cujus axis eſt ad baſes inclinatus.

8. Diameter ſectionis eſt linea recta, omnes uni parallelas bifariam dividens, cujus medium punctum centrum eſt.

9. Ordinatim applicatæ dicantur, quæ bifariam à diametro dividuntur.

10. Ordinata per centrum tranſiens ſecunda diameter, ſeu conjugata dicatur.

11. Similes Ellypſes ſunt quarum conjugatæ diametri ad angulos æquales ſe ſecantes eandem habent rationem.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Si cylindrus plano ſecetur, aut per axem, aut axi parallelo ſectio parallelogrammum erit.

Ex generatione cylindri patet utraque pars propoſitionis, ſi enim ſecatur per axem ſectiones in utraque baſi erunt parallelæ, & cum lineæ conjungentes extrema diametrorum parallelorum & æqualium ipſam cylindricam ſectionem producant, illæ erunt parallelæ & æquales; ergo ſectio parallelogrammum erit.

Secunda item patet, ut ſit ſectio parallela axi; debent ſectiones communes plani ſecantis, & baſium; non tantum eſſe parallelæ; ſed etiam æqualiter à centris diſtare, & conſequenter æquales eſſe, ergo lineæ eas conjungentes erunt & æquales & parallelæ: ergo hac ſectione generabitur parallelogrammum.

COROLLARIUM.

Sectio parallela axi eſt parallelogrammum parallelum ei quod ſit per axem.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si cylindrus plano baſibus parallelo ſecetur; ſectio erit circulus.

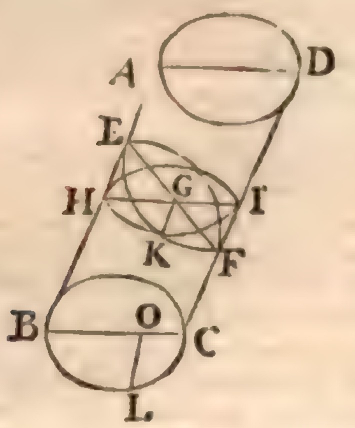
Cylindrus quilibet plano baſibus parallelo ſecetur, dico ſectionem eſſe circulum: ſi enim cylindrus ſecetur quolibet plano per axem, erunt ſectiones in baſibus, & in plano ſecante parallelæ, ergo æquales; ergo omnes lineæ ductæ à puncto in quo ſecatur ab axe ſunt æquales: ergo ſectio erit circulus.

Digitized by Google

PROPOSITIO III.

Si cylindrus ſcalenus plano per axem ad baſes recto ſecetur, ſecetur & alio plano ſectionem ſubcontrariè poſitam faciente, ſectio erit circulus.

Sit cylindrus ſcalenus ABCD, qui ſecetur parallelogrammó per axem ABCD, cujus planum ſit rectum ad baſes, ſecetur idem cylindrus alio plano recto ad parallelogrammum per axem, cujus communis ſectio ſit EF ſubcontrariè poſita; hoc eſt angulus GEH angulo ADG aut ABC ſit æqualis: dico communem ſectionem cylindri plani ſecantis EKF, eſſe circulum. Aſſumatur in EF communi ſectione plani ſecantis & parallelogrammi per axem, punctum G, per quod ducatur perpendicularis GK, quæ recta erit ad parallelogrammum per axem, cum ſecundum planum ſit rectum ad idem, ducatur per G, linea HGI parallela AD, aut BC ad quam erit recta linea KG (*per* 4 11.) ducatur OL perpendicularis ad BC. Cum lineæ HI, GK, ſint parallelæ lineis BC, OL, plana per ipſas ducta erunt parallela; ergo planum HKI erit circulus.



Demonſtratio. Cum anguli GEH, ADC, ſeu GIF ſint æquales, & anguli in puncto G, oppoſiti ad verticem ſint æquales; erunt triangula EGH, IGF ſimilia; ergo ita erit HG ad GE; ſicut GF ad GI, immò lineæ EG, GH; GI, GF æquales ſunt, ſed GK eſt media proportionalis inter EG, GF; ergo ex lemmate propoſito, cum de ſectione ſubcontraria Coni, ſectio EKF circulus erit.

COROLLARIUM.

Converſa hujus propoſitionis facilè demonſtrari poteſt, nempe quod ſi ſervatis conditionibus, angulus GEH fuerit inæqualis angulo D, ſeu GIF, erunt quidem triangula ſemper ſimilia non tamen reciproce, hoc eſt erit quidem ut HG ad GE, ita GI ad GF, atque adeò rectangulum comprehenſum ſub HG, GI, ſeu quadratum GK erit inæquale rectangulo comprehenſo ſub EG, GF; ergo ſectio EKF circulus non erit.

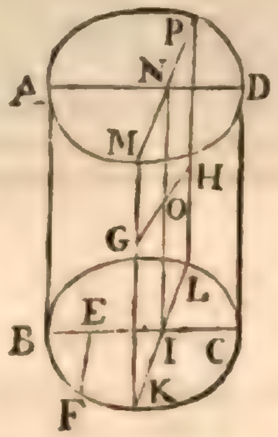
PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si cylindrus plano per axem ſecetur & à quolibet puncto ſuperficiei cylindricæ ducatur parallela perpendiculari ad baſin parallelogrammi per axem; hæc eidem plano occurret & ab eo biſariam dividetur.

Sit cylindrus diviſus parallelogrammo per axem, nempe ABCD, ſitque EF perpendicularis ad BC baſin parallelogrammi per axem, cui ex quocunque puncto G ducatur parallela GH; dico eam occurrere plano parallelogrammi per axem, & ab eo biſariam dividi.

Ducatur per G linea GK parallela axi, ſecans baſin cylindri in puncto K, ducatur KL perpendicularis ad BC, eruntque KL, GH in eodem plano, ducatur LHP parallela axi, item NI, quæ erit in plano parallelogrammi per axem.



Demonſtratio. Lineæ KL, GH, in eodem ſunt plano MKLP, & cum KL, MP ſint diviſæ biſariam in N & I, cum ſint perpendiculares ad diametros circulorum, linea GH, dividetur biſariam in O, à linea NI, quæ eſt communis ſectio parallelogrammorum; ergo GH occurrit plano parallelogrammi per axem, & ab eo biſariam dividitur.

PROPOSITIO V.

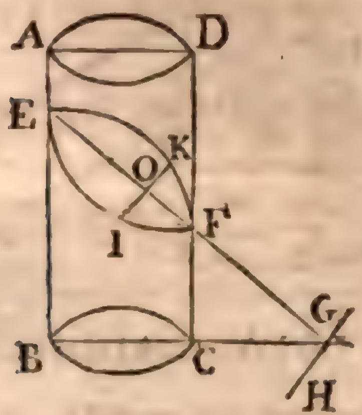
Theorema.

Si cylindrus plano ita ſecetur, ut communis plani ſecantis, & baſis cylindri ſectio ſit perpendicularis ad baſin parallelogrammi per axem: omnes rectæ in ſectione huic lineæ parallelæ, biſariam ſecabuntur, & in cylindro recto perpendiculariter, in ſcaleno non ſemper.

Cylindrus ſecetur per axem parallelogrammo ABCD, ſecetur & alio plano EFG, cujus communis ſectio cum plano baſis cylindri ſit linea GH, perpendicularis ad BC, productam baſin nempe parallelogrammi per axem; dico 1. lineam quamcumque IK parallelam HG biſariam dividi à linea EF communi ſectione plani ſecantis & parallelogrammi per axem.

Demonſtr.

Demonſtratio. Cum in ſuperficie cylindrica ſit ſumptum punctum I per quod ducitur I K parallela, lineæ GH perpendiculari ad BC linea IK dividetur bifariam in O à plano paralelogrammi ABCD (*per præcedentem*) ſed huic plano non occurrit niſi in linea E F communi ſectione utriuſque plani; ergo IK à linea EF, bifariam dividitur quod primò propoſitum fuit.



Dico ſecundò quòd in cylindro recto, & in ſcaleno quando parallelogrammum per axem rectum eſt ad baſin cylindri, quod IK ſit perpendicularis ad E F.

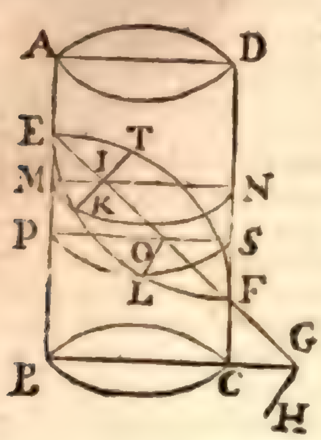
Demonſtratio. Cum enim planum ABCG ſit rectum, ad planum baſis cylindri & GH ſupponatur perpendicularis ad BG, erit recta ad idem planum; & (*per* 4. 11.) erit angulus HGE, rectus; & conſequenter angulus IOE rectus erit; in omni autem cylindro recto cum axis ſit rectus ad baſin omne planum per axem erit ad baſes rectum, in ſcaleno non omne.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si cylindrus plano per axem ſecetur & alio plano cujus communis ſectio cum plano baſis, ſit perpendicularis ad baſin diametri per axem, nec ſit ſectio ſubcontraria generabitur Ellypſis.

Sit cylindrus ſectus per axem parallelogrammo ABCD ſectus item alio plano EKF cujus commu-



nis ſectio cum plano baſis cylindri, nempe G H ſit perpendicularis ad BC, baſin parallelogrammi ABCD; dico ſectionem EKF eſſe Ellypſin. Sint enim IK, OL ordinatim applicatæ E F & per I & O ducantur M I N, P O S; parallelæ BC cum lineæ M N, I K; PS, OL, ſint parallelæ lineis BG, GH plana M K N, PLS erunt baſi parallela & (*per* 4. 3.) circuli erunt, & cum GH ſit perpendicularis ad BG, erunt I K, L O, perpendiculares ad MN, PS, & quadratum I K æquale rectangulo M I N, ſicut quadratum L O rectangulo P O S.

Demonſtratio. Ita eſt quadratum K I ad quadratum OL, ſicut rectang. MIN ad rectangulum POS, ſed ratio rectanguli MIN ad rectang. P O S componitur ex ratione IN ad OS, ſeu IF ad OF, & ratione MI ad PO, ſeu EI ad EO, & ratio rectanguli EIF ad rectangulum EOF componitur ex iiſdem, nempe ex ratione EI ad EO; & IF ad O F; ergo ita eſt quadratum I K ad quadratum OL; ſicut rectangulum EIF ad rectangulum EOF.

Quando autem ſectio non erit ſubcontraria IE, IM non erunt inter ſe æquales neque IF, IN; ſed EI erit major quam M I, erit rectangulum E I F majus quam rectangulum MIN, & conſequenter, quam quadratum I K; immo ſi eſſet rectangulum EIF æquale quadrato IK, ſi tamen angulus EIK, rectus non eſſet non produceretur circulus, ſed Ellypſis.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

In Ellypſi cylindrica rectangulum ſub ſegmentis diametri ad quadratum applicata eam rationem habet quam quadratum diametri Ellypſis ad quadratum baſis rectanguli per axem.

Proponatur Ellypſis cylindrica, cujus ſit diameter EF applicata KI; dico ita eſſe rectangulum EIF ad quadratum I K, ſicut quadratum F E ad quadratum BC.

Demonſtratio. Cum ſit ut EI ad IM; ita IF ad I N, ita erit rectangulum E I F ad rectangulum M I N, ſeu quadratum IK, ut ratio duplicata E I ad M I, ſeu componendo ut ratio duplicata F E ad MN; ſeu quadrati EF ad quadratum MN, ſeu BC quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

Tota doctrina Ellypſium eſt revocanda: eſt enim hæc Ellypſis omninò ſimilis Conicæ Ellypſi cum ei conveniat eadem definitio, quare quæcumque diximus de parametro, aliiſque ejus proprietatibus applicanda ſunt.

COROLLARIUM II.

In Ellypſi cylindrica ſecunda diameter æqualis eſt diametro baſis cylindri; ſi enim E F eſſet diviſa bifariam in I nempe I eſſet centrum, & K I T ſecunda diameter cum rectangulum E I F ſeu in tali caſu quadratum EI, ſe habeat ad quadratum KI, ut quadratum E F ad quadratum B C. Ut autem quadratum E I ad quadratum K I, ita quadratum E F ad quadratum K T; ergo ita erit quadratum EF ad quadratum B C, ſicut quadratum E F ad quadratum KT: ergo quadrata BC, KT æquantur.

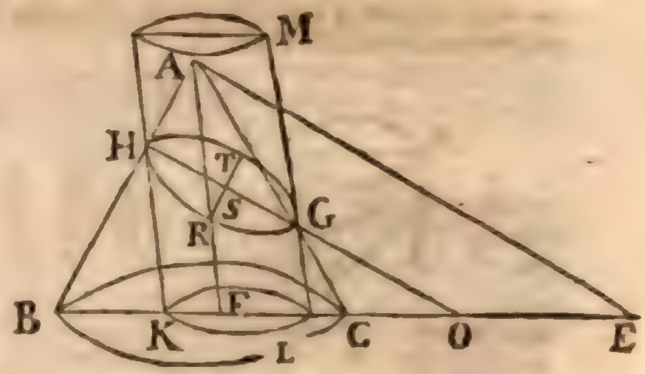
PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Conus, & cylindrus eâdem Ellypſi ſecari poſſunt.

Proponatur quodcumque triangulum per axem A B C, Coni ABC; qui ſecetur Ellypſi HRG; tum diviſâ HG bifariam in S ordinatim applicetur RST, ſit AE parallela HO, ſitque E F media proportionalis inter BE & C E, ducaturque A F cui ſint parallelæ HK, GL. Perficiatur parallelogrammum KM ſitque cylindrus cujus KM ſit parallelogrammum per axem & baſis circulus ſupra KL deſcriptus, dico eandem Ellypſin HRG eſſe Ellypſin cylindricam. Erit autem eadem Ellypſis cylindrica & conica, ſi eadem ſit ratio utriuſque diametri.

Demonſtr. Cum H K, A F; A E, H O; ſint parallelæ; triangula AEF, HOK erunt ſimila: itaque erit quadratum AE ad quadratum E F, ut quadratum HO ad quadratum OK. Sed quadratum E F æquale eſt rectangulo B E C, eò quòd E F ſit media proportionalis inter B E, E C, (*& per 13. 4. hujus*) ut quadratum AE ad rectangulum B E C, ita rectangulum H S G ad quadratum S R, aut quadratum H G ad quadratum R T in Ellypſi Conica: ergo ita erit quadratum H G ad quadratum R T Ellypſis Conicæ, ut quadratum HO ad quadratum OK; ſed ut quadratum HO ad quadratum OK, ita quadratum H G ad quadratum K L & ut quadratum HG ad quadratum L K, ita (*per præcedentem*) quadratum H S ad quadratum R S; aut quadratum H G ad quadratum R T in Ellypſi cylindrica: ergo ita eſt quadratum H G ad quadratum R T applicatæ, in Ellypſi Conica, ſicut quadratum H G ad quadratum R T in Ellypſi cylindrica; ergo prima & ſecunda diameter in utraque Ellypſi eadem eſt.



COROLLARIUM I.

Dato quôcumque Cono A B C, & Ellypſi H R G, quærendo mediam proportionalem EF, & alia peragendo prout jacent in propoſitione, inveniemus cylindrum cui congruat eadem Ellypſis.

COROLLARIUM II.

Pariter dato cylindro ſecto Ellypſi G H, inveniemus Conum cui eadem Ellypſis congruat, ſi nempe ex quocumque puncto F educatur F A, parallela K H aut LG; fiat item ut B E ad F E, ita F E ad C E; ex puncto E ducatur E A parallela H O, & ex puncto A ducantur A H B, A G C, determinatur cylindrus ABC, cui eadem Ellypſis congruit ut applicanti demonſtrationem ſuperiorem facilè patebit: atque hæc ſufficiant.

LIBER

TRACTATUS IV.

ARITHMETICA.

QVAMVIS innumeri vulgò circumferantur libri Arithmetici, elementares regulas explicantes; quia tamen ut plurimùm demonſtrationibus carent, ſolaſque continent praxes ſatis intricatas, malèque explicatas ut huic incommodo obviam irem, & ne noſtro operi, pars alioquin utiliſſima deeſſet; Arithmetices principia omnia, perſpicuitate quàm potero maximâ explicanda, & demonſtranda ſuſcipio. Libros quatuor continebit hic tractatus. Primus erit de Regulis elementaribus. Secundus de Fractionibus. Tertius de Extractione radicum, quadratæ, & cubicæ, cætera ut ad algebram pertinentia hic non attingo. Quartus erit de calculari Arithmetica, & divinatoria. Tyro initiò ſolum primum librum addiſcat, & extractionem radicis quadratæ. Secundum librum, dum provectior erit, evolvet.

LIBER PRIMUS.

De regulis elementaribus.

AXIOMA PRIMUM.

DEnarius numerus decem unitatibus æqualis eſt. Centenarius numerus centum unitatibus; Millenarius mille unitatibus, & ita conſequenter.

Hoc axioma quod ferè identicum eſt; ideóque nonnulli nugatorium videretur, demonſtrationibus noſtris inutile non erit; iiſque lucem aliquam affundet. Supponamus autem denarium poſſe unico charactere deſignari, volo ut quocumque modo ſignificetur, ſit tamen æqualis decem unitatibus, ſeparatim ſignificatis, ſeu ſeparatis characteribus, quod enim unico, aut pluribus characteribus ſcribatur, ejus naturam non mutat. Ut autem meliùs vis iſtius principij penetretur, [tyronibus enim loquimur] fictum aliquod exemplum mihi comminiſci liceat, ſupponamus principem diverſæ ſpeciei monetam cudere, quarum prima ſeu infima ſit ærea, voceturque aſſis, ſecunda ſit argentea decem aſſibus æquivalens, voceturque ſemifrancus; tertia ſit aurea centum aſſibus æquivalens, voceturque nummus; quarta ſit aurea, mille aſſibus æqualis, dicaturque duplio; dico quod ſicut perinde eſſet in vulgari æſtimatione in marſupio ſemifrancum ac decem aſſes habere, nummum ac centum aſſes, duplionem ac mille aſſes, ita etiam perinde ſit in chartâ notare duplionem, ac mille aſſes, duos ſemifrancos, ac viginti aſſes, ſi peculiares notas haberemus ad notandum ſemifrancum, centum aſſes & mille aſſes.

AXIOMA II.

Novem tantum ſunt Arithmetici characteres, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. aliquid ſignificantes, qui characteres pro diverſitate locorum, in quibus ponuntur; modò ſignificant unum, duos, 3. 4. 5. aſſes, modò totidem nummos, dupliones, aliáſque ſpecies, ſemper decuplò majores; quæ poſſunt excogitari; hoc eſt nota 5. verbi gratiâ nonnumquam ſignificat quinque aſſes, aliquando quinque ſemifrancos, aliàs totidem nummos, aut dupliones; quæ omnia ex inſtituto pendent, nec aliâ probatione indigent.

AXIOMA III.

Sedes ultima, quæ nempe maximè vergit ad dexteram reſpicientis, eſt propria aſſium ſeu unitatum ſimplicium; penultima erit decadum, ſeu ſemifrancorum; antepenultima erit centenariorum, ſeu nummorum; proantepenultima millenariorum; quinta decem millium, ſexta centum millium, ſeptima millemillium, ſeu ut vulgò vocant millionum, ut in appoſito exemplo, A.

A. 458782. cyphra 2. quæ eſt in ultima ſede ſignificat duas unitates, ſeu duos quaſi aſſes; cyphra 8 quæ in penultimâ, ſignificat octo decades, ſeu octoginta unitates, hoc eſt octo quaſi ſemifrancos, character, qui in antepenultimâ ſede, indicat ſeptem nummos, quorum quilibet centum aſſes continet; ideóque dicit ſeptingentos aſſes; cyphra 5 in proantepenultima ſignificat quinque dupliones;

Digitized by Google

AXIOMA IV.

Duo characteres in una ſede ne ſcribantur.

Senſus hujus axiomatis eſt, quòd in ultima, verbi gratia, ſede, quæ unitatum propria eſt, non liceat niſi unicum characterem apponere; idem dicendum eſt de reliquis ſedibus, ſi enim inſcriberentur duo characteres fierent duæ ſedes, nec divinare quis poſſet, utrumque characterem ad eamdem ſedem pertinere. Undè maximus numerus, qui in qualibet ſede inveniri poteſt, eſt novenarius, hoc eſt in ſede unitatum, non poſſunt eſſe plures quàm novem unitates; nec in ſede ſemi-francorum, ſeu decadum plures, quàm novem decades, ſeu ſemifranci. Ratio eſt, quia decem unitates unam decadem efficiunt, quare in caſu quo decem unitates invenirentur, nihil in ſede unitatum notandum eſſet, ſed unitas ſola in ſede decadum, pariter cum decem decades centenarium efficiant; ſi invenirentur decem decades, hæ notandæ non eſſent in ſede decadum, ſed tantùm unitas in ſede centenariorum. Idem dicendum erit de reliquis ſedibus.

AXIOMA V.

Nulla ſedes anteriorem habens vacua ſit, ſed aut habeat aliquem ex ſupradictis characteribus aut ſaltem characterem expletivum o. Ratio eſt, quia ſi ſedes illa vacaret, numerus anterior ad illam pertinere videretur, unde ordo ſedium turbaretur; ut ſi ſint quatuor centenaria, decades nullæ, cum quinque unitatibus; debet poni in ſecunda ſede, ſeu decadum cyphra expletiva, o. hoc modo, 405. ſi enim poneretur 45. cyphra 4. quæ ſignificare debebat centenaria; decades tantùm indicaret; hoc eſt ſedes tertia incipiendo ab ultima inciperet eſſe ſecunda.

PROPOSITIO I.

Datum numerum notis Arithmeticis deſignatum appellare.

A.
213. 875. 469.

Sit numerus A, quotcumque cyphris notatus vocibus appellandus, & exprimendus. Primò per Axioma tertium, certum eſt ſedem ultimam ſeu 9. pertinere ad unitates: penultimam nempe 6. ad decades, antepenultimam 4. centenaria indicare; quare more arabico legendum eſſet, novem unitates, ſex decades ſeu ſexaginta; quadringenta; quinque millia, ſeptuaginta millia, octingenta millia, tres milliones, decem milliones, ducenti milliones: Arabes enim litteras ab Hebræis acceperunt, & à dextra incipiunt; noſtro autem more ita dicendum eſt; bis mille, tredecim milliones, octingenta ſeptuaginta quinque millia; quadringenta, ſexaginta novem unitates.

Quare nonnulli memoriæ cauſa poſt ternas quaſcumque cyphras incipiendo ab ultima, punctum apponunt, ultimaque trias denominationem habet, ab unitatibus, penultima à millibus, tertia à millionibus, ut in hoc exemplo. Ducenti tredecim milliones, octingenta ſeptuaginta quinque millia, quadringenta ſexaginta novem unitates.

Quotiès numerus plurium eſt, quàm novem characterum; defectu vocum, difficile eſt illum appellare, immò hæc vox millio latina non eſt; quare ut vocibus latinis numerum quemcumque exprimamus, notantur pariter puncta poſt ſingulos ternos characteres, quibus apponuntur ordine characteres Arithmetici, ſed ordine retrogrado 1. 2. 3. 4. ut punctum 4.

412. 543. 298. 754. 097.
4 3 2 1

ſignificat quater repetendam eſſe vocem hanc millium ſemel in caſu nominativo, & ter adverbialiter, ut in hoc exemplo, quadringenta duodecim millia millies, millies millies; quingenta quadraginta tria millia millies millies, ducenta nonaginta octo millia millies. Septigenta quinquaginta quatuor millia, nonaginta ſeptem.

Alij voces fingunt poſt millionem, billionem, trillionem, quatrilionem, quinquilionem hoc eſt appoſitis poſt ſingulas triades characterum incipiendo ab ultima, punctis, ultima trias, ad unitates pertinebit, penultima ad millia, antepenultima ad milliones, proantepenultima ad billiones, ut in appoſito exemplo, quadringenti duodecim trilliones, quingenti quadraginta tres billiones, ducenti nonaginta octo milliones, ſeptingenta quinquaginta quatuor millia nonaginta ſeptem.

Hæc autem nullâ demonſtratione indigent, cùm pendeant ex inſtituto, nempe quòd cyphræ in ſede anteriori decuplo augeant ſuum valorem.

PROPOSITIO II.

Problema II.

Quemcumque numerum notis Arithmeticis deſignare.

Singula membra ex quibus conſtat appellatus numerus, in ſuis ſedibus ſcribo, quæ autem ſedes vacuæ erunt, notam o. habeant, & perfectum erit problema.

Sit hoc exemplum propoſitum centum & quatuor milliones, viginti quinque millia, centum viginti. Fiant tria intervalla notatis aliquibus punctis; quia nempe milliones, millia & unitates habemus; ultimum intervallum tres ſedes habens unitatum, decadum, & centenariorum.

104. 025. 120.

Penultimum item tres; millium, decadum millium, & centenariorum millium. Antepenultimum, millionum, decadum millionum, & centenariorum millionum. Incipiamus ergo ab ultimo intervallo, more Arabico, habet autem centum viginti & nullam unitatem: ideoque in ſede unitatum quæ eſt ultima apponatur cyphra o. ponam ergo, 120. in penultimo membro ſunt tantum centum viginti quinque millia, ſine ullo centenario millium, ſedes ergo centenariorum millium habeat cyphram expletivam o. in tertio intervallo nempe centum & quatuor milliones, quia nulla fit mentio decadum millionum, ſecunda ſedes habeat notam expletivam o. & perfectum erit problema.

Demonſtratio. Quælibet ſedes ſui ſignificativam habet cyphram & nulla eſt vacua, quæ

non habeat, ſaltem cyphram expletivam O: igitur benè expreſſus eſt appellatus numerus. In hac autem cautione, nempe ut nulla ſedes vacua ſit, totum negotium conſiſtit; addiſcant igitur diligenter tyrones modum notandi, aut legendi, unum membrum trium ſedium, ex eo enim, additis tantum vocibus millium, millionum cætera enumerabuntur.

Memoriæ item mandent ordines ſedium, incipiendo ab ultima, unitates, decades, centenaria, millia, decades millium, centenaria millium, milliones, decades millionum, centenaria millionum, Billiones, &c.

PROPOSITIO III.

Problema III.

Additio numerorum integrorum.

Additio numerorum integrorum, eſt plurium numerorum in unam ſummam collectio, hoc eſt methodus conficiendi unicum numerum ex pluribus; qui numerus omnibus his ſimul ſumptis ſit æqualis. Exempló patebit definitio, Imperator habet fundibularios 2340. levis armaturæ pedites 5800. gravis armaturæ 2500. haſtatos 4315. equites lanceatos 1253. cataphractos 13200. quæritur quot capitibus conſtet exercitus, alia exempla tyronibus proponuntur, ut meliùs teneant ſtatum quæſtionis.

Præceptum primum, ſubſcribe numeros numeris, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenaria centenariis immineant.

	L.G.H.I.K.
A.	2340.
B.	5800.
C.	2500.
D.	4315.
E.	1253.
F.	13200.
M.	29408.

Secundum, in unum collige quidquid in eadem ſede invenitur, incipiendo ab ultima.

Tertium, ſi quod in una ſede colligitur, novenarium numerum non excedat, ſubſcribatur.

Quartum, ſi quod collectum eſt in una ſede novenarium, aut novenarium ſupra decadem, aut ſupra duas, tres, quatuor decades ſuperavit, minor ſubſcribatur, decades pro ſede anteriori reſerventur; hoc eſt, ſi id quod collectum eſt duabus cyphris ſcribendum eſt, ultima ſcribatur, prima reſervetur pro ſede anteriori.

Sint dati numeri A, B, C, D, E, F, qui ita ſcribantur ut unitates unitatibus reſpondeant, cæteræque ſedes ſuis correſpondentibus; ut quia numerus F continet quinque cyphras, alij tantùm quatuor, iſte exceſſus in anteriora rejiciatur.

Collige numeros ſedis K. qui quia novenarium non excedunt; 5. enim & 3. efficiunt & ſubſcribatur lineolæ character 8.

Colligantur numeri ſedis I, dicaturque 4. & 1. ſunt 5. & 5. ſunt 10. qui numerus cum excedat novenarium, hoc eſt duobus characteribus ſit exprimendus, ſcribatur ultimus character 0, & reſervetur primus 1.

Collige numeros ſedis H additâ unitate reſervata, unum & tria ſunt 4. & 8. ſiunt 12. & 5. ſunt 17. & 3. ſunt 20. & duo binarij ſunt 24. cum hic numerus ſcribatur duobus characteribus, ſcribetur ultimus, 4. reſervabitur primus 2. addendus numeris ſedis G. efficiet autem cum illis 19. ſcribatur ultima ciphra 9. reſervetur prima quæ addi debet cyphræ 1. ſedis L, efficietque cum illa binarium, quare Imperator propoſitus habet exercitum conſtantem militibus 29408. dico ergo numerum M æqualem eſſe omnibus numeris A, B, C. D. E. F. ſimul ſumptis.

Demonſtratio. Numerus M, eſt æqualis prædictis numeris, ſi tot præcisè contineat unitates, decades, centenaria, quot prædicti numeri ſimul ſumpti; ſed tot continet unitates decades, &c. nam numerus M. ſub unitatibus continet 8. quot ſunt in prædictis numeris in ſede unitatum, nempe 5, & tria quæ æquantur numero octonario. Pariter in propoſitis numeris ſunt decem decades, pro quibus numerus M addit in ſede centenariorum unum centenariũ; clarum eſt autem unum centenarium æquari decem decadibus; pariter ſunt in propoſitis numeris ſub littera H, centenaria viginti tria, erat autem jam unum ex decadibus collectum: ſunt igitur viginti quatuor centenaria; hoc eſt bis mille, & quatuor centenaria. Ponit autem numerus M quatuor millenaria, & in ſequentem ſedem duo reſervat; colliguntur ſub littera G ſeptemdecim millenaria in numero M cum duobus reſervatis efficiunt novemdecim millia, ſcribuntur novemdecim millia & reſervatur una decas millium, quæ additur alteri decadi, ut fiat duplex decas millium, igitur nihil eſt in prædictis numeris, quod non ſit in numero M. quod erat demonſtrandum.

Hîc apponam nonnulla exempla ut videat tyro utilitatem operationis.

Mercator debet uni	36453.	alteri	2324.
	13644.		3242.
Et ita conſequenter	7833.		4234.
	6452.		3242.
	8732.		2423.
Quæritur quantum debeat.	6886.		2434.
			4324.
	80 00.		22223.

Dominus aliquis duas habet villas, ex quarum prima reditus annuos percipit nummorum 2324. ex ſecunda 3142. quæritur ſumma redituum annuorum quæ erit 5566.

2324.
3242.
5566.

Quæſtor recepit ex variis diverſas nummorum ſummas, quæritur quid illæ ſummæ efficiant.

2040.	40307.	200.
3050.	23040.	300.
4020.	7203.	400.
6020.	10020.	800.
7030.	304.	1700.
22160.	30000.	
	52032.	
	6200.	
	169100.	

Quoties

A.		2	3	2.
B.		3	2	1.
C.		1	3	2.
D.		4	2	3.
E.	1	1	0	8.
F.		2	3	1.
G.		3	1	2.
H.		2	2	1.
I.		1	2	1.
K.		8	8	ſ.
L.		ſ	3	2.
M.		2	3	4.
N.		8	9	4.
O.		7	8	1.
P.	2	4	4	1.
E.	1	1	0	8.
K.		8	8	ſ.
P.	2	4	4	1.
	4	4	3	4.

Quoties longiores ſunt additiones & periculum eſt erroris; dividantur in ternas & quaternas, tum ſummæ ex illis collectæ in unam ſummam colligantur.

PROPOSITIO IV.

Problema. IV.

Examen additionis.

Quia fieri poteſt ut logiſta ſuperiores praxes, & notationes non obſervet exactè, aut in colligendis ſingularum ſedium numeris nonnumquam hallucinetur, præcipuè dum longiores ſunt, ideò aliqua examina explicanda ſunt, quibus ſuum errorem detegere poſſit.

Primum examen erit, ſi eamdem additionem repetas, ſed mutato pauliſper ordine, ut ſi in collectione numerorum ejuſdem ſedis, ab imo ſurſum proceſſeris, in examine à ſummo deorſum progrediaris, ut ſi in ultimo exemplo dixiſti 8. & ſ. ſunt 13. & unum ſunt 14. in hoc examine dicas unum & quinque ſunt 6. & 8. ſunt 14.

A.	8	9	1	0.
B.		6	ſ	4.
C.		1	2	3.
D.	9	6	8	7.
C.		1	2	3.
E.	9	ſ	6	4.
B.		6	ſ	4.
A	8	9	1	0.

Secundum examen fiat, per ſubſtractionem, ut ſi ſecundùm praxim ſuperioris propoſitionis in unam ſummam D, collegeris, tres numeros A, B, C, tum ex ſumma D, ſubtraxeris numerum C. fietque reſiduum E. ex quo pariter ſi numerum B. ſubtraxeris, debet niſi erratum fuerit relinqui numerus A.

Demonſtratio. Numerus D. æqualis eſt omnibus ſuis partibus A, B, C ſimul ſumptis, quare ſi ab eo auferas partem C, & iterum ex reſiduo partem B, neceſſariò relinqui debet numerus A.

Alia examina adhuc intelligi non poſſunt, niſi tradita ſubſtractione, examen autem per abjectionem novenarij indiget ſequenti Theoremate.

PROPOSITIO V.

Theorema I.

Si ex numero quocumque novenarius detrahatur quantum poteſt: idem numerus relinquetur, qui reſiduus eſſet, detracto novenario, ex numero qui fieret, ſi omnes characteres ejuſdem numeri colligerentur in unum quaſi omnes ad unitatem pertinerent.

Sit numerus quicumque A, ex quo ſubtrahatur novenarius quantùm poteſt, nempe ter; ſitque reſidua unitas, tum addantur characteres 8. & 2. quaſi ambo ad unitates pertineant, ita ut fiat numerus 10. ex quò detrahatur novenarius, dico fore ut pariter relinquatur unitas, quod aſſero in omni omninò numero evenire.

A. 2 8.

Demonſtr. Pendet ex inſtitutione cyphrarum, quæ ſunt in anterioribus ſedibus continent decies ſimiles cyphras in ſequenti ſede poſitas, ut cyphra 3. in penultimâ ſede, decies continet 3. in ultimâ ſede poſitam, hoc eſt eam continet novies & ſemel, ergo abjectis novenariis relinquitur eadem cyphra 3. ergo cyphra in penultima ſede poſita abjectis novenariis ſignificat unitates quæ relinquuntur ex numero quem ſignificat abjectis novenariis; ut 40. abjectis novenariis, 4. unitates habet: ſo. quinque: 60. 6: 70. 7: 80: 8: 90. nihil.

Pariter cyphræ antepenultimæ ſedis, continent ſimiles cyphras ultimæ ſedis centies, hoc eſt nonagies novies & ſemel, ergo abjectis novenariis relinquuntur tot unitates quot ipſæ ſignificarent, ſi eſſent in ultima ſede, hoc eſt 700. continet ſeptenarium centies, ſeu nonagies novies & ſemel, nonagies autem & novies ſeptem ſunt novenarij, quibus abjectis relinquitur ſemel ſeptem; idem dico de cyphris proantepenultimæ ſedis, quæ millies continent cyphras ultimæ, hoc eſt nongenties nonagies novies & ſemel, ſeu abjectis novenariis ſemel: ergo vera eſt propoſitio poſita.

COROLLARIUM I.

Si ex numero totali 4 ſ 8 1. primò ex quatuor millibus auferas novenarium quantum poteſt, relinquuntur quatuor, ſi ex quingentis ſ. ex octoginta, octo; quare addantur figuræ 4 ſ 8 1. quaſi eſſent ſimplices digiti, hoc eſt, quaſi omnes in ultima ſede verſarentur, fient 18. ex quo numero ſi auferatur novenarius, nihil relinquitur: quare ex numero 4 ſ 8 1. abjectis novenariis, nihil relinquitur.

COROLLARIUM II.

Si duos characteres ſimul addideris v.g. 7. & 8. ita ut 1ſ fiant: dico ſi addas 1. & ſ. & fiant 6. hunc numerum relinqui ex 1ſ. abjecto novenario; nam ex numero 10. abjecto novenario relinquitur unum, & ſ. fiunt 6.

PROPO

PROPOSITIO VI.

Examen additionis per abjectionem novenarij.

Abjice ex cyphris, tam numeri ex additione geniti, quàm ex numeris colligendis novenarium, quantùm poteſt, ſi utrinque idem numerus relinquitur, ſignum eſt ſatis certum nullum errorem in additionem irrepſiſſe. Quod ſi idem numerus non relinquatur neceſſariò erratum eſt.

A 4 8 5 7.
B 3 1 7.
C. 7 1. E.7.
D. 5 2 4 5. F.7.

Sint numeri addendi A, B, C, collectus autem ex additione ſit D. Aufer primò ex eo novenarium quantùm poteſt, & incipe à quacumque parte; dicito 5 & 4 ſunt novem; hunc numerum abjice, relinquunturque 2. & 5. hoc eſt 7. quos notabis in littera F.

Idem præſta in numeris addendis, & incipe verbi gratia, à numero A; & dicito 4. & 8 ſunt 12.abjecto novenario reſtant tria,tria & 5 ſunt 8. & 7 ſunt 15. abjecto novenario reſtant 6. ſex & tria numeri B. fiunt 9. quem numerum abjice, unum & 7. fiunt octo, octo & unum numeri C, fiunt novem; quem numerum abjice reſtant 7. qui numerus notandus eſt in E; cum ergo numeri E & F æquales ſint, aſſero non eſſe erratum.

Demonſtratio. Non eſt erratum ſi ſit æqualitas, inter numeros A, B, C, ſimul ſumptos,& numerum D. Si autem ſit æqualitas idem numerus reſtare debet, nam ſi ab æqualibus æqualia demas quæ remanent ſunt æqualia, idem autem numerus reſtat ex numeris methodo tradita, qui reſtat ſi cyphræ ſuum valorem retinerent (*per præcedentem*) ergo idem numerus reſtare debet; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VII.

Problema VI.

Additio numerorum denominatorum.

Quamvis hæc regula ad fractiones pertineat, videaturque diviſione indigere, quia tamen hæc diviſio ſine artificio, mente fieri poteſt, hanc prætermittendam non cenſui. Numeri denominati ſunt numeri affecti, aliqua voce indicante materiam cui applicantur, ut ſi addendi eſſent nummi, franci, aſſes, denarij, quæ additio apud mercatores communis eſt, vel ſi addendi ſint dies, horæ, minuta prima, minuta ſecunda, quæ additio communis eſt aſtronomis, vel addenda millenaria, paſſus, pedes, palmi, digiti, &c.

Si additio fiat in materia unius tantùm ſpeciei verbi gratia dum nummi nummis adduntur, nihilque aliud in regula proponitur, eſt additio communis. Si verò nummi nummis, franci francis addendi ſunt; numquam in ſede poſteriori ponendus eſt numerus, qui adæquet valorem anterioris, ut ſi proponantur nummi, franci, aſſes, denarij. Sunt autem tres franci in nummo, viginti aſſes in franco, duodecim denarij in aſſe, in ſede francorum nunquam plures duobus ponantur; ſi enim tres occurrant,ex his fiat nummus. In ſede aſſium numquam plures ſint quàm 19 aſſes; quoties enim erunt viginti aſſes, tot francos notabis.

Idem dicito in aliis exemplis.

Ut ſigna, gradus, minuta, minuta ſecunda. In ſede minutorum ſecundorum nunquam ponitur numerus ſuperans 59. ſi enim ſit numerus 60, fit unum minutum primum, ſexaginta minuta prima gradum efficiunt, 30 gradus unum ſignum, quæ omnia pendent ex inſtituto; ſicut in cyphra communi, in ſedibus poſterioribus nunquam ponitur numerus major novenario, quia decem unitates decadem efficiunt, decem decades centenarium.

	Nummi.	franci.	aſſes.	denarij.
A.	30.	2.	16.	10.
B.	17.	1.	19.	8.
C.	4.	2.	7.	11.
D.	53.	1.	4.	5.

Scribantur numeri addendi ſinguli ſub titulo ſuo, ut vides in numeris A,B,C,quorum primus A, ſignificat nummos 30. francos 2. aſſes 16. denarios 10. & ita de cæteris.

Adde ſimul numeros ſedium poſteriorum, & quoties fiet numerus cujus valor adæquet unitatem ſedis anterioris, tot unitates reſerva pro ſede anteriori, quod in exemplo patebit, adde ſimul denarios,fiuntque 29.hoc eſt bis 12.& quinque,ſcribe quinque reſerva bis 12.denarios ſeu duos aſſes; collige aſſes additis tamen duobus reſervatis fiuntque 44. hoc eſt duo franci cum quatuor aſſibus, ſcribantur quatuor aſſes, reſerventur duo franci, colligantur franci additis duobus reſervatis fiuntque ſeptem, ſeu duo nummi & unus francus qui ſcribatur, reſerventur duo, qui additi reliquis nummis efficiunt 53.

E. 51. 5. 42. 29.

Demonſtratio ſupponatur numerus E fieri ex additione ſimplici numerorum A, B, C, neglecta illa cautione quæ vetat in ſedibus poſterioribus poni numerum cujus valor adæquet unitatem anterioris ſedis. Cum ergo numerus E procedat ſecundùm methodum additionis communis, æqualis erit numeris A, B, C, ſed numerus E, æqualis eſt in valore numero D, nam perinde eſt in ultima ſede ſcribere denarios 29. aut in eadem ſcribere 5. reſervando ſcilicet duo aſſes pro anteriori; nam duo aſſes, viginti quatuor denariis adæquantur, idem dicito de aliis ſedibus, igitur eſt æqualitas inter numerum E & D. Ergo erit etiam æqualitas inter numerum D, & numeros A, B, C; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VIII.

Problema VII.

Subtractio.

Subtractio eſt inventio exceſſus, quò major numerus minorem ſuperat.

Primò ſubſcribatur minor numerus majori, ita per unitates unitatibus, decades decadibus, reſpondeant, ductâ lineolâ aufer unitates numeri ſubtrahendi, ex unitatibus numeri ſuperioris ſcribatur

ſcribaturque reliquum infra lineolam, idem fiat in decadibus & centenariis, & abſoluta erit regula.

A. 8 7 5 3.
B. 6 3 1.
D. 8 1 2 2.

Exemplum ſit numerus B ſubtrahendus ex numero A, aufer primò unitatem ultimam numeri B ex ternario numeri A; relinquuntur duo ſubſcribenda, ſi ex quinque numeri A auferantur tria, relinquuntur duo, ſi ex ſeptem auferas 6. relinquitur unum, ſi ex octo nihil aufferas relinquuntur octo; dico numerum D eſſe exceſſum numeri A ſupra numerum B; hoc eſt B & D, ſimul eſſe æquales numero A.

Demonſtratio. Tot ſunt in numeris B & D, unitates, decades, centenaria, quot in numero A, nam ſubducendo unitatem ex ternario, ſcribitur binarius; nempe numerus qui cum numero 1. adæquet ternarium; igitur 1. & 2. numerorum B. & D. adæquant ultimam cyphram numeri A; idem dicito de reliquis: igitur invenitur æqualitas, quod erat demonſtrandum. Atque hæc, dum ſingulæ cyphræ numeri ſubducendi, non ſuperant cyphras ſibi reſpondentes numeri ſuperioris.

Dum verò cyphra inferioris numeri ſuperat ſibi reſpondentem ſuperioris, ita ut ex ea ſubduci non poſſit, cyphræ ſuperiori addatur decas, & anterior ſedes minuatur unitate. Exemplum.

7
4 8 4. A. Debebat aliquis nummos
2 3 6. B. quorum perſolvit jam
2 4 8. C. quæritur quantùm debeat.

Subſcribantur numeri more conſueto; tum ductâ lineolâ ſubduc numerum 6. ex 4. quod cum fieri non poſſit, intellige ex numero decadum qui eſt 8. acceptam eſſe decadem, quæ addita 4. unitatibus efficit quatuordecim. Subtrahe 6. ex quatuordecim, reſtant octo ſubſcribenda, ſed memento jam ablatam eſſe decadem ex numero 8. ſuperiori, quare non ampliùs ſubtrahes tria ex octo, ſed ex 7. reſtabuntque 4. denique ſubtrahe 2. ex 4. reſtabuntque 2.

Notandum autem perindè eſſe ſive minuatur unitate numerus ſuperior 8. ſive augeatur unitate numerus inferior 3. idem enim ſequetur numerus, ſive tria ex ſeptem ſubducas, ſive quatuor ex octo, unde plurimi quoties denarium mutuantur, augent unitate numerum inferiorem ſequentem.

Demonſtratio. Oſtendam pariter ut ſupra numeros B & C, æquales eſſe numero A, atque adeò numerum C. eſſe exceſſum numeri A ſupra numerum B. Cæteræ difficultates in variis exemplis apparebunt, exercitus conſtabat militibus: occiſi ſunt in pugna, quæritur quot reſtent.

3 4 5 9 6.
1 0 3 0 0.
2 4 2 9 6.

Ita loqueris, qui ex 6. nihil aufert, reſtant 6. pariter qui ex novem nihil ſubtrahit, reſtant 9. ex quinque ſubduc tria, reſtant 2. ex 4. ſubduc nihil, reſtant 4. ex tribus unum, reſtant duo.

5 4 3 4 2.
2 4 2 4 2.
3 0 1 0 0.

Mercator frumenti habebat modia quorum jam vendidit quæritur quot reſtent.

Ita operaberis, qui ex duobus duo ſubducit reſtat o. ſcribendum, pariter qui ex 4. ſubducit 4. reſtat o. ſubſcribendum, qui ex 3. ſubtrahit 2. reliquam habet unitatem, qui ex 4. quatuor aufert, relinquitur o. ex quinque, duo, reſtant tria.

7 0 0.
4 0 0.
3 0 0.

Si auferas o. ex o. relinquitur o. & iterum o, ex o, relinquitur o, ex 7. quatuor, reſtant 3. ratio cur ablato o. ex o. relinquitur o. ideò tantùm quia ſedes vacua eſſe non debet.

6 0 0 0 8. B.
2 4 8 6 9. H.
3 5 1 3 9.

Auferendus ſit numerus H. ex numero B. quia ſubduci non poteſt 9. ex 8. ſubducatur ex 18. reſtabitque novenarius ſubſcribendus, ſed memento te mutuatum eſſe decadem; ideóque aut minuendam ſuperiorem cyphram aut augendam inferiorem additò memoriæ cauſa puncto, ſubduc igitur 7. non ex o. quod fieri non poteſt, ſed ex 10. reſtabuntque tria; pariter memento te mutuatum eſſe decadem, ideò auge unitate numerum 8. & ſubtrahe novenarium ex 10. reſtabitque unitas.

Quoties numerus aliquis ſubtrahendus eſt ex pluribus; illi plures numeri in unam ſummam colligantur.

PROPOSITIO IX.

Problema VIII.

Subductionis examina.

A. 1 6 3 8.
B. 1 4 2 1.
C. 2 1 7.
D. 1 6 3 8.

Certum eſt ex ſuperioribus, quod ſi facta eſt bona ſubtractio in qua ſcilicèt numerus B ſubductus eſt ex numero A, & ſit reliquus C; quod numeri B & C æquales eſſe debeant numero A; ideóque eadem examina quæ ſupra dedimus pro additione, hîc etiam locum habent.

Primum examen erit per abjectionem novenarii; hoc eſt abjecto novenario ex numero A, quantum abiici poteſt, idem numerus relinqui debet abjecto novenario ex numeris B & C.

Secundum examen erit per additionem; nempe ſi numeros B & C ſimul, addas debet reſtitui numerus A.

Tertium per ſubductionem procedet; cum enim numeri B & C æquales eſſe debeant numero A, ſi ſubducas numerum C; ex numero A; debet relinqui numerus B.

PROPO

PROPOSITIO X.

Problema IX.

Subtractio numerorum denominatorum.

	Dies,	hora,	min.	ſec.
A.	40.	21.	32.	40.
B.	31.	19.	36.	22.
C.	9.	1.	56.	18.

Diſponantur ambo numeri ſinguli in ſuis ſedibus, ſubtrahe inferiorem ex ſuperiori; ejuſdem denominationis ſi fieri poteſt, quod ſi ſuperior minor ſit ita ut ſubtractio fieri non poſſit, mutuanda eſt unitas ex anteriori, quæ dividenda eſt in tot unitates poſterioris numeri quot ipſa continet; ſint propoſiti dies, horæ, minuta prima, & minuta ſecunda. Dies autem æqualis eſt horis 24. hora minutis primis 60. minutum primum minutis ſecundis 60. ſit ergo numerus B. ſubducendus ex numero A, ſubtrahe 22. ex 40. more ſolito, reſtabitque 18. ſubtrahe 36. ex 32. quod fieri non poteſt, quare ita procedes, ſubtrahe 6. ex 2. non potes ex 12. reſtant 6. augenduſque eſt numerus 3. unitate; ita ut fiant 4. aufer 4. ex tribus non potes, aſſume unam horam ex numero 21. quæ cum minutis ſexaginta æquivaleat, non ampliùs quatuor numeros inferioris ſubtrahis, ex triginta minutis, ſed ex nonaginta; reſtabantque quinquaginta ſubſcribenda, augeatur numerus 9. unitate ſecundum præceptum ſuperioris propoſitionis, ſubduceſque 20. ex 21. reſtabit unitas, denique 31. ſubduces ex 40. reſtabunt 9.

Demonſtratio. Oſtendere debeo numeros B, & C, æquales eſſe numero A, nempe tot eſſe dies, horas, minuta prima & ſecunda; in B & C, quot innumero A, exponatur enim numerus D. Quem dico æqualem eſſe numero A, eò quòd minuta 96. horam unam efficiant. Cum minutis 36. ſed numeri B & C æquales ſunt numero D, nam in ſingulis ſedibus quæſivimus numerum, qui cum ſibi correſpondente numeri B adæquaret correſpondentem in numero D: ergo B & C æquales ſunt numero D, ergo & numero A.

	Horæ	dies	mi.	30.
D.	40.	20.	96.	40.

Examen hujus ſubtractionis multiplex eſſe poteſt: primum erit ſi numeros B & C ſimul addas, inveniaſque numerum A.

Secundum ſi numerum C ſubtrahas ex numero A relinqui debet numerus B.

Alia examina non ſunt hujus loci.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Quid ſit multiplicatio.

Multiplicatio numeri per numerum, eſt inveſtigatio numeri, qui toties contineat numerum multiplicandum, quot ſunt unitates in multiplicante ut ſi numerus A multiplicandus ſit, per B, quærimus numerum C. in quo toties ſit numerus A, quod ſunt unitates in numero B. quæ multiplicatio eſt virtualis additio, quærimus enim quis numerus colligeretur ex numero A quater poſito hoc modo.

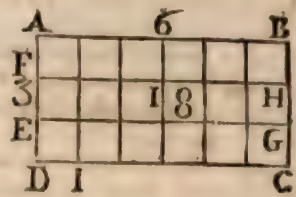
A.	12.
B.	4.
C.	48.

12.
12.
12.
12.

48.

Ex quo ſequitur, in multiplicatione, quæri numerum, ad quem numerus multiplicandus, eandem habeat rationem, quam habet unitas, ad numerum multiplicantem. Quæritur enim numerus C, qui toties contineat numerum A, quoties B continet unitatem; erit ergo, ut unitas ad B, ita A ad C. Qui ſolam arithmeticam quærit cætera relinquere poteſt.

Diximus jam aliàs in ſecundo libro Elementorum Euclidis, per multiplicationem generari ſuperficiem aliquam, & idem eſſe unum numerum per alium multiplicare, ac ex duabus lineis rectangulum conſtituere, verbi gratiâ, ex lineis AB, AD. Exprimimus autem in rectangulis tantùm duas lineas, quia cum adverſæ lineæ ſint æquales nempe AB, CD, ſicut & AD, BC.: ſufficienter exprimitur rectangulum, ſi duplicem ejus dimenſionem exprimamus, nempe longitudinem, & latitudinem.



Produceretur autem rectangulum A C, ſi A B perpendiculariter ſemper inſiſtens, lineæ A D, percurrat totam AD, unde dicitur una linea duci in aliam. Clarum autem eſt idem rectangulum produci, ſive linea A B percurrat lineam A D, ſive linea AD percurrat lineam AB; nam dum linea A B perpendiculariter inſiſtens movetur ſuper AD, deſcribit lineam B C parallelam lineæ AD, ſeu æquali ſemper intervallo diſtantem à lineâ A D: ergo rectangulum illud definietur lineâ BC parallelâ ipſi A D, ſed AD eſt perpendicularis ad AB; ergo & BC eidem AB perpendicularis erit. Dum autem A D perpendiculariter ſemper inſiſtens ipſi AB pervenerit in B, cadet ſupra B C alioquin mutaret ſuum ſitum perpendicularem, contra ſuppoſitionem: ergo ſive A B percurrat ipſam A D, ſive AD percurrat ipſam A B idem ſemper parallelogrammum rectangulum generatur.

Idem in numeris accidit. Sint enim duo numeri AB, AD ſive dicatur ter ſex; ſive dicatur ſexties, tria idem numerus 18. producetur.

Ut autem meliùs hoc intelligatur. Quoties unum numerum per alium multiplicamus; utrumque non per modum unius lineæ intelligimus, ſed quaſi per modum alicujus rectanguli conſtantis, tot parvis quadratis, quot ſunt in eò unitates; ut verbi gratia, numerus 6. intelligitur per modum rectanguli D G conſtantis 6. parvis quadratis. Ideoque dum numerum D C, multiplicamus per numerum CB quærimus quot eſſent

parva quadrata ſi rectangulum D G toties ſumeretur, quot ſunt unitates in numero CB. Ex quo fit ut dum unum multiplicamus per alium perinde ſit, ac ſi tot ordines ſex quadratorum conſtitueremus, quot ſunt unitates in C B. Clarum eſt autem, quod ſi tres ordines ſex quadratorum, hoc modo conſtituamus, ſex etiam erunt ordines trium quadratorum, nam ſingula quadrata rectanguli debent in ſuperioribus ordinibus, habere ſibi correſpondentia; ergo tot poterunt eſſe ordines trium quadratorum, quot ſunt unitates in numero A B. Unde rurſus ſequitur, quòd ſive numerus A B multiplicet numerum A D, ſive A D multiplicet numerum A B, idem ſemper numerus 18. inveniatur. Quòd ulteriùs oſtenditur: numerus B multiplicet numerum C, & producatur numerus D; dico quòd ſi numerus C multiplicet numerum B; ita ut producatur numerus E, quòd numeri E & D æquales erunt. Nam cum (*per defin. hanc*) in multiplicatione

A.	B.	C.	D.
I.	3.	5.	15.
C.	B.	E.	
5.	3.	15.	

numeri C per B quæratur numerus qui toties contineat ipſum C, quoties numerus B, continet unitatem A; ita erit A ad B, ſicut C ad D; ergo alternando ita erit A ad C, ſicut B ad D; quare ſi quæratur numerus E, qui toties contineat ipſum B, quoties C continet ipſum A; erit ut A ad C, ita B ad E, ergo erit B ad D ſicut B eſt ad E, ergo E & D ſunt æquales (*per 7. 5.*) quod erat demonſtrandum.

Ex hoc ſequitur, quod in multiplicatione perinde ſit quicumque dicatur multiplicans aut multiplicandus. Idemque ſit dicere ter quinque & quinquies tria.

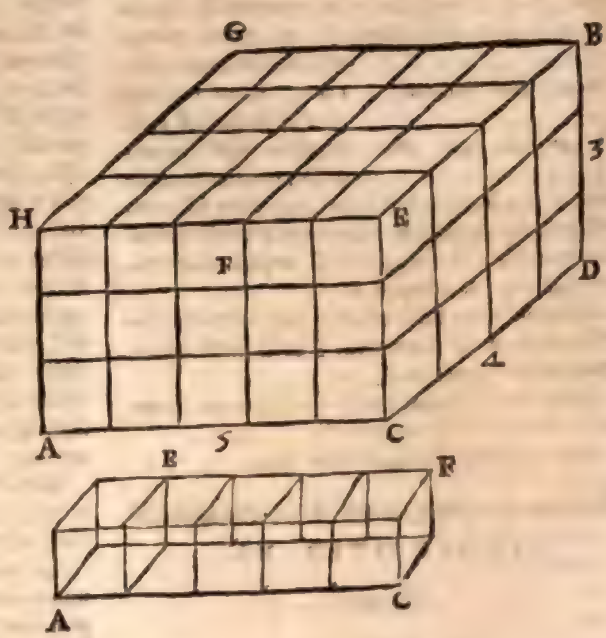
Quotieſcumque aliquis numerus eſt aut ſolus; aut in additione, quaſi linearis ſpectatur, ſicut ergo licet nobis quamcumque lineam rectam quantùm voluerimus, producere; aut ab eâ reſecare partem quamcumque, ita etiam per additionem numerum numero addimus in longitudinem; & à numero numerum abſcindimus per ſubtractionem, nullam concipiendo, in eo numero, latitudinem. Quoties autem numerum per numerum multiplicamus, ut eum exhibere poſſimus ſub ſpecie alicujus rectanguli; numerum multiplicandum concipere debemus per modum rectanguli, conſtantis tot parvis quadratis, quot continet unitates. Quæ conſideratio libera eſt, hoc eſt fuit licitum Mathematicis ſuos numeros in ordinem quem volunt digerere. Fateor enim quòd poterat intelligi multiplicatio numeri per modum productionis lineæ ita ut bis, ter, quater, quinquies, centies repeteretur. Voluerunt tamen aliter conſiderare; quia ex ea conſideratione mirabiles oriuntur proprietates, ita ut quæ figuris exhibent, etiam in numeris faciliùs oſtendant.

Ex eâ conſideratione oritur, quòd quoties unus numerus, alium multiplicat; qui oritur numerus planus vocetur, hoc eſt imaginando eos numeros cum aliquâ latitudine, ut dixi, oriatur aliqua area, tot continens quadrata, quot ſunt unitates in numero producto; ut in figura priùs propoſita, oritur rectangulum A C continens 18. parva quadrata. Unde quoties numerum unum per alium multiplicamus, poſſumus productum conſiderare per modum rectanguli, & tunc ille planus erit; & numeri illum producentes, dicentur ejus latera.

Ex hac conſideratione benè intelligi poteſt, quo ſenſu dicatur aliquis numerus quadratus. Cum enim duo numeri æquales, ſe invicem multiplicaverint, fit rectangulum cujus longitudo æqualis eſt latitudini. Tale autem rectangulum quadratum eſt, ideoque numerus quadratus erit; ut ſi tria per tria multiplices producitur numerus novenarius, qui quadratus eſt, & latus ejus ſeu ternarius, vocatur etiam radix quadrati.

Similis eſt conſideratio numeri ſub ratione ſolidi alicujus; tunc autem primus numerus intelligi debet tanquam parallelepipedum rectangulum. Numerus igitur ſolidus eſt ille, qui producitur ex multiplicatione trium numerorum. Senſus eſt quod quoties tres numeri ſe invicem multiplicant, liceat conſiderare numerum productum tanquam aliquod ſolidum: Seu quod idem eſt, licet ordinare omnes unitates in modum ſolidi alicujus, ita ut numeri illi ſe invicem multiplicantes ejus latera dici poſſint. Ut ſi ſit numerus AC, nempe 5. C D 4. & DB tria. Multiplica AC 5. per CD 4. & fient 20. quæ multiplica per tria fientque 60. debet autem primus numerus A C intelligi, per modum parallelepipedi conſtantis, quinque parvis cubis, & per triplicem illam multiplicationem, exurgit numerus 60. quot nempe conſtaret cubis unius pedis, illud ſolidum rectangulum cujus unum latus eſſet quinque, aliud 4. aliud trium pedum.

Producitur autem illud ſolidum, ſi rectangulum unum verbi g. AE inſiſtendo ad rectos, baſi AD intelligatur ferri ſupra lineam C D, ita ut



ſemper linea A C ſit perpendicularis ad CD. Et quia generatur idem ſolidum ſive ſuperficies A E feratur in ſuperficiem D C ſive ſuperficies C B feratur in A C, ſive baſis AD aſcendat in E C, ideò

ideò ſive hæc duplex multiplicatio hoc modo inſtituatur, hoc eſt numerus 5. per 3. multiplicetur; & fiat 15. quaſi ſuperficies A E, & iterum illa multiplicetur per 4. hoc eſt intelligatur ferri in DG; ſive hoc modo, ut incipiamus à multiplicatione 4. per tria, & fiat ſuperficies CB, ſeu 12. quæ iterum multiplicetur per 5. hoc eſt feratur in A G, ſive multiplicemus 5. per 4. & fiat rectangulum A D nempè 20. quod multiplicetur iterum per tria hoc eſt aſcendat in EB; idem ſolidum 60. generatur.

A.	B.	C.
3.	4.	5.
E.	G.	F.
12.	15.	20.
H.	I.	K.
60.	60.	60.

Quod alio modo oſtendemus ſupponendo quod quoties idem numerus, alios duos multiplicat producti eandem habeant inter ſe rationem, ac illi duo: ut numerus B multiplicet A, & C; producti eandem habebunt rationem, quia quater A, & quater C eandem habent rationem ac A, & C; cum (*per 15. 5.*) A & C productorum ſint partes aliquotæ ſimiles, nempe quadrantes, quæ eandem habebunt rationem ac tota. Quibus poſitis.

Sint numeri A, B, C quomodocumque multiplicandi: dico eundem numerum proditurum, & primò A & B multiplicent ſe invicem, & producatur E, qui multiplicetur per C, fiatque H; item B & C in ſe ducantur & fiat F, qui multiplicetur per A, fiatque K, item A & C in ſe ducantur, & fiat G; qui multiplicetur per B fiatque I; dico H, I, K eſſe æquales.

Demonſtratio. B multiplicans A & C facit E & F; ergo ita eſt A ad C, ſicut E ad F; ergo rectangulum ſub A primo & F ultimo quod fit multiplicando F per A; nempe K, eſt æquale rectangulo ſub C & E, quod fit multiplicando C per E, nempe H; pariter quia C multiplicando A & B, facit G & F, ita erit A ad B, ſicut G ad F; ergo rectangulum ſub primo A & ultimo F, nempe K, æquale erit rectangulo ſub B & G, nempe rectangulo I. Si tres numeri æquales multiplicentur qui producetur numerus cubus erit, cum enim tres numeri ſe invicem multiplicantes; ſint latera illius ſolidi rectanguli, ſolidum autem rectangulum lateribus omnibus æqualibus conſtans, vocetur cubus; numerus etiam eodem modo productus cubus erit. Et latus ejus vocabitur radix cubica.

Quamvis in bono ſenſu liceat fingere omnem numerum quaſi quadratum, & quaſi cubum, illi tamen propriè vocantur quadrati, qui producuntur ex aliquo numero per ſeipſum multiplicato ut numeri propoſiti. Quorum radices quadratæ ſunt numeri integri, alij intermedij non vocantur propriè quadrati, licèt aliquando fingantur quaſi quadrati, & eorum radix quadrata extrahatur.

4. 9. 16. 25. 36. 49.
Sunt
2. 3. 4. 5. 6. 7.

Non habebitur autem præciſa, quia præciſa in numeris exhiberi non poteſt. Si enim daretur linea tot continens menſuras certas, quot quadratum v. g. 18. continet unitates, licèt poſſit aſſignari linea cujus quadratum contineat octodecim pedes quadratos, hæc tamen erit incommenſurabilis cum linea unius pedis, aut octodecim pedum; atque adeò numeris exprimi non poterit, ſuppoſito, quòd alia numeris exprimatur, & in eo ſenſu numeri nullum habent numerum pro radice; licèt verè ſi, non hoc modò abſtractè, ſed in ſubjectâ materiâ exhiberentur quadrata, daretur & aſſignaretur eorum latus, ſeu radix quadrata.

Idem intelligendum eſt de numeris non cubicis, ſunt autem iſti cubi 8. 27. 64. 125. 216. & alij.

Nam bis duo ſunt quatuor, bis quatuor ſunt 8. pariter 27.64.125.216. ſunt numeri cubi; alij omnes intermedij integri, non ſunt cubi in ſtrictâ ſignificatione, hoc eſt, quorum præciſa radix cubica ſeu latus, poſſit aſſignari.

PROPOSITIO XII.

Digitum per digitum multiplicare.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.	20.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.	30.
4.	8.	12.	16.	20.	24.	28.	32.	36.	40.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.
6.	12.	18.	24.	30.	36.	42.	48.	54.	60.
7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70.
8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	72.	80.
9.	18.	27.	36.	45.	54.	63.	72.	81.	90.

Totum artificium multiplicationis, in eò poſitum eſt, ut ex multiplicatione ſingulorum characterum, per ſingulos characteres, quaſi eſſent ſimplices digiti, erumpat multiplicatio totius numeri per totum numerum. Ideóque neceſſariò tanquam fundamentum, præmittenda fuit methodus multiplicandi digitum, per digitum; hoc eſt multiplicandi numerum unico charactere conſtantem per alium numerum unico item charactere conſtantem, verbi gratia, inquirendi quis numerus exurgat ſi 7. per tria multiplicentur, ſeu ter ſeptem quid producant, 21.

Prima methodus erit ope tabulæ Pythagoricæ, quam etiam memoriter ſcire debent Tyrones; conſtat autem lineis novem quarum prima incipit ab unitate. 2. à binario. 3. à ternario, & ita deinceps uſque ad novenarium. Prima creſcit ſemper unitate. 2. binario. 3. ternario, & ita deinceps; & hoc modo abſolvitur tota tabula.

Uſus tabulæ talis eſt; minorem numerum quem adverbialiter proferre debes, quære in primo ordine perpendiculari. Secundum in prima linea, communis concurſus dabit numerum quæſitum. Dentur hi duo numeri multiplicandi 3. per 8. ſeu quot ſint ter octo. Quæro in primo ordine perpendiculari tria; jam habeo quod in linea ternariorum debeat inveniri numerus quæſitus; tum in linea ſuperiori quæro 8. & in communi concurſu invenio 24. igitur ter 8. ſunt 24.

Demonſtr. Cùm (*per conſtructionem,*) tertia

Digitized by Google

linea ſemper creſcat ternario, in octava ſede dabit octo ternarios, octo autem ternarij aut tres octonarij idem ſunt; ut oſtendimus, igitur communis concurſus dat numerum quæſitum. Ut autem Tyrones ea poſſint memoriter addiſcere; volui illud hic deſcribere eo modo quo pronunciari debet.

Bis duo ſunt quatuor. Bis tria ſunt ſex. Bis quatuor ſunt octo. Bis quinque ſunt decem; Bis ſex ſunt duodecim. Bis ſeptem ſunt quatuordecim. Bis octo ſunt ſexdecim. Bis novem ſunt octodecim.

Ter tria ſunt novem. Ter quatuor ſunt duodecim. Ter, quinque, ſunt quindecim; Ter, ſex, ſunt octodecim. Ter ſeptem viginti unum. Ter octo viginti quatuor. Ter novem ſunt viginti ſeptem.

Quater quatuor, ſunt ſexdecim. Quater quinque, viginti; Quater, ſex, viginti quatuor; Quater, ſeptem, viginti octo. Quater octo, triginta duo. Quater novem ſunt triginta ſex.

Quinquies quinque ſunt viginti quinque; quinquies ſex triginta. Quinquies ſeptem triginta quinque. Quinquies octo quadraginta. Quinquies novem, quadraginta quinque.

Sexies ſex, triginta ſex. Sexies ſeptem, quadraginta duo; ſexies octo quadraginta octo. Sexies novem quinquaginta quatuor.

Septies ſeptem quadraginta novem. Septies octo, quinquaginta ſex. Septies novem, ſexaginta tria.

Octies octo, ſexaginta quatuor. Octies novem ſeptuaginta duo. Novies novem, octoginta unum.

Viderentur deeſſe aliqua, ut novies tria. Novies quatuor ſed ſecundùm regulam priùs traditam inverte & dicito ter novem. Quater novem: & ita quoties major numerus ponitur adverbialiter, incipio à minori.

Quia præcipuæ difficultates ſunt circa characteres majores. Circa novenarium hæc regula obſervari poterit. Quoties novem multiplicatur, per quemcumque digitum, producetur numerus decadicus illius digiti; minus illo digito. Hoc eſt bis novem ſunt 20. minus duobus. Hoc eſt octodecim. Ter, novem, ſunt triginta minùs tribus. Quater novem, 40. minùs quatuor, & ita de reliquis. Ratio clara eſt, quia à ſingulis decadibus novenarius deficit unitate. Igitur tot unitates detrahendæ, ſunt, quot ſunt decades.

Pariter ſi octo multiplicanda ſint per quemcumque digitum, fiet numerus decadicus illi digito reſpondens, detracto bis illo digito. Ut ter, octo, ſunt triginta minus 6. quater octo ſunt quadraginta minus octo, & ita de reliquis. Ratio eadem quæ ſuperior.

Alij tradunt methodos multiplicandi digitum per digitum, per differentiam eorum à numero denario. Sed opus eſt ut Tyrones tabulam Pythagoricam diligenter addiſcant; nec aliis immorentur.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Numerum quemcumque per alium quemcumque multiplicare.

A.	4 5 8 3.
B.	1 2 3.
C.	1 3 7 4 9.
D.	9 1 6 6.
E.	4 5 8 3.
F.	5 6 3 7 0 9.

Sit numerus A per numerum B multiplicandus. Primò ita diſponantur, ut digiti, digitis; decades decadibus; reſpondeant; & numerus minor ſupponatur majori, 2o. per ultimam figuram numeri B, multiplica ſingulas figuras numeri A; ita tamen, ut ſi illud quod per multiplicationes ſingulas productum fuerit, non ſuperet novenarium ſcribatur; ſi verò ſuperet, ſcribatur ultima cyphra alia verò ſervetur. Hoc modo ter tria ſunt 9. quia non ſuperat denarium ſcribuntur novem. Deinde dico, ter octo ſunt 24. ſcribo 4. & reſervo duo. Ter quinque ſunt 15. cum duobus quæ reſervaram; fiunt ſeptendecim ſcribo 7. & reſervo unum. Ter quatuor ſunt 12. cum uno priùs reſervato ſunt 13. quæ ſcribo atque hic numerus 13749. eſt ille qui producitur ex multiplicatione numeri A per tria. Tertiò multiplico totum numerum A, per penultimam figuram numeri B, nempe per 2. eodem modo, niſi quòd, numerus D productus retrahatur in anteriora unâ ſede. Hoc modo bis tria ſunt 6. ſcribantur 6. ſub ſerie decadum. Bis octo ſunt 16. ſcribo 6. reſervo unum. Bis quinque ſunt 10. & unum ſunt 11. ſcribo 1. reſervo unum. Bis, quatuor; ſunt 8. & unum reſervatum ſunt 9. Quartò multiplico eundem numerum A per antepenultimam cyphram numeri B, retrahendo numerum E productum una ſede.

Quintò ſimul addo numeros C, D, E productos, ita ut fiat numerus F, dico numerum F eſſe quæſitum nempe numerum F, toties continere numerum A, quod ſunt unitates in numero B; ſeu eum continere centies vigeſies & ter.

Demonſtr. Primò. Si numerus A multiplicaretur per ultimam cyphram numeri B tantùm, produceretur numerus C. nam dicere ter 4583. idem eſt ac ſi hi tres numeri ſimul adderentur, ſed ſi tres numeri ſimul adderentur, produceretur numerus C, eaſdem enim cautiones adhibuimus, in hac multiplicatione, quæ in ſimplici additione obſervantur; nempe ut quoties in una ſede reſultat numerus novenarium ſuperans ultimus ejus ſcribatur character; reſervetur prior in ſedem anteriorem: ergo numerus C tot continet unitates quot numerus A ter ſumptus.

4 5 8 3.
4 5 8 3.
4 5 8 3.
1 3 7 4 9.

Secundò numerus D ortus ex multiplicatione numeri A, per penultimum characterem numeri B nempe 2. qui 2. ſignificat viginti; eſt enim in ſede decadum. tot continet unitates quot numerus A vigeſies ſumptus; nam cum diximus

Digitized by Google

diximus bis tria ſunt 6, & poſuimus 6; ſub ſede decadum, idem eſt ac ſi dixiſſemus, vigeſies tria, ſeu 60, ſunt enim 6. decades. Pariter dum diximus bis 8 ſunt ſexdecim, idem præſtitimus, ac ſi dixiſſemus vigeſies octo decades, ſunt centum ſexaginta decades ſeu 1600. ſcripſimus autem 6. in tertia ſede quia pertinet ad centenarios numeros, & ita deinceps in reliquis. Ideóque per ſimplicem retractationem in anteriorem ſedem, idem præſtitimus ac ſi numerum A per viginti multiplicaviſſemus: igitur numerus D continet tot unitates, quot numerus A vigeſies ſumptus; intelligendo tamen quod ultima cyphra numeri D ſit decadum.

Idem probatem de numero E, qui tot continet unitates quot numerus A centies ſumptus. Intelligendo tamen cyphram ultimam numeri E pertinere ad centenarios numeros. Igitur tres numeri C, D, E, tot continent unitates quot numerus A centies vigeſies & ter ſumptus. Sed numerus F genitus ex additione numerorum C, D, E, atque adeò illis ſimul ſumptis æqualis tot continet unitates, quot numerus A centies vigeſies & ter ſumptus quod erat faciendum.

COROLLARIUM I.

Numerus quilibet per decem multiplicatur ſi illi addatur in fine o, oſtendimus enim quod per ſimplicem retractionem in anteriorem ſedem, idem præſtamus multiplicando, per digitum, ac ſi multiplicaremus per numerum decadicum ei reſpondentem. Sed ſi multiplicaretur per unitatem, non mutaretur ille numerus & per additionem numeri o in fine, retrahitur in anteriorem ſedem; ergo multiplicatur per 10. vel ſingulæ cyphræ, in ſede anteriori decuplò augent valorem ſuum; ſed per additionem cyphræ o, in fine; ſingulæ ſunt in anteriori ſede. Hoc eſt quæ erat ultima fit penultima, & ita de reliquis; igitur fit multiplicatio per denarium numerum; ſi duo o addantur, fit multiplicatio per 100. ſi tria o mille.

COROLLARIUM II.

Pariter ſi numerus habens in fine unum, duo, tria, quatuor o, decurretur, per deletionem unius o, dividitur per denarium numerum, hoc eſt reſtat tantum decima ejus pars, priùs enim ſinguli characteres decuplò majorem habebant ſignificationem.

COROLLARIUM III.

Si numero bis ſumpto addatur o. idem eſt ac ſi multiplicatus fuiſſet per 20. ſi ter ſumpto idem eſt ac ſi multiplicaretur per 30. & ita deinceps. Si bis ſumpto adderentur duo o idem eſt ac ſi multiplicaretur per 200.

COROLLARIUM IV.

Si numerum decurres ultimâ cyphrâ quæ ſit o, & reſidui accipias dimidium, idem eſt ac ſi talis numerus diviſus eſſet per 20. & ita de reliquis.

COROLLARIUM V.

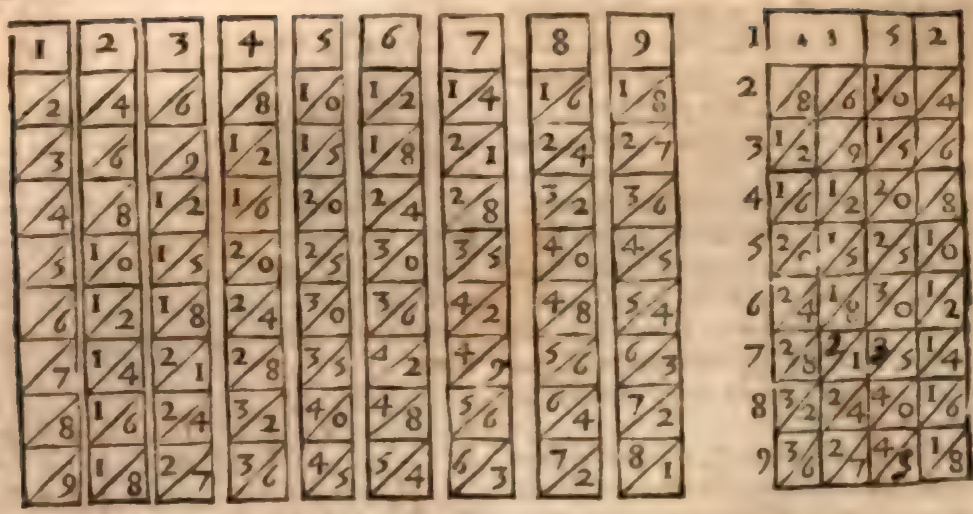
Ex hac multiplicandi numeri per numerum methodo, facile praxim Neperi rabdo Logicam concipies, qui nempe ope priſmatum quadrangularium multiplicationem, & diviſionem abſolvit. Quæ praxis ut intelligatur præpono aliam non abſimilem potius ut intelligatur, Neperiana quàm ullius compendij cauſa; niſi forſitan, in maximis operationibus ad ſublevandum tædium.

A	4 5 8 3.	1.	4 5 8 3.	A.
B.	7 6 4.	2.	9 1 6 6.	D.
		3.	1 3 7 4 9.	E.
F.	1 8 3 3 2.	4.	1 8 3 3 2.	F.
	7 4 9 8	5.	2 2 9 1 5.	G.
H. 2	[illegible]	6.	2 7 4 9 8.	H.
K. 3	3 2 0 8 1	7.	3 2 0 8 1.	K.
		8.	3 6 6 6 4.	
	3 8 0 1 4 1 2.	9.	4 1 2 4 7.	

Ita autem habet, ſint A & B numeri multiplicandi. Paretur tabella, verbi gratia. Sit numerus A multiplicandus. Primò ſcribatur, & è regione illius ponatur 1. duplicetur & è regione ponatur 2. triplicetur & è regione ponatur 3. & ita deinceps uſque ad novenarium. Hæc autem multiplicatio per ſolam additionem fieri poteſt. Si enim numerum A numero A addas, producitur numerus D, illius duplus. Si numero D addas numerum A, exurgit numerus E illius triplus. Si numero E addas numerum A, fiet numerus F & ita deinceps, quâ paratâ tabellâ ita uteris. Sit numerus A multiplicandus per numerum B, primò quia multiplicari debet per ultimum characterem 4. excerpe numerum F, cui præfigitur character 4. deinde quia eundem numerum A multiplicare debes per penultimam cyphram numeri B nempe per 6. excerpe numerum H. Tandem quia idem numerus A per 7. multiplicandus eſt, ſcribe numerum K; cætera ut in multiplicatione perficies.

Tota difficultas eſt in paranda tabella, qua ſemel parata nullam habet difficultatem multiplicatio, quæ non ſit in ſimplici additione. Unde excogitavit Neperus tabulam aliquam quæ eſſet idonea omnibus numeris multiplicandis. Vult igitur ex quacumque materia ſolida verbi gratia ex aurichalco, ligno, imo & craſſiori ſeu compactâ chartâ parari plura rectangula longiuſcula, quæ novem quadrata contineant, quorum ſingula ſcribendis ſaltem duabus cyphris idonea ſint. Vult autem haberi plura hujuſmodi verbi gratia triginta; in utraque facie notata, eo qui ſequitur modo.

In



In rectangulis illis oblongis, ſcribe tabellam pythagoricam. Quoties autem in eodem quadrato ſunt duæ cyphræ, hæ ſeparentur ducta diametro: ſi unica fuerit ſcribatur infra diametrum relicto triangulo ſupra diametrum vacuo. Uſus autem talis eſt.

A. 4 3 5 2.
B 4 5 3.
———
1 3 0 5 6.
2 1 7 6 0
1 7 4 0 8
———
1 9 7 1 4 5 6

Sit numerus A multiplicandus per numerum B. Ita diſpone tua rectangula, ut in fronte referant numerum A. & paratam habebis tabulam numeri A, & quia numerus A, multiplicari debet per ultimam cyphram numeri B quæ eſt 3. tertia linea ſcribenda eſt non ſimpliciter, ſed addendi ſunt characteres quando eſt unus in ſuperiori triangulo quadrati, & alius in inferiori præcedenti. Quod in exemplo clarum erit. In tertiâ igitur lineâ: ultima cyphra eſt 6. ſcribatur hæc, & quia in triangulo ſupra diametrum nihil eſt, ſcribatur ſequens character 5. Deinde quia in ſuperiori triangulo eſt 1, & in inferiori eſt 9. adde ſimul & fiunt 10. ſcribe 0. & retine 1. unum & duo ſunt tria ſcribe tria. Deinde 1. ad habendum numerum qui oritur ex multiplicatione numeri A. per penultimam cyphram numeri B, nempe per 5. excerpe quintam lineam, & primo ſcribe 0. deinde adde 1. ſuperioris trianguli, cum 5. inferioris antecedentis quadrati, quæ enim ita ſunt diſpoſitæ notæ ad eandem ſedem pertinent, & fiunt 6. Pariter adde 2. & 5. & fiunt 7. deinde 1. & 0. ad multiplicandum numerum A per 4. excerpenda eſt quarta linea eâdem methodo, reliqua fiunt ut in praxi communi, volumus haberi pluſquam novem hujuſmodi rectangula quia aliquando numerus totalis ſemel, bis, aut pluries eandem cyphram repetit. Ut ſi talis numerus eſſet multiplicandus 45444. & alius quilibet, unde in utraque facie rectangula notanda ſunt; ita ut ille qui incipit à novenario, in facie adverſa incipiat à binario. Hic demonſtratione opus non eſt, cum res ſit ſatis per ſe nota.

PROPOSITIO XIV.

Multiplicationem examinare.

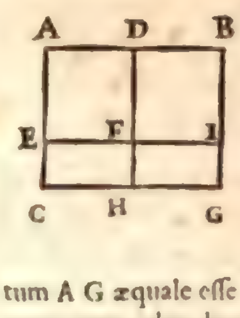
A. 2 4 1.
B. 1 4 3.
———
7 2 3.
9 6 4.
2 4 1.
———
D. 3 4 4 6 3.

B. 1 4 3.
A. 2 4 1.
———
1 4 3.
5 7 2.
2 8 6.
———
D. 3 4 4 6 3.

Primus multiplicationis examinandæ modus erit, ſi qui fuit multiplicans tranſeat in multiplicandum, ut ſi numerum A multiplicaveris per numerum B, factuſque fuerit numerus D. ſi rurſus numerum B per numerum A multiplicaveris ut in ſecundo exemplo, idemque numerus D productus fuerit, erit ſignum licèt non infallibile, te benè fuiſſe operatum.

Si autem fuerit diverſitas, certum eſt in alterutrâ operatione fuiſſe erratum, nam *propoſitione* 12. oſtendimus eundem numerum prodire quicumque ſit multiplicans, aut multiplicandus.

LEMMA.



Si duo rectanguli latera ſint diviſa utcumque: erit rectangulum illud æquale, rectangulis quæ ſub ſingulis ſegmentis unius, & ſingulis alterius comprehenduntur.

Sint rectanguli latera AB, AC, diviſa utcumque in D & F; dico rectangulum totum A G æquale eſſe 4. rectangulis, quorum primum comprehenditur ſub AD, unius & AE. alterius, item alteri comprehenſo ſub AD, & FC item duobus aliis comprehenſis ſub D B & A E, item ſub

ſub DB & EC; nam rectangulum AB eſt æquale omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis, Illæ autem ſunt rectangula AF, CF, BF, FG, ſed AF comprehenditur ſub AD, AE, CF autem ſub EF ſeu AD & EC; BF; ſub DB, DF ſeu AE; denique FB; ſub FI ſeu DB & FH ſeu EC: ergo rectangulum totum æquale eſt rectangulis comprehenſis ſub ſingulis ſegmentis unius lateris, & ſub ſingulis ſegmentis alterius.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si numerus, per mutuam multiplicationem aliorum duorum producatur, idem numerus relinquetur, abjectis novenariis, ex producto; qui relinquitur abjectis novenariis, ex eo qui producetur per multiplicationem reliqui, ex iiſdem numeris, ſubducto prius ex iis novenario quoties poteſt.

	K.	
B.	4 3 3.	E. 1.
C.	3 5 4.	F. 3. G. 3.
	L.	I. 3.
A.	1 5 3 2 8 2.	H. 3.

Sit numerus A productus ex multiplicatione numerorum B, C; dico ſi ex A auferatur novenarius quantùm poteſt, & reliquus ſit H; item ſi ex numeris B & C auferatur novenarius, ita ut relinquantur E & F qui multiplicati in ſe invicem producant G, ex quo auferatur novenarius & reliquus ſit I, dico numeros H & I eſſe æquales.

Demonſtr. Numerus A eſt rectangulum, cujus latera ſunt B & C, diviſa per rejectionem novenariorum in partes, quas vocamus K & E; item L & F, ita ut K contineat novenarios omnes numeri B & E ſit reliquum, & L novenarios numeri C & F ſit reliquum; (*per lemma ſuperius*) rectangulum A eſt æquale rectangulis ſub KL, K F, L E, F E: igitur toties invenitur novenarius in rectangulis ſub E, F ſub KF & ſub EL; quoties in numero A, & idem numerus relinquetur: ſed ſubductis novenariis ex rectangulis K, L, K, F, E L, nihil relinquitur cum ea rectangula metiatur novenarius L nam numeri K & L ſunt novenarij, ergo ſubducto novenario ex numero G, ſi tamen poteſt ſubduci, reliquus I æqualis erit, reſiduo H numeri A, poſtquam ablati ſunt novenarij quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Examen multiplicationis per rejectionem novenariorum.

B.	3 5 4.		6 G	
C.	8 3.	E 2	X	3 F
H.	1 0 6 2.		6 D	
K.	2 8 3 2.			
A.	2 9 3 8 2.			

Sit numerus A, productus ex multiplicatione numerorum B, C, ſitque examinandum an fuerit bona operatio, ſubduc ex numero A, novenarium quoties poteſt, & reſtet 6. ſcribe 6. ut vides in infima parte D. ſubduc novenarium ex C; ſitque 2. reſiduus, qui ſcribatur in E, item reſiduus ex B ſit 3. ſcribendus in F. multiplica F per E; & ex producto aufer novenarium; ſi reſiduus G ſit æqualis numero D, ſignum eſt bonam eſſe operationem. Demonſtratio patet, nempe ſi illæ duæ cyphræ non eſſent æquales erratum eſſe.

Ut autem error detegatur, quia poteſt error eſſe, vel in linea H; hoc eſt quod malè multiplicatus ſit numerus B per ultimam cyphram numeri C, nempe 3. vel in linea K, hoc eſt, quòd perperàm multiplicatus ſit idem numerus B, per primam cyphram numeri C, nempe per 8. Eâdem methodo id examinabis, hoc modo. Aufer ex numero B novenarium, quantùm fieri poteſt relinquitur 3, hanc cyphram multiplica per ultimam cyphram numeri C; producitur 9. abiecto novenario nihil relinquitur: dico quod ſi ex linea H, abjiciatur novenarius, ſi erratum non eſt, nihil relinquetur. Pariter examinabis lineam K, multiplicando 3. reliquum numeri B, abjectis novenariis, per 8. numeri B, fiuntque 24. hoc eſt 6. dico in linea K abjectis novenariis relinquendum numerum 6. ſi autem error nullus ſit in ſingulis multiplicationibus neceſſariò erit in additione.

PROPOSITIO XVI.

Varia multiplicationis exempla.

Vt addiſcant Tyrones diverſos multiplicationis uſus, neque enim ſolis mercatoribus, ſed etiam Imperatoribus, & Ducibus utilis eſt, varia ejus proferam exempla.

A.	5 8 6 4.		G 3	
B.	4 0 6 5	E 6	X	5 F
H.	2 9 3 2 0		3 D	
K.	3 5 1 8 4.			
N.	0 0 0 0.			
L.	2 3 4 5 6.			
C.	2 3 8 3 7 1 6 0.			

Sit agmen militum in cujus fronte milites 5864. in latere quolibet 4065. quæritur numerus militum in tali agmine comprehenſorum.

Multiplica primò numerum A per 5. ultimum

ſcilicet cyphram numeri B, fietque numerus H, tum multiplicabis eundem numerum A per B penultimam cyphram numeri B, fietque numerus K retrahendus una ſede in anteriora; tertiò multiplicetur idem numerus A per o, fietque numerus N pariter retrahendus. Denique multiplicetur numerus A per 4. nempe per primum characterem numeri B, fietque numerus L pariter retrahendus unâ ſede, addantur ſimul numeri H, K, N, L, fietque C numerus militum tale agmen componentium, è quo ablatis novenariis reſtat numerus D. pariter ablatis novenariis ex B reſtat E, & ex A ablatis novenariis reſtat F; multiplica E per F, & ex producto aufer novenarium; relinquitur numerus G, qui cum ſit æqualis numero D benè proceſſiſſe operationem concludendum eſt.

800
6
———
48. o o.

Sunt aliqua compendia in diverſis exemplis quæ regulam non variant; ut ſi ſcire velis pretium octingentarum ulnarum oloſerici, cujus ulna venit nummis 6. multiplica 8. per 6. & producto 48. adde ſuas cyphras oo. Ratio clara eſt quia per numerum 6. multiplicandi eſſent ſingulæ cyphræ o. ut nempe 48. ſuam ſedem obtineret.

A. 300.
B. 200.
———
C. 60000.

Aliud exemplum. Sit A multiplicandum per B, multiplica primam cyphram numeri A per primam numeri B; fientque 6. cui addes cyphras o, tam numeri multiplicantis, quam numeri multiplicati. Ratio eſt quia ſi 2. multiplicaret 300. fierent 600. ſed centuplo debet fieri major numerus, eò quod 200. ſit numerus centuplus numeri 2.

D. 2346.
E. 800.
———
F. 1876800.

Alia exempla ſimilia fieri poſſunt, ut ſi numerum D per E multiplices; multiplica numerum D, per 8. primam cyphram numeri E, producetur numerus 18768. cui poſtpones duo o.

Dum numerus multiplicandus eſt per 10. ipſi addatur unum o, ſi per 100 duo oo addantur, per 1000 tria ooo.

Piſtolæ 345.
11.
———
345.
Faciunt 345.
———
Francos 3795.

Per multiplicationem majores monetæ ſpecies, ad minores reducemus, exemplum; nummos aureos in francos: multiplicando eorum numerum per 11.

Franci 452.
2
———
Aſſes 9040.

Francos in aſſes reducemus ſi numerum duplicemus, & producto addamus o.

365. dies
24.
———
1460.
730.
———
8760. horæ
60.
———
525600.
60.
———
31536000. minuta

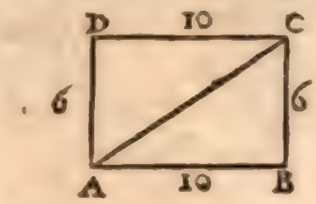
Ita ſciemus quot ſint horæ in anno ſi 365. dies multiplices per 24.

Solâ etiam multiplicatione omnes ſuperficies metimur v. gr. ſit longitudo unius cubiculi pedum 35. & latitudo 25.

35.
25.
———
175.
70.
———
875.

Si multiplicamus unum numerum per alium, exurget area cubiculi pedum quadratorum 875.

Si velimus ſcire quot neceſſarij ſint lateres ut totam cubiculi aream tegant cognoſcere debemus quot lateres in longum diſponi poſſint; quot item in latum, ſi unum numerum per alium multiplicemus, exurget numerus laterum neceſſariorum ad pavimentum; idem dicito de tegulis.

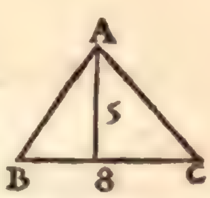


Parallelogrammum rectangulum, ut diximus metimur ſi unum latus DC 10. per aliud AD 6. multiplicamus.

Omne triangulum rectangulum metimur ſi unum latus comprehendens angulum rectum, per aliud latus multiplicemus: producti dimidium erit area trianguli. Ut ſi trianguli ABC aream volumus cognoſcere, AB 10. per 6. multiplicamus, fiuntque 60. cujus dimidium 30. eſt area trianguli, quia nempe hâc multiplicatione, exurgit area totius rectanguli ABCD, cujus dimidium eſt triangulum ABC.

Hac methodo metieris omnes muros, ut quoties latomis merces numeranda eſt, priùs metiri debemus quot ſint octopedæ quadratæ, hoc eſt quot ſint quadrata, quorum longitudo ſeu latus ſit octopedum, longitudo muri per altitudinem multiplicanda eſt, productus enim erit numerus quadratarum octopedarum.

Si occurrant triangula rectangula ut ABC; longitudinem AB, per dimidiatam altitudinem BC multiplica, & productum exhibebit aream trianguli ABC.



In triangulis quibuſcumque, ſi ab angulo quocumque ad oppoſitam baſin ducas perpendicularem; area ejus comprehendetur ſub dimidiata

diatâ baſi & perpendiculari, quare ſi dimidiatam baſin multiplices per perpendicularem exurget area trianguli, ut ſi dicas in hoc exemplo quater quinque fiunt 20. alia neceſſaria ad menſurationem, non ſunt hujus loci cum peculiarem ſibi vendicent tractatum, hæc tamen notaſſe non piguit.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Examen additionis numerorum denominatorum.

Diximus ſupra intelligi non poſſe examen additionis numerorum denominatorum, niſi traditâ multiplicatione, ideoque locus eſt, ut illud explicemus. Tradam autem primò praxin deinde demonſtrationem.

	Dies	horæ	min.	ſecund.
A.	32.	19.	43.	8.
B.	14.	8.	9.	53.
D.	47.	3.	53.	1.

Sint numeri A & B addendi, ſit etiam numerus D productus per additionem propriam numerorum denominatorum. Primum ex 47, primo intervallo dierum numeri D, auferatur 9. quantùm fieri poteſt, reſtat 2. illud 2 multiplicetur per denominationem horarum, id eſt 24. ſed priùs ab illo denominatore aufer 9 ſi fieri poteſt, reſtant 6. multiplica igitur 6 per 2, fiunt 12. aufer 9, relinquuntur 3. addenda tribus, ſeu ſecundo membro numeri D. illa 6 multiplica per numerum 60. denominatorum minutorum decurtatum tamen omnibus novenariis, id eſt per 6. fiuntque 36. ex quo abjecto novenario nihil relinquitur, ideoque abjectis novenariis ex numero D relinquitur unitas.

Secundò eâdem methodo abjice novenarium ex numeris A & B addendis: id eſt ex primo membro dierum numerorum A & B; ſi âbjiciatur novenarius, relinquitur I, multiplica per 24 denominatorem horarum, abjectis prius novenariis, id eſt 6. fiunt 6. quæ ſi addas ſecundo membro horarum ſeu 19. & 8. & abjicias novenarium relinquetur 6. quem numerum multiplica per 60. decurtatum novenariis, id eſt per 6. fiunt 36. & abjectis novenariis nihil relinquitur; ex tertio membro minutorum aufer novenarium, relinquuntur 7. quæ multiplica per 60. numerum minutorum ſecundorum decurtatum novenario, ſeu per 6. fiunt 48. ſeu abjectis novenariis 3. quæ 3. adde ultimo membro ſecundorum, & abjice novenarium relinquitur unitas, ut in numero D. Oſtendere debeo benè proceſſiſſe operationem.

Demonſtratio. Dico quod ſi numeri A & B converterentur in minuta ſecunda, & pariter, quod ſi numerus D converteretur in minuta ſecunda quod relinqueretur utrobique unitas abjectis novenariis, hoc eſt dico idem eſſe abjicere novenarium ex numero D, methodo traditâ, ac ſi numerus D eſſet in minuta ſecunda converſus, & ex producto auferretur novenarius numerus & hoc oſtendo in breviori exemplo. Sit numerus

	Dies	horæ	
A.	147.	19.	
	horas		
	24		
	B.	D	E.
	3547.	3528.	19.
	C I.		

A, dico quod ſi 147 multiplicaretur per 24. & illi adderetur 19, ita ut fieret numerus B ex quo abjectis novenariis relinqueretur unitas, quod ſi ex numero A auferatur novenarius, & reliquum nempe 3 per 24. ſeu abjectis novenariis per 6. multiplicetur, ita ut fiant 18. ſeu abjectis novenariis nihil relinquitur (ſi autem aliquid relinqueretur illud addendum eſſet ſequenti membro) & ex reliquo abjiciendus novenarius quod relinquitur, erit pariter unitas. Sit numerus D ortus ex multiplicatione 147 per 24. ideoque numeri D & E ſint æquales numero B: ergo *(per propoſitionem quintam hujus)* idem relinquitur numerus ex B abjectis novenariis, qui ex D & E: ſed idem relinquitur ex D & E, qui relictus fuit ex toto A methodo traditâ, nam *(per 15. hujus)* idem numerus relinquetur ſi ex D auferatur novenarius, ac ſi ex 147 & 24 auferantur novenarij, & reliqui nempe 3 & 6. multiplicentur, & ex producto auferatur novenarius; id autem quod relinquitur ex numero D addendum erat numero E, nempe 19, ut ſubducatur novenarius; ergo etiam id quod relinquetur per noſtram methodum addi debet numero horarum. Ergo idem numerus abjectis novenariis per noſtram methodum relinquetur qui relictus eſſet ex numero B. Quod erat demonſtrandum.

Quod autem oſtendi in his membris; oſtendi poteſt in reliquis; atque adeò cum numeri A & B prioris figuræ, æquales eſſe debeant numero D; tot debent eſſe minuta ſecunda in numero D, ſi reduceretur in talia minuta, quot in numeris A & B, unde ſi ex ſummâ utraque abjiciatur novenarius, debet idem numerus relinqui utrobique.

PROPOSITIO XVIII.

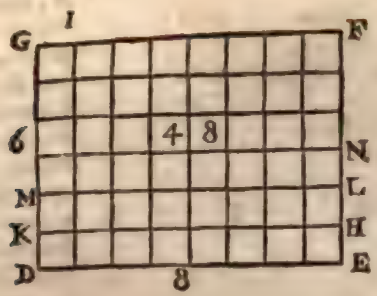
Quid ſit diviſio.

Diviſio numeri dividendi per numerum diviſorem, eſt inveſtigatio numeri qui indicat per unitates ſuas quoties numerus diviſor invenitur in dividendo, unde vocatur quotiens: Quare numerus quotiens, ſeu qui quæritur, toties unitatem continet, quoties dividendus continet diviſorem, atque adeo eſt eadem ratio quotientis ad unitatem; quæ eſt dividendi ad diviſorem. Sit

A.	48.
B.	8.
C.	6.

numerus A, dividendus per B, quæritur numerus C qui indicet quoties numerus B diviſor invenitur in numero A, ſeu qui toties unitatem contineat, quoties numerus A continet numerum B, vel quod idem eſt, quærimus numerum qui multiplicando numerum B, producat numerum A, & ſub hac conſideratione ultimâ, quia diximus ſuperiùs quoties numerus alium multiplicat, quòd productus conſiderari poſſit ſicut numerus planus, ſeu quaſi rectangulum tot conſtans quadratulis

Digitized by Google



quod continet unitates numerus A, diviſor ſeu numerus DE, intelligitur propriè per modum rectanguli DH, cujus omnia quadratula ſint in unum ordinem digeſta. Quæritur ergo quotnam in rectangulo D F 48. quadratulorum; inveniantur ordines quadratulorum æquales rectangulo D H; quot autem fiunt ordines, tot erunt quadratula in rectangulo D I; quot autem ſunt quadrata in rectangulo D I, tot linea DG continebit partes æquales; igitur per diviſionem cognitâ areâ rectanguli D F, & uno latere nempe D E innoteſcit aliud latus DG, & eſt illud quod quæritur.

Ex quo fit ut ſæpè hæc diviſio numeri, per numerum vocetur ab aliquibus applicatio numeri ad numerum; nam ut ſciatur quot vicibus, inveniatur rectangulum D H in rectangulo D F illi applicari intelligitur ? primo in H D deinde in KL, MN, &c. donec exhauriatur rectangulum F D.

Quod ſi numerus dividendus intelligeretur per modum ſolidi: numerus etiam dividens intelligi deberet ad modum alicujus ſolidi, quæ omnia indicare volui ut diſcant Tyrones numeros quantitati continuæ aptare.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Numerum quemcumque majorem, per minorem dividere.

1 2 2 3
A 5 8 8 7 0
B 1 4 5 (406
C 1 4 5
D 1 4 5

Sit numerus A major, dividendus per numerum B.

Præceptum primum ſubſcribatur diviſor B, numero dividendo A; ita tamen ut diviſor B non ſit major membro, cui primò applicatur ut, hîc vides; nam 145 non eſt major quam 588.

Secundum præceptum eſt, ut quæramus quoties numerus diviſor 145 inveniatur in membro 588, cui applicatur, quod ſi tam fœlicis imaginationis eſſemus, ut unico intuitu id præſtare poſſemus, compendioſior eſſet operatio, ut dum unicâ tantùm cyphrá diviſor conſtat; id facilè poſſumus: quia autem id primò non poſſumus, dum diviſor pluribus conſtat cyphris, per attentationem id experimur. Quæramus ergo quoties unitas quæ eſt prima cyphra diviſoris invenitur in 5. invenio eſſe quinquies, antequam ſcribam 5. in diviſore, experiri debeo mente, an ſi multiplicavero 145. per 5. non fiat numerus major quam 188. Dico ergo ſi multiplico unitatem numeri B per 5. fiunt 5. quæ ſi ſubtrahas ex quinario numeri A nihil relinquitur. Multiplica cyphram 4. numeri B per 5. fiunt 20. quæ ſubduci non poſſunt ex 8. quare ſignum eſt, te nimis magnam cyphram poſuiſſe in quotiente. Experire an 4. meliùs procedat, multiplica unitatem numeri B per 4. fiunt 4. quæ ſi ſubducas ex quinque reſtat unitas, tum multiplica 4. numeri B, per cyphram 4. inventam, fiuntque 16. quæ ſubtrahi poſſunt ex 18. quare jam tutò ſcribere potes 4. in quotiente. Præceptum tertium debes multiplicare totum numerum B, per 4. & productum ſubtrahere ex primo membro numeri A. nempe ex 588. quia tamen nimis operoſum eſſet, tot cyphras ſcribere, eâdem opera, multiplicabis numerum B, & productum ſubtrahes ex 588. Hoc modo multiplica primam cyphram 1. per 4. fiuntque 4. quæ ſi ſubtrahas ex 5. reſtat unum, dele unum numeri B, & 5. numeri A; & ſcribe unitatem reliquam. Tum multiplicabis ſecundam cyphram numeri B ſeu 4. per 4. fiuntque 16. quæ ſubtrahes ex 18. numeri A, reſtaſtabuntque duo, dele 4. numeri B, & 18. numeri A, ſcribeque quod relinquitur nempe 2. denique multiplica ultimum characterem numeri B, per 4. fientque 20. quæ ſubduces ex 28. reſtabuntque 8. ſi benè operatus es, numerus relictus ex prima parte numeri A; nempe ex 588. debet eſſe minor numeri B, ſi enim major eſſet, prima cyphra quotientis nimis parva eſſet.

Præceptum quartum. Promove diviſorem uno gradu verſus dextram, ut expendas quoties invenitur in 87. quia autem 145. major eſt quàm 87. ideò in quotiente ponenda eſt cyphra o quæ ſignificat 145. non inveniri in 87. deleatur igitur diviſor 145. ſecundo loco poſitus. Promoveaturque ulteriùs, & quia ſic unitas numeri D, ſubjacet numero 8. quære quoties unitas inveniatur in 8. certum eſt inveniri octies, ſed ſi notarentur octo in quotiente, multiplicando unitatem per 8. fierent 8. quibus ablatis ex 8. nihil relinqueretur, & dum eadem cyphra quotientis nempe 8. multiplicaret 4. diviſoris, fierent 32. quæ ſubduci non poſſent ex 7. unde cyphra quotientis minor eſſe debet, ſi poneretur 7. adhuc, idem ſequeretur inconveniens.

Quare antequam ſcribatur 6. in quotiente experire an benè procedat. Si multiplices 1. diviſoris per 6. fient 6. quæ ſi ſubtrahas ex 8. reſtant duo; tum ſi per eundem 6. multiplices 4. ſecundam cyphram diviſoris fient 24. quæ ſi ſubtrahas ex 27. reſtant 3. denique ſi multiplices per 6. ultimam cyphram diviſoris 5. fient 30. quæ adæquant id quod relinquitur in numero A.

Quare ponere potes 6. tum multiplicare debes 145. per 6. & productum auferre ex 870. quod eâdem operâ præſtabis; multiplica igitur 1. per 6. fient 6. quæ ſi auferas ex 8. reſtant 2. ſcribenda; deletis 1. & 8. multiplica 4. per 6. fiunt 24. quæ ſi auferas ex 27. reſtant tria ſcribenda, & dele 2. 7. & 4. denique multiplica 5. per 6. fient 30. quæ ſi ſubtrahas ex 30. nihil relinquetur.

Demonſtratio. Per diviſionem quærimus quotientem

tientem, qui oſtendat quoties diviſor invenitur in dividendo; ſeu qui multiplicando diviſorem producat dividendum: ſed hàc methodo id præſtamus, nam jubemur invenire primam cyphram quotientis, quæ quia duas ſequentes habere debet, pertinet ad centenaria, & multiplicando numerum B producat numerum minorem primo membro dividendi, nempe 588. non tamen ita ut relinquatur numerus major, quam 145. qui numerus productus ex 4. per 145. quia cyphra 4. illum producens pertinet ad centenaria, poſt ſe debet intelligi habere duo o. hoc eſt ſi ſcriberetur relinqueret adhuc duas cyphras vacuas. Hoc enim idem eſt. Hic autem numerus productus ex multiplicatione 145. per 4. quamvis non ſcribatur, ſubintelligitur & verè aufertur ex 588.

Jubemur exinde promovere diviſorem uno gradu; ita ut ejus ultima reſpondeat penultimæ dividendi. Cum enim diviſor non ampliùs per centenaria multiplicari debeat. Sed per decades, ejus ultima eſſe debet ſub decadibus. Sed hoc modo, collocatus diviſor, neque ſemel invenitur in membro dividendi ſibi competente. Ideo notatur o, tantùm ut expleatur ſedes, nempe ut prior cyphra ſuum valorem centenariorum obtineat.

Denique promovetur diviſor, ut multiplicetur per unitates, quærimúſque numerum qui multiplicando numerum 145. faciat 870. vel proximè minorem; invenimúſque eſſe 6. quare prima figura quotientis, quæ eſt 400. multiplicando 145. efficit 58000. ſecunda quæ eſt o. nihil efficit; ultima quæ eſt 6. multiplicando 145. efficit 870. quæ addita numero 58000. numerum 58870. producit, quod efficiendum erat.

PROPOSITIO XX.

Alia praxes diviſionis.

Quamvis omnes praxes in idem recidant, & æquivalenter, ſint eædem, in ſpecie tamen aliquam habent diverſitatem: inter eas illæ commodiores cenſendæ ſunt, quæ paucioribus characteribus utuntur.

Omnes diviſionis praxes primò, in hoc conveniunt quod eodem modò applicent, aut applicatum intelligunt diviſorem numero dividendo: hoc eſt ita ut membrum dividendi cui applicatur diviſor, eodem diviſore minus non ſit.

A.	8 9 4 5 0.	B.	4 3 2.
D.	8 6 4.		
E.	3 0 5 0.		
F	3 0 2 4.	C.	2 0 7.
G.	2 6.		

Secundò omnes eodem modo per attentationem in mente factam quærunt ſingulas quotientis cyphras. Proponam igitur praxin quæ ſatis oſtendit totum artificium. Sit ergo numerus A dividendus, numerus B diviſor qui ſubintelligatur applicari dividendo, ita ut primus character 4. primo 8. reſpondeat, ſecundus 3. ſecundo 9. tertius 2. tertio 4. ſub quo notetur punctum. Quæratur prima cyphra quotientis per attentationem, eò modo quo diximus, quæ ſit 2. per hanc cyphram 2. multiplica diviſorem 432. fientque D. 864. quem ita ſcribes ſubdividendo A, ut ultimus character reſpondeat puncto notato. Hunc numerum D ſubtrahe ex membro 894. reſtabunt 30. huic numero 30 addes cyphram ſequentem numeri A nempe 50.

Intellige diviſorem B applicatum numero 305. ita ut ultima ejus cyphra reſpondeat notæ 5. & quære quoties diviſor 432 inveniatur in numero 305. certum eſt non inveniri, quare nota o in quotiente.

Numero 3050. intellige diviſorem B applicatum, ita ut ultima ejus cyphra 2. reſpondeat ultimæ numeri 3050. invenieſque per attentationem eſſe ſepties, ſcribe 7 in quotiente, multiplicabiſque diviſorem B, per 7. & productum F ſcribes ſub numero 3050. & ab eo ſubtrahes relinquetur 26. dico ergo numerum C eſſe quotientem & relinqui 26.

Ex quibus vides in ſingulis membris, primò applicandum eſſe diviſorem membro dividendi ſibi competenti.

Secundò quærendum characterem quotientis per attentationem, tertiò per characterem inventum, multiplicandum eſſe diviſorem.

Quartò productum ſubtrahendum eſſe, ex membro dividendi propoſito, ita tamen ut id quod relinquitur minus ſit diviſore.

Tertia praxis numerum genitum ex multiplicatione diviſoris, per cyphram quotientis non ſcribit, ſed multiplicando ſubducit ex membro dividendi ſibi competente.

Compendium & utilitas hujus praxis in eo conſiſtit; quòd pauciſſimas ſcribat cyphras, nihilque deleat, hujus exemplum hic apponam.

A.	8 4 5 6 7.
	1 9 7 6.
	3 2 7.
	3.
B.	3 2 4.
C.	2 6 1.

Sit dividendus A, diviſor B, quæritur quotiens C. Scribatur diviſor infra dividendum, relicto ſpatio intermedio, ad operationem; ſcribatur etiam quotiens infra diviſorem.

Intelligatur applicari diviſor B membro ſibi competenti, ut in hoc exemplo, ultima ejus cyphra reſpondet tertiæ dividendi 5. ſub qua notetur punctum.

Tum more conſueto per attentationem, quære primam cyphram quotientis, quæ ſit 2. (*per hanc*) multiplicandus eſt diviſor, & productus ſubtrahendus ex 845. ſed id unâ eâdemque operâ facile perficies. Dic ergo bis quatuor ſunt octo, quæ ſubtrahi non poſſunt ex 5. ſubtrahantur ex 15. reſtant 7. ſcribenda ſub 5. & memento te retinere unum, eo quod proceſſeris ultra decadem. Dicito bis duo ſunt quatuor, & unitas retenta efficiunt quinque, quæ ſubtrahi non poſſunt ex 4. ſubtrahantur ex 14. reſtant 9. ſcribenda ſub 4. dividendi; & memento te retinere unum. Bis tria ſunt 6. & unum retentum ſunt ſeptem, quæ ſi auferas ex 8. reſtat unum ſubſcribendum. Adde numero relicto 197 cyphram 6 ſequentem in dividendo: iam quærere debes quoties diviſor 324. inveniatur in 1976 deprehendo per attentationem inveniri ſexies; ſcribe 6 in quotiente, & per cyphram 6 multiplico diviſorem; incipiendo ab ultima & dicendo ſexies 4 ſunt 24. quæ auferri non poſſunt neque ex 6. neque ex 16. ſed ex 26. & reſtant duo ſcribenda, & quia ſubtractio

facta eſt ex viginti, retine duo; ſexies duo ſunt 12, & duo retenta, ſunt 14. quæ auferri non poſſunt ex 7; auferantur ex 17, reſtant tria ſubſcribenda, & retine unum: ſexies tria ſunt octodecim, & unum retentum ſunt 19, quæ ſi auferantur ex 19, nihil reſtat. Adde cyphram 7, dividendi numero 32. & quæro quoties 324 in 327. invenio ſemel; ſcribe 1 in quotiente. Multiplicando diviſorem per unum factâ ſubtractione reſtabunt tria.

Notandum primò, in ſingulis membris id quod relinquitur minus eſſe debere diviſore, ſi enim majus, aut æquale eſſet, diviſor adhuc ſemel in dividendo inveniretur, atque adeò nimis parvus aſſumptus eſſet quotiens.

Notandum 2. Id quod relinquitur factâ diviſione, minus ſemper eſſe diviſore. Illudque eſſe numeratorem fractionis cujus diviſor ſit denominator, ut in exemplo ſuperiori fiet fractio $\frac{3}{324}$

Illud autem quod relinquitur debet reduci in minutiores partes ut ſciatur quantùm competat quotienti. Quod ut meliùs intelligatur ſupponantur 84567 nummi dividendi, ſeu diſtribuendi trecentis hominibus, certum eſt per regulam ſuperiorem cuilibet competere nummos 261, & reſtare tres nummos; qui ut diſtribui poſſint trecentis viginti quatuor hominibus; debent mutari in francos fientque novem franci. Sed neque adhuc diſtribui poſſunt 324. hominibus. Quare ex francis fiunt aſſes multiplicatione per 20; fientque 180 aſſes. Sed adhuc ſic diſtribui non poſſunt tot hominibus, fiant ergo denarij multiplicatione per 12. fientque 2160 denarij. Inſtituatur ergo diviſio numeri 2160 per diviſorem 324, quotiens erit 6. & reſtabunt adhuc 216 denarij non diſtributi, ex quibus ſi fiat moneta adhuc minor, ulterior diſtributio fieri poterit.

Ut autem meliùs intelligatur uſus diviſionis, varia exempla proferam quæ Tyronibus proponi poterunt.

Sunt 4 mercatores qui ſocietatem inierunt, lucrum autem fuit 900. quæritur quantùm cuilibet competat, invenio 225.

Imperator milites habet 35294. quos diſtribuere debet in ſeptem agmina æqualia. Quæritur quot militibus conſtet unum agmen; invenio 5042.

A. 3 5 2 9 4.
2 9.
1 4.
D. 7.
C. 5 0 4 2.

Hominibus 8000 diſtribuendi ſint 400000. quæritur quot nummi unicuique eveniant; invenio 50.

Emit aliquis equos 432. deditque nummos 13824. ſinguli equi venient nummis 32.

Quoties numerus aliquis dividendus eſt per 10. 100. 1000. toties ejus ultima cyphra, vel duæ vel tres delendæ ſunt. Et ſi 8460. per 10. erit quotiens 846. Si in fine habeat cyphras ſignificativas, illæ cum quotiente fractionem efficient ut ſi numerus 43567 per 100. ſit dividendus quotiens erit 435. $\frac{67}{100}$

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Reductio minorum ſpecierum monetæ ad majores.

Si minores ſpecies monetæ ad majores reduci debeant, dividendus eſt numerus inferioris monetæ per numerum ſignificantem, quoties minor in majori continetur. Sit exemplum primum librarum Turonenſium 411. vis ſcire quot nummos efficiant, divide numerum propoſitum per tria, quotiens 137. erit numerus nummorum.

Si ex libris nummos aureos velis efficere, numerus propoſitus per 11 dividatur. Ut ex aſſibus francos efficias reſervatâ ultimâ cyphrâ reliqui, ſume dimidium; Sit exempli cauſa numerus aſſium 5854; reſervatâ ultimâ cyphrâ 4. numeri reliqui ſume dimidium, fiunt 291, reſtatque 1. hoc eſt 10 aſſes. Cum 4 primo ablatis fiunt 14. & ita de reliquis.

Notandum item datâ parallelogrammi rectanguli areâ, & uno latere; per diviſionem aliud latus innoteſcere, ut jam dixi.

Diviſio examinatur, eo modo quo multiplicatio ſolùm haberi debet ratio reſidui, quoties diviſione factâ aliquid relinquitur in dividendo. Sit ergo ut ſupra dividendus numerus A 35294. per 60. fit quotiens 588. & relinquitur 14. Ex numero A aufer novenarium quantùm fieri poteſt, reſtant 5, ſcribenda in D. ex diviſore, ablato novenario ſi fieri poteſt reſtant 6. ex quotiente reſtant 2, ſcribenda in E & F; multiplica 6. per 3. fiunt 18. adde quæ reſtant nempe 14. fiunt 32. à quibus ſi auferas novenarium reſtant 5. ſcribenda in G; quia numeri D & G æquales ſunt; bona fuit operatio.

A. 3 5 2 9 4.
4 9 4.
1 4.
B. 6 0.
C. 5 8 8.

5 G
E 6 X 3 F
5 D

PROPOSITIO XXII.

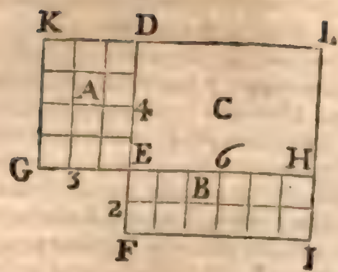
Theorema.

Si 4 numeri proportionales fuerint, numerus productus ex multiplicatione primi, & ultimi; æqualis eſt numero producto, ex multiplicatione ſecundi, & tertij.

Vocamus numeros proportionales, cum primus ad ſecundum eandem rationem habet, ac tertius ad quartum, quid autem hoc ſit explicuimus ſatis fusè, initiô libri quinti elementorum Euclidis. Hæc etiam propoſitio eſt 16 ſexti libri Elementorum Euclidis.

Revocandum autem eſt, id quod initio multiplicationis diximus, nempe per multiplicationem produci rectangulum aliquod, cujus numeri multiplicantes ſint latera, numerus verò productus ſit area.

Sint



Sint igitur quatuor numeri 3. 6. 2. 4. proportionales repræſentati per lineas. Sitque numerus A, ſeu rectangulum quod producitur ex multiplicatione, primi 3. per ultimum 4. pariter ſit rectangulum B quod oriatur ex multiplicatione ſecundi numeri 6. per tertium 2. dico rectangulum A nempe 12. æquale eſſe rectangulo B. Jungantur enim rectangula, ita ut GEH, & FED ſint rectæ lineæ, perficiaturque rectangulum, C productis lineis KD, IH, donec concurrant in L.

Demonſtratio. (*Per 1. 6.*) ita eſt rectangulum A ad C; ſicut GE ad EH; ſeu 3. ad 6. ſed ut 3. ad 6. ita ſupponitur 2. ad 4. ſeu FE ad DE: ergo A ad C ſe habet ut FE ad ED; ſed ut FE ad ED; ita (*per 1. 6.*) B ad C: ergo ut A ad C, ita B ad idem C. ergo (*per 9. 5.*) A & B ſunt æqualia quod erat demonſtrandum.

Eodem modò demonſtrabimus, quod ſi A & B ſint æquales erit ut GE ad EH, ita FE ad ED.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Tribus datis numeris quartum proportionalem invenire.

A. B. C. D.

3. 6. 5. 10.

Sint tres numeri dati A, B, C, quæritur quartus proportionalis. Hoc eſt quæritur quartus numerus D ad quem tertius C eandem rationem habeat, quam habet, primus A ad ſecundum B. Multiplica ſecundum B per tertium C, & productum divide per A; quotiens diviſionis, erit numerus D. quæſitus.

Demonſtratio. (*Per ſuperiorem*) numerus productus ex multiplicatione B per C æqualis eſt numero producto, ex multiplicatione A, per D; ergo multiplicando B per C, habetur numerus qui produceretur ex multiplicatione numeri A per D, nempe cognoſcitur ejus area; ſed (*per 17. hujus*) ſi cognita area, per unum latus nempe A dividatur, diviſionis quotiens, erit aliud latus; ergo ſi per primum A dividatur numerus productus ex multiplicatione ſecundi per tertium, quotiens diviſionis, erit quartus qui quæritur.

A B. C. D.

3. 6. 5. 10.

F. 1. E. 2.

Alio modò idem problema abſolvemus. Secundum per primum divide, & quotientem per tertium multiplica, productus erit qui quæritur. Sint numeri A, B, C, quibus quæritur quartus proportionalis D divide B, ſecundum per primum A erit quotiens E dico quod ſi multiplicetur C per E, producitur numerus D.

Demonſtratio. Cùm enim dividitur B, per A, fitque quotiens E, quot erunt unitates in E toties A continetur in B. Hoc eſt ita eſt unitas F ad E, ut A ad B ſeu ut C ad D, quare rectangulum ſub F & D æquale eſt rectangulo ſub E & C, rectangulum autem ſub F unitate, & D eſt ipſum D, nam unitas multiplicando quemcumque numerum nihil immutat, ſed eundem numerum facit: ergo numerus D eſt idem ac productus ex multiplicatione E per C.

Alio item modò Primum divide per ſecundum; & tertium per quotientem quartus, erit numerus qui quæritur. Licèt iſte modus poſſit habere locum, etiam quando primus minor eſt ſecundo cùm ejus demonſtratio ſit univerſalis nihilominus poteſt maximè adhiberi quando ſecundus minor eſt primo.

A. B. C. D.

6. 3. 10. 5.

E. 2. F. 1.

Sint ergo tres numeri dati A, B, C, quæritur quartus D ignotus. Dividatur primus A per ſecundum B, fiatque quotiens E, per quem dividatur tertius C. Dico quotientem iſtius ultimæ diviſionis eſſe numerum D, ſeu quartum proportionalem.

Demonſtratio. Cum B dividit A, quotiens eſt E; erit ut A ad B; ita E ad unitatem, ut autem A ad B; ita C ad D: ergo ut E ad unitatem, ita C ad D; ergo rectangulum ſub unitate & C, æquale eſt rectangulo ſub E & D. Quare cognito rectangulo nempe numero C, cum enim vnitas numerum multiplicat, nihil immutat ut habeatur illius latus D debet fieri diviſio per aliud latus E. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Duobus datis numeris tertium continuè proportionalem invenire.

A, B, B, C.

1. 4. 4. 8.

Sint duo numeri dati A, & B. Quæritur tertius continuè proportionalis, hoc eſt, quæritur numerus ad quem B eandem rationem habeat, quam A habet ad B. Ponatur bis numerus B, fiatque ut A ad B, ita B ad C. Hoc eſt, multiplicetur B per B, ſeu per ſeipſum, & productus dividatur per A. & quotiens diviſionis, erit C. qui quæritur.

Demonſtratiò. Eadem eſt quæ in ſuperiori propoſitione.

Notandum quotieſcumque dati numeri habent aliquam demonſtrationem adjunctam; tunc ut regula ſine errore fiat, debent, vel primus & tertius eâdem denominatione affici, tunc autem ſecundus & quartus eâdem etiam afficientur, vel duo

duo primi. Nempe primus & ſecundus eâdem denominatione afficiuntur, & tunc tertius & quartus eâdem etiam denominatione afficiantur. Ut ſi ita enuncietur. Si 4. hominibus dantur 5. nummi, 7. hominibus qui dabitur. Vides autem primum, & tertium ejuſdem eſſe denominationis, ſicut etiam 2. & quartum vel ſi quæras ut ſe habent 4. homines ad 7. ita ſe habebunt 5. nummi ad 8. cum $\frac{1}{4}$ ex quo fit ut in quæſtione tres numeri diverſæ denominationis proponi non debeant. Ut 4. palmi ad quinque pedes. Ita 10. ulnæ ad digitos, quia licet numeri in abſtracto poſt operationem factam ſint proportionales. In concreto tamen propter variam illam, & incognitam denominationem manerent non proportionales, ſaltem quantitates ſignificatæ.

PROPOSITIO XXIV.

Variæ quæſtiones.

Proportio alia eſt directa alia inverſa. Directa eſt quando primus eſt ad ſecundum ut tertius ad quartum. Inverſa verò dicitur quando primus eſt ad ſecundum ut quartus ad tertium.

Rurſus utraque ſubdividitur in ſimplicem & compoſitam. Simplex eſt, quando conſtat tantum tribus vel quatuor terminis. Compoſita vero eſt, quando conſtat tam pluribus quam quatuor terminis.

Ut meliùs intelligant Tyrones has proportionum quæſtiones, addiſcantque ſenſim methodum regulas inveniendi, proponendas hac propoſitione varias diverſarum proportionum quæſtiones cenſui.

Si quatuor homines expendunt 24. nummos intra 12 dies, quot expendent 20. homines intra dies 30. Hæc proportio eſt compoſita.

Duobus modis ſolvi poteſt hæc quæſtio. Primò duplici regula trium, directa hoc modo.

Si 4. homines expendunt 24 nummos, quot expendent 20. Subintellecto, in utroque caſu; eodem duodecim dierum tempore; quare multiplicando 24. per 20. provenient 480. quæ ſi dividas per 4. invenies 120.

Rurſus dices ſi 12. dies dant expenſas 120. nummorum: quas expenſas dabunt dies 30. multiplica 120. per 30. provenient 3600. quæ ſi dividas per 12. quotiens erit 300. numerus ſcilicet quæſitus.

Alio modo ſolvi poteſt hæc quæſtio 4. homines intra 12. dies, multiplica 12. per 4. habebis 48. expenſas diurnas. Pariter 20. homines intra 30. dies, multiplica 30. per 20. fient 600. fiat ſimplex regula trium ſi 48. expenſæ diurnæ ad 24. nummos aſcendunt, quid dabunt 600. invenieſque pariter 300. nummos.

Opus erit regula proportionum inverſa in aliquibus exemplis, quale eſt illud. Si 4. homines intra 12. dies, expendunt nummos 24. intra quot dies 20. homines expendent 300 nummos. Multiplica pariter 12. per 4. ut habeas numerum expenſarum diurnarum nempe 48. ſi 24. nummi dant expenſas 48. quot dabunt expenſas diurnas 300. nummi, ſecundum hanc propoſitionem fiat regula trium communis multiplicando 48. per 300. fient 14400. quæ ſi dividas per 24. quotiens erit 600. numerus expenſarum diurnarum, quem numerum ſi dividas per 20. homines, qui ſinguli diebus 20. expenſas diurnas faciunt, quotiens nempe 30. erit numerus dierum quæſitus.

Octo homines ſingulis menſibus ſinguli expendunt ſex nummos; quot iidem expendent intra 4. annos. Unus uno menſe expendit 6. nummos intra 4. annos hoc eſt 48. menſes quot expendet. Fiat ſimplex multiplicatio 48. per 6. producentur 288. nummorum expenſæ unius hominis pro 4. annis. Fiat alia regula trium, ſi unus homo expendit nummos 288. octo homines quot expendent, opus eſt ſolà multiplicatione numeri 288. per 8. fient 2304.

Poterat aliter ordinari hæc regula ſi unus homo in menſem expendit 6. nummos, quot 8. expendent eodem tempore, invenióque 48. rurſus ſi octo homines intra menſem expendunt 48. nummos, quot expendent intra 48. menſes. Multiplica 48. per 48. ſimiliterque fient 2304. Pro 200 libris mercium avehendis per 100 leucas dantur nummi 4. quid dabitur pro 100. libris transferendis per 40. leucas.

Multiplica 200. libras per 100. ut fiat 20000. nempe numerus librarum tranſlatarum per unam leucam. Pariter multiplica 400. per 100. fiunt 40000. libræ per unam leucam, tum inſtituatur regula trium ſi 2000 dant 4 nummos, 40000 dabunt nummos 8.

Aliquis nummis 10. lucratus eſt 4. nummos tribus menſibus, quod tempus requiritur, ut 100. nummis, lucretur 2000. nummos. Primò multiplica tres menſes per 10. fiunt triginta nummi menſtrui 4. nummi lucri exigunt 30. nummos menſtruos. 2000. nummi lucri quid requirent, invenióque multiplicando 2000. per 30. fieri 60000. & dividendo per 4. quotientem eſſe 5000. habeo autem 100 nummos per quos ſi divido 5000. quotiens erit 50. quæ iterum ſi divido per 12. habeo annos 12. & 6. menſes.

Singulis militibus dantur 4 nummi ſingulis menſibus, quid dabitur militibus 13000 novem menſibus. Multiplica 13000 per novem menſes, fient 117000. quæ iterum multiplica per 4. fient 468000.

12 Meſſores 20. jugera metunt novem diebus, intra quod tempus 30 meſſores 45 jugera metent. Primò multiplica 12. per 9. ut fiant operæ diurnæ 108. tum dices 20. iugera dant operas 108. 45. iugera quot exigent, provenientque 243. quæ ſi dividas per 30 meſſores, provenient octo dies & $\frac{1}{10}$ ſeu $\frac{1}{10}$.

Margarita emitur, quæ denuò venditur nummis 200. ita tamen ut jactura ſit decem pro 200. quæritur quanti fuerit empta initio.

Fiat ut 90 ad 100. ita 200 ad 4. 222 $\frac{2}{9}$.

Nam ſi empta eſſet 100. nummis, & vendita 90. eſſet jactura decem pro 100.

Mercator pannum emit illumque vendit nummis 3600. quæritur quanti emerit, ſi tamen emiſſet tribus nummis, minus, lucrum fuiſſet decem pro centum; fiat ut 110. ad 100. ita 3600 ad 3272 $\frac{8}{11}$. quibus ſi addas tria, fient $\frac{8}{11}$.

Mercator emit in Indiis 50000. libras piperis, fuitque pretium 10000. nummi. Portorium autem pependit in Luſitania 500. nummos. Pro naulo 300. Portorium in Italia 200 vectoribus dedit mille nummos.

Quanti debet vendere ſingulas libras, ut lucretur duos aſſes in ſingulas.

Pretium

pretium	10000.
Luſi portorium.	300.
naulus	300.
Italicum port.	200.
vectoribus	1000.
Fient A	12000.
	60.
B.	720000.
	120000.
	2000. $14\frac{2}{5}$
	50000.

Primò quæcumque ſoluta ſunt in unam ſummam coaleſcant, qualis eſt ſumma A, quæ in aſſes convertatur multiplicando per 60, fietque ſumma B quæ dividatur per 50000 quotiens erit $14\frac{2}{5}$, quibus ſi addas duos aſſes fient $16\frac{2}{5}$.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Datis tribus numeris invenire quartum qui ita ſe habeat ad primum, ut ſecundus ad tertium.

A. B. C. D.
4. 6. 3. 8.

Sint tres numeri A, B, C. quæritur D quartus qui ita ſe habeat ad primum A, ſicut ſecundus B ad tertium C, multiplicentur duo priores A, B, & productus dividatur per tertium C. Sit diviſoris quotiens D; dico D ita ſe habere ad A, ſicut B ſe habet ad C.

Demonſtratio. Cum enim rectangulum ſub A, B, æquale ſit rectangulo ſub D, C, ſi D ſtatuatur primus numerus; & C ultimus (*per prop. 19. hujus*) erit ut D ad A, ita B ad C. Quod erat demonſtrandum.

Atque hæc eſt quam vocant communiter regulam proportionum everſam: quæ tunc adhiberi debet, cum invenitur iam aliqua æqualitas, quod exemplis potiùs, quàm vocibus præcipuè abſtractis explicari poteſt. Curſor aliquis certum, & determinatum iter conficit intra 8 dies, ſingulis diebus conficiendo 24 leucas, ut idem ſpatium perficiat intra 6 dies, quot leucas conficere debet. In quo vides, quod utrobique ſit idem iter conficiendum. Multiplicando autem A per B habetur totum iter; quod ſi dividatur per 6 dies, habetur illud quod ſingulis diebus conficiendum eſt.

A. B. C. D.
Dies mill. dies millaria.
8. 24. 6. 32.

Aliud ſignum everſæ illius regulæ erit, quoties eò major eſt numerus quæſitus, quò minor eſt ille qui ponitur in quæſtione. Ut 20 homines intra 10 dies perficiunt aliquod opus, quot requirerentur ut idem opus perficerent, intra ſex dies, in quo vides; quod quò pauciores erunt dies, eò plures requirentur homines, ideò multiplicabis primum, per ſecundum, ut habeas numerum operarum diurnarum, quem numerum divides per dies, ut habeas numerum hominum.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Uſus varij Regulæ proportionum directæ.

Quamvis ea quæ diximus ſupra videantur ſufficere ad intelligentiam regulæ proportionum, ad faciliorem tamen eius uſum; putavi nonnulla hic ejus exempla eſſe adhibenda.

Intra 4 menſes expenduntur nummi 400, quot expendentur intra 12, vides autem eandem debere eſſe rationem numerorum 400. ad nummos quæſitos, quæ eſt 4 menſium ad 12. Ita ergo operaberis.

Diſponantur numeri.

menſes. nummi. menſes. nummi.
4. 400. 12. 1200.
12.
800.
400.
4800. 1200.
4.

Multiplica numerum 400 per 12, productum deinde per 4. prodibit numerus 1200. quæſitus.

Si proponatur hæc quæſtio. pro 15 nummis habeo tres ulnas panni alicujus; quot nummi requirentur ut habeam 20 ulnas. Ita debet proponi quæſtio, 3 ulnæ væneunt 15 nummis, 20 ulnæ quot nummos exigent.

3. 15. 20. 100.
15.
100.
20.
300.

Multiplica 15. per 20. productum 300. divide per primum 3. quotiens 100. erit numerus quæſitus. Si intra 4 menſes expenduntur 243 nummi, quot expendentur intra 4 annos, debent priùs mutari anni in menſes, ut fiat eadem denominatio menſium, ſunt autem 4 anni menſes 48.

4 menſes, nummi 243. menſes 48. nummi 2916.
48.
1944.
972.
11664. C 2916.
4.

Eodem modo operaberis quoties plures ſunt denominationes, hoc eſt ſi 4 menſes dant nummos 243. quot dabunt 4 anni & menſes 6. ponendi enim ſunt 54 menſes pro 4 annis & 6 menſibus. Alia ſimilia exempla innumera fieri poſſunt, modò nullæ ponantur fractiones; Docebo enim ſequenti parte, quomodo verſandæ ſint fractiones.

Exempla regulæ trium Everſa.

Cum ſextarius frumenti vænit libris turonenſibus ſexdecim, pro 12 aſſibus habentur ſex libræ panis, quot libræ dabuntur pro 12 aſſibus cum ſextarius venditur libris turonenſibus 14. Ita diſponantur numeri.

Libræ Tur. libræ panis. libræ Tur. 6. $\frac{12}{14}$.
16. 6 14.
6.
———
96. 6. $\frac{12}{14}$.
14.
———
12.

Tum multiplica primum per ſecundum, & productum divide per tertium; quartus qui proveniet erit is qui quæritur.

Demonſtratio eſt, quia in hac regulâ quo major eſt primus numerus eo minor eſt is qui quæritur, hoc eſt eâ proportione, quâ 14 ſuperantur à 16, eâdem numerus quæſitus ſuperat 6 unde debet fieri ut 14 ad 16. ita 6 ad numerum quæſitum, quod fiet juxta principia poſita, ſi 16 per 6 multiplices, & productum dividas per 14.

Congius vini vænit libris turonenſibus 44. & cotylæ octo, aſſibus 24. quot cotylæ habebuntur pro iiſdem 24 aſſibus, dum congius venditur libris 14. Animadvertis autem pro 24 aſſibus plures haberi cotylas, ſi congius minori pretio vendatur. Ita diſponantur numeri.

Libræ 44. Cotylæ. libræ 25 $\frac{2}{14}$.
8. 8. 14.
352.
72.
2.
14.

Requiruntur ad exercitum uno die dolia 32. quorum ſingula continent Cotylas 360. quot requirentur pro eodem exercitu dolia continentia cotylas 240.

Cotylæ. dolia. cotylæ. dolia.
360. 32. 240. 48.

Si multiplices dolia 32 per cotylas 360, efficies numerum cotylarum requiſitarum; quem numerum divides per 240. In duobus prioribus exemplis ſi modica fieret mutatio, eadem ratio adhiberi poſſet. Ponamus enim dum ſextarius frumenti vænit 16 francis haberi 6. libras panis pro franco: Per multiplicationem habetur numerus librarum panis quæ ſunt in ſextario, detractâ mercede piſtoris. Qui numerus diviſus per francos 14. oſtendit quot libræ competant ſingulis francis, ut autem ſe habet francus ad francum, ita 12 aſſes ad 12 aſſes.

Ex Panno cujus latitudo duorum palmorum, requiruntur palmi 36, ut certam ſupellectilem efficias, quæritur quot palmi ſint neceſſarij ad eandem ſupellectilem perficiendam, ſi latitudo panni fuerit trium palmorum. Si multiplices 36 per duos palmos efficies 72, numerum palmorum quadratorum requiſitorum ad propoſitam ſupellectilem, quem numerum ſi dividas per tria habebitur longitudo panni nempe 24.

Die horas 12 habente, veredarius certum iter conficit intra dies 10, quot requirentur dies, cum ſol ſupra horizontem per 16 horas manebit. Si multiplices 12, per 10, efficies 120, numerum horarum, quibus veredarius tale iter emetiri poteſt, ſi ergo talem numerum 120 dividas per 16, habebis dies 7. $\frac{8}{16}$ ſeu $\frac{1}{2}$

Imperator obſeſſus cum militibus 7000, victum habet ad alendos milites, pro 4 menſibus, dando ſingulis victum 14 aſſium, ſed ſperare, non poteſt auxilium niſi poſt ſeptem menſes; eadem autem ratio, quæ eſt 4 menſium ad 7 menſes eadem eſt 4 dierum ad 7 dies. Si autem haberet tantum, ad dandum militibus per 4 dies, 14 aſſes; multiplicando 14 per 4 haberetur ſtipendium unius militis pro 4 diebus, nempe 56, quæ ſi dividas per 7. fient 8 aſſes, quamvis autem non unus miles, ſed 7000. perinde tamen, ficut enim multiplicantur 14 aſſes per 7000, multiplicantur etiam 8 aſſes per eundem numerum.

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Datis diverſæ denominationis numeris, quartum proportionalem invenire.

Aliquando accidit ut plures, quàm tres numeri proponantur, quibus alius proportionalis quærendus eſt; cum tamen regula hæc aurea, ſeu proportionum non plures quàm tres admittat; ideò vel in duas regulas proportionum operatio dividenda eſt, vel numeri illi plures ad tres revocandi ſunt. Sit exemplum illud propoſitum, operarij 25, intra 6, dies abſolvunt foſſam longam 100 paſſus, quàm longam abſolverent operarij 30, ſpatio 8, dierum.

Ex duobus primis numeris fac unum numerum per multiplicationem 25, operarij intra 6 dies, multiplica 25. per 6, ut habeas laborem diurnum 150. operariorum, idem præſta in correſpondentibus; & totam regulam ad tres terminos revocaveris hoc modo.

Si 150 operæ diurnæ, dant foſſam longam 100 paſſus, operæ 240, quàm longam efficient invenies 160 paſſus, vel hoc modo partire operationem.

Si operarij 25 dant paſſus 100, operarij 30 dabunt paſſus 120, ſi nempe idem ſit numerus dierum 6, ideoque rurſus dicendum eſt.

Si 6. dies, dant paſſus 120, quid dabunt dies 8. & invenio 160.

Demonſtrationem hîc apponere ſupervacaneum puto cum rem ita ſe habere ſit ſatis notum per ſe.

Poteſt fieri ut in diverſis hujus regulæ exemplis, inveniantur variæ difficultates, ideò volui varia hic apponere exempla. Sit igitur iſtud primum 20 aurei, ſpatio trium annorum dant lucrum 8 aureorum, 30 aurei ſpatio 4 annorum quod lucrum dabunt. Utroque modo ſolvi poteſt quæſtio. 1. ſi multiplices 20 aureos, per tres annos fiantque 60 aurei annui; pariter multiplices 30 aureos per 4 annos fiantque 120 aurei

aurei annui; hoc modo regulam inſtituo; 60 dant 8, 120 dabunt 16. vel hoc modo.

20 Aurei dant 8 aureos; quid dabunt 30 aurei, ſi eodem tempore nempe per 3 annos referant lucrum, invenieſque 12. Denuo dices; ſi 3 anni dant 12 quid dabunt 4 & invenies 16.

Aliquando autem in una ex his regulis proportionum, opus eſt Inverſa regula trium; Ut aurei 4000 militibus 300, debentur in ſtipendium menſibus 4. quæritur quot menſium ſtipendium ſint nummi 6000, militibus 200.

Si dicas aurei 4000 dant ſtipendium militibus 300, aurei 6000 quot militibus dabunt ſtipendium, ſi militent eodem tempore nempe 4 menſibus, invenioque milites 450. Unde rurſus dico.

Si ſumma 6000 ſufficit ſtipendio 4 menſium pro 450 quot menſium ſtipendium erit pro militibus 200. In quo vides, quò plures erunt milites eò menſibus paucioribus ſufficiet, ideoque everſa regulâ trium opus eſt, nempe ut multiplices 450 per 4. faciaſque numerum ſtipendiorum menſtruorum, quæ divides per 200, invenieſque 9 menſes.

Alio item modo poterat ſolvi quæſtio; Si enim multiplices 300 milites per 4 menſes habebis menſtruorum ſtipendiorum numerum, quæ in 4000 aureis inveniuntur; Unde per regulam auream, dices ſi 4000 aurei dant 1200, quot dabunt 6000, habebiſque 1800. Quem numerum ſi dividas per 200 milites; provenient 9 menſes.

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Regula ſocietatis, ſeu datum numerum ſecare in partes, quæ datam ſervent proportionem.

Sint tres quorum primus contulerit aureos 6, alius 10, alius 12. Peractâ autem negotiatione invenitur lucrum aureorum 60. quæritur quantùm debeat quilibet accipere; ſeu dividendus eſt numerus 60; in tres partes quæ ita ſe habeant ut 6. 10. 12. nam quilibet debet habere lucrum ſecundùm proportionem ſortis: ita ut ſe habeat lucrum ad lucrum; ſicut ſe habet, ſors ad ſortem.

Addantur ſimul illi numeri, ſecundùm quorum proportionem dividendus eſt numerus 60, nempe ſortes ſeu 6. 10. 12. fientque 28.

6.	28.	6.	60.	A.	12.	$\frac{24.}{28.}$
10.	28.					
12						
$\overline{28.}$	28.	10.		B.	21.	$\frac{12.}{28.}$
	28.	12.	60.	C.	25.	$\frac{20.}{28.}$

Fiat triplex regula aurea. In prima dicatur ut 28, ad 6, ita 60 ad A. In ſecunda ut 28 ad 10, ita 60 ad B, ut 28 ad 12. ita 60 ad C, dico A, B, C eſſe partes numeri 60. eandem habentes rationem quam habent 6. 10. 12. & adæquantes ipſum 60. Cùm enim ſit ut 28 ad 6, ita 60 ad A, erit invertendo ut 6 ad 28, ita A ad 60. Quia igitur eſt ut 6 ad 28, & 28 ad 10, ita A ad 60, & 60 ad B erit ex æquo ordinatè ut 6 ad 10, ita A ad B. Oſtendam pariter ita ſe habere 10 ad 12, ſicut B ad C; jam oſtendere debeo A, B, C ſimul adæquare numerum 60. Cum numeri 6. 10. 12. & A, B, C ſint proportionales (*per 12.5. Euclidis*) erunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes, ut 6 ad A; ſed ut 6 ad A, ita 28 ad 60. (*ex conſtructione*): igitur ita 6. 10. 12 ſimul ad A, B, C ſimul, ut 28 ad 60; & alternando ut 6. 10. 12. ſimul ad 28. ita A, B, C, ad 60; ſed 6. 10. 12 ſunt æquales ipſi 28. (*ex conſtructione*; cum ſit facta eorum ſumma; ergo & A, B, C æquales ſunt ipſi 60. quod erat demonſtrandum.

Quod ſi numeris principalibus adhæreant alij numeri minùs principales, multiplicandi ſunt numeri principales per minùs principales, cætera ut in præcedenti regulâ fiant. Res in exemplis clara erit; Aliquando accidit ut non tantùm unius rei habenda ſit ratio, ſed duarum, verbi gratiâ. Sint iidem qui eaſdem ſortes in communem ſocietatem contulerint, ſed diverſum ſit tempus; ut qui 6 nummos contulit, eos reliquerit in communi ſocietate per 6. menſes, alius qui 10 per 8 menſes; qui 12 per 4 menſes, multiplica 6 nummos per 6 menſes, eruntque 36 nummi menſtrui, pariter 10 per 8 fient octoginta nummi menſtrui; denique 12 per 4 menſes, fientque 48. dividendum erit lucrum in partes quæ habeant rationem; quam habent illi tres numeri 36. 80. 48.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Notanda pro Regulâ ſocietatis.

Primò eandem praxin obſervari pro damno ac pro lucro, hoc eſt, quòd lucrum uniuſcujuſque ſocietatis ſe habere debet ad lucrum alterius; ſicut ſe habent ſummæ collatæ.

Unus contulit merces nummis.	200.
Secundus contulit.	400.
Tertius.	600.
Quartus.	800.

Penſatis autem omnibus exurgit ſumma 2000.

Damnum nummorum 400. Quantum damnum quiſque pati debeat.

Fiat ut 2000 ad 400. ita	200.	ad	40.
	400.	ad	80.
	600.	ad	120.
	800.	ad	160.
	2000.		400.

Examen hujus regulæ erit ſi addantur omnia damna ſimul, fiatque ſumma æqualis damno propoſito.

Societas mercatorum emit 2000. ulnas alicujus panni, nummis 500. fiat ut 2000 ad 500.

Primus accipit	200. ad 50.
Secundus	300. ad 75.
Tertius	400. ad 100.
Quartus	500. ad 125.
Quintus	600. ad 150.
	500.

Quæritur quantum quiſque ſolvere debeat, Fiat ut 2000 ad 500. ita 200 ad 50. ita 300 ad 75. ita 400 ad 100. &c.

Aliis innumeris exemplis accommodari poteſt regula ſocietatis, neque enim ſolis mercatoribus convenit; nam in regula ſocietatis partimur, lucrum, damnum, pretium, in partes quæ datam rationem habeant, ideoque in aliis quam plurimis rebus uſurpari poteſt.

Ut ſi proponantur 7 Piſtrina, quorum primum ſingulis diebus ſextarium molere poſſit, ſecundum duos, tertium tres, quartum quatuor, quintum quinque, ſextum ſex, ſeptimum ſeptem; quidam habet ſextarios 600. quos his ſeptem piſtrinis diſtribuere debet, ut eodem tempore ſuum opus perficiant. Clarum autem eſt quod quando primum unum habebit, ſecundum debeat habere duos, tertium tres, ideoque fiat ſumma competens.

Nempe 28. & dicas
1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.

Summa 28.

Ut 28. ad 600. ita

Ut 28. ad 600. ita
1. ad $21.\frac{3}{7}$
2. ad $42.\frac{6}{7}$
3. $64.\frac{2}{7}$
4. $85.\frac{5}{7}$
5. $107.\frac{1}{7}$
6. $128.\frac{4}{7}$
7. 150.

600.

Exempla ſocietatis diverſorum temporum.

Mercatores quatuor lucrati ſunt francos 240.
Primuſque dedit 60 nummos pro 4 menſibus.
Secundus 120 nummos pro 5 menſibus.
Tertius 180 nummos pro 6 menſibus.
Quartus 180 nummos pro 7 menſibus.

Quæritur quantum lucrum quiſque habere debeat, Multiplica nummos per menſes ut habeas nummos menſtruos.

Primus 240. nummos menſtruos.
Secundus 600.
Tertius 1080.
Quartus 1260.

Summa 3180.

Fiat ut 3180. Ad 240. ita
240. ad $18.\frac{36}{3180}$
600 ad $9.\frac{82}{3180}$
1080. $50.\frac{200}{3180}$
1260. $98.\frac{760}{3180}$

Sunt 20. duces, & 24. vexilliferi, quibus ita diſtribuendi ſunt 2752 nummi: ut dum dux habet 10 nummos, vexillifer habeat 6 nummos, quæritur quantum quilibet habere debeat; multiplica numerum ducum, ſeu 20 per nummos quos accipere debent, nempe per 10 fiunt 200. multiplica numerum vexilliferorum ſeu 24. per nummos quos quilibet accipere debet, fiuntque 144. adde illas ſummas 200 & 144. fiunt 344. dic ergo ut 344. ad 2752. ita 10 ad 80.
ita 6. ad 48.

Habebitur quid competat unicuique duci nempe 80 nummi, quid unicuique vexillifero nempe 48.

Sicut ex ſortibus deducimus lucra, ita nonnunquam ex lucris ſortes concludimus.

Tres mercatores ſocietarij, lucrantur mille nummos.
Primus poſuerat 300 nummos decem menſibus.
Secundus poſuit nummos 700. Ignoratur tempus.
Tertius 800. cujus etiam tempus ignoratur.
Primus habuit lucrum nummorum 500.

Secundus 300. tertius 200. quæritur tempus quo ſors ſecundi, & tertij in ſocietate remanſerunt, multiplica ſortem primi nempe 300 per 10 menſes, fiunt nummi menſtrui 3000. tum ita dices; ſi lucrum 500 nummorum, provenit ex ſorte 3000. lucrum ſecundi nempe 300. proveniet à 1800. quæ ſi dividatur per ſortem ejuſdem, nempe 700. exurgent menſes duo $\frac{4}{7}$ Eôdem modo habebis tempus tertij, eſſe menſem cum dimidio.

Tres mercatores in ſocietatem contulerunt nummos 1420. lucrum fuit nummorum 190. primus habuit lucrum 120. ſecundus 40. primò quæritur lucrum tertij, quod fit ſubtrahendo 120. & 40. ex 190. reſtat 30. ſors unius cujuſque habebitur ſi fiat ut lucrum totale 190 ad ſortem communem 1520 ita lucrum unicujuſque ad ſuam ſortem.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Regula alligationis.

Per alligationem intelligimus, definitionem pretij alicujus medij inter res diverſi pretij permixtas

mixtas inter ſe, quæ quidem diverſimodè inter ſe permiſceri poſſunt. Nam poteſt eſſe permixtio ut tantundem ex utrâque ponatur, vel plus unius quàm alterius.

Proponatur famoſiſſimum illud exemplum Archimedicum, in quo aurifex coronam Hieronis regis adulteravit. Ponatur aurifex recepiſſe à rege 15 libras auri puriſſimi, cujus pretium erat 24. & admiſcuiſſe 5 libras, cujus pretium eſſet tantum 8: Quæritur cujus valoris ſit quælibet libra hujus auri mixti. Multiplicentur ſingulæ materiæ per ſuum pretium. Hoc eſt 15 per 24 & 5 per 8. habebiſque pretium 15 librarum eſſe 360. & 5 librarum eſſe 8. Hæc pretia ſimul adde: fient 400. pretium nempe tam 15. librarum, quàm 5. quod pretium ſi dividas per 20. habebis pro quotiente 20. pretium unius libræ ita mixtæ.

2 4.   8.
1 5.   5.
————
3 6 0.   4 0.
adde   4 0.
————
4 0 0.
2 0.   divide
2 0.

Hic puto alia opus non eſſe demonſtratione. Cum enim 400 ſit pretium totius maſſæ 20 librarum ſi dividatur tale pretium per 20. habebitur pretium unius libræ.

In aliis exemplis manifeſtior fiet tota regula: Sint duo vini genera, quorum aliquæ menſuræ permiſcentur; quæritur commune pretium, nempe pretium unius menſuræ vini,

Menſuræ.	3.	pret.	4.	aſſium.	12.
Menſuræ.	5		3.	aſſium.	15.
Summa	8.	commune.			
Menſurarum.		pretium.			27.
		$3.\frac{3}{8}.$			

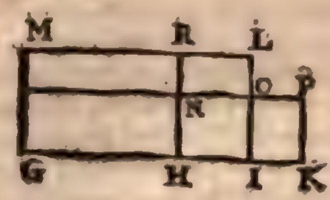
ita permixti. Sint igitur menſuræ 3 vini cujus menſura valeat 4 aſſes, & quinque menſuræ vini cujus pretium ſit 3 aſſium, Multiplica utrobique menſuras per ſuum pretium exurget 12. & 15. quæ ſimul adde ut fiat 27. pretium totius illius vini. Quod ſi dividas per ſummam menſurarum, clarum eſt, quòd $3\frac{3}{8}$ erit pretium cujuſlibet menſuræ.

Neque eſt major difficultas in miſcendis pluribus, quàm duabus materiis.

Alia pars ejuſdem regulæ eſt, dato pretio aliquo medio, ita duas aut tres materias miſcere, ut eo pretio vendi debeant. Sint duæ ſpecies vini A quarum una vendatur 7 aſſibus, alia duobus, debent autem ſic miſceri viginti menſuræ, ut ſic mixtarum quælibet valeat 4. aſſes.

A.	7.	D.	2.
B.	4.	F.	5.
C.	2.	E.	3.

Sit numerus E 3. differentia inter majus pretium, & mediocre; item D differentia inter minus, & mediocre, primò ſi tot menſuras melioris vini ſumas quot ſunt unitates in D, & tot menſuras, infimi quot ſunt unitates in E, eaſquè miſceas erit pretium cujuſlibet æquale ipſi B. Hoc eſt ſi D & E ſimul addantur fiantque F, quod F in A, productum ſit æquale. Duobus ſimul productis D in A, & E in C, ſeu quod 5 menſuræ pretij medij B tantum valeant quantum valent 2 D pretij A, & 3. E, infimi pretij C.



Demonſtratio. Sit pretium A repræſentatum lineâ GK, pretium medium B, repræſentatum lineâ GI, & infimum C, repræſentatum linea GH; ſitque HK aggregatum, ex differentiis GI, IK, ſeu numerus F. Sitque rectangulum GL comprehenſum ſub GI & GM æquale ipſi HK, hoc eſt F, multiplicet ipſum B, ſitque IO æqualis ipſi HI. Dico quod rectangulū GL, æquale ſit, rectangulis GP, & MN quorum GP comprehenditur ſub maximâ lineâ GK; & linea PK, ſeu IO aut HI differentiâ minoris à mediocri (hoc eſt ſi D multiplicet A) rectangulum autem MN comprehenditur ſub MR, hoc eſt; GH & NR, quæ eſt æqualis ipſi IK. (Nam HK & HR ſunt factæ æquales, item HI & HN. Ergo & reliquæ NR & IK.) quod rectangulum repræſentat numerum productum ex multiplicatione C per E. Nam rectangula IP, NL ſunt æqualia; Oſtendimus enim IK & NR eſſe æquales; item IO & NO. Quare additis rectangulis GO, & MN, fiet rectangulum GL, æquale rectangulis GP, MN; ſeu quod idem eſt, ſi F multiplicet B, eundem producet, ac ſi D multiplicet A & E multiplicet C. Ergo benè hoc modo mixtum vinum erit pretij medij, ſed loco quinque requiruntur 20 menſuræ, Fac igitur ut F 5. ad D 2. ita 20. ad 4, provenient 8. menſuræ vini A, & 12. vini C quod ultimum per ſe patet.

Si verò tres, aut 4. materiæ diverſi pretij ita ſint miſcendæ in certâ menſurâ, ut quælibet ſit medij alicujus pretij, duas quaſlibet alligabis modo tradito, & iterum unam illarum cum aliâ, & ita deinceps.

		A. 2 0.	E. 2.	G. 6.	
D.	1 8.	B. 1 6.	F. 2.		
		C. 1 2.	H. 2.		

Proponatur exemplum vas aureum conflandum eſt, ex tribus auri generibus quorum unum ſit pretij 20. ſecundum pretij 16. tertium pretij 12. debeat autem eſſe medij alicujus pretij nempe 18. & pendere libras 14.

Alligabis primò ut traditum eſt duo auri genera A & B, invenieſque utriuſque libras duas, alliga deinde A & C. quia 18. inter utrumque invenitur: invenieſque eſſe ponendas adhuc libras 6 auri A, & duas auri C. Dico ergo, ſi miſceas 8. libras auri A, duas auri B, & totidem auri C. fiet materia totalis cujus ſingulæ libræ erunt pretij 18.

Demonſtratio. In prima alligatione A cum B, certum eſt fieri materiam conſtantem 4. libris, cujus ſingulæ libræ ſint pretij 18. pariter in ſecunda alligatione fit materia 8. librarum cujus ſingulæ menſuræ etiam ſunt pretij, 18. ſed dum materia,

materiâ ejuſdem pretij, totum quod exurgit eſt etiam ejuſdem ſpecie pretij; ergo ſi miſceantur 8 libræ auri A, cum duabus auri B, & duabus auri C, fiet totum 12 librarum, cujus quælibet eſt pretij 18. ſed loco 12 librarum requiruntur 14. Adhibeatur ergo regula ſocietatis. Si 12 libræ exigunt 8 ex auro A; quot requirunt 14, invenieſque eſſe adhibendas $9\frac{1}{3}$, & ita de reliquis.

Quod diximus de pretio, intelligi poteſt de quolibet alio effectu, quod per modum pretij intelligemus. Ut ſi ponderemus aquam quam expellent ex vaſe pleno diverſa metalla, alligabimus ea in unam maſſam, tanti ponderis, ita ut quælibet illius maſſæ libra tantam determinatè aquam expellat; idem dicendum eſt de pondere quod metallum amittit dum aquæ immergitur: ita de aliis effectibus hujuſmodi, qui loco pretij ponantur.

PROPOSITIO XXXI.

Problema.

Ex falſo ad arbitrium aſſumpto eruere verum.

Hæc eſt regula quam communiter vocant falſi, & quæ algebræ occaſionem dedit, in qua quidem aliquid aſſumitur, tanquam verum; ex quo deinde eruitur numerus ille, qui quæritur. Tribus præceptis tota regula abſolvitur. Primum eſt ut eum numerum ponas pro quæſito, qui tibi videbitur aptus. Secundum, ut examines an verè ille ſit qui quæritur. Tertium ut adhibeas regulam proportionis, ſeu regulam ſocietatis. In exemplo res clara erit. Sit numerus 100, dividendus in tres partes quarum prima ſit tripla ſecundæ, ſecunda dupla tertiæ. Supponatur illa minima pars eſſe 2. (Incipio autem potiùs à minimâ, quàm ab aliis ad vitandas fractiones, quæ ſemper quantum fieri poteſt vitandæ ſunt.) Secunda erit 6. Tertia erit 12.

Secundum præceptum vide an illæ tres partes 2. 6. 12. efficiant 100. Si enim efficerent 100 ſolutum eſſet problema; hoc autem experiri potes illas addendo. Per additionem earum exurgunt tantum 20.

Tertium præceptum fiat regula ſocietatis. Hoc modo ſi 20 dat 2 pro primâ parte, quid dabunt 100, invenioque 10. Dico peractum eſſe problema. Nempe 100. dividi in 10. 30. 60. quarum partium 60 eſt dupla 30. & 30 eſt tripla ipſius 10.

Demonſtratio. Primò partes 2. 6. 12. aſſumptæ ſunt quæ habeant eam conditionem, quam exigit problema. Secundò per additionem eæ ſunt inventæ æquales numero 20. Tertiò per regulam trium factum eſt, ut 20 ad 2. ita 100 ad 10. & ita de reliquis. Ergo ut 20 ad 2. 6. 12. ſimul ita 100 ad 10. 30. 60 ſimul, ſed 20. æqualis eſt partibus 2. 6. 12. Ita etiam 100. ipſis 10. 30. 60. ſimul erit æqualis.

Proponatur aliud. Sit leo lapideus, qui ſi ex oculis aquam profundat intra 10 horas, ſubjectum receptaculum implet; ſi ex auribus intra 5 horas; ſi ore intra 20 horas; intra quot horas implebit, ſi aquam profundat ſimul oculis, auribus, & ore. Supponamus intra horam, aut potiùs per horam, aquam ex omnibus partibus profluere. Igitur replebit ore unam partem vigeſimam, auribus unam quintam, & oculis decimam, quæ ut ad eumdem denominatorem reducantur, una quinta æquatur duabus decimis, ſeu 4 vigeſimis, una decima duabus vigeſimis. Sunt igitur $\frac{4}{20}\ \frac{2}{20}\ \frac{1}{20}$ quæ ſimul addantur faciunt $\frac{7}{20}$.

Sed debuerant eſſe $\frac{20}{20}$ ut tota cupa impleretur. Quare inſtituatur regula trium. Si 7 nempe vigeſimæ dant horam, ſeu 60 minuta, quid dabunt 20. Exurgentque horæ duæ cum minutis 51.

Alia exempla hujuſmodi fieri poſſunt. Aliquis pecuniæ ſeu ſummæ quam habebat partem dimidiam in ludo perdidit. Quartam egenis erogavit, quæ ipſi reliqua eſt ſunt nummi 10. quæritur quid habuerit.

Vel aliud pecuniæ ſuæ mediam partem ludo amiſit, reliqui quartam partem dedit egenis, reſiduos habet 10 nummos.

Ad demonſtrationem hujus propoſitionis debent aſſumi aliqua, quæ ne non demonſtrata remaneant, nonnulla præmittam lemmata.

LEMMA I.

Si tres numeri aliis tribus proportionales fuerint, eorum differentiæ proportionales erunt.

A.	B.	C.	G.	H.
6.	4.	3.	2.	1.
D.	E.	F.	L.	K.
12.	8.	6.	4.	2.

Sint tres numeri A,B,C, tribus D, E, F proportionales, ſitque differentia inter A & B, numerus G. Nempe exceſſus quo A ſuperat B, pariter H ſit exceſſus quo B ſuperat C. L ſit differentia inter D & E. Et K differentia, inter E F; dico ita eſſe G ad H, ſicut L ad K.

Demonſtr. Quia ita eſt A ad B ſicut D ad E: erit permutando ut A ad D; ita B ad E; ſupponatur auferri B ab A, reliquum erit G; ſicut ſi auferatur E ex D relinquitur L; Quia ergo ita eſt totum A ad totum D ſicut ablatum B ad ablatum E; ita erit (*per 15.5.*) reliquum G ad reliquum L, ut totum A ad totum D, vel etiam ut ablatum B ad ablatum E; Ita oſtendam eſſe H ad K ut C ad F: igitur ita erit G ad L ſicut H ad K, nempe ut B ad E, ergo & permutando erit G ad H, ut L ad K. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA II.

Si duobus numeris idem numerus addatur, aut ab illis idem numerus auferatur, differentiæ ſummarum aut reſiduorum eadem erunt quæ priorum numerorum.

Sint numeri A & B, quorum differentia ſit C; illis autem addatur numerus D, ita ut fiant numeri E & F; dico eorum eamdem eſſe differentiam G. Item ſi à numeris A & B idem numerus D ſubtrahatur; ita ut reſtent numeri H & K; dico illorum eandem eſſe differentiam L.

A. 8.	B. 6.	C. 2.
	D. 4.	
E. 12.	F. 10.	G. 6.
H. 4.	K. 2.	L. 2.

Demonſtratio. Numerus E, continens numeros D & A; continet numerum B, & inſuper exceſſum numerum A, ſupra numerum B. Nempe C, numerus autem F continet numeros B & D; ergo numerus E ſuperat tantùm numerum F numero C

Idem

Idem oſtendere poſſumus in numeris H & K quibus ſi addas eundem numerum D fiunt numeri A & B.

LEMMA III.

Si numeri tres, per eundem multiplicentur, aut per eundem dividantur; productorum differentiæ, erunt proportionales differentiis numerorum.

A. 4. B. 6. C. 8. E. 2. F. 4.
D. 2.
G. 8. H. 12. K. 16. L. 4. M. 8.
N. 2. O. 3. P. 4. R. 1. S. 2.

Sint tres numeri A, B, C, ita ut differentia inter A & B ſit E, differentia inter A & C ſit F; multiplicentur tres numeri A, B, C, per numerum D, fiantque tres numeri G, H, K, ita ut differentia inter G & H ſit L & inter G, & K, ſit M; dico ita eſſe E ad F; ſicut L ad M.

Demonſtratio. Cum numerus idem D, multiplicat A, B & C, fiunt tres numeri G, H, K, æquemultiplices ipſorum A, B, C: ergo & proportionales (*per 15. 5.*) ergo (*per primum Lemma*) differentiæ eorum proportionales erunt.

Pariter dum idem numerus D dividit numeros A, B, C. quotientes N, O, P, ſunt numerorum A, B, C, eædem partes aliquotæ; ergo & (*per eandem 15.*) proportionales erunt; ergo (*per primum Lemma*) differentiæ eorum proportionales erunt.

COROLLARIUM.

Ex hoc ſequitur quòd errores poſitionum, eamdem habeant rationem, ac errores numerorum ex ipſis poſitionibus genitorum, voco errorem poſitionis falſæ, differentiam inter numerum falſum aſſumptum, & numerum qui aſſumi debuerat; errorem autem genitorum, differentiam numerorum, qui ex talibus poſitionibus oriuntur, ab eo qui oriri debuerat. Ratin autem eſt quia in omni operatione quatuor tantùm, interveniunt regulæ, nempe additio, ſubtractio, diviſio, multiplicatio. Hoc eſt vel idem numerus in utráque poſitione additur, vel ſubtrahitur ab ipſis poſitionibus, vel per eundem numerum multiplicantur poſitiones. Primæ regulæ nempe additio, & ſubtractio, eaſdem relinquunt differentias, multiplicatio, & diviſio faciunt differentias proportionales; ergo ſemper differentiæ genitorum proportionales erunt differentiis poſitionum, ſed hoc meliùs intelligetur ex ſequentibus.

LEMMA IV.

Si quatuor numeri, arithmeticè proportionales fuerint, aggregatum ex primo, & ultimo; æquale erit aggregato ex duabus mediis, & viciſſim. Si aggregatum ex duobus mediis æquale fuerit Aggregato ex primo, & ultimo; illi quatuor numeri arithmeticè proportionales erunt. Voco arithmeticè proportionales numeros qui ita ſe habent ut primus ſuperet ſecundum, aut ab eo ſuperetur eodem prorſus exceſſu, quò tertius ſuperat quartum, aut ab eo ſuperatur.

A. 4. B. 6. C. 10. D. 12.
E. 4. G. 10.
F. 2. H. 2.

Sint 4. numeri A, B, C, D, arithmeticè proportionales, hoc eſt B eodem exceſſu ſuperet A, quò D ſuperat C; dico A & D ſimul æquales eſſe B & C ſimul.

Demonſtratio. B dividatur in E, ipſi A æqualem, & exceſſum F, ita ut E, F ſint ipſi B æquales; pariter D dividatur in G ipſi C æqualem, & H exceſſum, ita ut F, & H ſint æquales ipſi D; ſi numero A, ex unâ parte; & numero E ex aliâ addas ipſi A numerum G, & numero E ipſum C; fient A & G ipſis È & C æquales. Addantur deinde ipſi A & G exceſſus H, ipſis autem E, & C exceſſus B, F fient A, & G, H, ſeu A & D, ipſis E, F, ſeu B & C æquales; quod erat demonſtrandum.

E converſò ſi A & D ſint æquales, ipſis B & C; dico illos numeros A, B, C, D eſſe arithmeticè proportionales. Sit enim pariter exceſſus ipſius B, ſupra A, numerus F, & exceſſus numeri D, ſupra C, numerus H; dico F & H eſſe æquales. Cùm enim additis A & C, ex unâ parte, & ex aliâ E & C ſit æqualitas. Si F & H eſſent inæquales, addit ex unâ parte F & ex aliâ ipſo H, fierent A, G, H, ſeu A, D inæquales ipſis E, F, C, ſeu ipſi B, C contra ſuppoſitionem.

LEMMA V.

Si duo numeri eundem multiplicent, & productus minor, à majori ſubtrahatur, relinquitur numerus æqualis producto, multiplicatione, ejuſdem numeri, per differentiam multiplicantium.

A. 4. K. 3.
B. 3. C. 5. G. 2.
E. 12. F. 20.
H. 8. L. 12. M. 8.

Sit numerus A, multiplicatus per B & C; ita ut fiant numeri E & F ſubtrahatur E minor, à majori F: ita ut relinquatur H; differentia autem inter B & C, ſit G dico numerum H, æqualem eſſe producto ex G in A; intelligatur numerus C dividi in K ipſi B æqualem & differentiam G.

Demonſtratio. Numerus A multiplicans K & G; producat L & M; L & M æquales erunt ipſi F producto ex A in C; (*per primam 2. Euclid.*) ſed E & H æquales ſunt ipſi F. Cùm ſubtracto E ab F relinquatur H; igitur E & H æquales ſunt ipſis L & M, ſed E, æqualis eſt; ipſi L. Cùm B & K ſint æquales: ergo H & M æquales ſunt, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXII.

Problema.

Ex duobus ſuppoſitis falſis verum eruere.

Sit

Digitized by Google

A. 100. B. 60.

R. 2880. G. 48. H. 36. S. 2880.

K. 720. C. 12. D. 24. L. 1920.

Minus X Minus

E. 80. F. 60.

M. 1200.

N. 20. P. 60.

Sit numerus A dividendus, ita ut prima pars ſit dupla ſecundæ, hæc tripla tertiæ; quæritur prima illa pars, quæ licèt ſit B 60, incognita tamen ſupponitur.

Sit prima poſitio C, hoc eſt aſſumam illum numerum, ſeu primam partem eſſe C 12 quam examino. Illius media pars eſt 6, & tertia pars ipſius 6 eſt 2; jam 12. 6. 2. efficiunt 20, cum tamen efficere deberent 100; igitur genitus deficit à vero numero E 80.

Sit alia poſitio D, quæ ſi examinetur tota operatio producetur 40 cum 100 produci debuiſſet. Igitur error eſt numerus F 60; eſt autem utrobique defectus, quod notandum eſt.

Multiplica decuſſatim errores genitorum nempe E, & F, per ipſas poſitiones C & D ita ut fiant numeri K & L; ſubduc minorem K à majori L, quia errores ſunt ſimiles; nempe uterque per defectum (nam ſi eſſent diverſi generis, nempe unus error per defectum, alius per exceſſum addendi eſſent & relinquitur M) pariter ſubduc errorem F ex errore E relinquitur N, dico ſi dividas numerum M per N quotientem P eſſe veram poſitionem ſeu eſſe primam illam partem, numeri A.

Demonſtratio. Sint G & H licèt ignorentur errores poſitionum, ſeu differentiæ poſitionum aſſumptarum, à numero B qui aſſumi debuerat (*Ex corollario 3. Lemmatis*) erunt iſti errores poſitionum nempe G & H, proportionales erroribus genitorum nempe ipſis E & F, hoc eſt G ad H; ita E ad F. (*Ergo per 19 hujus*) Idem numerus producetur ſi primus G multiplicet quartum F, qui producitur ex multiplicatione ſecundi H per tertium E, hic numerus ſit 2880, qui ſcribatur bis, nempe in R & S, quia numeri G, C ſunt æquales numero B, & numerus F multiplicando utrumque facit R & K (*per primam 2. Euclid.*) numeri R & K ſimul æquales ſunt, illi qui produceretur, ex multiplicatione numeri B per F. Pariter

A. 100. B. 60.

R. 2880. G. 48. H. 36. S. 2880.

K. 720. C. 12. D. 24. L. 1920.

Minus X Minus

Err. gen. E. 80. F. 60.

M. 1200.

N. 20. P. 60.

S & L ſimul æquales ſunt illi qui fieret ex multiplicatione B, per E. Quare ſi ſubtrahantur R, K, ex S, L, idem fiet, ac ſi productus ex B per F; ſubtraheretur, à producto ex B per E; ſed ſi ſubtrahantur, R, K, ex S, L, cum R & S; ſint æquales, ídem relinquitur, ac ſi ſubtraheretur K ab L, nempe relinquitur M; cum igitur duo numeri E & F multiplicando eundem B, fecerint duos, quorum unus ab alio ſubtrahitur, id quod relinquitur nempe M, (*per 5. Lemma*) eſt æquale producto, ex multiplicatione numeri B; per differentiam numerorum E & F; nempe N; ergo diviſione numeri M, per N; idem numerus B reſtituitur quod erat demonſtrandum.

Probatus eſt primus caſus in quo utrobique

A. 100. B. 60.

R. 1206. G. 6. H. 12. S. 120.

K. 1320. C. 66. D. 72. L. 720.

Plus X Plus

Err. gen. E. 10. F. 20.

M. 600.

N. 10.

P. 60.

peccatum fuerat per defectum: nunc probandus eſt caſus ille, in quo in utráque poſitione peccatum eſt per exceſſum.

Ponatur ergo Prima poſitio eſſe C 66. & examine facto, loco 100, invenitur 110, igitur eſt error E 10 per exceſſum.

Ponatur ſecunda poſitio eſſe D, & examine facto, invenitur produci 120, cum 100 tantùm produci debuerant; eſt ergo error F 20. per exceſſum.

Multiplica decuſſatim errores E & F per ipſas poſitiones C, D, fiantque K & L, ſubduc minorem ex majori nempe L ex K, ita ut reliquus ſit M; ſitque N differentia inter errores E & F, divide M per N; ſitque quotiens P, dico P eſſe æqualem, numero B ignoto.

Demonſtr. Sint G & H licèt ignorentur errores poſitionum nempe G, quantùm C ſuperat B & pariter H exceſſus ipſius D ſupra B, erunt (*per coroll. Lemmatis tertij*,) Errores poſitionum nempe G & H erroribus genitorum nempe ipſis E & F proportionales; hoc eſt ut G ad E; ita H ad F; ergo (*per 19. hujus*) productus ex G primo, in F quartum, æqualis eſt producto ex H ſecundo, in E tertium. Sit ille numerus 120 ſcribendus in R & S; quia numerus C continet numerum B, & inſuper numerum G; ſi per eundem numerum F multiplicetur C & B, (*per 5. Lemma*) & ſubtrahatur productus ex F in B, ex producto ex F in C, relinquetur R, productus ex F in differentiam G hoc eſt numerus K æqualis eſt numero R, & producto ex F, in B; pariter numerus L, productus ex E in D, æqualis eſt numero S, producto ex E in H, & producto

ex

Digitized by Google

ex F, in B, quare ſi ſubtrahatur L, ex K, idem numerus M relinquetur, ac ſi S productus ex E, in B; ſubtraheretur ex R, & ex producto ex F in B & quia R & S ſunt æquales, idem fit ac, ſi productus ex E in B, ſubtraheretur ex producto ex F, in B, quare (*per 5. lemma*) numerus M eſt æqualis producto, ex B in differentiam numerorum E & F, quæ eſt N; quare ſi M dividitur per N quotiens erit numerus æqualis ipſi B; quod erat demonſtrandum.

A. 1 0 0. B. 6 0.

R. 4 8 0. G. 4 8. H 6. S. 4 8 0.

K. 1 2 0. C. 1 2. D. 6 8. L. 5 8 0.

Minus X Plus

Err. Gen. E. 8 0. F. 1 0.

N. 9 0. M. 4 5 0 0.

P, 6 0.

Reſtat ultimus caſus in quo erratur in unâ poſitione per defectum; in alia per exceſſum; ſit idem numerus A, dividendus in tres partes, quorum prima ſit dupla ſecundæ, & ſecunda tripla tertiæ, ſitque illa prima pars numerus B ignoratus. Prima poſitio ſit C & examine facto generetur numerus 20, cum tamen numerus 100 produci debuiſſet; eſt ergo 80 error producti, per defectum; ſit ſecunda poſitio 66 examine facto invenitur 110, pro ipſo 100; eſt ergo 10 error producti excedens.

Multiplica alternatim poſitiones C & D, per errores genitorum E & F; producaturque K & L, adde minorem K majori L quia errores ſunt diverſi generis; fiatque M, adde pariter errores E & F fiatque N, divide M per N, ſitque quotiens P; dico numerum P æqualem eſſe numero B.

Demonſtratio. Sint G & H errores poſitiònum hoc eſt ſit G, exceſſus quò B ſuperat ipſum C; ſeu ſint C & G ipſi B æquales, & H ſit exceſſus quò B ſuperat C, hoc eſt ſint B, H, ipſi D æquales, erunt autem iſti errores poſitionum, erroribus genitorum proportionales, (*per coroll. 31. lemmatis*) hoc eſt ita erit G ad E; ſicut H ad F & conſequenter (*per 19. huius*) erit genitus, ex multiplicatione primi G, per quartum F, æqualis genito ex H in E; ſit illud 480 qui ſcribatur in R & S; cum autem C & G æquentur ipſi B & F multiplicando ipſos C & G fecerit R, K; erunt R, K, ſimul æquales producto ex F, in B. Quia autem D major eſt, quàm B; ita ut B & H ſint æquales numero D; ſi intelligatur E multiplicare D, H, B; numerus L ortus, ex multiplicatione D per E, continebit ortum ex multiplicatione ipſius B & per E & H, per E quare numeri K, L, additi æquales ſunt producto ex B per E; & producto ex B, per F ſeu producto ex B per E, F (*per primam ſecundi Euclid.*) igitur ſi addantur K & L fiatque M, addantur item E, F fiatque N, dividatur M per N quotiens erit æqualis numero B quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIV.

Alius modus regulæ falſi duplicis poſitionis.

A. 1 6 0. B. 6 0.
H. 4 8. K. 3 6.
C. 1 2. L. 1 2. D. 24.

Minus X Minus

E. 8 0. F. 6 0.
G. 2 0.
6. 2 0. L. 1 2. E. 8 0. M. 4 8.
6. 2 0. L. 1 2. F. 6 0. N. 3 6.

Alius tradi poteſt modus inveniendi verum ex duobus falſis; in quo quidem multa ſunt ſimilia; primò quidem ponuntur duæ poſitiones ad libitum, examinantur, & notantur errores genitorum notis conſuetis plùs, minùs.

Sit idem exemplum numerus nempe A dividendus in tres partes, quarum prima ſit dupla ſecundæ. Secunda tripla tertiæ, ſupponatur illa prima pars, numeri A quæ eſt B, ſed ignoratur; eſſe C factóque examine invenitur, produci tantùm 20, cum produci debuiſſet 100, ſit error geniti E; pariter alia poſitio ſit 14, & error F, differentia errorum genitorum ſit G; errores poſitionum ſint H & K; ignoti quidem, ſi enim cognoſcatur error verbi gratiâ H, ille additus numero C, daret numerum B. Sit duarum poſitionum differentia L, quæratur tribus numeris G, L, & uni ex erroribus genitorum verbi gratia E, quartus numerus proportionalis M; hunc dico eſſe æqualem errori H; poſitionis C, ex qua natus eſt error geniti E, vel ſi aſſumptus fuiſſet pro tertio numero error geniti F quartus eſſet error K; quare ſi hic error poſitionis addatur in hoc caſu in quo erratum eſt per defectum ſuæ poſitionis, habebitur numerus B quæſitus.

Demonſtratio. (*Per coroll. lemmatis 3.*) duo errores genitorum nempe E, F proportionales ſunt duobus erroribus poſitionum nempe H, K. Secundò quia error H, & poſitio C, eundem numerum faciunt nempe B; quem faciunt D & error K; quatuor numeri H, K, D, C arithmeticè proportionales ſunt (*per lemma quartum*) ergo erit eadem differentia priorum, & poſteriorum; ergo L, quæ eſt differentia poſitionum C D; eſt etiam differentia errorum H, K quia ita eſt E ad F, ſicut H ad K, & exceſſus E, ſupra F eſt, G, ſicut exceſſus H, ſupra K, eſt L; per converſionem rationis ita erit E, ad exceſſum G; ſicut H ad L. Et convertendo ſicut G ad F, ita L ad H, ſed ita factus eſt L ad M ergo M & H æquales ſunt. Pariter quia eſt ut E ad F; ita H ad K; & exceſſus E, ſupra F eſt G; ſicut exceſſus H, ſupra K eſt L, erit ut F ad G; ita K ad L; ergo & convertendo, ut G ad F; ita L ad K: ſed ita erat L ad N; igitur N & K æquales ſunt: ergo addendo N ipſi errori D, habebitur numerus B; quod erat faciendum.

Si peccatum foret per exceſſum utrobique; ita etiam ratiocinaremur, ſuppoſitis omnibus

A. 1 0 0. B. 6 0.
H. 6. K. 1 2.
L. 6.
C. 6 6, D. 7 2.

Plus Plus

E. 1 0. F. 2 0.
G. 1 0.
G. 1 0. L. 6. E. 1 0. M. 6.
G. 1 0. L. 6. F. 2 0. N. 1 2.

iiſdem erroribus E, F, & erroribus H, K, proportionalibus, ſecundò quia auferendo eundem numerum B ex poſitionibus C, D, reſtant errores H & K, (*per lemma ſecundum*) erit eadem differentia priorum, & poſteriorum; nempe L, eadem valet regula trium quæ priùs niſi quod numeri M & N æquales erroribus auferendi ſunt à poſitionibus.

A. 1 0 0. B. 6 0.
H. 4 8. K. 6.
L. 5 4.
C. 1 2. D. 6 6.

Minus Plus

E. 8 0. F. 1 0.
G. 9 0.
G. 9 0. E. 8 0. L. 5 4. M. 4 8.
G. 9 0. F. 2 0. L. 5 4. N. 6.

Si denique in una poſitione erratum ſit, per defectum, in alia per exceſſum, pariter errores E, F, erroribus H, K proportionales ſunt; ſecundò ſi auferatur C ex D, relinquitur L, ergo C & L ſunt æquales ipſi D; D autem eſt æqualis ipſis B & K, & B eſt æqualis ipſis C & H. Igitur C & L æquales erunt ipſis C, H, K, ablato autem utrinque C, reſtabunt H, K; ſimul æquales ipſi L; ſed L eſt differentia poſitionum, ergo idem L erit aggregatum errorum H, K. Quia autem eſt ut H ad K; ita E ad F; erit componendo ut E, F ſeu G ad E, ita H, K; ſeu L ad H; aut ut E F, ſeu G ad F, ita H, K, ſeu L ad K; unde ſi fiat regula trium numeri M, N, erunt errores poſitionum, quorum M qui fuit per defectum, addi debet ſuæ poſitioni C; ut B inveniatur: N verò qui fuit per exceſſum ſubtrahi debet à ſua poſitione D, ut habeatur idem numerus B.

COROLLARIUM I.

Ex hac ultimâ praxi poterimus difficultatem hujus regulæ minuere, cum enim unitas dividendo aut multiplicando aliquem numerum, eundem relinquat, ſi terminus aliquis regulæ proportionis ſit unitas, vitabimus, aut multiplicationem, aut diviſionem, quod ut præſtemus, ſecundo poſitio fiat aut major, aut minor primâ poſitione, ſolâ unitate, quod in exemplo manifeſtum erit.

A. 1 0 0. B. 6 0.
H I.
C. 1 2. D. 1 3.
E. 8 0. F. 7 8 $\frac{1}{3}$.
G. 1 $\frac{2}{3}$
Fiat ut.
G. 1. $\frac{2}{3}$ ad H. I. ita F. 7 8. $\frac{1}{3}$. L. 4 7.
G. 1. $\frac{2}{3}$ H. I. E. 8 0. M. 4 8.

Proponatur idem numerus A, dividendus in tres partes; quarum prima ſit dupla ſecundæ: & hæc tripla tertiæ; ſit prima poſitio C 12. & examine facto error inveniatur E, per defectum, fiat ſecunda poſitio D, unitate major, invenieturque error 78 $\frac{1}{3}$, ſit differentia errorum genitorum G, & differentia poſitionum H, nempe unitas debet fieri ut G ad H, ita error F ad L; qui erit error poſitionis D, qui additus eidem poſitioni D dabit numerum B. Vel per alium errorem fiat ut G ad H; ita E ad M, M erit error poſitionis C, qui illi additus dabit pariter numerum B quæſitum, vitatur autem multiplicatio.

COROLLARIUM II.

Si poſitiones differant denario vitatur item multiplicatio quæ fiet addito 0.

Digitized by Google

ARITHMETICÆ de numeris fractis.

LIBER SECVNDVS.

DEFINITIO prima numerus fractus ille eſt, qui conſtat aliquot particulis, in quas diviſa eſt unitas, ſicut enim unitas per ſui multiplicationem, eſt parens omnium numerorum integrorum; ita etiam per ſui diviſionem generat omnem minutiam. Supponatur ergo unitas diviſa in quotcumque particulas, & ex iis particulis aſſumptas eſſe aliquot: id quod aſſumptum fuerit minutia dicitur, ex quo fit, ut neceſſarium ſit ad minutiam exprimendam; primò ſignificare in quot particulas diviſa ſit unitas: deinde quot hujuſmodi particulæ unitatis aſſumptæ ſint; unde duplici charactere, quamlibet minutiam exprimimus, quorum inferior dicitur denominator, ideò quia ſignificat, in quot particulas diviſa ſit unitas: & dat denominationem particulis aſſumptis; nempe an ſint decimæ, vigeſimæ, trigeſimæ. Secundus numerus qui ſupra lineolam ſcribitur, dicitur numerator quia indicat quot, hujuſmodi particulæ aſſumptæ. Ut $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{8}{20}$ duo trientes, tres quadrantes, octo vigeſimæ. Vides autem denominationem, trientis, quadrantis, vigeſimæ partis ſumi ab inferiori charactere; numerum verò talium partium exprimi ſuperiori charactere, numerus inferior ſeu deminator pro ipsâ unitate ponitur, hoc eſt unitatem diviſam exhibet. Character ſuperior, exhibet partes aliquot iſtius unitatis, omnes igitur denominatores, eamdem unitatem ſignificant, ſed modò diviſam in plures, modò in pauciores partes, numeratores autem indicant quot unitatis ita diviſæ, partes fractio ſibi vendicet.

Fieri autem poteſt ut denominator ſit æqualis numeratori, vel illo minor, vel illo major. Si ſit æqualis fractio illa ſignificat & æquivalet unitati, verbi gratia $\frac{3}{3}$ $\frac{4}{4}$ tres trientes, quatuor quadrantes, ſignificat enim unitatem diviſam eſſe in tres partes, & ex hujuſmodi partibus tres acceptas eſſe, hoc eſt omnes, igitur totam unitatem quæ æqualis eſt tribus illis partibus. Ita quatuor quadrantes: nam partes in quas dividitur unitas, ſunt partes aliquotæ, nempe quæ aliquoties repetitæ nnitatem præcisè metiuntur. Si denominator ſit minor numeratore, fractio major erit unitate, ut $\frac{5}{4}$ $\frac{8}{3}$ quinque quadrantes, octo trientes; cùm enim denominator repræſentet unitatem diviſam, numerus major denominatore major erit unitate.

Denique denominator eſt major numeratore, in propriè dictâ fractione, quæ propterea ſignificet aliquid minus unitate, ut $\frac{1}{2}$ una media pars; $\frac{2}{3}$ duo trientes, & ita deinceps.

Ex hoc ſequitur, quod in omni omninò minutiâ exhibeatur, quam rationem habeat numerus fractus ad unitatem. Cùm enim denominator ſit ipſa unitas, & numerator exhibeat, quot hujuſmodi partes aliquotæ acceptæ ſint, exhibebit etiam habitudinem, quam habet minutia, ad unitatem. Unde omnis omninò numerus ad modum fractionis exhiberi poteſt, ſi nempe ipſe fiat numerator, & unitas fiat denominator. Ut 100. ita exhiberi poteſt $\frac{100}{1}$ ſeu centum unitates. Immo dicere poſſumus virtualiter id ſemper fieri & ſubintelligi; omnis enim numerus exhibet quot unitates contineat. Dum enim dicimus 100. intelligimus centum unitates, & non centum medietates, aut centum trientes, niſi hoc exprimatur.

Unde quidquid dicitur de fractionibus, de rationibus etiam conſequenter demonſtratur, ut ſi rationes addere, ſubtrahere, multiplicare dividere velis: fractiones adde, ſubtrahe, multiplica, divide quarum numerator ad denominatorem prædictas rationes habeat, & peractum erit negotium. Quare clarum eſt omnem fractionem ad unitatem (hoc eſt ad totum cujus eſt fractio) eandem habere rationem quam habet numerator, ad denominatorem.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Fractiones quarum numeratores eandem habent rationem ad ſuos denominatores, aquales ſunt.

A $\frac{2}{4}$ B $\frac{1}{2}$ Sint duæ, aut plures fractiones A, & B, quarum numeratores eandem habeant rationem ad ſuum denominatorem; dico illas eſſe æquales.

Demonſtratio. In omni fractione (*per 1. defin.*) denominator eſt unitas; & numerator ipſe numerus fractus; ergo quam rationem habet numerator ad ſuum denominatorem, numerus fractus eandem habet rationem ad unitatem; ſed (*per 7. 5. Eucl.*) quæ ad idem eandem habent rationem ſunt æqualia; ergo fractiones in quibus numerator, ad denominatorem,

torem, eandem habet rationem ſunt æquales.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Fractiones eundem habentes denominatorem, eam rationem habent inter ſe, quam numeratores.

A.	5	C.	3
B.	10	D.	10

Sint duæ fractiones AB, CD, eundem habentes denominatorem B, D. Dico eam eſſe rationem fractionis A B ad fractionem CD; quæ eſt numeratoris A ad numeratorem C.

Demonſtratio. Ita ſe habet fractio AB ad unitatem; ſicut A ad B, ſeu D, ita ſe habet unitas ad fractionem CD, ut D ad C. Ergo ex æquo ita eſt fractio AB ad fractionem C D, ut A ad C quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Fractiones eundem habentes numeratorem ſe habent reciprocè ut denominatores.

A.	5	C.	5
B.	10.	D.	15.

Sint duæ fractiones A B, CD, eundem habentes numeratorem A & C, dico ita eſſe AB ad C D, ſicut denominator B ad denominatorem D, & hoc vocatur reciprocè.

Demonſtratio. Eſt AB ad unitatem, ut A ad B. Eſt autem unitas ad C D, ut D ad C, ſeu ad A. Ergo ex æquo perturbatè ita eſt AB ad CD; ſicut D ad B, quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Fractio quælibet, eandem rationem habet, ad numerum abſolutum, æqualem ſuo numeratori; quam unitas ad numerum abſolutum denominatori æqualem.

A.	2
B.	3.

Sit fractio AB. Dico ita eſſe fractionem A B ad numerum abſolutum ſeu integrum 2, æqualem numeratori A, ſicut ſe habet unitas ad numerum integrum 3, æqualem denominatori B. Hoc eſt quod ſicut unitas eſt tertia pars numeri 3, quod fractio $\frac{2}{3}$ ſit tertia pars numeri 2, hoc eſt, quod ſex trientes faciant duas unitates.

Demonſtratio. Fractio AB, eſt ad unitatem ut 2 ad 3: ergo alternando erit fractio AB ad 2, ut unitas ad 3. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO V.

Si duarum minutiarum numeratores, per denominatores decuſſatim multiplicentur: producti eandem rationem habebunt quam ipſæ fractiones.

A.	2	C.	3
B.	3.	D.	4.
E.	8	F.	9
G.	12.	H.	12.

Sint duæ fractiones A B, CD, multiplicetur autem numerator primæ nempe A, per denominatorem ſecundæ nempe D, fiatque E; item numerator ſecundæ nempe C, per denominatorem primæ nempe B, multiplicetur & fiat F, dico ita ſe habere fractionem AB ad CD, ſicut E ad F.

Demonſtratio. Multiplicentur denominatores B, D, fiatque numerus 12. qui ſubſcribatur G & H, ita ut fiant minutiæ E G, F H, numerus D multiplicans numerum B produxit G, & multiplicans numerum B produxit G, & multiplicando ipſum A fecit 8. Ergo G ipſius B æquè multiplex eſt ac E ipſius A, ergo (*per 15. 5. Euclidis*) eadem eſt ratio A ad B, quæ E ad G, quare (*per primam hujus*) EG & AB ſunt æquales minutiæ; Pariter oſtendam CD, FH eſſe æquales minutias: ſed illæ habent eundem denominatorem G, H. Ergo (*per 2. hujus*) ſe habebunt, ut numeratores E, F, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

Animadvertere potes hic, modum reducendi duas fractiones, ad eundem denominatorem, ſi nempe decuſſatim numeratores multiplices, per denominatores; habebis autem denominatorem, ſi denominatores inter ſe multiplices.

COROLLARIUM II.

Sequitur, quòd ſi per decuſſatam multiplicationem numeratorum, per denominatores, numerus æqualis producatur, æquales erunt minutiæ.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Minutiam, Minutiæ, ad ſimplicem minutiam ipſi æqualem revocare.

Explicatur. Non tantùm dantur minutiæ ipſius unitatis, hoc eſt, non tantùm unitas dividitur in plures partes aliquotas, quarum aliquot ſumantur, & ita fiat fractio; ſed etiam aliquando ipſæmet minutiæ, in partes aliquotas dividuntur, quarum aliquot aſſumantur ad generandam minutiam, minutiæ: ita ſi dentur tres quadrantes duarum quintarum, quæritur; illi duo quadrantes duarum quintarum partium, quænam ſunt partes unius unitatis, ſeu quomodo ſe habent ad unitatē, quod in exemplo concreto meliùs patebit. Paſſus geometricus ſit quaſi unitas, hoc eſt numeri abſoluti ſupponantur pro paſſibus geometricis, paſſus autem geometricus contineat pedes quinque, ſinguli autem pedes contineant palmos, 4. Quæritur tres quadrantes duarum quintarum unius paſſus geometrici, quomodo

Digitized by Google

modo ſe habent ad paſſum geometricum; hoc eſt ſi tres numeri conſtituantur, quorum primus ſit quaſi pes geometricus, qui ſe habeat ad ſecundum ut 5 ad 2. ſecundus ſe habeat ad tertium, ut 4 ad tria, quomodo primus ſe habebit, ad ultimum. In exemplo noſtro cum paſſus geometricus contineat quinque pedes, duæ quintæ ſunt duo pedes, duo autem pedes ſunt 8 palmi, quare tres quadrantes octo palmorum ſunt 6 palmi. Paſſus autem continens 5 pedes continet quater quinque palmos; igitur hæc fractio ſe habet ad unitatem, ſeu ad paſſum, ut 6 ad 20. Quod in exemplo iſto attulimus, in quo iſtæ partes aliquotæ videntur jam admitti, in aliis omnibus facere poſſumus; quia licet mihi dividere unitatem, in quotcunque partes voluero. Jam ad problema veniamus.

A.	2.	C.	3.	E.	6.	G.	8.
B.	5.	D.	4.	F.	20.	H.	20.

Sit data fractio fractionis, nempe C D, ſit fractio ipſius AB, multiplica utriuſque denominatores inter ſe nempe B D, & fiat denominator F, Multiplica item numeratores A,C; fiatque numerator E; dico fractionem C D ita ſe habere ad unitatem, ut E ad F, ut autem E ad F; ita fractio E F intellecta ut ſimplex ad unitatem, ideoque dico, E, F, ut ſimplicem æqualem eſſe C D intellectæ, prout eſt fractio, fractionis.

A.	2.	C.	3.	E.	6.	G.	8.	K.	20.
B.	5.	D.	4.	F.	20.	H.	20.	L.	20.

Denominator fractionis fractionis C D, nempe D multiplicando A faciat G, & multiplicando iterum B, faciat H; erunt igitur C D & F, H æquales, addatur fractio K, L, æqualis unitati, hoc eſt cujus denominator, & numerator ſint æquales inter ſe, & numeris F & H.

Demonſtratio. Cùm A multiplicando C fecerit E, & multiplicando D fecerit G, erit (*per 15. quinti Euclid.*) E ad G, ut C ad D; ut autem C ad D, ita fractio C D ad ſuum totum, nempe ad AB, ut autem AB ad unitatem ita A ad B, & cum D multiplicando A & B fecerit G & H; ſeu K; erit ut A ad B; ita G ad K; & ut AB, ad unitatem; ita G ad K; igitur ſunt tres numeri aliis tribus continuè proportionales. Nempe fractio C D, fractio AB, unitas; & ex aliâ parte E, G, K: igitur ex æquò; erit, ut fractio fractionis nempe C D, ad unitatem; ita E ad K. Ut autem E ad K; ita fractio EF; ſimplex ad unitatem KL, cum eundem habeant denominatorem. Igitur C D & E F ſumpta pro ſimplici fractione, eodem modo ſe habent ad unitatem, ergo ſunt æquales: quod erat oſtendendum.

Definitio ſecunda numerus primus ille eſt quem ſola unitas metiri poteſt.

Numerus verò compoſitus ille eſt quem aliquis alius numerus, præter unitatem, metiri poteſt; per (metiri) autem intelligimus, ut menſura aliquoties repetita præcisè adæquet totum. Quare facilè intelligetur utraque definitio, ſi dicatur numerus ille eſſe primus, cujus nullus numerus integer præter unitatem eſt pars aliquota, ut numerus 3. 5. nam binarius non eſt pars aliquota ternarij, cum binarius ſemel tantùm ſumptus non adæquet ternarium; bis autem ſumptus illum ſuperet. Numerus compoſitus ille erit, qui præter unitatem habet alium numerum qui ſit ejus pars aliquota, ut 4 cujus binarius eſt media pars, 6 cujus ternarius eſt media pars, & binarius tertia; ſunt igitur compoſiti.

Definitio 3. Numeri inter ſe primi, ſunt illi qui nullum integrum numerum, habent pro communi menſurâ, præter unitatem; hoc eſt numeri illi ſunt inter ſe primi, ſi nullus inveniri poſſit integer numerus præter unitatem, qui utrumque metiatur.

Compoſiti verò numeri ſunt illi, quos integer aliquis numerus præter unitatem metitur tanquam communis menſura; ut numeri 12 & 9, quos ternarius numerus metitur; quæ definitio ſatis per ſe patet.

Primò omnis numerus par cum alio pari, comparatus, compoſitus eſt, quia binarius utrumque metitur.

Secundò ſi duorum numerorum major, eſt primus, illi inter ſe ſunt primi; quia major minorem metiri non poteſt, nec habet ullam menſuram, ergo neque habebit communem; licèt autem minor ſit primus, fieri tamen poterit ut ſint compoſiti, nempe ut minor majorem metiatur.

AXIOMA I.

Numerus metiens duos numeros, metitur & aggregatum ex iis numeris, quòd per ſe patet, ſi benè intelligatur quid ſit, metiri.

AXIOMA II.

Numerus qui metitur numerum, & partem ejus ablatam, metitur & reliquam, aut illi æqualis eſt; ſi enim nec metiretur reliquam, nec illi æqualis eſſet, aliquoties repetitus non adæquaret totum, ſed illa pars reſidua eſſet, atque adeò non metiretur totum contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Expendere, an duo numeri ſint primi inter ſe, & maximam eorum communem menſuram reperire.

A.	1	5	2	4.
R.		7	3	8.
C.			4	8.
D.			1	8.
E.			1	2.
F.				6.
G				

Sint duo numeri A, major, B minor, examinandi; an ſint primi, an compoſiti; dividatur major A per minorem B, & notetur id quod relinquitur factâ diviſione, nullâ habitâ ratione quotientis. Sit illud C; per C, dividatur B; & notetur id quod relinquitur poſt diviſionem; ſitque illud D; dividatur C per D, quòd ſi diviſione factâ relinquatur E, per illud dividatur D. donec tandem inveniatur diviſor qui dividat exactè præcedentem. Si ille diviſor eſt unitas, ita ut nullus anteà occurrerit; dico quòd numeri ſunt inter ſe primi, ſi verò occurrerit alius numerus, dico illos eſſe compoſitos & maximam illorum menſuram eſſe illum diviſorem.

Demonſtratio. Quia F metitur E, E autem metitur numerum D, decurtatum numero ipſi F æquali, quare numerum D, hoc modo imminutum metietur numerus F, ſed numerus F metietur & ſeipſum, igitur numerus F metitur totum D,

ſed D metitur numerum C imminutum parte æquali ipſi E, ergo eundem C ita imminutum metietur F, ſed etiam ipſum E metietur F, igitur totum C metietur; & ita de reliquis. Oſtendo autem F eſſe maximam numerorum A & B menſuram, ſi enim non eſt, ſit alius numerus G talis communis menſura, quia ergo G metitur totum A & ablatum B, aut illius multiplicem, metietur & reliquum C: oſtendam autem numerum G metiri ipſum F: ergo major non eſſet numero F.

PROPOSITIO VIII.

Fractionem ad minimos terminos revocare.

Demonſtravimus ſupra propoſitione primâ, fractiones illas eſſe æquales, quarum numeratores, ad ſuos denominatores eandem haberent rationem; quia autem quò termini erunt minores, eò meliùs concipitur habitudo quam habet unus terminus ad alium, ideo meliùs eſt exhibere eam rationem numeratoris ad denominatorem, ſeu fractionis ad unitatem ſub minimis terminis.

Inveſtiga (*per præcedentem*) maximam terminorum, ſeu numeratoris, & denominatoris, menſuram; & utrumque per talem menſuram divide, quotientes erunt termini minimi ſub quibus exhiberi poſſit eadem fractio.

A. 10. 15. D. 2.
B. 75. C. E. 5.

Sit fractio AB revocanda ad minimos terminos, quære numerorum A & B maximam menſuram, ſitque C, per quam divides numeros A & B; ita ut ſint quotientes D & E; dico fractionem D, E æqualem eſſe fractioni A B, & ſub minoribus terminis exhiberi non poſſe.

Demonſtratio. Numeri A & B, per eundem C diviſi, dant quotientes D & E, ergo eadem eſt ratio D ad E, quæ A ad B, ergo (*per primam*) fractio DE, æqualis eſt fractioni A B.

Secundò oſtendo numeros D & E eſſe minimos in eâdem ratione. Primò enim ſunt primi numeri, nam alioquin haberent communem menſuram præter unitatem; ſit illa F, & quia F metitur D, & E metietur etiam A & B quos ipſi D & E metiuntur, & quia F minor eſt quam D & E, pluries invenietur in A & B quàm ipſi D & E, ergo per majorem numerum, quàm C, metietur A & B; ergo dabitur aliqua menſura numerorum A & B, major quàm C contra ſuppoſitionem.

A. 10. C. 15. D. 2.
B. 75. F. E. 5.

Quod ſi D & E ſint primi; erunt etiam minimi eandem rationem habentium ut demonſtr. Euclides (23. *libri* 7.)

Si verò accidat fractionis primò propoſitæ terminos eſſe inter ſe primos. Jam hæc fractio eſt in minimis terminis, neque ulteriùs aliquid tentandum eſt.

Alia etiam praxis adhiberi poteſt, ſume medietatem, tertiam partem quadrantem, tàm denominatoris, quàm numeratoris, minutia, erit reductâ ad minorem, unde ſi inveniatur o in fine utriuſque tam denominatoris quam numeratoris rejiciantur, quia tunc accipitur decima pars utriuſque.

PROPOSITIO IX.

Minutiam ad integros revocare.

Accidere poteſt ut ex collectione minutiarum, aliquid exurgat unitate majus, in quô caſu, neceſſarium eſt, ut minutia, ad integros revocetur; quod facilè fiet, ſi numeratorem, per denominatorem dividas, quotiens erit numerus integer.

Sit hæc minutia $\frac{52}{3}$ quæ ad integros revocanda ſit; divide 52 per 3 quotiens erit 17. relinqueturque unitas; dico $17\frac{1}{3}$ æquari minutiæ $\frac{52}{3}$.

Demonſtratio. Cùm denominator 3 oſtendat in tali hypotheſi quamlibet unitatem diviſam eſſe in tres partes, & 52. trientes eſſe in numero propoſito; quoties ternarius in 52 invenietur, toties in eo erit unitas; invenitur autem decies ſepties, & relinquitur una pars indiviſa; igitur $17\frac{1}{3}$ æquabuntur minutiæ $\frac{52}{3}$.

Hâc regulâ Aſſes in francos, francos in nummos facilè reducemus, ſint propoſiti 2916. denarij reducendi in aſſes, eſt autem denarius duodecima pars aſſis, divido 2916 per 12 quotiens 243, exhibebit numerum aſſium.

Sint reducendi 489 Aſſes in nummos argenteos, hunc numerum divide per 60, quotiens 81 erit numerus nummorum, reſtantque 3 aſſes.

PROPOSITIO X.

Numerum integrum ad minutiam reducere.

Multiplicetur numerus integer per denominatorem fractionis; fietque numerator; ſit numerus 20 reducendus in fractionem cujus denominator ſit 5 multiplica 20 per 5 fientque $\frac{100}{5}$.

Si numero integro adhæreret fractio facilè adderetur; ut ſi proponatur numerus $20\frac{3}{5}$ reducendus ad minutiam, cujus denominator ſit 5 poſt multiplicationem numeri 20 per 5, ita ut fiant 100 addere debeo 3; ita ut fiat minutia $\frac{103}{5}$.

Demonſtr. Cùm in hâc hypotheſi, quælibet unitas intelligatur diviſa in quinque partes, multiplicando numerum propoſitum per quinque, ſcietur quot in eo ſint quintæ partes, quibus addendæ ſunt illæ 3.

Hâc praxi quamlibet ſpeciem majoris monetæ, ad minorem ſpeciem revocabimus, ut ex nummis aſſes, ex aſſibus denarios, &c.

Sint propoſiti nummi 2450, hos ad aſſes revocare volo, multiplico prædictum numerum per 60 fient 147000 numerus aſſium qui continentur in nummis 2450. ſi multiplices iterum 147000 per 12 habebis 1764000 numerum denariorum, qui in eodem numero continentur.

Hâc item methodo quoties valor monetæ ſuperioris, continebit plures inferiores fiet etiam facilè reductio, proponantur nummi 1434, ſitque valor unius nummi trium librarum, 5 aſſium & denariorum 8 ter ſcribatur numerus 1434.

Multipli

```
1 4 3 4.    1 4 3 4.    1 4 3 4.
      3           5.          8.
———————     ———————     ———————
4 3 0 2.    7 1 7 0.    1 1 4 7 2.
  4 0 6       9 5 6.        6 7.
                             7 2.
                             0. (9 5 6.
———————     ———————
4 7 0 8.    8 1 2 6.        1 2.
              0 6.   (4 0 6.
            2 0.
```

Multipliceturque per 35 & 8. habebiſque libras 4302. aſſes 7170. denarios 11472. ex denariis diviſione per 12 fac aſſes, quotiens erit 956. qui numerus addi debet aſſibus, fientque aſſes 8126. & diviſione per 20, fient libræ 406. & relinquentur 6 aſſes. Hic numerus 406 addatur numero librarum 4302, invenies in nummis 1434. ita ut valor cujuſlibet ſit trium librarum, aſſium quinque & denariorum octo, libras 4708. & 6 aſſes.

Ex his regulis facilè deducemus methodum omnium computorum. Sit propoſitum exemplum. Volo ſcire quot ſint franci in 234 nummis, quorum quilibet aſſes 65, continet, & in 324 ducatis, quorum quilibet continet aſſes 58, & in 460 teſtonibus, quorum quilibet 19 aſſes habet.

```
  2 3 4.      3 2 4.     4 6 0.
    6 5.        5 8.       1 9.
——————————   ———————   ———————
  1 1 7 0.   2 5 9 2.   4 1 4 0.
1 4 0 4.   1 6 2 0.     4 6 0.
—————————   —————————   —————————
1 5 2 1 0.   1 8 7 9 2.   8 7 4 0.
1 8 7 9 2.
  8 7 4 0.
——————————
4 2 7 4 2.
      2. (2 1 3 7.
```

Invenio in nummis eſſe aſſes 15210. in ducatis eſſe 18792. in teſtonibus eſſe 8740. Hi numeri ſimul addantur, fient 42742. quem numerum ſi dividas per 20 fient franci 2137 cum duobus aſſibus.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Duas aut plures minutias immò & integros cum minutiis, ad eandem denominationem reducere.

A. $\frac{3}{4}$ B.	C. $\frac{4}{5}$ D.	E. $\frac{2}{3}$ C.
H. $\frac{15}{20}$ K.	L. $\frac{16}{20}$ M.	
N. $\frac{45}{60}$ P.	R. $\frac{48}{60}$ P.	S. $\frac{40}{60}$ P.

Primò ſi duæ fractiones revocandæ ſint ad eandem denominationem, id præſtabis (*per quintam*), ut conſtat (*ex eius corollario.*)

Si verò ſint tres nempe AB, CD, EF. Primò, revocentur AB, CD ad eundem denominatorem (*per coroll. 5.*) fiantque HK, LM; tum multiplica per denominatorem C tertiæ fractionis denominatores K, M; ut fiant novi denominatores P.P. Item per eundem C multiplica numeratores H, L; fiant novi numeratores N, R. Denique per denominatorem K vel M multiplica terminos fractionis E, C; fiatque S. P; dico fractiones N P, RP, SP ejuſdem denominationis eſſe æquales ipſis AB, CD, EC.

Demonſtratio. Primò ſunt ejuſdem denominationis quia tres denominatores P, P, P, ſunt generati multiplicatione K, M æqualium, per C. Sunt etiam æquales ipſis AB, CD, EC. Primò enim HK, LM æquales ſunt ipſis AB, CD, & cum NP, RP, producantur multiplicatione terminorum H, K, L, M, per eundem numerum C, erunt NP, RP, ipſis HK, LM & conſequenter ipſis AB, CD æquales. Pariter quia idem denominator M, multiplicando EC producit S. P. Eadem erit ratio S ad P, quæ E ad C: igitur (*per primam*) fractio SP æqualis eſt fractioni EF.

Quòd ſi integri, ad eandem denominationem ſint reducendi cum minutiis, ex iis fiat minutia ſubſcriptâ unitate, hoc modo $\frac{100}{1}$ hoc eſt centum unitates, tum reducantur ad eandem denominationem.

PROPOSITIO XII.

Aſſignare minutiam cujuſcumque integri.

Quia in terminis abſtractis ſæpè difficilis eſt ſenſus propoſitionis, facilis in exemplo, ideò, illam in exemplo propono. Aliquis injunxit murum extruendum invenit autem $\frac{11}{12}$ unius octopedæ quadratæ; octopedæ autem pretium eſt francorum 18. Quærimus igitur $\frac{11}{12}$ octodecim francorum.

Id per regulam trium efficitur, hoc modo. Si octopeda ſeu 12. duodecimæ dant francos 18, quid dabunt 11 duodecimæ, multiplica 88 *per 11*, fient 198; quæ ſi dividas per 12, quotiens erit 16 $\frac{6}{12}$ ſeu $\frac{1}{2}$.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Additio fractionum.

A. $\frac{3}{4}$.	C. $\frac{2}{3}$ D.	E. $\frac{2}{5}$ F.
G. $\frac{45}{60}$ H.	K. $\frac{40}{60}$ H.	L. $\frac{24}{60}$ H.
	M. $\frac{109}{60}$ H.	I. $\frac{49}{60}$

Sint duæ, aut plures minutiæ addendæ. Sint tres fractiones A B, C D, E F, addendæ (*per præcedentem*) reducantur ad eundem denominatorem, ſintque illis æquales G H, K H, L H, addantur numeratores G, H, L, fiatque M, illis ſimul ſumptis æqualis ſubſcribatur illi: idem denominator H: dico fractionem MH tribus fractionibus AB, CD, EF, æqualem eſſe.

Demonſtratio.

Demonſtratio. Cum minutia GH, ad unitatem ſe habeat ut G ad H, & pariter KH ad unitatem ſicut K ad H, & LH ad unitatem ut L ad H tres illæ fractiones, ſimul ſumptæ, ad unitatem ſe habebunt ut G, H, E, ſimul hoc eſt M ad H. Sed ita etiam ſe habet ad unitatem fractio M H ſicut M ad H: igitur fractio M H æqualis eſt tribus fractionibus G H, K H, L H Sed illæ æquales ſunt fractionibus A B, CD, EF; igitur fractio M H iiſdem æqualis erit quod erat demonſtrandum.

Si verò hanc fractionem reducere velis ad unitates; dividatur eius numerator per denominatorem, videbiſque, quoties in ea fractione inveniatur unitas; quotiens enim erit numerus unitatum; & reliquum erit adhuc numerator fractionis eundem denominatorem habentis. Ratio clara eſt, ex definitione fractionis, cum enim denominator ſit ipſa unitas diviſa in partes; per diviſionem invenitur quoties unitas eſt in fractione. Reliquum etiam erit numerator fractionis, eundem denominatorem habentis: ut in hoc exemplo ſi dividatur 109. per 60. invenies pro quotiente 1. $\frac{49}{60}$

Quòd ſi numeros integros, minutiis addere velles; & ex iis totalem minutiam componere; ex integro formanda eſſet minutia ſubſcribendo unitatem; quæ ſe haberet eodem modo ac fractio.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Fractionem minorem, ex majori ſubtrahere.

A. 5	C. 3		
B. 6	D. 4		
E. 20	G. 18		
F. 24	H. 24.		
	K. 2	M. 1	
	L. 24	N. 21	

Sit ex fractione majori A B, ſubducenda minor C D. Primò reduc hujuſmodi fractiones ad eundem denominatorem. Sitque fractio E F æqualis, fractioni AB, quæ habeat eundem denominatorem F, ac fractio GH quæ ſit æqualis fractioni CD, tum numeratorem G, aufer ex numeratore E, relinquatur numerator K cui tribuatur denominator idem. Dico factum eſſe quod quæritur. Hoc eſt fractionem K L ſupereſſe ſubtractâ fractione G H ab E F, hoc eſt C D ab A B, ſeu quod idem eſt dico fractiones K L, & G H eſſe æquales fractioni E F.

Demonſtratio. Cum ita ſit fractio GH ad unitatem, ut G ad H; ſeu ad L, pariter ita ſit fractio K L ad unitatem ut K ad L, ita erunt fractiones G H, K L ſimul ut G & K ſimùl ad L, ſeu ad F illi æqualem. Sed ut GK ad L ita E ipſis G K æqualis ad F, & ut E ad F ita fractio E F ad unitatem; ergo ita eſt EF ad unitatem ut fractiones GH, KL ad unitatem; ergo (*per 7. 5. Eucl.*) fractiones GK, KL, ſunt fractioni EF æquales, quod erat demonſtrandum: quòd ſi plurimæ fractiones ab unica ſubducendæ eſſent, priùs colligantur in unam fractionem, antequam fiat ſubtractio.

A. 12.		C. 4	
		D. 5	
11.	E. 5	11	1
	F. 5		5

Denique ſi ex numero integro ſubducenda eſſet fractio, ex unica unitate numeri A, fac fractionem aliquam ejuſdem denominationis cum ea quæ ſubducenda eſt, in qua ut priùs dictum idem eſt denominator, & numerator ita in hoc exemplo ſi ex 12. ſubtrahas fractionem $\frac{4}{5}$

PROPOSITIO XV.

Additio & ſubtractio fractionum fractionum, ex fractionibus fractionum.

Quoties fractiones fractionum, ex fractionibus fractionum ſubtrahendæ ſunt, primæ fractiones fractionum in unam ſummam addantur. Addantur item fractiones, fractionum, à quibus ſubtractio fieri debet ut ſi ſubtrahere debeas, à $\frac{3}{1}$ ex $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ ex $\frac{1}{4}$.

Ad ſimplices fractiones revoca juxta (*prop.6.*) prima erit $\frac{6}{12}$ ſecunda erit $\frac{3}{8}$ tum ad eundem denominatorem reducantur fiet denominator 96. prima ergo erit $\frac{48}{96}$ ſecunda $\frac{36}{96}$ aufer 36 ex 48. reſtat $\frac{12}{96}$ ſi ad minimos numeros revocentur fiet $\frac{1}{8}$.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Minutiam, per minutiam multiplicare.

A. 5	C. 3	E. 15
B. 6	D. 4	F. 4
	G. 18.	

Sit minutia A B, multiplicanda per minutiam C D, multiplica numeratores A & C, fiatque numerator E, multiplica denominatores B, D, fiatque denominator F; dico fractionem E F, eſſe numerum productum ex multiplicatione fractionis A B per fractionem C D. Hoc eſt ſicut diximus cum de multiplicatione ſimplici, quæritur ut unitas ſe habeat ad A B, ſicut C D ad F E, numerus C multiplicando B faciat G.

Demonſtratio. Ut unitas ad A B; ita B ad A (*per definitionem fractionis*) & quia C multiplicando B & A, fecit G & E, ita etiam erit G ad E; ſi fiat autem fractio G F hæc erit æqualis fractioni C D, cum idem numerus B multiplicando C & D, fecerit G & F. Ergo G F, ita ſe habebit ad E F, ſicut C D ad E F, ſed ita ſe habet ad E F ut G ad E, (*per ſecundam hujus*) cum eundem denominatorem habeant; igitur C D, ſe habebit ad E F, ut G ad E. Ergo ita eſt unitas ad A B, ſicut C D ad E F; quod erat demonſtrandum. In quo vides idem eſſe minutias minutiæ reducere ad ſimplicem minutiam, ac minutiam multiplicare.

Alio modo faciliori. Cum multiplicare volumus AB, per D, quærimus quid ſint tres quadrantes quinque ſextarum; ergo volumus minutiam minutiæ

minutiæ revocare ad ſimplicem minutiam, ſed hoc fit per multiplicationem numeratorum, & denominatorum; ergo eodem modo fiet multiplicatio minutiæ per minutiam, nempe multiplicando tum denominatores; tum numeratores inter ſe.

Si numerus integer per minutiam multiplicandus eſſet; verbi gratiâ

A. 4. B. 3. D. 12.
1. C. 5. E. 5.

numerus A per minutiam BC. Numero A ſubſcribatur unitas, ut fiat minutia; tum multiplica numeratores A & B, tum denominatores ut fiat minutia D E.

Si integer cui adhæret fractio, per fractionem multiplicandus ſit, verbi gratia A cui adhæret fractioBC,

A. 4. B. 2. E. 3. G. 12. K. 6.
D. 1. C. 3. F. 5. H. 5. L. 15.

O. 14. M. 42.
P. 3. N. 15.

multiplicandus ſit per fractionem E F, vel multiplica per EF, ſeorſim A & BC, ita ut fiant GH, KL, quas fractiones addes, fietque fractio MN; vel primò colliges fractiones AD BC, fiatque unica fractio OP, illis æqualis; quæ multiplicetur per E F; fietque eadem fractio MN.

PROPOSITIO XVII.

Multiplicatio fractionum fractionum, per fractiones fractionum.

Converte ad ſimplices fractiones, fractiones fractionum; item alias fractiones fractionum, ita ut fiant duæ fractiones ſimplices, tum fiat multiplicatio per præcedentem.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Minutiam per minutiam dividere.

A. 6. C. 3. G. 18. E. 24.
B. 20. D. 4. F. 60.

Sit minutia AB dividenda per minutiam C D, multiplica dividendæ fractionis numeratorem, per denominatorem D diviſoris, & habebitur numerator E, item multiplica denominatorem B fractionis B, per numeratorem C diviſoris, & habebis F denominatorem, dico fractionem EF eſſe quotientem diviſionis, per quam diviſa eſt fractio AB, per C D, hoc eſt, ut diximus in explicatione diviſionis, ita eſt AB ad EF, ſicut CD, ad unitatem; C enim numerator multiplicando A faciat G.

Demonſtratio. Quia C multiplicando A & B facit G & F; erit fractio GF æqualis ipſi A B, ergo ita ſe habebit G F ad EF, ſicut AB ad EF, ut autem ſe habet GF ad E F, ita G ad E, cum eundem habeant denominatorem F; igitur ita ſe habet A B ad E F ſicut G ad E; quia autem A multiplicando ipſum C, fecit G; & multiplicando ipſum D fecit E, ita erit C ad D; ut G ad E; ſed ut C ad D, ita CD ad unitatem; ergo ut G ad E, ſeu ut AB ad E F, ita C D ad unitatem quod erat demonſtrandum; ergo EF eſt verus quotiens diviſionis A B per C D.

COROLLARIUM

Ut dividatur C D per A B; fractio E F invertenda eſt, & quotiens erit fractio F E; ratio clara eſt cum enim ad dividendam AB per C D, denominator D multiplicet numeratorem A, ut faciat numeratorem E, & numerator C multiplicet denominatorem B minutiæ dividendæ, ut fiat denominator F quotientis, è contrà ut AB dividat C D; debet denominator B, multiplicare numeratorem C; ut fiat numerator F, & numerator A multiplicare denominatorem D ut fiat denominator E; ideò debet inverti fractio E F, ita ut fiat fractio FE.

PROPOSITIO XIX.

Alius modus reducendi minutias ad eamdem denominationem.

Quia plerumque accidit ut reducendo minutias, ad eamdem denominationem, producantur minutiæ, non ſub minimis terminis conceptæ; atque adeò ſæpe opus eſt reductione illâ tædij plenâ, proponam aliquas praxes, quibus minutiæ ſub minimis terminis oriuntur. Proponantur duæ minutiæ AB, CD reducendæ ad eandem denominationem, quæratur maxima communis menſura denominatorum B & D, hæc erit G; per hanc divide denominatores; fient quotientes E & F; multiplica terminos minutiarum per alternos quotos, hoc eſt, multiplica terminos minutiæ A B per quotientem F, & terminos minutiæ CD per quotientem E, fient minutiæ HK, LM, æquales prioribus, & reductæ ad eandem denominationem.

A. 13 C. 7.
B. 16. D. 12.

E. 4. G. 4. F. 3.

H. 39 L. 28
K. 48. M. 48.

Demonſtratio. Cum idem numerus G dividat numeros B & D, erit E ad F, ut B ad D, quare ſi B ponatur primus numerus, D ſecundus, E tertius F quartus idem producetur numerus ex B in F, qui ex E in D; cum igitur E multiplicet C & D faciatque L & M, erunt fractiones C D, LM æquales, pariter cum F multiplicet A & B; faciatque hujuſmodi multiplicatione numeros HK, erunt fractiones AB, HK, æquales. Quâ reductione factâ poterit fieri additio, & ſubtractio in numeratoribus. Cætera fiant eodem modò quo diximus ſupra.

PROPOSITIO XX.

Multiplicatio fractionum.

E. 1. G. 5.

A. 9. C. 10. 180. 5
B. 16. D. 27. 432. 12.

H. 4. F. 3.

Antequam inſtituatur multiplicatio fractionum, reducantur termini heterogenei ad minimos, hoc eſt, numerator unius fractionis, cum denominatore

natore alterius, ut propoſitis fractionibus AB, CD, reducantur ad minimos terminos A & D. inventa communi menſurâ, quæ eſt ipſum A, ſcipſum metiens; & metiens numerum D ſi fiat diviſio utriuſque per hanc communen menſuram, fient quotientes E & F quære item maximam communem menſuram, numerorum C & B. hæc eſt 4. per quam ſi utrumque dividas fient quotientes H, & G, multiplica E per G fiet 5. multiplica H per F fiet 12. eritque fractio $\frac{5}{12}$ quam dico eſſe æqualem fractioni $\frac{180}{432}$ quæ oritur methodô communi, multiplicando B per D, & A per C. Nam cum eadem communis menſura diviſerit A & D feceritque E & F, ita erit A ad D', ſicut E ad F. eſt etiam B ad C ſicut H ad F, eſt autem 5. ad 12. in compoſita ratione E ad G & H ad G. & pariter 180. ad 432. eſt in compoſita ratione A ad D, & B ad C; ergo ita eſt 5 ad 12 ſicut 180 ad 432, ergo erunt fractiones æquales quod erat oſtendendum. Ergo multiplicavimus fractionem, ita tamen, ut termini eſſent minimi in ſua ratione, cùm otiatur ex multiplicatione minimorum in ſua ratione.

PROPOSITIO XXI.

Diviſio fractionis per fractionem.

Ad diviſionem fractionis per fractionem peragendam, ita ut quotiens proveniat ſub minimis terminis, debent priùs reduci ad minimos, termini homologi, hoc eſt duo numeratores dividi, per maximam communem menſuram & pariter denominatores.

3.	5.		
9.	15.	(20.	
16.	28.	21.	
4.	7.		

Proponatur fractio $\frac{9}{16}$ dividenda per fractionem $\frac{15}{28}$ duorum numeratorum quæratur maxima communis menſura quæ erit 3. per hanc divide 9. & 15. eruntque quoti. 3 & 5 Communis menſura denominatorum 16 & 28 eſt 4, per quam ſi utrumque dividas, fient quotientes 4 & 7. Ut habeas denominatorem multiplica 7 quotum denominatoris diviſoris per 3, quotum numeratoris dividendæ, producetur 21; & ut habeas numeratorem, multiplica 5, quotum numeratoris diviſoris, per 4 quotum denominatoris dividendi, fietque 20. Habebis ergo quotientem $\frac{20}{21}$, hæc operatio probatur ſicut ſuperior oſtendendo eandem eſſe rationem 20 ad 21 quæ eſt terminorum fractionis ortæ ex diviſione communi.

PROPOSITIO XXII.

Varia exempla diviſionis, numerorum integrorum, per fractiones, vel viciſſim.

Si dividendus ſit integer per fractionem, vel viciſſim fractio, per integrum: ſubſcribatur integro fractio, ita ut ex integro fiat fractio; octo homines emerunt $\frac{4}{5}$ unius prædij, cujus pretium erat 400 francorum, quæritur pretium, quod quilibet dare debet, & quam partem prædij debeat obtinere.

Dividenda eſt fractio $\frac{4}{5}$ in octo ſeu per $\frac{8}{1}$ multiplica numeratorem 4 per 1, denominatorem diviſoris fit 4 numerator quotientis, item multiplica 5 denominatorem dividendi, per 8 numeratorem diviſoris, fietque 40 denominator quot. quotiens ergo erit $\frac{4}{40}$ ſeu $\frac{1}{10}$ quilibet ergo habet decimam partem prædij, & ſolvere debet decimam partem numeri 400, hoc eſt 40.

Sit dividenda fractio $\frac{2}{3}$ per 4 & $\frac{4}{5}$ fiat fractio $\frac{24}{5}$ tum multiplica 5 per 2 fiet 10 numerator, multiplica 24 per 3 fiet 72 denominator habes ergo $\frac{10}{72}$.

Integer cum fractione nempe 6 $\frac{1}{2}$ per fractionem $\frac{1}{4}$ ſit dividendus, primò fiat unica fractio ex 6 $\frac{1}{2}$ nempe multiplica 13 per 4 fiet 52 numerator fractionis, tum multiplica 2 denominatorem dividendi, per numeratorem diviſoris fiet 2 denominator quotientis, erit ergo fractio $\frac{52}{2}$.

Reliqua exempla facilè ex his intelliguntur, nempe ſi fractio fractionis, dividenda ſit per fractionem fractionis, aut per integrum, cui adhæreat fractio; fractio fractionis, ad ſimplicem fractionem revocanda eſt, ſicut & integer, cui adhæret fractio.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Alio modo minutiam, per minutiam dividere.

Sit minutia AB, dividenda per C D, divide numeratorem A per numeratorem C, ut fiat numerator E, divide item denominatorem B per denominatorem D, ut fiat denominator F, dico fractionem E F eſſe quotientem illius diviſionis.

Demonſtratio. Si multiplicanda eſſet minutia E F, per C D multiplicarentur denominatores inter ſe, ut fieret denominator B, tum numeratores ut fieret numerator A; ergo ut dividatur fractio AB per fractionem C D adhibenda eſt contraria diviſio.

Alia demonſtratio per diviſionem. Quærimus numerum, qui toties contineat unitatem, aut ita ſe habeat ad unitatem, ſicut numerus dividendus, ad diviſorem, hoc eſt debet ita ſe habere fractio E F ad unitatem ſeu E ad F; ſicut A B ad C D, numerator C multiplicando denominatorem F; faciat G 15; quoniam F multiplicando C & D produxit G & B; erit fractio G B, æqualis fractioni C D, igitur A B ſe habebit ad G B, ſicut ſe habet ad C D, ſe habet autem ad G B, ut A ad G, cùm eundem denominatorem B habeant; igitur AB ad C D ita ſe habet, ut A ad G. Quia autem C multiplicando E, produxit A, & multiplicando F produxit G, ita erit A ad G, ut E ad F, ſeu fractio E F ad unitatem; igitur ita erit A B ad C D ut E F ad unitatem, quod erat demonſtrandum.

Hic tamen modus non debet adhiberi niſi quando occurrerit quod rarum erit, ut diviſoris termini nempe numerator, & denominator exactè

exactè metiantur terminos fractionis dividendæ, alioquin adhærebit fractioni genitæ fractio fractionis, quæ cum majori difficultate ad communem minutiam reducetur.

Notanda autem ſunt aliqua, primum eſt quòd multiplicatio numeri per fractionem ſit potiùs diviſio quàm multiplicatio, quod explicabimus primò, in numero aliquo integro.

A. $\frac{24}{1}$ B. $\frac{2}{3}$ C D. 16.

Sit integer numerus A multiplicandus per fractionem B C, quærimus quid faciant duæ tertiæ partes numeri 24. Si igitur numerum A dividas per C 3, & quotientem multiplices per numeratorem B, habebitur numerus D qui quæritur. Quod alio modo fieri poteſt, ſi nempe numerum A reducas ad minutiam, ſubſcriptâ unitate, & multiplices denominatores inter ſe, idem producetur numerator C & multiplices numeratorem A per numeratorem B, fietque 48, qui numerus diviſus per 3 dat numerum D; quod verò id quæramus oſtendo. Nam volumus per multiplicationem invenire numerum; qui ita ſe habeat ad multiplicantem, ſicut multiplicatus ad unitatem. Verbi gratia, volo multiplicare 4 per 6, hoc eſt quæro numerum, qui toties contineat 6, quot ſunt unitates in 4; itaque fiunt 4, numeri proportionales 1, 4, 6, 24, in ſuperiori exemplo idem præſtamus 1. $\frac{2}{3}$ 24, 16. Hoc eſt ut ſe habet unitas ad duas tertias, ita 24, ad 16.

Quod ſi dividendus eſſet numerus 24 per $\frac{2}{3}$ quærimus, ut ſicut ſe habet dividendus ad diviſorem; ita ſe habeat quotiens ad unitatem, vel permutando, ut ſe habeat dividendus ad quotientem ſicut diviſor ad unitatem. Diviſor eſt $\frac{2}{3}$ quæ fractio ſe habet ad unitatem ut 2 ad 3: Quærimus ergo numerum ad quem ſe habeat 24, ut 2 ad 3 erit; ille 36 quod mirum videtur, ut nempe per diviſionem major numerus producatur, quàm ſit ipſe diviſus, & per multiplicationem minor numerus producatur.

Quod tamen mirum videri non debet. Nam primò in diviſione quò minor eſt diviſor, eò major eſt quotiens; ut ſi ſit dividendus numerus 24 per 4, diviſor erit 6, ſi per 8, diviſor erit 3: ſed ſi numerus divideretur per unitatem, produceretur numerus ipſi dividendo æqualis: ergo ſi dividatur per numerum minorem unitate, quotiens major erit numero dividendo.

Praxis igitur talis erit, ſit dividenda fractio $\frac{2}{3}$ per fractionem $\frac{3}{4}$ multiplica 2 numeratorem minutiæ dividendæ, per 4 denominatorem diviſionis, fient octo; nempe numerator quotientis. Secundò multiplica denominatorem 3 dividendæ fractionis, per numeratorem 3 diviſoris, fitque 9 denominator fractionis: igitur ſi dividas $\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$ exurgit $\frac{8}{9}$.

PROPOSITIO XXIV.

Regula proportionis cum fractionibus.

Regula proportionis, ſeu ut vocant regula trium cum fractionibus eodem modò fit, ac regula trium in numeris integris, hoc eſt, ſecundus numerus per tertium multiplicetur, & productus per primum dividitur. Sola difficultas oritur ex fractionibus, quæ invicem multiplicari debent. Quæ omnia in exemplis meliùs innoteſcent.

Si $\frac{1}{4}$ unius ulnæ valent $\frac{11}{12}$ unius nummi, quodnam erit pretium competens tribus quadrantibus? nempe $\frac{3}{4}$, multiplica $\frac{11}{12}$ per $\frac{3}{4}$, fientque $\frac{33}{48}$, qui dividendus eſt per $\frac{1}{4}$, fiunt $\frac{132}{48}$ ſeu nummi 2 $\frac{36}{48}$ ſeu $\frac{3}{4}$.

Eædem ferè cautiones adhibendæ ſunt quæ in ſuperioribus regulis ſunt adhibitæ; nempe ſi integri cum fractis adjunguntur.

Si $\frac{1}{5}$ unius ulnæ valet nummos 4, quod erit pretium $\frac{3}{4}$? ſupponatur unitas cyphræ 4, fiatque $\frac{4}{1}$ multiplica $\frac{3}{4}$ per $\frac{4}{1}$ fiet $\frac{12}{4}$, quæ dividi debent per $\frac{1}{5}$ fient $\frac{60}{4}$ ſeu 15 nummi.

Poteſt item aliter fieri: fractiones quæ ad invicem referuntur, verbi gratia, in hoc exemplo $\frac{1}{5}$ unius ulnæ & $\frac{3}{4}$ unius ulnæ ad eundem denominatorem reducantur, fient $\frac{4}{20}$ $\frac{15}{20}$. Fiat ergo regula trium ſi 4 ſubintelligendo vigeſimæ, dant 4 nummos, quid dabunt 15, ſubintellige, vigeſimæ, quotiens erit 15 nummi.

Si 4 ulnæ & $\frac{2}{3}$ dant nummos 4 $\frac{2}{5}$ quid dabunt 5 ulnæ $\frac{1}{2}$. reducantur omnia ad ſimplices fractiones, nempe $\frac{14}{3}$ $\frac{22}{5}$ $\frac{11}{2}$, multiplica duos ultimos, fient $\frac{242}{10}$ divide per $\frac{14}{3}$ fient $\frac{712}{140}$ ſeu 5 $\frac{12}{140}$ ſeu 5 $\frac{3}{35}$.

Si detur regula trium cum francis, aſſibus, denariis, tres numeri ad unum reducantur.

Si 8 ulnæ cum $\frac{2}{3}$ valent francos 10, aſſes 15, denarios 8, quot valent 36 ulnæ cum $\frac{3}{4}$. fieri poteſt multiplicatio in hunc modum; omnes numeri reducantur ad fractiones ſimplices. Nempe 8, cum $\frac{2}{3}$ $\frac{26}{3}$; 36 $\frac{3}{4}$ $\frac{147}{4}$ fiant ex 10 francis, aſſibus 15, denariis 8, ſimplices denarij. Multiplica 10 per 20, & adde 15, fient 215 aſſes; multiplica 215 per 12, & adde 8, fient 2588, cui ſubſcribe 1, ut fiat $\frac{2588}{1}$ multiplica $\frac{2588}{1}$ per $\frac{147}{4}$ fient $\frac{380436}{4}$ quam ſummam divide per $\frac{26}{3}$ fient $\frac{1141308}{104}$ ſeu 10976. $\frac{4}{104}$ numerus denariorum, qui dividatur per 12 fient aſſes 914, & relinquuntur 8 denarij, ſi hanc ſummam dividas per 20 fient 45 franci; relinquuntur 14 aſſes; denarij 8 $\frac{4}{104}$.

Poſſet fieri hæc regula variis modis.

Reducantur duæ fractiones ulnarum ad eandem denominationem nempe $\frac{26}{3}$ $\frac{147}{4}$ fiet denominator 12, & fractiones erunt $\frac{104}{12}$ $\frac{441}{12}$. dic ergo ſi 104, dant franc. 10, aſſes 15 den. 8, quid dabunt 441.

Ex francis 10 fiant aſſes 200, quibus addes 15, fient 215 aſſes; quos iterum mutabis in denarios, addendo 8, fientque denarij 2588. dic ergo, ſi 104, dant 2588, quid dabunt 441? multiplica 2588 per 441, fient 1141308, qui numerus ſi dividatur per 104, fient denarij 10976, numerus denariorum ut priùs.

Paulò aliter fieri poterat per multiplicationem, ut vocant rationalem.

Sit ergo propoſita hæc quæſtio.

36.	$\frac{3}{4}$	
Franc. 10.	Aſſes 15.	Denar. 8.
360.	10.	3.
7.	9.	6.
27.	2.	
	24.	
396.	5	9.
	Per 3.	
1188.	15.	27.
148.	360.	132.
18.	375.	159.
	115.	3.
45.		6.
	11. 14.	
		26.
26.	26.	

Si 8 $\frac{2}{3}$ dant francos 10, aſſes 15, den. 8 quid dabunt 36 $\frac{3}{4}$, primò multiplica 38 $\frac{3}{4}$ per 10 francos, 15 aſſes, denarios 8, hoc modò. Primo multiplico 36 per 10 francos fiunt 360, tum 10 francos per $\frac{3}{4}$ ſuntque 7 franci cum dimidio ſeu cum 10 aſſibus.

Secundò multiplico 36 per 15 aſſes, hoc eſt per $\frac{3}{4}$ unius franci, quod fit ſumendo $\frac{3}{4}$ numeri 36, hoc eſt 27, multiplico item 15 aſſes per $\frac{3}{4}$ & primò ſumo $\frac{3}{4}$ numeri 12, hoc eſt 9. quæ ſcribo; item tres quadrantes reliqui numeri 3, hoc eſt 2 aſſes cum tribus denariis. Denique multiplico 36 per 8 denarios, ſeu $\frac{2}{3}$ unius aſſis, ſi eſſent duo trientes unius franci fierent 24 franci, ſed quia ſunt tantùm duo trientes unius aſſis fiunt 24 aſſes. Tum multiplico octo denarios per $\frac{3}{4}$ ſunt 6 denarij. Colligantur hæc omnia fient franci 396, 5 aſſes, 9 denarij, quæ dividere debeo per 8, $\frac{2}{3}$ fiat fractio unica $\frac{26}{3}$ reducanturque ſummæ dividendæ in trientes multiplicatione per tria, fientque 1188, trientes franci, 15 aſſes, denarij 27, dividatur prima ſumma per 26; quotiens erit francorum 45, reſtantque octodecim quæ per 20 multiplicari debent fiunt 360. hæc addantur aſſibus 15 fiunt 375, ſi dividantur per 26, quotiens erit 14 & 7 relinquentur. Quæ per 12 multiplicari debent, fientque 132, quæ addita ſummæ 27 faciunt 159, quæ diviſa per 26, dant 6 denarios.

PROPOSITIO XXV.

De fractionibus decadicis.

In toto hujus libri progreſſu animadvertere potuiſti, quanta oriatur ex fractionibus difficultas, & quàm facilis evaderet arithmeticus computus ſi numeris tantum integris conſtaret, aut praxes integrorum in minutiis uſurparentur. Hoc arithmetices compendium fractiones decadicæ nobis exhibent, quæ cum in eadem ſint ratione, in qua numeri integri, qui in ſedibus anterioribus decuplo augent ſuum valorem, ſi uſurpentur fractiones tantum decadicæ eaſdem operationes exigent.

Sunt autem fractiones decadicæ, quæ denominatorem habent decadicum. Nempe 10, 100, 1000, 10000, & ita de reliquis, quæ ita comparantur, cum antecedentibus. Ut ſemper ſint earum partes decimæ. Ut autem melius earum natura innoteſcat, Tabulam unam proferam totum tam integrorum, quam minutiarum decadicarum ordinem exhibentem.

8. 7. 6. M. M. M. C. D.	5. 4. 3. M. M. M. C. D.	2. 1. 0. C. D. N.
1. 2. D. C.	3. 4. 5. M. M. M. C. D.	6. 7. 8. M M M D. C.

Hæc tabula exhibet primo incipiendo ab N, verſus ſiniſtram ſedes numerorum integrorum, eſtque N ſedes digitorum, D verſus ſiniſtram ſedes decadum, C. centenariorum, M. millium, MD. decadum millium, MC. centenariorum millium; M'millionum, M'D decadum millionum, M'C centenariorum millionum. Additi ſunt numeri 1. 2. 3. 4. 5. &c. qui ſunt quaſi exponentes, vel potius indices ſedium, nempe oſtendunt quam ſedem ab unitate N occupent ſinguli numeri. Hæc ſeries numerorum integrorum, ita procedit à dextera ad ſiniſtram, ut ſemper creſcat valor numerorum decuplo. Adhibuimus item aliam ſeriem incipiendo à littera N qui item addidimus lineam ſeparatricem integrorum à fractis. Hæc ſeries igitur eſt fractorum ita ut prima ſedes D ſit fractionum decadicarum. Secunda C centeſimarum. Tertia M milleſimarum. Quarta MD, decies milleſimarum.

Progreſſio integrorum eſt 1, 10, 100, 1000, 10000, & ita de cæteris progrediuntur tamen à dextera ad ſiniſtram. Progreſſio autem minutiarum decimalium eſt ab unitate. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{100}$. $\frac{1}{1000}$. $\frac{1}{10000}$.

Partes decimales ſuam appellationem habent à figura ſua ultima, ut ſi ſcriberetur 34 [5, ſignificaretur 34 cum quinque partibus decimis. Si hoc modo ſcriberetur 34 [58. triginta quatuor integri cum 58 partibus centeſimis 34 [056. triginta quatuor, cum quinquaginta ſex partibus milleſimis.

Ex hoc clarum eſt cyphram 0, poſt partes decimales inutilem eſſe. Ut 84 [500, 84 integri cum 5 partibus decimis, idem enim eſt 10000 5 partes decimæ,

decimæ, ac quingentæ milleſimæ. Quare cyphra o non apponitur partibus decimalibus ultimo loco, quia in tali caſu inutiliter adhiberetur.

Partes igitur decimales adhærent numeris integris, & ab iis diſtinguuntur lineâ ſeparatrice, quæ nunquam abeſſe debet, quia autem partes decreſcunt eo modo quo numeri, non variabitur operatio etiamſi adjunctæ ſint partes decimales, quare hæc decimalium partium computatio longe facilior cenſetur quam ſexagenaria, quâ nonnulli in aſtronomicis utuntur.

PROPOSITIO XXVI.

Additio numerorum quibus adhærent partes decimales.

4794 [236
584 [3
947 [08
4720 [7439
48 [5

10094 [8599

Ut clarior evadat uſus partium decimalium, appono exemplum additionis.

Sint plurimi numeri integri, quibus adhæreant partes decimales, ita diſponantur, ut unitates, ſeu digiti integrorum ſibi reſpondeant, & defectus, ſi quis eſt in numeris integris ſit ad ſiniſtram, defectus autem ſi quis eſt in partibus decimalibus ſit ad dexteram. Fiat additio communi methodo, & quia in ultima ſede eſt tantum 9, illud ſcribatur, in penultima ſede invenitur 6 & 3, ſcribe 9, in antepenultima invenitur 8, 4 & 3, quæ efficiunt 15, ſcribo 5, & retine 1 pro antecedenti, in qua invenitur 5, 7, 3, 2, cum unitate retenta efficiunt 18, ſcribo 8 partes decimas, retinendo unitatem, eo quod decem partes decimæ unitatem in integro efficiant. Perficiatur tota additio more conſueto in quo vides opus non eſſe, ulla reductione ad eandem denominationem.

PROPOSITIO XXVII.

Subtractio numerorum quibus adhærent partes decimales.

A. 3794 [236.
B. 947 [08.

C. 2847 [156.

Proponatur numerus A, è quo ſubducendus eſt numerus B, uterque habeat adhærentes partes decimales. Ita pariter diſponantur, ut digiti digitis reſpondeant. Incipe ab ultima nota, & ex 6 aufer nihil, reſtant 6 ex 3 ſuperioris, ſubtrahe 8 reſtant 5, & retine 1 quod ſubtrahes ex 2, reſtabit 1, perficies ſubtractionem ut ſolet in numeris integris, & perfecta erit operatio.

D. 489 [05.
E. 243 [4876.

F. 245 [5624.

Pariter ſi ſubtrahendus ſit numerus E ex D, partium decadicarum, ita ſubtractionem inſtitues. Si 6 ex o, ſubtrahas, potes enim ſubintelligere duo o, in numero ſuperiori, nam 5 partes centeſimæ ſunt idem ac quingentæ partes. Partes decies milleſimæ, quare ſubintellectis illis duobus o o, in numero ſuperiori facile perficietur ſubtractio.

PROPOSITIO XXVIII.

Multiplicatio numerorum quibus adhærent partes decimales.

Major eſt difficultas in multiplicatione partium decimalium, ut nempe habeatur locus conveniens ſingulorum characterum producti. Quæ difficultas ut intelligatur ſuppono primò in multiplicatione, ſingulos characteres multiplicati, duci in ſingulos characteres multiplicandi. Suppono item quod ſi digitus multiplicantis ducatur in digitos multiplicandi, efficiet digitos, ſi in decades efficiet decades, ſi in partes decimales efficiet partes decimales, ſi in partes centeſimas efficiet partes centeſimas, ſi in milleſimas, milleſimas. Quare ſi numerus partibus ſeu fractione carens, alium numerum, cui adhæret fractio multiplicaverit, tot erunt ſedes partium decimalium in facto quot erant in multiplicando.

F. 452 [32.
G. 362.

904 64.
27139 2.
135696.

H. 163739 [84.

Ut ſi numerus F habens duas ſedes partium, multiplicetur per numerum G, cui nullæ adhærent partes, in producto H, tot erunt ſedes partium, quot erant in F.

Ratio eſt quia digitus ductus in partes centeſimas producit partes centeſimas, ductus in decimas, producit decimas.

Ergo tot erunt ſedes partium decadicarum in producto quot erant in uno multiplicante.

K. 362 [421.
L. 12 [01.

362421.
00000.
624842.
362421.

M. 4252 [67621.

Secundò ſit multiplicandus numerus K habens tres ſedes partium: per numerum L, duas habentem ſedes partium, dico in producto M debere eſſe quinque ſedes partium.

Ratio eſt quia ſi numerus L nullas haberet partes; productus haberet tres ſedes partium, ſed habet duas, quæ multiplicando partes non niſi partes efficere poſſunt.

Si numerus ſolas partes habens, ducatur in alium: regula generalis eſt quod in producto ſolo tot ſint partium ſedes, quot ſunt in duobus multiplicantibus ſimul ſumptis.

PROPOSITIO XXIX.

Diviſio numerorum quibus adhærent partes decadicæ.

Primum axioma erit, ut numerus dividendus, totidem ſaltem partium ſedes habeat quot diviſor. Si autem non habeat illi adjungi poterunt tot cyphræ expletivæ o, quot neceſſariæ ſunt. Ut ſi numerus A, dividendus ſit per numerum B, ſubintelligi debet in numero A, una cyphra o, ratio eſt quia in applicatione numeri B ad numerum A debet tandem digitus ſeu unitates numeri B inveniri ſub unitatibus numeri A, quod fieri non poſſet niſi ſubintelligeretur in numero A unum o.

A. 4 5. [7 6.
B. 1 5. [2 5 1. (3.

Ex hoc ſequitur numerum minorem dividi poſſe per majorem modo minori dividendo, tot cyphræ o addantur quot ſunt neceſſariæ, ut ſi numerus 32 per 160 ſit dividendus, ſubintelligatur addita cyphra o numero D, ſed quæ ad partes decimales pertineat, fiat diviſio more conſueto erit quotiens F 2, ſed quia tot ſunt ſedes partium decimalium in dividendo, quot ſunt in quotiente, & diviſore ſimul ſumptis, & nullæ ſunt partes decimales in diviſore E, cum tamen ſubintelligatur una, in dividendo, quotiens F ſignificabit partem decadicam ſeu $\frac{2}{10}$ eſt ergo 32 quinta pars numeri E. Secundum axioma erit tot eſſe ſedes partium decimalium in ſolo dividendo quot in diviſore, & quotiente ſimul ſumptis, ut ſuprà in multiplicatione vidimus, ex quo facile conſtituemus, quot ſint ſedes partium in quotiente, quæ tamen eſt præcipua difficultas diviſionis partium, nam cæteroquin diviſio partium, à diviſione integrorum non differt, ut ſi numerus G dividendus ſit per numerum H, fiat diviſio methodo communi: invenieturque diviſor K, & quia in dividendo ſunt duæ ſedes partium decimalium, debent totidem eſſe in diviſore H, & quotiente K, quare cum una ſedes inveniatur in diviſore H, una erit in quotiente K.

D. 3 2. [o.
E. 1 6 o. [2.
F.

G. 7 6 o. [4 3.
H. 2 2. [3.
K. (3 4. [1.

PROPOSITIO XXX.

Minutiam quamcumque ad minutiam decadicam revocare.

Sit propoſita minutia A, revocanda ad decadicam: eius numeratori adde unum aut duo o, aut plura ſi ſit opus, numeratorem ſic auctum divide per denominatorem 4 donec, vel diviſio fiat quæ nihil relinquat, & quotiens hujus diviſionis nempe $\frac{75}{100}$ exhibebit minutiam decadicam, quam requiris.

A. $\frac{3}{4}$ 3 0 0. $\frac{75}{100}$
4

C. $\frac{1}{3}$ 1 0 0 0.
(3 3 3.

Demonſtratio. Illæ minutiæ ſunt æquales in quibus, eadem eſt ratio numeratoris ad denominatorem, & jam ſuprà ſæpe diximus, ſed per praxim noſtram id præſtamus, inſtituimus enim regulam proportionum, & dicimus ſi denominator 4 dat numeratorem 3, denominator 10 vel 100, vel 1000, quem numeratorem exhibebit. Regula autem proportionum jubet, ut ſecundum numerum ducamus in tertium, & productum dividamus per primum.

Dixi in regula donec diviſio nihil relinquat. Si enim voluiſſem revocare hanc minutiam ad denominatorem 10 non potuiſſem, eo quod 10 non habeat quadrantem, ſed deveniendum eſt ad numerum 100, qui habet quadrantem.

Aliquando accidit ut reductio præciſa fieri non poſſit, ut ſi fractio C reducenda ſit ad decadicam nunquam præciſa invenietur. Quia tamen ulterius progredi poſſumus in ordine ad uſum, poſſumus tam magnam ſumere, ut defectus ille ſit inſenſibilis, eodem artificio in vulgarem minutiam datæ denominationis, decadicam convertes inſtitutâ ſcilicèt regulâ proportionum.

Integrum in minuta decadica cujuſcumque denominationis convertes additis cyphris o, ut ſi numerum 34 in partes centeſimas convertere velis, ita ſcribes 34. [oo minutiam minoris denominationis in minutiam majoris denominationis convertes additis pariter cyphris o ut [21 centeſimas convertes in milleſimas addito o [021. Pariter delendo aliquas cyphras minutiam decadicam majoris denominationis reduces in minutias minoris denominationis.

PROPOSITIO XXXI.

Numeros denominatos ad minutias decadicas revocare.

Proponantur plures numeri dies 25, horæ 6, min. 8, ſec. 30, revocandi ad ſimplicem numerum; horæ autem in dies ſunt 24 minuta in die 1440, ſecunda 86400, quare hæ fractiones ſunt $\frac{6}{24}$ $\frac{8}{1440}$ $\frac{30}{86400}$ quæ reduci poſſunt ſingulæ. Primò dividatur 600 per 24, habebis pro prima $\frac{25}{100}$ divide 80000, per 1440, quotiens erit $\frac{00555}{100000}$ ultimo divide 30 per 386400, quotiens erit $\frac{000347}{1000000}$ adde omnia iſta fient partes 2555537, ſeu dies 25. [2555537.

Præcipuus uſus iſtarum fractionum eſt propter logarithmos, nam iſtæ fractiones eumdem habent logarithmum cum integris, exceptâ characteriſticâ, & quod logarithmus fractionum ſit defectivus, ut numeri 436 logarithmus eſt 2.6394865, & numeri 436000. log. eſt 4.6394865, & numeri 4 [36. log. eſt 0. 6394865. fractionis o [00436, logarithmus eſt-3.6394865.

ARITHME

ARITHMETICÆ de extractione Radicum.

LIBER TERTIVS.

DEFINITIO I.

POTESTAS, aut potentia alicujus numeri, eſt quicumque numerus qui ex eo ſemel, aut pluries in ſe ducto generatur. Ipſe verò prior numerus dicitur eius radix, aut latus.

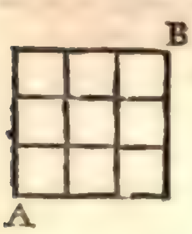
A. 5. B. 25. C. 125.

Sit numerus A, qui per ſeipſum multiplicetur, fiatque quadratum eius B, quod quadratum per eundem numerum A multiplicetur, fiatque C; & ita deinceps, numeri B, C & reliqui dicentur potentiæ & poteſtates numeri A, numerus autem A dicetur eorum radix, & latus.

Ratio harum appellationum eſt, quod numeri B & C, ſint id quod numerus A poteſt producere, & quaſi effectus, & menſura potentiæ ejuſdem numeri A. Dicitur autem numerus A radix, quia illi omnes numeri conſtituunt aliquam ſeriem numerorum geometricè continuè proportionalium, cum enim fiant illæ potentiæ, ex continuâ multiplicatione numerorum productorum, per ipſam radicem, fit ut eandem ſemper rationem habeant. Ut cum B fiat per multiplicationem ipſius A, per ſeipſum B erit quintuplus ipſius A, & C quintuplus numeri B, & ita conſequenter, cujus proportionis denominatio petitur ab ipſo A, ita ut quam rationem habet numerus A ad unitatem, eam habeat B ad A, & C ad B. Quare A eſt radix illius proportionis. Dicitur autem idem numerus, latus; quia ut iam diximus, licet nobis concipere numeros, ad modum quantitatis continuæ; cum ergo numerus ſeipſum multiplicat, producitur rectangulum æqualium laterum, cujus ipſe numerus eſt latus, idem dicendum eſt in cubo.

DEFINITIO II.

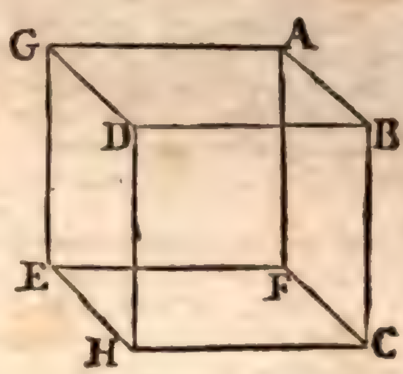
Quadratus numerus eſt ille, qui oritur ex multiplicatione numeri alicujus per ſeipſum, ut novenarius eſt numerus quadratus, quia oritur ex multiplicatione numeri ternarij, per ſeipſum. Quia ille numerus concipi poteſt ad modum quadrati A B diviſi in novem quadratula.



Licèt autem in ſtrictâ acceptione, ille tantùm numerus ſit quadratus, qui ex multiplicatioone oritur numeri per ſeipſum, nihilominus ſæpè licet nobis imaginari quemcumque numerum, ad modum quadrati & ejus radicem inveſtigare, quæ licèt non ſit numerus integer, poterit tamen dari numerus fractus, qui quàm proximè accedat ad ejus radicem. Ita numerum 12. imaginabimus tanquam quadratum, & quæremus quænam ſit eius radix quadrata, quæ quidem nec erit 3. nec 4. ſed aliquid intermedium, quam etiamſi exactè numeris exprimere non poſſimus; poterimus tamen ad illam propiùs accedere.

DEFINITIO III.

Numerus cubus, eſt numerus productus ex multiplicatione quadrati per radicem, quæ definitio ex ſuperiùs dictis jam ſatis intelligitur, nam



ſi radix A B produxit per ſui multiplicationem quadratum A B D G quod iterum intelligatur multiplicari per eandem radicem, ita ut A F ſit æqualis ipſi A B producetur cubus, ut ſi A B conſtet tribus unitatibus quadratum AD erit novem quadratulorum & cubus AH conſtabit 27. parvis cubis.

Licèt nullam aliam ſpeciem quantitatis continuæ habeamus, nihilominus non tantùm radix per ſeipſam multiplicari poteſt, ut fiat quadratum, & quadratum per eandem radicem, ut fiat cubus ſed etiam cubus per eandem radicem, & genitus adhuc per eandem radicem, atque ita deinceps in infinitum, qui omnes numeri ſunt poteſtates ejuſdem radicis, ſortiunturque varia nomina prout opus fuit pluries repetere multiplicationem, ut producerentur tales numeri.

Ut autem faciliùs poſſimus ſingulis poteſtatibus ſua nomina tribuere, animadvertendum eſt quantum à radice diſtent; hoc eſt quot opus ſit multiplicationibus, ad hoc ut producatur. Unde illis ſubjicimus characteres numerales ordinarios, qui exponentes dicuntur, quia exponunt quantùm quilibet numerus in ſua ſerie diſtet à radice quod ut intelligatur ponatur radix 2. per continuam multiplicationem produxiſſe ſuum quadratum, cubum cæteraſque poteſtates.

Cui

A. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512.

2. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Cui radici 2, ſi præponatur unitas; erunt numeri continuò dupli, ſupponatur radici unitas, quadrato 4 binarius; cubo 8 ternarius, & ita deinceps, illi numeri qui ſubjiciuntur denominationis causâ poteſtatibus, dicuntur exponentes, quia exponunt quænam ſint illæ poteſtates, quibus ſubjiciuntur. Tales autem exponentes vel ſunt numeri primi, vel ſunt numeri compoſiti; ſi ſint numeri primi, poteſtates quibus ſubjiciuntur, dicuntur numeri ſurde ſolidi, vel ſuperſolidi non quod careant radice,ſed quia ſunt ſupra ſolidum, hoc eſt plures, quam tres dimenſiones habent, hoc eſt; opus eſt pluribus multiplicationibus quam requirantur,ad ſolidum efformandum, ideoque excipiendæ ſunt duæ primæ poteſtates nempe quadratum & cubus, aliæ verò poteſtates in quas incidunt exponentes, qui ſunt numeri primi, vocantur ſuperſolidi, ita ut ille cujus exponens eſt 5. dicatur primus ſuperſolidus, cujus exponens eſt 7 ſuperſolidus. Secundus, cujus 11 erit exponens ſuperſolidus.Tertius & ita deinceps.

Illæ verò poteſtates quarum exponentes ſunt numeri compoſiti, habent denominationem compoſitam, ad quam inveniendam quæratur minimus numerus primus, per quem dividi poſſit eius exponens,& fiat continua diviſio donec quotiens ſit etiam numerus primus; habebit illa poteſtas compoſitam denominationem ex omnibus, denominationibus illorum numerorum, qui ſunt quotientes in illis diviſionibus,quod exemplis patebit.

Proponatur poteſtas cujus exponens ſit numerus 4, qui componitur ex 2 dividatur 4 per 2, quotiens erit etiam 2, qui binarius multiplicando ſeipſum facit 4, denominatio competens binario (nempe denominatio quadrati, nam binarius eſt exponens quadrati) repetita dabit denominationem competentem illi poteſtati, & dicetur quadrato-quadratum, poteſtas cujus denominator 6, dicetur quadrato cubus, quia exponens 6; fit per multiplicationem binarij, & ternarij qui ſunt exponentes cubi, & quadrati. Sit poteſtas cujus exponens 8; dividatur 8 per 2, fiunt 4; dividatur 4, iterum per duo fiunt 2, igitur 8 componitur ex binario ter ſumpto. Igitur poteſtas cujus 8 exponens eſt, quadrato quadrato-quadratum, dicetur poteſtas cujus exponens 9 eſt cubo-cubus, cujus exponens 10 eſt ſuperſolidi primi quadratum. Poteſtas cujus exponens 12 eſt quadrato quadrato-cubus, quia ad producendum 12, opus eſt 2. 2. 3. hoc eſt,ut 2, multiplicent duo, fiantque 4 quæ multiplicentur per tria.

Ratio autem eſt, quia verbi gratia in poteſtate cujus exponens 4, & quam vocabimus quadrato-quadratum, licèt opus ſit ut radix quater multiplicetur, ut generet poteſtatem 4, nempe in unitatem, ut ſeipſam generet. Secundò in ſeipſam ut producat quadratum, deinde in quadratum ut producat cubum. Tertiò in cubum, ut producat quartam poteſtatem:eadem poteſtas producetur aliâ viâ, ſi nempe quadratum ſeipſum, multiplicet faciatque ſuum quadratum, nempe quadrato quadratum.

Oſtendimus enim cùm de multiplicatione, tres, aut plures numeros ſeipſos invicem multiplicantes, eundem numerum producere; quomodocumque inſtituatur illa multiplicatio; ſed ad producendam quartam poteſtatem quatuor multiplicationes adhibendæ, ſunt. Prima unitatis ut generet radicem, ſecunda radicis per ſeipſam, ut generet quadratum. Tertia quadrati ut generet cubum. Quarta cubi ut generet quartam poteſtatem, ſed multiplicando quadratum, per ſeipſum idem eſt, ac ſi multiplicarem quadratum per radicem, deinde productum per radicem, cum in productione ipſius quadrati, jam interveniat multiplicatio una per radicem; igitur eadem producetur poteſtas multiplicando quadratum, per quadratum, quæ ducendo quadratum in radicem, & productum multiplicando per radicem, quod etiam verum eſt reſpectu omnium, quorum exponentes ſunt compoſiti.

Ex quo ſequitur, quòd poteſtatis compoſitæ non tantùm nomina ſunt reciproca, hoc eſt dici poteſt quadrato cubus, vel cubo quadratum, ſed etiam perinde, ſit vel incipere ab extractione radicis cubicæ, & poſtea ab eâ extrahere radicem quadratam vel incipere ab extractione radicis quadratæ, tum ab ea extrahere radicem cubicam. Cùm enim oſtenderim quando fit multiplicatio plurium numerorum eundem numerum generari, quocumque ordine fiat multiplicatio. Cum diviſio contraria multiplicationi, reſtituat eum primum numerum à quo inceperunt multiplicationes, ſequitur quòd in extractione radicum (quæ extractio, eſt ſpecies diviſionis) quocumque ordine extrahantur radices, idem tamen quotiens inveniatur.

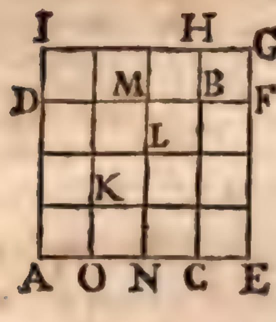
Quærimus autem in totâ hac parte, ut poteſtate quâlibet datâ, inveniatur primus numerus progreſſionis geometricæ denominativus, ut ſi in progreſſione geometrica ſuperiùs propoſita; daretur poteſtas cujus exponens 6. nempe quadrato cubus 64, quæritur initium progreſſionis geometricæ nempe binarius, qui eſt radix totius illius progreſſionis: incipiemus autem à radice quadrata, nempe ut quæratur ille numerus dato eius quadrato. Extractio autem radicis quadratæ eſt inveſtigatio numeri qui ſeipſum multiplicando datum numerum producat præmittemus autem aliqua Theoremata.

PROPOSITIO I.

Theorema I.

Si ad quadratum numerum eius radix duplicata addatur, ſimul cum unitate; fiet quadratus proximè major.

Sit



Sit quadratum A B cujus radix quadrata A C vel AD; dico quòd ſi radix quadrata AC duplicata ipſi quadrato AB addatur, & inſuper unitas, quòd fiet quadratum proximè majus; hoc eſt quadratum radicis unitate majoris, quàm ſit AC. Sumatur enim hæc radix AE, perficiaturque eius quadratum AG, producanturque C B, DB in H & F, oſtendam quòd in quadrato AG præter numerum quadratulorum quæ continet AB, adhuc inveniuntur bis quot ſunt unitates in AC, & inſuper unum.

Demonſtratio. (*Per* 4. 2. *Eucl.*) quia linea AE diviſa eſt in C; erit quadratum lineæ AE, æquale quadratis linearum AC, CE, C E autem eſt unitas, & rectangulo bis ſub A C, C E, ſed rectangulum ſub AC, CE tot continet quadratula quot ſunt unitates in AC, cum multiplicetur AC, tantum per unitatem C E; igitur quadratum A E continet tot quadratula, quot ſunt in AB, & inſuper bis quot ſunt unitates in AC, nempe rectangula C F, DH, & inſuper unum BG, nempe quadratum unitatis; quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si à numero quadrato duplicatam eius radicem auferas, minus tamen unitate; quadratum numerum proximè minorem habebis.

Sit quadratus numerus AG, cujus radix quadrata ſeu latus AE; dico, quòd ſi à tali quadrato AG auferas duplicatam radicem AE, minùs tamen unitate, hoc eſt ſi radix ſit 4, & duplicata ſit octo, auferas tantum 7 reſtabit quadratus numerus proximè minor; ſeu quadratus numerus radicis, quam AE ſuperat unitate.

Demonſtratio. Quadratum AG ſuperat quadratum AB Gnomone DGC, ſed Gnomon DGC; habet tot quadratula, quot ſunt in linea A E bis ſumptâ, uno excepto, ergo ſi tot auferas unitates quot ſunt in radice AE bis ſumptâ, minùs tamen uno, habebis ſequentem minorem quadratum numerum A B; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Numerus quadratus, ex tot imparibus numeris conſtat, ab unitate incipientibus quot ejus radix unitates continet.

Sit quadratus numerus AG cujus radix contineat 4 unitates: dico quadratum A G, æqualem eſſe quatuor primis numeris imparibus 1. 3. 5. 7 ſimul ſumptis.

Demonſtr. Ut ex quadrato unitati, nempe AK, fiat quadratum binarij, nempe AL, debet duplicari radix, & addi inſuper unitas, nempe addi ternarius, ut ex quadrato A L binarij fiat quadratum ternarij, debet duplicari binarius, & addi unitas; & hoc eſt addi quinarius: pariter ut fiat quadratum AB debet inſuper addi ternarius duplicatus cum unitate: igitur quadratus numerus AG continebit tot numeros impares, quot radix eius quadrata continet unitates.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Omnis numerus integer carens radice integrâ, caret & fractâ.

Sit numerus A inter duos proximos quadratos B & K poſitus; dico illum carere radice integrâ, & fractâ.

A.	6.	B.	4.	K.	9.
C.	$2\frac{1}{3}$	D.	$\frac{7}{3}$.	E.	$\frac{49}{9}$.
		G.	3.	F.	9.

Quod autem inter duos numeros quadratos cadant aliqui numeri facilè conſtat; Cùm enim dato quadrato verbi gratiâ AL (*in figurâ ſuperiori*) ad habendum quadratum proximum, ſeu radicis unitate majoris, debeat duplicari radix, & addi unitas, ſi addatur numerus minor, duplicatâ radice, fiet numerus minor quadrato radicis unitate majoris, ſit talis numerus aſſumptus A M; certum eſt illum non eſſe quadratum radicis AN cujus quadrato ſunt additæ duæ unitates; neque etiam erit quadratus ſequentis radicis A C, quia non eſt addita duplicata radix: ergo reſtat ut talis numerus non habeat radicem integram. Probo autem nullam habere fractam radicem, hoc eſt nullam partem aliquotam, aut radicum AN, AC, aut etiam aſſumptæ unitatis A O; immò neque integrum cum partibus quibuſcumque poſſe eſſe radicem præciſam illius AM, ſeu 6.

Demonſtratio. Sit enim ſi fieri poteſt numerus C, integer cum fractione, radix quadrata numeri A reducatur ad ſimplicem fractionem DG quæ per ſeipſam multiplicata faciat E F; igitur EF eſt ipſius quadratum. Cum autem ſi ponatur C, ſeu DG eſſe radix numeri A, erunt A & EF æquales; reducatur EF ad integros (quod fit ſi F dividat E) ut autem exurgat per hanc diviſionem numerus A integer, debet F metiri E; ſed E eſt quadratum nempe radicis D & F eſt quadratum radicis G (oſtendit autem Eucl. propoſ. 14. l. 8. quod quoties quadratus numerus metitur alium quadratum, quod etiam radix prioris metitur radicem poſterioris, ut quia quadratus numerus 4 metitur quadratum 16, radix eius 2, metietur radicem 4,) igitur G metietur D. Sed quoties denominator metitur numeratorem fractio æqualis eſt integro; ergo fractio DG eſſet æqualis integro, ergo numerus C non poteſt eſſe numerus integer cum fractione, ſed integer; quod eſt contra ſuppoſitionem; ergo numerus A non habet radicem fractam.

Hoc etiam de cubicâ probari poteſt.

Notandum autem quid intelligamus dum dicimus numerum 6 non habere ullam radicem quadratam quæ numeris exprimi poſſit. Primò certum eſt quod ſi detur rectangulum AM poterit fieri quadratum illi æquale cujus radix quadrata linearis aſſignabitur : ſed illa exprimi non poterit numeris in eâ ſuppoſitione in quâ rectangulum AM 6, unitatibus expreſſimus ; hoc eſt ſi aſſignetur linea quæ ſit radix quadrata, quadrati æqualis rectangulo AM, hæc linea erit incommenſurabilis cum linea A O ; quæ tanquam prima unitas aſſumpta eſt in hâc hypotheſi, ita ut illam lineam non poſſint metiri, quæcumque partes aliquotæ, ipſius A O. Et in eo ſenſu intelligendæ ſunt omnes illæ demonſtrationes, & propoſitiones algebraicæ, nempe quòd aliqui numeri habeant radices ſurdas, quæ audiri & nominari non poſſint, nempe, quæ per numeros exprimi non poſſint manendo in eâdem hypotheſi, in quâ communis aliqua menſura, nempe eadem unitas, aut partes ejus aliquotæ ſuppoſitæ ſunt ; nam ut dixi ſi quilibet numerus exprimi poteſt rectangulo, ſi inter ejus latera quæratur media proportionalis, hæc erit radix quadrati æqualis dicto rectangulo, ſed illa non poterit habere communem menſuram, cum lateribus prioris rectanguli, neque quadratum ejus poterit habere communem menſuram planam, cum priori rectangulo, hoc eſt ſi rectangulum, in quadratula diviſum ſit, hæc quadratula non poterunt exactè metiri illud quadratum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Quadratus numerus conſtans duabus cyphris, radicem habet unicâ conſtantem cyphrâ, qui tribus & quatuor, habet radicem duabus conſtantem, qui quinque & 6 tribus conſtantem.

Certum eſt numerum 9 maximum eſſe unicâ figura expreſſorum ; certum eſt item numerum 9, multiplicando ſeipſum, non facere novem decades ; ſed aliquid minus ; novem autem decades ex inſtitutione cyphrarum, & earum ſignificatione, poſſunt exprimi per cyphras, quæ pertineant ad penultimam ſedem, quadratum verò numeri 10, quæ eſt prima radix duabus, conſtans figuris, exprimi non poteſt duabus cyphris. Vetuimus enim ut in aliquâ ſede verbi gratiâ decadum, plures quàm novem decades proponerentur : ergo quodcumque quadratum duabus cyphris conſtans ; habet radicem unicâ conſtantem cyphrâ.

Numerus 99 eſt maximus qui duabus cyphris exprimi poſſit ; ſed ille per ſeipſum productus facit numerum minorem centum centenariis. Centum autem centenaria ſeu decies mille, eſt primus numerus qui exprimi debet quinque cyphris : ergo quadratum maximæ radicis quæ exprimi poſſit duabus cyphris ; exprimi poteſt quatuor cyphris.

Pariter 999 eſt maximus numerus qui exprimi poſſit tribus cyphris, cujus quadratum minus eſt quam mille millia, mille autem millia eſt numerus primus qui exprimi debeat ſeptem cyphris ; igitur quadratum maximi numeri qui conſtet tantum tribus cyphris, exprimi poteſt ſex cyphris. Sed poſt 9. 99. 999 ſequuntur immediate 10. 100. 1000. quorum quadrata exprimuntur tribus, quinque, 7 cyphris ; igitur ſi quadratum unicâ, vel duabus cyphris conſtet, eius radix unicam cyphram habebit, ſi tribus vel quatuor, eius radix duas habebit, & ita deinceps ; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si cubus tres tantùm, aut pauciores figuras contineat, radix eius cubica unicam continebit ; Si quatuor, quinque, ſex, radix duas ; ſi ſeptem, octo, novem radix tres.

Demonſtratio. Cubus cujus radix cubica eſt 10, prima conſtans duabus figuris eſt 1000 primus numerus conſtans quatuor figuris ; ergo ſi cubus pauciores contineat figuras quam quatuor, radix cubica pauciores continebit figuras quam duas, ergo unam.

Pariter radix cubica 100, prima conſtans tribus figuris habet cubum 1000000, qui eſt primus numerus conſtans 7 figuris ; ergo ſi cubus pauciores contineat nempe 4 ſex, quinque & quatuor, radix conſtabit duabus, atque ita deinceps.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Numeri quadrati radicem quadratam invenire.

```
         o o o o
A.   4 1 2 1 6 4.
       .   .   .
       6.        ( 6 4 2.
      1 2 4.
        1 2 8 2.   B.
```

Sit numerus A quadratus, cujus radix quadrata quæritur.

Primò, ſub ult[illegible] [illegible]yphrâ notetur punctum, deinde ſub ante[illegible]imâ, & ita deinceps ; quot autem erunt puncta tot erunt figuræ numerales in quadrata radice (*per 4 huius*) ut in hoc exemplo erunt tres ; quæ ſunt inveniendæ ſigillatim, methodo ferè quâ in diviſione uſi ſumus.

Secundò, membri per primum punctum ad ſiniſtram deſignati. Quære radicem quod facile erit cum nulla debeat haberi ratio cæterorum membrorum, ſit autem facilè memoriâ tenere, quadrata novem cyphrarum, numeralium ; nempe unitas habet pro quadrato unitatem ; binarius

Radices. 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

quaternarium ut in appoſito exemplo, numeri 41 ; maxima radix eſt 6. hæc ſcribatur tanquam quotiens,

Digitized by Google

quotiens, ſcribatur item ſub primo puncto tanquam diviſor, tum multiplica 6 per 6 ut fiant 36, quem numerum ſubtrahes ex 41 relinquuntur 5.

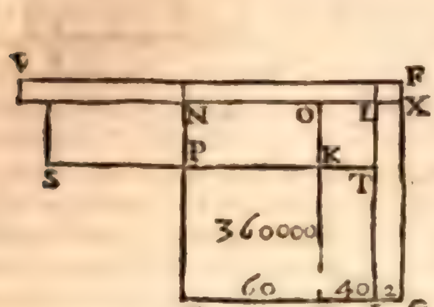
Tertiò prima figura quotientis inventa nempe 6 duplicetur, fiatque 12: numerus 12 ſcribatur tanquam diviſor, ſed ita tamen ut eius ultima non attingat ſecundum punctum. Examina quoties 12 in 52 invenitur, invenieſque 4 qui numerus 4 ſcribi debet tam in quotiente, quàm in diviſore, multiplicetur 124 per 4, & productus ſubtrahatur ex 521, relinquetur 25.

Quartò iterum duplicentur inventæ duæ figuræ quotientis, nempe 64, ut fiat 128, qui numerus ita ſcribatur ſub reliquo numero dividendo; ut non attingat ultimam cyphram 4 puncto notatam, & quære ut in diviſione quoties invenitur 128 in 256, invenieſque 2. ſcribe 2, tam in quotiente, quàm in diviſore, ita ut totus diviſor illius membri ſit 1282 quare 1282, multiplicetur per 2, & productus auferatur ex reliquo dividendi, nempe ex 2564, ſi nihil reſtat, numerus propoſitus erat quadratus; dico inventum quotientem B, eſſe radicem quadratam numeri A. Hoc eſt B multiplicatum per ſeipſum producere numerum A.

A.	4 1 1 1 6 4.
	. . .
B.	4 1 0 0 0 0.
C.	2 1 0 0.
D	6 4.

Demonſtratio. Primò quidem per ſubſcriptionem punctorum ſub numero A illum quaſi dividimus in aliqua membra, nempe B, C, D; ipſi æqualia, & cum 6 conſtet cyphris numerus A; eius radix conſtabit tribus (*per propoſitionem quartam hujus*) quærimus autem primò radicem maximam numeri 41 ſubintellectis cyphris 0000. Pariter eius radici 6, ſubintelligimus duas cyphras, quaſi eiſet 600, nam eum valorem obtinebit cum addantur ipſi duæ aliæ figuræ. Quod ſi 6, productus per 6, non producit 41; ſed tantum numerum quadratum minorem 36, productus per 600, non producet 410000, ſed numerum 360000. Pariter ſi 7 productus per 7 producit plusquam 41 & 700, productus per 700, numerum majorem producet quam 410000. quare prima cyphra debet eiſſe 6 & non 7.

Supponatur ergo numerus primò propoſitus eſſe quadratum E F cujus radix quadrata quæritur nempe E G, & quia ſcimus eam radicem ſeu latus E G, conſtare tribus figuris numeralibus ſupponatur prima ignota eſſe linea E H, ſecunda eſſe H I, tertia I G.



Quærimus ergo radicem quadratam maximam numeri 41 ſeu 410000, quam invenimus eſſe 6 ſeu 600, quia illi addentur duæ figuræ, juſſimus illam multiplicari per ſeipſam, ut fieret eius quadratum 36 aut 360000, quod voluimus auferri ex 41 ſeu 410000, ut relinqueretur 50000, igitur formavimus quadratum EK 360000, quod ablatū ex EF relinquit Gnomonem HFP nempe 52164.

Tertiò 6 prima figura inventa ſeu linea EH duplicatur. Ut habeatur tota linea S K erit enim totum rectangulum S L æquale Gnomoni P L H, illius autem rectanguli non tota longitudo S T cognoſcitur. Quæ ſi cognoſceretur, per diviſionem ſimplicem cognoſceretur eius latitudo T L, ſeu K T, aut H I. Nam cognoſcitur area nempe membrum ſecundum relictum factâ ſubtractione primi quadrati E K. Ideoque Gnomon PLH, ſeu rectangulum SL ſupponitur eſſe 52100, vides ergo rationem cur duplicetur figura 6 ſeu 600 inventa, ut fiat 12 ſeu 1200, divide ergo 52100 per 1200 ſeu 521 per 12, hoc eſt SL per SK; ita tamen ut quotiens L T, addatur ipſi S K, ut fiat tota S T. Invenio per eam diviſionem L T eſſe 4 ſeu 40, perfectâ autem diviſione relinquitur 25 quæ pertinent ad tertium membrum.

Quartò iterum propter eandem rationem jubemus duplicari duas cyphras radicis, nempe 64 ſeu 640, ut habeatur N L bis, ſeu VL; rectangulum autem VF æquale eſt, Gnomoni N F I; quæritur autem latitudo XF, aut LX ſeu IG, & ſupponitur Gnomon N F I, ſeu rectangulum V F, eſſe reliquum numeri propoſiti nempe 2564, qui numerus dividi debet per VX, cum tamen ſciatur tantum VL; nempe bis 64 ſeu 128, quare quotiens FX, addi debebit ipſi VL, ut fiat V X totus diviſor; invenitur autem 2, pro linea FX; quare totus diviſor VX erit 1282.

Igitur 642, erit linea E G latus quadrati E F, ſeu radix quadrata numeri A primò propoſiti.

Praxes diviſionis traditæ ſuperiùs, cum de diviſione; poſſunt extractioni radicis quadratæ adhiberi; ut nempe evitetur multiplicitas cyphrarum ſcribendarum, aut delendarum ideoque. Secunda methodus diviſionis quæ præ cæteris arridet hic adhiberi poteſt.

Pariter illa omnia examina quæ diviſioni adhibentur hic etiam valent, ſive per multiplicationem, ſive per abjectionem novenarij, ſola diverſitas quæ hic reperitur eſt, quod diviſor & quotiens ſint idem. Nam radix quadrata alicujus numeri, eſt numerus qui ſeipſum multiplicans producit numerum propoſitum.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Numeri non quadrati, radicem propinquiorem vera inveſtigare.

Demonſtravimus propoſitione 4. numerum non quadratum, ſeu carentem radice integrâ, carere & fractâ, poſſumus tamen ad veram magis, ac magis accedere. Ita ut ſæpè error ita ſit exiguus, ut ferè evaneſcat; quærimus ergo numerum qui per ſeipſum multiplicatus producat quàm proximè datum numerum.

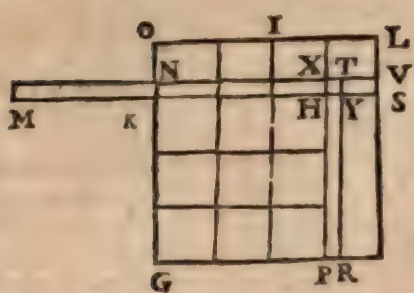
Detur igitur numerus A, cujus methodo præcedenti ſit inventa radix quadrata B, relinquatur autem totâ operatione peractâ numerus D: duplicetur radix inventa B, ita ut fiat numerus C denominator fractionis, cujus numerator ſit numerus D relictus. Dico numerum B, cum fractione D C, eſſe radicem numeri A juſto majo-

Digitized by Google

rem, quòd ſi denominatori fractionis addatur unitas, ita ut fiat fractio E F; dico numerum B unà cum fractione E F, eſſe radicem numeri A juſtà minorem.

A. 11.	D. 2.		
B. 3.	D.	$\frac{2}{}$	
	C.	6.	
B. 3.	E.	$\frac{2}{}$	
	F.	7.	

Demonſtratio. Sit numerus A repræſentatus per quadratum G H, & duo quadratula K I. Hoc eſt formavimus ex numero A, primò quadratum G H, novem unitatum, cujus radix quadrata B 3. & K I erit numerus D reſiduus. Si radix quadrata B duplicetur & addatur quadrato G H, ſimul cum unitate; fiet quadratum G L proximè majus nempe 16. hoc eſt cujus radix unitate ſuperaret radicem inventam. Igitur ut augeatur quadratum duplicatâ radice & unitate, neceſſaria eſt unitas in radice. Ut augeatur quadratum numero D reſiduo ſeu duabus unitatibus ut fiat 11. quaſi regulam trium inſtituimus. Licèt omninò regula trium rem non abſolvat, neque enim radices, ad ſua quadrata eandem habent rationem, ſed dum radices non multum differunt, error non erit magnus. Id autem præſtamus factâ fractione cujus numerator eſt E, & denominator F. Nam hæc fractio ſe habet ad unitatem ut 2 ad 7. nempe ut numerator ad denominatorem. Supponatur ergo unitas KO diviſa eſſe in N, ita ut K N ſit duæ ſeptimæ lineæ KO, hoc enim exhibet fractio $\frac{2}{7}$, intelligatur KM eſſe æqualis ipſi K H, aut H P, eritque M H radix B duplicata, cui addita eſt H S unitas. Clarum etiam eſt quod rectangulum M N ſit æquale rectangulo HR, atque adeò rectangulum M T ſit æquale gnomoni M T P, ſed rectangulum M T linea K N adjecta radici addit quadrato GH; & rectangulum M T minus eſt rectangulo K I, hoc eſt numero D reſiduo, cum enim ut M S, ſeu 7 ad O I, ſeu 2, ita O K ad M K, erit rectangulum M V æquale rectangulo K I (*per 16. 6. Eucl.*) ergo O I majus eſt quam M T, ſeu gnomon K T P: ergo fractio K N nimis parva ſumpta fuerat. Neque enim radix G N habet quadratum GT æquale numero A, ſed deficit ab eo rectangulo T S.



Jam verò ſit alia fractio D C, hoc eſt KN, quæ ſit duæ ſextæ lineæ KO. Aſſero Gnomonem K T P additum, ſuperare numerum D ſeu rectangulum K I. Cum enim ſit ut M H ſeu 6 ad OI 2. Ita O K ad K N, (*per 16. 6.*) erunt rectangula M X K I æqualia, ſed Gnomon K T P majus eſt rectangulo M X, addit enim inſuper quadratum H T; igitur quadratum totum G T, quod ſit ex radice G H, hoc eſt radice 3 $\frac{2}{6}$ ſuperat numerum A: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

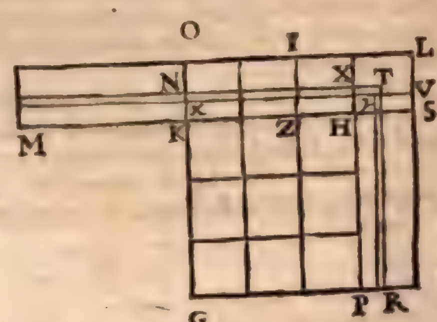
Si numerus relictus major eſt radice, aut illi æqualis, radix minor verâ exactior eſt, ſi minor ſit, radice, radix major verâ exactior erit, quàm minor verâ.

Sit primò numerus D æqualis radici, ſupponatur enim numerus A fuiſſe 12. ita ut relinquatur 3. poſt extractionem numeri novenarij ſeu quadrati. Dico quod ſi addatur fractio $\frac{3}{7}$ hæc minùs exacta erit quam $\frac{3}{6}$.

Demonſtratio. Cum enim in fractione $\frac{3}{6}$ numerator ſit media pars denominatoris, linea N K erit media pars lineæ K O, & conſequenter H Y media pars lineæ H S: igitur Y S erit etiam æqualis lineæ H Y, ſed rectangulum Y V non habet altitudinem æqualem ipſi N K, nam tres ſeptimæ ſunt minores, quàm tres ſextæ; igitur rectangulum Y V, quo quadratum radicis minoris verâ, ſuperatur à numero A propoſito, minus erit quàm quadratum H T, quo quadratum radicis majoris verâ, ſuperat numerum propoſitum.

Multò magis ſi numerus relictus ſuperaret radicem, verbi gratiâ ſi eſſet 4. nam facta fractio $\frac{4}{7}$ ſuperaret mediam partem unitatis, atque adeò adhuc tunc quadratum H T multò magis ſuperaret rectangulum Y V.

Quod ſi numerus relictus D minor eſſet radice primò inventâ, verbi gratia ſupponatur primus numerus eſſe 11. ita ut quadrato GH ſeu 9. ablato, relinquatur 2. ſeu K I. Dividatur K O in 6 partes. Accipiatur K N duarum partium, & per N ductâ parallelâ ipſi K H, cæteriſque ut prius, erit primò rectangulum M X, æquale rectangulo KI. Cum enim ſit ut M H, nempe 6. ad K Z nempe 2. ita K O quæ diviſa eſt in 6 partes ad N K, quæ eſt duarum, erit (*per 16. 6.*) rectangulum ſub primâ M H, & quartâ K N, nempe rectangulum M X, æquale rectangulo K I: ſed dum additur fractio $\frac{2}{6}$ radici 3. fit quadratum G T. Et additur priori quadrato Gnomon KTP, qui ſuperat rectangulum M X, quadrato H T: igitur radix aucta fractione $\frac{2}{6}$ paulò majorem numerum producit. Iterum dividatur KO in 7 partes



tes accipianturque duæ nempe KX. ducaturque XV. erit pariter rectangulum MV. æquale rectangulo KI; ſed addendo fractionem $\frac{1}{7}$ nempe KX ipſi radici, additur quadrato priùs invento nempe 9. Gnomon MYP qui minor eſt, quam rectangulum MV, & deficit ab eo rectangulo YS; ſed rectangulum SY majus eſt quadrato HT; ergo conſtat propoſitum.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Quadratus quadratum multiplicans quadratum producit, cujus radix eſt numerus productus ex multiplicatione radicum.

A. 4.	B. 9.	C. 36.	
D. 2.	E. 3.	F.	6.

Sit numerus quadratus A, cujus radix D, qui multiplicet numerum quadratum B, cujus radix E; & producat numerum C, dico ſi multiplicentur D, & E, ita ut fiat F; quod numerus F multiplicatus per ſeipſum producet C.

Demonſtratio. Quia numerus D multiplicando, & ſeipſum & numerum E, producit A & F, erit (*per* 17. 5.) ut A ad F; ita D & E; & quia E multiplicans & ſeipſum & numerum D, facit B & F; ita erit B ad F; ut E ad D; & invertendo ut F ad B; ita D ad E; ſed ut D ad E; ita jam erat A ad F; igitur ita eſt A ad F; ut F ad B; igitur (*per* 17. 6.) rectangulum ſub A & B; ſeu numerus C, æqualis eſt quadrato medij, nempe numeri F; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XI.

Si quadratus numerus quadratum metiatur, illum metietur per quadratum numerum; cujus radix habebitur ſi radix diviſi, per dividentis radicem dividatur.

In eodem exemplo quadratus numerus C, dividatur per quadratum numerum B, & quotiens ſit numerus A, dico numerum A, eſſe quadratum, cujus radix D habebitur, ſi radix numeri C diviſi, nempe F, dividatur per radicem E, numeri dividentis.

A. 4.	B. 9.	C. 36.	
D. 2.	E. 3.	F.	6.

Demonſtratio. Cum numerus C, ſit quadratum numeri F; & oriatur ex multiplicatione numeri B, per A; erit ut A ad F; ita F ad B, & cum E multiplicando D, faciat F, & multiplicando ſeipſum faciat B; erit ut F ad B; ita D ad E; igitur ita eſt D ad E; ſicut A ad F; ſi ergo D, multiplicet ſeipſum, & numerum E; fiet numerus qui ſe habebit ad F, ut A ad F, ergo fiet numerus æqualis numero A; ſed numerus ortus ex multiplicatione numeri D per ſeipſum quadratus eſt; igitur numerus A, quadratus eſt; cujus radix D eſt quotiens diviſionis, in qua numerus F, per E diviſus eſt, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Si numerus quadratus numerum non quadratum multiplicet, numerum non quadratum producet.

Si enim numerum quadratum produceret, dividendo hunc numerum quadratum productum per quadratum producentem, quotiens eſſet ille alius numerus qui per præcedentem quadratus eſſet; contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Fractionis quadratus numerus, eſt fractio cujus numerator eſt quadratus numeratoris & denominator quadratus denominatoris.

A. $\frac{1}{5}$	C. $\frac{3}{5}$	E. $\frac{9}{25}$
B. $\frac{}{5}$	D. $\frac{}{5}$	F. $\frac{}{25}$

Sit fractio AB; dico ſi multiplicetur A per ſeipſum, fiatque E, quadratus numerus numeratoris A, item B multiplicetur per ſeipſum, fiatque F: dico inquam quòd quadratum fractionis AB erit fractio EF. Sit enim fractio CD æqualis ipſi AB; ſi multiplicetur AB per CD idem erit ac ſi AB, per ſeipſam multiplicaretur: ſed ſi AB multiplicetur per CD, ut vidimus, debent multiplicari denominatores, inter ſe, item & numeratores; igitur EF erit quadratum, ipſius AB. Pariter ut quæratur radix fractionis, quærenda eſt radix, tam denominatoris, quam numeratoris, nam tunc fiet radix, cujus quadratus numerus erit prior propoſitus, quæ omnia per ſe patent.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Numeri non quadrati, radicem exactiorem quantum libuerit conſtituere.

A		32.
B.		36.
C.		1152.
D.		33.
E.		6.
F. 5.	G.	$\frac{3}{}$
	H.	6.

Sit numerus quicumque A, non quadratus; cujus quæritur radix quadrata, ſemper exactior; hinc multiplica per numerum quemcumque quadratum B, oriaturque numerus C, cujus eruatur radix quadrata D, neglectâ fractione, ſi quæ illi adhæret. Hæc radix quadrata D dividatur per E radicem numeri B, exurget numerus F cum fractione GH, dico hunc numerum eſſe radicem verâ quidem minorem, quâ aliam propiorem inveniemus, ſi numerum A per alium quadratum majorem numero B multiplicaverimus.

A. $\frac{32}{1}$ K. B. 36. C. $\frac{1152}{36}$ D. E. D. $\frac{33}{6}$ E. F. 5. G. $\frac{3}{6}$ H.

Demonſtr. Numerus A intelligatur per modum fractionis ſubſcriptâ illi unitate; K multiplicetur per numerum B, tam denominator, quàm numerator illius, fiet fractio CD æqualis fractioni AK; quia (*per* 6.5.*Eucl*) C ad D eandem rationem habet, ac A ad K. Extrahatur radix tam numerat. C, quàm denominatoris D, eritque (*per prop. decimam hujus*) fractio DE radix fractionis CD: ergo & fractionis AK, illi æqualis; ergo & numeri A,

 ut

ut autem reducatur ad integrum numerum dividatur numerator D, per denominatorem E, fietque radix numerus F, cum fractione GH; quod erat oſtendendum.

Numeri autem aptiſſimi ad id facilè præſtandum, ſunt numeri quadrati decadici, quarum radices ſunt etiam decadicæ ut 100, cujus radix eſt 10 vel 10000, cujus radix eſt 100; nam ad multiplicandum numerum addendi ſunt duo 00, vel quatuor 0000 vel ſex 000000, & ex radice inventa auferuntur tot ultimæ figuræ quot ſunt in radice quadrata. Proponatur idem numerus A, hunc multiplica per B; quod fit facilè additis quatuor 0000; ut fiat numerus C, ex quo ſi extrahas radicem quadratam hæc erit D; radix autem numeri B eſt E: divide D per E, quod fiet aſſumptis duabus ultimis figuris nempe 70 pro numeratore quia radix E bis continet 0, vel quia addidiſti duos binarios figuræ 0, poſt numerum A fietque F, cum fractione GH quæ eſt ſemper minor verâ: ſed quò major fuerit numerus productus, eò erit exactior.

A. 32.
B. 10000.
C. 320000.
D. 570.
E. 100.
F. 5. G. 70
H. 100.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Fractio poteſt eſſe numerus quadratus & terminis non quadratis conſtare.

A. 4 C. 3. D. 12
B. 9 E. 27.

Sit fractio AB quæ ſit quadrata & conſtet terminis quadratis A & B; dico poſſe dari aliam illi æqualem, & conſequenter quæ quadrata ſit, cujus tamen nec numerator, nec denominator ſint quadrati. Numerus enim quicumque C non quadratus multiplicet numeros quadratos A & B producantúrque numeri D & E; fractio DE ut patet æqualis eſt fractioni AB, ſed (*per Coroll.9. hujus*) numeri D & E non erunt quadrati; ergo dari poterit fractio quadrata cujus termini quadrati non erunt, quod erat oſtendendum.

Ex quò ſequitur, quod ex fractione DE, his terminis concepta erui non poſſit radix quadrata præciſa, cum tamen præciſam habeat.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Expendere an fractio quadrata ſit, licèt terminis quadratis non conſtet.

A. 12 C. 324.
B. 27
D. 18.

Sit fractio AB terminis non quadratis expreſſa, expendere debemus, an ſit quadrata; duc A, in B, ita ut fiat C; ex quo ſi erui poſſit radix quadrata præciſa D: dico fractionem AB eſſe quadratam.

Demonſtr. Cùm A, multiplicando B producat C, & pariter C producatur ex multiplicatione radicis D per ſeipſam; erit (*per 16. 6. Eucl.*) ut A ad D ita D ad B; ergo ſunt continuè proportionales A, D, B; igitur (*per 20. 8. Eucl.*) A & B erunt plani ſimiles, plani autem ſimiles (*per 26. l.8. Eucl.*) eam habent rationem quam aliqui quadrati numeri. Ergo dantur aliqui quadrati numeri, qui eandem habent rationem quæ eſt A ad B; ergo illi quadrati conſtituent fractionem æqualem fractioni AB, ergo fractio AB exprimi poteſt numeris quadratis.

Detur autem alia fractio EF, & ducendo E in F producatur numerus H, cujus radix G, non ſit præciſa. Dico fractionem EF terminis quadratis exprimi non poſſe.

E. 6 H.
F. 15 90.
G. 9.

Demonſtr. Si enim fractio EF quadrata eſſet, & terminis quadratis exprimi poſſet, haberet E ad F eandem rationem ac quadrati numeri (*per 26.8. Eucl.*) & (*per 8. ejuſdem*) caderet inter E, F numerus medius proportionalis, cujus quadratus æqualis eſſet numero H, ergo numerus H haberet radicem quadratam contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Quadratæ fractionis terminos, ad quadratos revocare.

A. 12 C. 4
B. 27. D. 9.

Sit fractio quadrata AB, terminis non quadratis expreſſa, hæc ſit revocanda ad terminos quadratos, ſeu exprimenda quadratis; revocetur ad minimos terminos CD; dico illos quadratos eſſe.

Demonſtr. Cùm AB ſit fractio quadrata (*per 15. hujus*) inter A & B cadet medius proportionalis, & erunt plani ſimiles. Sed C & D eandem rationem habent ac A ad B, ergo & ipſi erunt plani ſimiles, & inter eos cadet medius proportionalis; cum ergo numeri C, D, minimi ſint in eadem ratione, ſeu numeri primi, & inter eos cadat medius proportionalis: ergo (*per Coroll. 1. prop.2. lib.8. Eucl.*) C & D quadrati erunt, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Radicem quadratam ex fractione quadrata educere.

Fractio quadrata ſi terminis quadratis non exprimitur (*per præcedentem*) ad terminos quadratos revocetur; ex quibus ſingulis, ſi eruatur radix quadrata; fiet fractio quæ dictæ fractionis radix erit præciſa.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Fractionis non quadratæ, radicem quadratam eruere.

Sit

A. $\frac{15}{24}$ B.   C. 3. D. $\frac{6}{7}$ E.   L. $\frac{27}{7}$ N.   P. $\frac{246}{63}$ Q.

F. 4. G. $\frac{8}{9}$ H.   M. $\frac{44}{9}$ O.   R. $\frac{303}{63}$ S.

T. $\frac{246}{368}$ V.

Sit fractio AB, quam conſtet non eſſe quadratam (*ex propoſ.13*) ſitque eruenda illius radix quadrata. Numerorum A, & B eruantur radices, quibus etiam addantur fractiones, ita ut C cum fractione D E, ſit radix numeri A; & F cum fractione G H, ſit radix numeri B; numerus C cum DE ſimul addantur, ſicut E & GH, fiatque fractio L N æqualis numero C & fractioni D E; ſicut fractio M O ſit æqualis numero F, & fractioni G H; tum fractiones L N, M O ad communem denominatorem reducantur. Sintque P Q, R S. Abjiciatur communis denominator, & numerator fractionis pertinentis ad numerum A fiat numerator, & numerator fractionis R S pertinentis ad numerum B fiat denominator: fiatque fractio TV, hæc erit radix fractionis A B.

Demonſtratio. Numerus C cum fractione EF, ſeu fractio L N, aut P Q ſunt radix numeri A, ſicut R S eſt radix numeri B, ſe habent autem iſtæ fractiones eodem conſtantes denominatore, ut numeratores: fractiones item ſunt æquales quorum termini eandem rationem habent; ergo ponendo numeratores, unum vice denominatoris alium vice numeratoris, eadem exurget fractio, ac ſi ipſæ fractiones poſitæ eſſent: igitur fractio T V ita compoſita, eſt radix fractionis A B.

A. $\frac{15}{24}$ B.   C. 100.

D. $\frac{1500}{2400}$ E.

F. $\frac{38}{48}$ G.

Alius modus facilior. Sit fractio AB, illius tam denominator, quam numerator per eundem numerum, præcipuè vero decadicum multiplicentur, verbi gratia per numerum C; ita ut fiat alia fractio æqualis, longè majoribus terminis conſtans. Eruaturque tam radix numeri D, quàm numeri E, nullâ habitâ ratione adhærentis fractionis. Sitque F, radix numeri D; & G radix numeri E. Dico fractionem FG eſſe radicem fractionis A B.

Demonſtratio. Fractio F G eſt radix fractionis DE (*per propoſ.10. hujus*) ſed fractio ED eſt æqualis ipſi AB; igitur fractio F G erit radix fractionis AB. Quod erat oſtendendum.

DE RADICE CUBICA.

PROPOSITIO XIX.

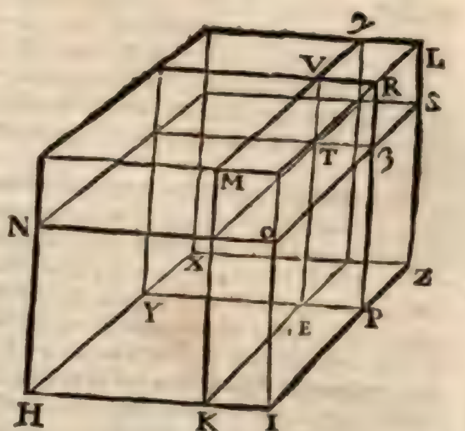
Theorema.

Si numerus in partes ſecetur, cubus totius æqualis eſt cubus partium, & parallelepipedo quod toto numero, & ejus partibus continetur ter ſumpto.

A. 8. B. 6. C. 2.

D. 512. E. 216. F. 8. G. 96.

Sit numerus A, diviſus in duas partes B, & C. Dico cubum numeri A, nempe D, hoc eſt A multiplicetur per ſeipſum, fiatque 64. qui numerus multiplicetur per A, fiatque cubus D; dico inquam hunc cubum, æqualem eſſe cubis partium B & D, & parallelepipedo comprehenſo ſub A, B, C, hoc eſt ſi A per B multiplicetur, & productus per C multiplicetur, fiet figura ſolida conſtans 6. parallelogrammis; quorum oppoſita plana parallela ſunt. Dico igitur numerum D æqualem eſſe numeris E, F, & numero G ter ſumpto, ſeu triplicato.



Cujus propoſitionis demonſtratio ex figura geometrica pendet, & ex iis quæ diximus per duplicem multiplicationem produci figuram ſolidam.

Supponatur numerus A eſſe linea HI, diviſa in K, ita ut HK ſit 6 partium & KI duarum, fiat cubus lineæ HI, ſitque HL, ex K ducatur perpendicularis KM, ſit NH ipſi HK æqualis: eritque ut patet quadratum KN, ſicut MO, ſit item IP ipſi HK, aut NH æqualis, ducatur perpendicularis PR, intelligantur per NO, MK, PR duci plana parallela ſuis oppoſitis; quorum ſectiones (*per 16. 11.*) erunt lateribus adverſorum planorum parallelæ.

Demonſtratio. Cubus HL cujus latus eſt linea HI, æqualis eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis: ſed omnes eius partes ſunt ſolida corpora primum HT, quod probo eſſe cubum lateris HK; comprehenditur enim 6 quadratis nempe NK, NY, NT, & oppoſitis. Secundum corpus ſolidum SV, quod dico eſſe cubum lateris KI: cum enim linea IZ, æqualis ſit (*ex definitione cubi*) ipſi HI, & IP ipſi HK, erit reliqua PZ, ipſi KI æqualis; eſt autem 35 ipſi PZ æqualis: ergo & æqualis ipſi KI. Quare demonſtrabo plana comprehendentia ſolidum SV eſſe quadrata. Tertium erit corpus KS, cujus longitudo IZ æqualis eſt ipſi HI, nempe toti lineæ. Latitudo eſt ipſa KI, altitudo eſt IO æqualis ipſi HK; idem probabo de ſolido NR. Idem de ſolido YV quæ omnia ſunt parallelepipeda, duximus enim plana parallela. Igitur cubus totius HI, æqualis eſt cubis partium HK, KI, & parallelepipedo ſub tota HI, & partibus HK KI comprehenſo, ter ſumpto; quod erat demonſtrandum.

PROPO

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Si numerus in duas partes ſecetur : erit cubus totius, æqualis cubus partium ; & ſex parallelepipedis, quorum tria comprehenduntur, ſub prima parte bis , & ſub ſecunda ſemel , tria item alia comprehenduntur ſub ſecundâ parte bis, & ſub primâ ſemel.

Sit linea H I repræſentans numerum quemcumque diviſum in partes HK, KI ; dico cubum lineæ HI, æqualem eſſe, cubis partium H K, K I, & ſex parallelepipedis , quorum tria comprehenduntur bis ſub primâ parte H K, & ſemel ſub ſecunda K I. Hoc eſt latitudinem , & longitudinem habent æqualem lineæ HK ; & altitudinem æqualem habent lineæ K I, & altitudinem æqualem lineæ H K.

Demonſtratio. Quodlibet parallelepipedum comprehenſum ſub tota, & partibus ; verbi gratiâ parallelepipedum K S , æquale eſt duobus parallelepipedis K 3. E S , quorum K 3 habet duas dimenſiones, nempe IP , IO æquales lineæ H K, aliam verò ipſam K I. aliud autem nempe ES habet duas dimenſiones E P , P Z æquales ipſi K I, aliam verò nempe P 3,æqualem ipſi H K ; ſed cubus HL, *(per præcedentem)* continet præter cubos partium H K , K L tria parallelepipeda contenta ſub totâ, & partibus ; ergo præter cubos partium continebit 6 parallelepipeda qualia deſcripſimus; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Si alicui cubo addatur ter ipſa radix, & ter quadratum radicis cum unitate , producetur cubus proximè major.

Sit in figura ſuperiori cubus H T 8. cujus radix HK 2. Dico ſi illi cubo addas ter ipſam radicem ſeu 6, & ter quadratum radicis , nempe 12. & inſuper unitatem , fiet 27. cubus proximè major , hoc eſt cubus cujus radix ſuperabit radicem HK unitate. Supponatur enim H I, eſſe illius radix, H K continebit duas unitates , & K I unam unitatem.

Demonſtratio. *(Per præcedentem)* cubus HL, radicis H I , eſt æqualis cubo H T , nempe ſegmenti H K , & cubo ſegmenti K I , nempe unitati (cum cubus unitatis ſit unitas) & tribus parallepipedis contentis ſub parte H K bis , & ſub K I , hoc eſt quadrato lineæ H K : nam ſi H K per ſeipſum multiplicetur fit ejus quadratum , quod ſi multiplicetur per unitatem nihil additur, & inſuper tribus parallelepipedis contentis ſub linea K I bis, & ſub linea H K. multiplicatio autem quæ fit per unitatem KI nihil immutat : ergo eſt ſola multiplicatio lineæ H K per H I : ergo ſingula illa parallelepipeda ſunt æqualia ipſi lineæ H K : ergo ſi cubo H T addatur ter ipſa radix , & ter quadratum radicis & unitas , habebitur cubus proximè major : quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Ex dato numero cubo , radicem cubitam extrahere.

A. 3 4 3 2 8 1 2 5

C. 2 1. B.

D. 7 3 2 8. 3.

Sit datus numerus A, ex quo extrahenda eſt radix cubica. Ultimæ figuræ numeri A ſubſcribatur punctum ; deinde relictis duabus ſedibus, pro antepenultimæ aliud punctum ſubſcribatur & ita deinceps , ut vides relictis inter duo puncta duabus ſedibus non notatis. Quot erunt puncta, tot erunt in radice characteres,ut radix cubica numeri A habebit tres tantum figuras (*ut demonſtravimus prop.* 3.)

Primò quæratur radix cubica maximi cubi in primo membro numeri A contenti ; nempe in 34, ad quod exequendum opus eſt memoria tenere cubos novem numerorum.

Radices.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Cubi	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

Maximus numerus in 34 contentus eſt 27, cujus radix cubica eſt 3 , ſcribatur hæc in quotiente B , ejuſque cubus 27 ſubtrahatur ex primo membro 34, reliquus fiet numerus 7, qui ſimul cum tribus notis ſequentibus componit ſecundum membrum ; ad inveniendam ſecundam figuram quotientis , habendus eſt diviſor methodo ſequenti.

Secundò , radicis iam inventæ, nempe 3 , fiat quadratum 9,quod triplicetur,fietque 27, hic numerus erit diviſor ſecundi membri. Illi igitur ſubſcribatur, & ut aptè collocetur intelligatur cyphra 3 non eſſe tantum 3,ſed 30, cujus quadratum erit 900,& triplum quadrati 2700. igitur ultima cyphra nempe o. collocetur ſub puncto o.

D. 7 3 2 8.
E. 2 7 0 0. (B. 3 2.
L. 5 7 6 8.
M. 1 5 6 0. F. 9 2.
2.
H. 1 8 4.
E. 2 7 0 0.
K. 2 8 8 4.
2.
L. 5 7 6 8.

Tertiò quære quoties numerus E inveniatur in numero D more conſueto : memento tamen numerum E non eſſe totum diviſorem ; ſed illi debere addi alios numeros qui oriuntur ex ipſa quotientis figurâ quæ quæritur, ideoque per attentationem res perficienda eſt : in quo tota hujus operationis difficultas poſita eſt. Attentemus igitur , an ſi ponatur binarius res benè ſuccedat.

Quartò radicem iam priùs inventam nempe 3 ſeu 30, triplica fietque 90, cui addes hanc figuram 2 ita ut fiat numerus 92.

Quintò multiplica hunc numerum F per figuram

ram ultimo loco inventam nempe 2. fietque numerus H.

Sextò addatur numerus H numero E, nempe tribus quadratis radicis B, fietque numerus K.

Septimò hunc numerum K iterum multiplica per binarium ultimo inventum; fietque numerus L, quem ſubtrahes ex numero D & reliquus numerus erit M, qui pertinebit ad ſequens membrum appoſitis ipſi reliquis figuris.

Notandum tamen 1, quod numerus L debet poſſe ſubduci ex numero D, ſi enim illum ſuperaret, quotiens juſtô major ſumptus fuiſſet. Secundò numerus M reliquus non debet eſſe major triplô radicis inventæ 32, & triplô quadrato ejuſdem, ut in hoc exemplo, radicis 32 quadratum, eſt 1024 triplicatum erit 3072, tripla radix eſt 96 aggregatum autem eſt 9120, qui numerus non ſuperatur à numero M; ergo benè operati ſumus. Si enim numerus M triplum radicis & triplum quadratum ſuperaret, radix nimis parva ſumpta fuiſſet.

L.	1560125.
E.	307100.
F.	960.
G.	965.
	5.
K.	4825.

B.	325.
B.	320.
C.	102400.
	3.
E.	307200.
K.	4825.
H.	312025.
Mult.	5.
M.	1560125.

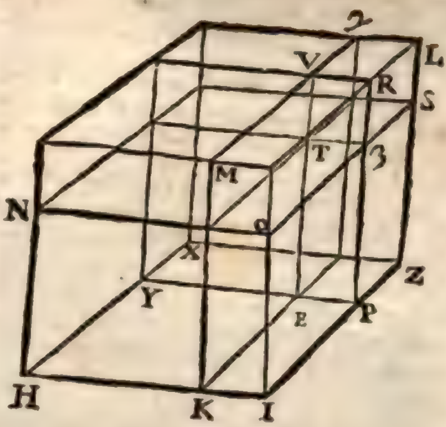
Reſtat ergo ultima cyphra eruenda ex L ultimo ſcilicet membro, radici B cubicæ, addidi o, quia verè talis eſt, imò illud o mutandum erit in aliam figuram, quadratum illius erit C, quod triplicandum eſt, fietque numerus E. Ille numerus eſt diviſor, itaque ſcribendus, ut ultima cyphra illius reſpondeat, ultimæ numeri L dividendi.

Inquiratur quoties tria inveniuntur in 15, inveniuntur quinquies experiamur an quinquies benè ſuccedant.

Primò fiat triplum radicis prioris nempe 320, eritque F, huic adde 5, fietque 965. Hunc numerum multiplica per 5, figuram ultimò inventam, fiet numerus K; hunc adde numero E; fiet numerus H, hunc iterum multiplica per 5 fiet numerus M, hunc ſubtrahe ex numero L. Si nihil relinquatur, numerus primò propoſitus cubus eſt: cujus radix eſt B nempe 325, reſtat oſtendendum radicem B in ſe ductam bis, generare cubum A ſeu numerum primò propoſitum.

Demonſtratio. Primum præceptum jubet interpungi numerum propoſitum ut in totidem membra dividatur, quod præceptum iam probatum eſt ſupra. Probabimus autem hic benè eductam eſſe radicem cubicam duorum primorum membrorum & quod de illis probabimus de reliquis etiam probatum intellige.

Cum ergo certi ſimus numeri 34328, radicem cubicam conſtare duabus figuris, quarum prima ad primum membrum 34 ſeu 34000 pertinet; ſecunda ad numerum 328. Intelligitur cubus H L, diviſus in plures partes, eo modo quo diccmus. Et primò quidem ſit linea H I diviſa in duas partes, ſicut radix conſtat duabus cyphris, quæritur primo HK. Contendo eam be-



nè eſſe inventam, ſi quæratur radix cubica cubi maximi qui in 34 invenitur. Licet enim 34 habeat adhuc tres figuras ſibi additas, ita ut ſit 34000, ſi tamen inveniatur radix cubica numeri 34, cui addatur poſtea una cyphra, perinde erit, quia pro tribus additis ipſi cubo; unica tantum addi debet radici, juxta ea quæ jam ſupra probavimus.

Invenitur autem HK eſſe 3 ſeu 30, alia verò invenietur 2. igitur HI diviſa eſt in 30 & 2.

Quia autem totus cubus H L, eſt æqualis cubo partium HK & K I, & 6 parallelepipedis, quorum tria comprehenduntur ſub quadrato partis H K, & linea K I, & alia tria ſub quadrato ſegmenti K I, & lineâ H K. Ideò primò cubum ſegmenti H K, nempe 27 ſeu 27000 ſubducimus, à toto numero; ita ut reliqua corpora ſint æqualia numero 7328, reſtat inquirenda ſecunda cyphra nempe K I. Quæ multiplicando tria quadrata lineæ H K; item multiplicando lineam H K per tria quadrata lineæ KI, & aſſumendo cubum K I: ea inquam omnia non debent ſuperare reliquum numerum 7328, nec etiam ita ſuperari ab eo numero, ut linea KI major aſſumi potuerit.

Unde primò quia maxima corpora quæ relinquuntur, ſubducto cubo partis H K, ſunt parallelepipeda contenta ſub quadrato ſegmenti H K, & lineâ K I. Ideò quadratus radicem HK, & quadratum eius triplicamus. Numerumque productum E nempe 2700, facimus diviſorem, ut poſſimus judicare quanta ſit linea K I. Monuimus autem numerum E non eſſe diviſorem integrum, quia præter tria parallelepipeda contenta ſub quadrato lineæ H K, & ſub K I. Sunt etiam alia tria, & cubus.

Quare ut habeantur alia tria parallelepipeda contenta ſub linea H K, nempe radice iam inventâ, & ſub quadrato K I, jubemus radicem triplicare; poſtea verò deberet hæc radix triplicata, multiplicari bis per lineam K I, quia nempe tria hæc parallelepipeda continentur ſub radice H K, & quadrato lineæ K I. Ut autem eadem operâ habeatur cubus lineæ K I, debet etiam KI multiplicari bis, per ſeipſam, quod ut eadem operâ fiat, addimus radici triplicatæ ipſam lineam K I, & aggregatum multiplicamus ſemel per lineam K I, exurgitque numerus H, qui adhuc ſemel multiplicandus eſſet. Quia autem tria quadrata radicis inventæ, etiam ſemel multiplicari debent ut illæ duæ multiplicationes in unam coaleſcant; primò addatur numerus H, nume-

Digitized by Google

ro E, aggregatum nempe numerus K multiplicetur per lineam K I, habebitur numerus L æqualis ſex illis parallelepipedis, & cubo, partis K I.

Monuimus autem. Primò ut numerus L non ſuperet reſiduum numerum nempe D, haberetur enim ut patet radix cubica numeri majoris quam ſit HL.

Secundò monuimus, quòd reſiduus numerus M, factâ illa ſubductione non ſuperet triplum quadratum radicis inventæ 32. & ipſam ter ſumptam; ſi enim illam ſuperaret unitate, inveniretur (*per 13. hujus*) in numero H L cubus alius major cujus radix ſuperaret priorem unitate, ideóque nimis parva aſſumpta fuiſſet illa ultima figura.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Radicem cubicam examinare.

A. 4 3 2 8 2. (B. 35

C. 4 0 7.
D. 4 2 8 7 5.
E. 4 3 2 8 2.

Sit numerus A, cujus radix cubica inventa ſit B, factis autem operationibus reliquus numerus ſit C; fiat cubus radicis B, ſitque numerus D, cui addatur numerus C, fiatque E; ſi E eſt æqualis numero A radix B eſt radix cubica, maximi numeri in numero A contenti, modò tamen numerus C non ſuperet triplam radicem B, & triplum quadratum ejus; quadratum autem radicis B eſt 1225.

Demonſtratio. Seipsâ patebit, debet enim, ſi benè operati ſumus B eſſe radix cubica cubi maximi in A contenti; & C eſſe reſiduum, B eſt radix numeri D; eſt autem maximus ſi C non ſuperat tria quadrata &c. C eſt etiam verum reſiduum, ſi additum numero D reſtituit numerum A.

ALIUD EXAMEN.

A. 4 3 2 8 2. D. 1.

B. 3 5. E. 8. F. 1.

C. 4 0 7. G. 8.

Ex numero A abjiciatur novenarius & reliquus ſit numerus D; ex radice B abjiciatur novenarius reliquus ſit E, qui in ſe multiplicatus dat 64. ex quo aufer novenarium relinquitur F, qui iterum multiplicatus per E dat G; ex G & C auferatur novenarius: datur iterum D nempe 1, igitur benè operati ſumus.

Demonſtr. Auferendo novenarium ex radice B, & reliquum nempe E multiplicando per ſeipſum; ita ut ex producto auferatur novenarius, idem relinquitur numerus nempe F, qui relinqueretur, ex quadrato radicis; ut oſtendimus in multiplicatione, multiplicando autem talem numerum F, iterum per 8. reſiduum radicis ablato novenario, idem relinquitur, qui relinqueretur ex cubo ablatis novenariis, cum autem numerus A, debeat eſſe æqualis cubo, & numero C; debet idem relinqui numerus abjectis novenariis ex numero A qui relinquitur, & ex cubo D, ex numero C; hoc eſt ex G & C.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Numeri non cubici exactiorem radicem invenire.

A. 4 3 2 8 2.
B. 3 5.
C. 4 2 8 7 5.
D. 4 0 7.
E. 1 2 2 5.
B. 3 5.
F. 1 2 6 0.
3.
D. 4 0 7.
G. 4 7 8 1.

Sit numerus A non cubicus: ſitque radix maximi cubi in eo contenti B; ſit autem C, maximus cubus in numero A contentus, reliquus autem numerus ſit D, ſit radicis quadratum numerus E, cui adde radicem B, fiatque numerus F; hunc triplica, & genito adde unitatem, ut fiat numerus G dico ſi fiat fractio cujus numerator ſit numerus relictus D, & denominator numerus G, dico hanc fractionem cum radice B, conſtituere radicem numeri majoris quam C; & minoris quam A, atque adeo eſſe radicem minorem verâ.

Demonſtr. Si numerus D reliquus factâ extractione, eſſet æqualis tribus quadratis radicis, B & radici ter ſumptæ & inſuper unitatem contineret, hoc eſt æqualis eſſet numero G; radici B unitas addi poſſet (*per tertiam hujus*) quod ſi eſſet eadem ratio radicum, & cuborum, inſtitueremus regulam trium, diceremuſque ſi 4781, ſeu numerus G additus numero C auget radicem unitate, numerus D qui tantum additur, quantùm augebit, exurgetque fractio, quæ ad unitatē eam rationem habet, quam D habet ad G hoc eſt fractio DG. Quare ita eſt numerus G ad D, ſicut unitas ad fractionem D G, ſed major eſt ratio cuborum, quàm radicum, cum cuborum ratio ſit triplicata rationis radicum; ergo minor eſt ratio unitatis ad veram radicem, quàm ad D G. Ergo vera radix major eſt quàm DG; hic ſumpſi exceſſus cuborum pro ipſis cubis, & exceſſus radicum, pro ipſis radicibus cum habeant eandem rationem.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Fractionis radicem cubitam inveſtigare.

A. 27 C. 3
B. 64 D. 4

Sit fractio A B, hæc autem vel cubica erit, vel non cubica; ſi primò cubica ſit, nec tamen cubicis terminis exprimatur, ad minimos terminos revocetur, tunc (*per prop. 2. 8. Eucl.*) cubicis terminis exprimetur.

Sit igitur fractio data AB; numeratoris A radix cubica ſit C, & denominatoris B radix ſit D; dico fractionem C D eſſe radicem cubicam fractionis A B.

Demonſtratio. C D eſſe radicem cubicam fractionis AB; eſt radicem C D cubicè multiplicatam, producere fractionem A B; ſed ad hoc requiritur ut tàm denominator, quàm numerator per ſeipſos cubicè multiplicentur, quod fit in noſtro caſu, cum A ſit cubus ipſius C; & B, ipſius D: ergo C D eſt radix cubica

bica fractionis A B ; quod erat demonſtrandum.

Si verò fractio propoſita non eſſet cubica, tam denominatoris quam numeratoris extrahatur radix, quàm fieri poteſt exacta, quod ſi exurgant fractiones, illæ ad ſimplices revocentur ; ut docuimus ſuo loco ; & habebitur fractionis etiam non cubicæ radix cubica.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Numeri non cubici ; radicem propiorem verâ in infinitum invenire.

A. 40. / B. 1000. — C. 40000 / B. 1000. — D. 34 / E. 10
A. 40 / F. 1.

Sit numerus A non cubicus, cujus quæritur radix cubica exactior ; hunc multiplica per quemcumque numerum cubicum, aptiſſimi autem ſunt decadici, & quò major fuerit hic cubus, aſſumptus, eò præciſior erit operatio ; aſſumatur ergo numerus B, per quem multiplicabis numerum A, fiat numerus C ; cujus extrahatur radix cubica, ſitque D ; radix autem cubica numeri B aſſumpti ſit E, dico radicem numeri A eſſe fractionem DE. Subſcribatur enim numero C numerus B, fiatque fractio C B.

Demonſtr. Fractio DE eſt radix numeri C B; (minor tamen verâ, quia numero D adhærere deberet fractio quæ neglecta eſt) ſed numerus A æqualis eſt fractioni C B. Nam ſi numero A ſubſcriberetur unitas F, fieret fractio A F æqualis numero A, ſed B multiplicans A fecit numerum C, & multiplicans unitatem fecit ſeipſum, ſeu numerum B ; ergo eſt ut A ad F, ita C ad B ; ergo fractiones A F, C B ſunt æquales ; ſed A F æqualis eſt, numero A ; ergo & C B. Ergo eſt D E radix cubica numeri A.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Cubus numerus tot continet numeros Arithmeticæ progreſſionis, quot radix eius continet unitates. Medius autem numerus erit quadratum radicis, ſi cubus impar fuerit. Si verò fuerit par quadratum radicis bis ponatur.

A. 27.
B. 3.
C. 8. D. 9. E. 10.

Sit cubus A cujus radix B, tribus unitatibus conſtet ; dico numerum A æqualem eſſe, tribus numeris progreſſionis vulgaris Arithmeticæ ſibi immediatis, quorum quadratum radicis ſit numerus medius qui ſemel ſumatur, quia cubus eſt impar. hoc eſt 8. 9. 10. ſunt æquales numero A. 27.

Demonſtratio. Cubus generatur ex multiplicatione quadrati D per radicem B ; ergo quot ſunt unitates in B, toties quadratum D, continetur in numero A : C autem, & E ſimul ſunt dupli ipſius D, eſt enim proprietas progreſſionis Arithmeticæ, ut duo extremi numeri ſimul æquales ſint medio, bis ſumpto ; ergo numerus A æqualis erit numeris C, D, E.

F. 64.
G. 4.
K. 15. H. 16. 16. L. 17.

Si verò numerus cubus F ; ſit par, quadratum radicis par erit ; immò & radix, ut facilè oſtendi poteſt, ex Eucl. cum numerus impar imparem multiplicando, imparem generet. Sit igitur quadratum H, qui ſi bis ſumatur ; pro duabus unitatibus radicis, & quot erunt binarij in radice, tot ſumantur bini numeri progreſſionis Arithmeticæ, illi etiam erunt dupli ipſius quadrati : ergo erunt ſimul æquales numero F, qui toties continet quadratum H, quot ſunt unitates in radice G.

COROLLARIUM I.

Sequitur quòd ſi ſumantur tot numeri progreſſionis Arithmeticæ vulgaris, æqualiter à quadrato remoti, quot ſunt unitates in radice idem habebitur cubus.

COROLLARIUM II.

Quod demonſtravi de cubo reſpectu quadrati, & numerorum progreſſionis Arithmeticæ vulgaris, ipſi vicinorum ; probari poteſt de quadrato reſpectu radicis, hoc eſt numerum quadratum imparem componi, ex tot numeris progreſſionis Arithmeticæ, quot eius radix unitates continet ; ita tamen ut radix ſit medius. Sit numerus quadratus 9, cujus radix 3. dico 2. 3. 4. eſſe æquales ipſi 9, quia tres ſunt unitates in radice, ipſa radix ponetur pro una, & alij duo numeri pro reliquis duabus unitatibus ; quantum enim 2. deficit à ternario, tantùm quaternarius ſuperat eundem ternarium.

Si verò numerus quadratus fuerit par ; vel bis ſumatur quadratus, vel omninò relinquatur, ut verbi gratiâ numerus, cujus radix quadrata 4. dico 3. 4. 4. 5. ſimul æquales eſſe numero 16. vel 2. 3. 5. 6. relicto intermedio 4.

COROLLARIUM III.

Idem probari poteſt de quacumque poteſtate, reſpectu antecedentis, ut quia quadrato quadratus, fit producendo cubum ; per radicem, tot continebit numeros progreſſionis Arithmeticæ vulgaris quot ſunt unitates in radice, quorum cubus medius erit vel ſemel ſumptus, ſi fuerit numerus impar ; vel bis ſumptus aut omiſſus ſi fuerit par.

COROLLARIUM IV.

Quæ doctrina ut ſit univerſalior, quoties numerus numerum multiplicat, Productus tot numeros vulgaris progreſſionis Arithmeticæ continet, quot ſunt unitates in multiplicante ; ita ut multiplicatus, ſit medius ut ſi 4 multiplicet 5 ; dico numerum productum nempe 20, æqualem eſſe 4 numeris vulgaris progreſſionis Atirhmeticæ, ita ut numerus 5 ſit medius, biſque ſumatur aut omittatur quoties alius eſt par ;

par ; dico ergo quòd 4.5.5.6. æquales ſint numero 20. pariter 3.4.6.7.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Numeri impares progreſſionis Arithmeticæ vulgaris ; ita concurrunt ad generationem cuborum ; ut primo cubo, primus aſſignetur, ſecundo ſecundus, & tertius tertio, quartus, quintus, ſextus, & ita conſequenter.

A. B. C. D. E.
1. 2. 3. 4. 5.
E. F. G. H. I.
1. 8. 27. 64. 125.
K. L. M. N. O. P. Q.
1. 3. 5. 7. 9. 11. 13.

Sit ſeries numerorum progreſſionis Arithmeticæ, ſupponanturque illi numeri eſſe radices.

Supponatur item E F G H I eſſe ſeries cuborum reſpondentium radicibus.

Denique ſit ſeries numerorum imparium progreſſionis Arithmeticæ vulgaris K L M N O P Q; dico primum cubum eſſe æqualem primo numero impari K ; ſecundum F, eſſe æqualem duobus ſequentibus numeris L M ; tertium G ſibi vindicare tres N, O, P : quartum D æqualem eſſe quatuor conſequentibus Q R S T, & ita de cæteris, tot ſcilicet quod ſunt unitates in radice.

Demonſtratio. Vel cubus eſt par, vel impar, hoc eſt, erit par ſi radix par fuerit, erit impar, ſi radix impar fuerit ; ſi cubus ſit impar, tot continebit numeros progreſſionis Arithmeticæ communis, quot radix ejus continebit unitates, ſeu quotus ipſe fuerit, per præcedentem propoſitionem, ſed totidem numeri impares, modò quadratum fuerit numerus medius, illis æquales ſunt.

Ergo cubus tot continebit impares numeros, quotus ipſe fuerit ; quorum quadratum radicis erit medius numerus : ſed quadratus ille numerus tot continet impares incipiendo ab unitate, quot ejus radix continet unitates : ergo &c. Extractiones radicum aliarum poteſtatum dabuntur ſuo loco. Atque hæc de Arithmetica ſufficiant abſtruſiora dicemus deo dante, in Algebra.

ARITHMETICÆ LIBER QVARTVS.

Arithmetica calculatoria, & divinatoria.

Calculatoria Arithmetica differt à vulgari, quòd calculis, aut metallicis nummis pro characteribus utatur, in principiis autem omninò convenit ; cenſetur in multis ad uſum communem magis accommodata, eò quòd ſenſibilibus notis rudiorum imaginationi meliùs ſerviat, ideoque in pluribus galliæ provinciis à mercatoribus adhibeatur, hanc igitur utpote facilem paucis propoſitionibus complector.

PROPOSITIO I.

Numeratio calculatoria.

Diſpoſitio numerorum, aut potiùs calculorum, in hac Arithmeticæ ſpecie, non à dextra ad ſiniſtram ; ſed ab imo ſurſum procedit, ita ut numeri inferiores minores ſint, ſuperiores decuplum obſervent valoris augmentum. Quare eædem vigent regulæ vulgaris Arithmeticæ, nempe ne in una ſede numerus novenario major ſcribatur, aut potiùs notetur ; ideoque non plures quàm novem calculi in una ſede ponantur.

Quia tamen videbatur incommodum tot calculos in una ſede ſtatuere, quamlibet ſedem in duas partimur, quarum una 4 tantum calculos continere poteſt, alia unicum, ſed quinque calculis æquivalentem.

Nonnulli communiter unam lineam, & unum intervallum cuilibet ſedi aſſignant, ita ut calculus qui quinario æquivalet non in eadem linea cum reliquis jaceat.

Sedes igitur eodem ordine procedunt, ac in Arithmetica communi, nempe digiti, ſeu unitates ſunt infimæ, exinde ſequuntur aſcendendo decades, tum centenaria, millia, decades millium, centenaria millium ; milliones. Volunt autem plerique ut ſedes una, lineam & intervallum unum ſibi vendicet.

Ducantur ergo 7 lineæ ut in figura vides, è quarum regione appones characteres 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000. 1000000. & intervallis appones characteres 5. 50. 500. 5000. 50000. 500000. 5000000.

Secundum hanc methodum hæc regula obſervatur quod in lineis quatuor tantum calculi apponi poſſint, in intervallis unicum, ſed qui valeat quinque ; ſic enim in una ſede, conſtante linea & ſuperpoſito intervallo novem tantum ponuntur, æquivalenter, nempe unus in intervallo, ſeu quinque æquivalenter & 4. in linea, valor

valor autem primi intervalli eſt 5, ſecundi 50, tertij 500, quarti 5000, &c.

Milliones	5000000.	o.
	1000000.	—oo.
Centenaria millium.	500000.	o.
	100000.	—ooo.
Decades millium.	50000.	o.
	10000.	—oooo.
Millia.	5000.	
	1000.	—oooo.
Centenaria	500.	o.
	100.	—o.
Decades.	50.	
	10.	—obo.
Unitates.	5.	o.
	1.	—o.

Secundum hanc methodum proponatur numerus 7 6 9 4 6 3 6 notandus ſeu calculis deſignandus: incipe ab infimo. Habes in ultima ſede 6, quia in linea ponere potes tantum 4, qui non ſufficerent, depone calculum in intervallo cujus valor erit 5, & unum in linea cujus valor eſt 1: ſic enim poſueris 6, in ſecunda ſede habemus 3. Apponantur tres calculi è regione lineæ & intervallum ſit vacuum: eo quod numerum 3, non perveniat ad quinarium. In tertia ſede habemus 6, quare ut priùs collocetur unus calculus in linea, alius in intervallo. In quarta ſede ſeu millium habemus 4, qui numerus cum ad quinarium non perveniat, depono 4, calculos in linea. In quinta ſede habemus 9, notanda uno quinario in intervallo & quatuor calculis in linea. In ſexta habemus 8, notanda uno calculo in intervallo & tribus in linea. In ſeptima ſede habemus 7, depone calculum unum in intervallo & duos in linea.

Ex quibus colliges poſſe tam intervalla, quam lineas eſſe vacuas, cum hæc numerandi methodus cyphra expletiva o. careat.

Hæc diviſio linearum, & intervallorum in abaco, ſeu menſa notari debet eaque ſemper ſubintelligi, quoties hac utendum eſt methodo.

Hæc methodus licèt ſatis communis non arridet, eò quòd diſtinctio linearum & intervallorum confuſionem pariat, ita ut ſæpe intervallum pro linea, linea pro intervallo accipi poſſit, præcipuè ſi linea aut intervallum vacet. Quare multi conſultiùs, quinarios calculos in eadem cum reliquis linea reponunt. Sic enim pauciores fiunt ordines meliuſque ſedes internoſcuntur & hanc methodum deinceps uſurpabimus.

	Quinarij
Milliones.	— oooo.
Cent. Millium.	—o o.
Decades mill.	—o ooo.
Millia.	— ooo.
Centenar.	— oooo.
Decades.	—o.
Digiti.	—o o.

Proponatur numerus 4 6 8 3 4 5 6. notandus. Intelligantur ductæ 7, lineæ nulla habita ratione intervallorum, ſed quinarij calculi cum opus erit ponantur primi & ſeparati. In propoſito exemplo in ultima ſede digitorum habemùs 6. Pone unum in columna quinariorum, & unum ſeparatim. Sic enim primus quinque ſignificat & cum alio efficit 6.

In ſecunda ſede decadum, habes 5, appone calculum in columna quinariorum. In tertia ſede centenariorum habes 4, depone quatuor calculos in linea centenariorum. In quarta ſede millium habes 3, repone tres calculos. In quinta ſede, decadum millium, habes 8 repone tres & unum quinarium. In ſexta ſede habes ſex, repone quinarium & unum. Denique in ſede millionum repone quatuor calculos.

Totum ergo diſcrimen à communi Arithmetica in eo poſitum eſt. Quòd Arithmetica communis utatur characteribus diverſis, hæc ſimilibus: deinde vulgaris Arithmetica poſſit aſcendere uſque ad novenarium in eadem ſede, hæc quoties ad quinarium aſcenditur reponit unum quinarium cæteroſque etiam notat.

PROPOSITIO II.

Additio ſimplex.

Additionem ſimplicem voco, collectionem plurimorum numerorum in unam ſummam: quæ ita calculis peragitur. Numeri addendi è regione ſibi reſpondeant in abaco, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenaria centenariis reſpondeant: in columnis ſcilicet ſeparatis. Tum in tertiam columnam colligantur, in qua unam ſummam conſtituant.

	C	D.	E
	—		—o
1 0 0.	—o.	—oooo.	—
1 0.	—ooo.	o.	ooo.
1.	—oooo.	o ooo.	o o.
	5 7 8.	4 5 8.	1 0 3 6.

Sint duo numeri C, & D colligendi in unam ſummam nempe 5 7 8. 4 5 8. Notentur calculis in C, & D (*per præcedentem*), ita

ut digiti, digitis, decades, decadibus reſpondeant. In infima ſede unitatum, in numeris C & D, habes 6 calculos ſimplices & duos quinarios, quæ omnia efficiunt 16, nota 6, in numero E, nempe quinarium, & ſimplicem calculum, retines autem duos quinarios, ſeu unam decadem, quam ſi reponas cum cæteris decadibus numerorum C & D, fient 13 decades, repone 3 in numero E, & retines duos quinarios, ſeu unum centenarium. Collige centenaria numerorum C & D, quibus unum retentum adjicies fiunt 10, nihil pones in ſede centenariorum, unumque repones in millibus. Habes igitur ſummam.

Non diſſimili ratione in aliis exemplis operaberis, in quibus ſe exercebit Tyro antequam ulteriùs progrediatur. Meminerit tantum duos calculos quinariorum efficere unum ſedis ſuperioris.

PROPOSITIO III.

Subtractio ſimplex.

Subtractio unius numeri ab alio, eſt inventio exceſſus, quo major ſuperat minorem, ut explicuimus ſuo loco: hæc ſubtractio ut ritè calculis perficiatur, ſupponit tres columnas, unam in qua notetur, ſeu calculis exhibeatur numerus major, à quo ſcilicet debet fieri ſubtractio, ſecundam in qua exhibeatur numerus ſubtrahendus; tertiam in qua exhibeatur differentia, ſeu exceſſus majoris numeri ſupra minorem.

F.	G.	H.
o.		
ooo.	o o.	o o.
o oo.	o oooo.	o oooo.
o.	ooo.	ooo.
1 3 7 5.	6 8 2.	6 9 3.

Sit ſubtrahendus numerus G ex numero F, incipe ab ultima ſede, & ſubtrahe duos calculos ex quinario, reſtant tres reponendi in infima ſede numeri H. Tum ſubtrahe tres calculos, decadum numeri G ex duobus numeri F, ſeu melius 8, numeri G ex 7, id non potes, ſumendus eſt calculus centenariorum numeri F, qui æquivalet decem decadibus, ſi igitur ſubtrahas 8 decades numeri G ex decem decadibus, remanebunt 2 cum 7 decadibus numeri F, fiunt novem notandæ in numero H. Subtrahe 6 centenaria numeri G, non jam ex tribus centenariis numeri F, cum jam unum acceperimus: ſed ex duobus quod cum non poſſit; accipe calculum millium numeri F, qui cum valeat 10, ſubtrahes 6 centenaria, ex 12 remanent 6, notanda in numero H.

Verum examen ſubtractionis eſt additio. Quare, ſi addendo numeros G & H, denuò fiat numerus F, proba fuerit ſubtractio.

PROPOSITIO IV.

Multiplicatio.

Multiplicatio eodem ferè modo calculis inſtituitur, ac in Arithmetica vulgari. Hoc eſt ſi multiplicator unico charactere ſcribatur, unicâ operatione opus erit: ſi duabus duæ. Debet enim totus multiplicandus, duci in ſingulas notas numeri multiplicatoris.

K	L	M
o.		o.
o o o.		o o.
o o o o.		o o o.
o o.	o o o.	o o o o.
1 7 4 6	3.	5 2 3 8.

Sint ergo tres columnæ prima in qua multiplicandus exhibeatur. Secunda multiplicatorem repræſentet. Tertia quæ productum. Sit igitur K multiplicandus, L multiplicator unius characteris. M ſit columna deſtinata producto.

Primò multiplica vel 6, numeri K per multiplicatorem 3, vel ſi velis primum calculum per 3, fiunt 3, notandi in M, tum multiplica quinarium numeri K per 3, fiunt 3 quinarij, quorum duo ſufficientes ad decadem reſervabuntur, & notabitur alter in M. Multiplica 4 decades numeri K per multiplicatorem 3 fiunt 12, quibus addes decadem reſervatam, fientque tredecim notabis 3 in M, reſervabis centenarium. Multiplica duo centenaria ſeparata numeri K; per multiplicatorem 3 fiunt 6, & unum retentum incipio ſcribere 7 in M. ponendo duos calculos ſed retine adhuc quinarium, multiplica quinarium centenariorum numeri K per 3 fiunt 3 quinarij; quibus addes 1, retentum fiunt 4, ſeu duæ decades retinendæ. Denique multiplica unum calculum millium numeri K, per multiplicatorem 3 fiunt 3, cum duobus retentis fiunt quinque; depone unum quinarium in M; atque ita habebis productum 5238.

Quando multiplicator conſtat pluribus characteribus, totidem ſunt operationes faciendæ, atque propterea nonnulli totidem parant columnas pro ſingulis productis, quorum praxim hic apponemus, ut viam ad aliam meliorem ſternamus.

Sit numerus N multiplicandus per numerum P conſtantem duobus characteribus, multiplica primò numerum N per duos inferiores calculos numeri P ut fecimus ſuprà, fiatque numerus R.

Secundo

N	P	R	S	T
oo			o oo	o oo
ooo		ooo	o oo	oooo
o	ooo	o	oooo	o
o ooo	oo	o o		o o
2358	3 2	716	70740	70456

Secundo multiplicandus eſt idem numerus N, per 3, nempe primum characterem numeri P, qui cum ſint in linea decadum, productus S inchoandus erit à ſecunda linea, ſeu linea decadum. Multiplica igitur tres inferiores calculos numeri N per 3 fiunt 9, inchoa notare 9, in numero S nempe in linea decadum ponendo quatuor calculos, & retinendo quinarium; tum multiplica primum quinarium numeri N, per 3 fiunt tres quinarij qui cum uno retento efficiunt quatuor quinarios, ſeu duo centenaria retinenda, & quia in decadibus numeri N, nulli ſunt calculi ſimplices, poſſunt reponi duo centenaria retenta. Tertio multiplica quinarium decadum numeri N per 3 fiunt tres quinarij, notandus unus in S, retinendi duo, qui conſtituant unum millenarium, multiplica tria centenaria numeri N per tria fiunt 9, cum uno fiunt decem, nihil ſcribe in ſede millenariorum numeri S, ſed retine unum: denique multiplica duo millenaria numeri N per 3 fiunt 6, cum uno retento efficiunt 7, decades millium notandæ in S. fietque numerus 70740.

Addantur numeri R. & S eo modò quo notati ſunt habebiſque numerum T.

Notandum igitur quoties ex multiplicatione quinarij, oritur binarius aut plures binarij, pro ſingulis binariis, reſervandam unitatem pro ſede ſuperiori.

Notandum ſecundò non eſſe opus duas aut tres columnas conſtituere, etiam quando multiplicator conſtat duobus characteribus nec faciendam ſummam ſed eadem operâ, quâ producitur ſecundus productus, eâdem addi poſſe primo producto, quod ut clariùs fiat, proponatur numerus A, multiplicandus per numerum B conſtantem duabus ſedibus.

A	B.	C.	D.
oooo		ooo	o
o ooo		oooo	ooo
o oooo	oo	o o	o o
ooo	o oo	o	o
		o	o
			o
4893	2 7	34251	132111

Supponatur ergo numerus C eſſe productus ex ductu numeri A in 7, ſedem ſcilicet inferiorem numeri B, tum multipl. num. A per duas decades num. B, & dices bis tria ſunt 6 ſeu 6 decades, quæ addendæ ſunt quinque decadibus num. C. ita ut fiant undecim decades, nota 1. decadem in num. D, & retine unum centenar. Exinde dices bis novem ſunt 18, & unum retentum fiunt 19. & duo cent. num. C fiunt 2. pone unum cent. in num. D & retineo 2. Exinde multiplico 8. cent. num. A, per duo; fiunt 16. & duo quæ retinent. ſunt 18. & quatuor millenaria num. C efficiunt 22, pono duo millenaria in num. D, & retineo 2. denique multiplico 4. millia num. A, per duo fiunt 8, cum duobus retentis ſunt 10. cum tribus decadibus millium numeri C ſunt 13 ſcribe tria in ſede decadum millium numer. D, & unum in centenariis millium ejuſdem num. D.

PROPOSITIO V.

Diviſio.

Difficilior paulò videtur hæc regula dum calculis proceditur, quam dum calamo, & characteribus: habet tamen id commodi, quod unâ operatione factâ meliùs apparet quid relinquatur. Tota praxis in exemplo manifeſta fiet.

A.	B.	C.	D.
o			
oo			
o ooo	o o	o o	
ooo		o	oo
oo	o oooo	oo	o
12832	608	652	21

Proponitur numerus A, 12832. dividendus per numerum B 608, uterque numerus exhibeatur calculis in A & B, Intelligaturque diviſor B applicari dividendo A, & quia primus character diviſoris B eſt 6 non poterit applicari primo, ſeu ſupremo membro numeri A, ſed tantum ſecundo, quod notabis appoſito digito huic ſecundo memb. num. A, & tunc infimum memb. diviſoris B, reſpondere intelligetur penultimo dividendi, ſeu 8 diviſoris, reſpondebit num. 3. dividendi, quo ita notato. Examina quoties primum membrum diviſoris, inveniatur in duobus ſupremis dividendi ſeu in 12 invenio 2, pro quotiente; per quem num. multiplicandus eſt diviſor B, & productus ſubtrahendus ex dividendo A, quod unâ eâdemque opera præſtari poteſt, multiplica igitur infim. memb. diviſoris ſeu 8 per 2 fiunt 16, quæ ſubtr. non potes ex penult. memb. ſed neque ex 13, ſed tantum ex 23. duo igitur calculi antepenultimi memb. aſſumendi ſunt & reſolvendi in decad. ut fiant 23, ſi ergo 16 ſubtrahas & 23. reſt. 7. ſcribe 7. repoſui eos in num. C, memento tamen antepenultimum diviſoris imminutum eſſe duobus calculis. Rurſus multiplica primum membr. diviſoris, ſeu 6 per 2 fiunt 12 ſubt. 12, ex duobus primis memb. dividendi, ſeu ex 12 nihil relinquitur, reſt. igitur in dividendo 652, ut vides in col. tertia, rurſus intellige applicari diviſorem divid. apponendo digitum ſequenti membro dividendi, inquire quot. diviſor 608, inveniatur in 652, invenies ſemel, nota calculum in quotiente D; cum ergo hæc unitas multipl. diviſorem nihil immutet, ſubtrahes ſimpliciter diviſorem B, ex num. C; ſubtractione factâ relinquitur 44, quare quotiens erit 21, reſtantque 44 indiviſa, quæ in minutiores monetas reducenda ſunt v. g. ſi ſint franci, reducendi erunt in aſſes 880, ut inſtitui poſſit diviſio per 608. Totum ergo artificium diviſionis conſiſtit in applicatione diviſoris, & tum quærendo quoties diviſor ſubtrahi poſſit ex dividendo: quæ ſubtractio commodiùs fieri poteſt calculis, quàm characterib. poſſet enim perfici per attentat. ſubtrahendo ſemel, atque iterum, donec id quod relinquitur minus ſit diviſore.

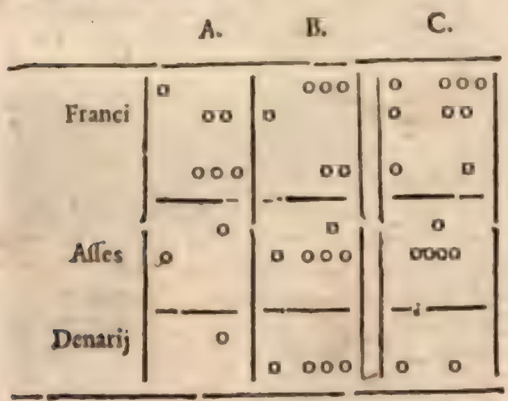
diviſore. Idem præſtandum in ſecunda applicatione quæ omnia calculis ipſis explicare poſſumus quam longo verborum circuitu, neque enim in charta poſſum calculos ponere & reſumere quod tamen hanc regulam facilitat.

PROPOSITIO VI.

Additio numerorum denominatorum.

Vocamus numeros denominatos, ut explicui in Arithmetica communi, numeros addictos rebus diverſis, ſeu diverſæ ſpeciei, ut ſi franci, francis; aſſes aſſibus, denarij denariis addendi ſint, ſinguli autem franci in 20 aſſes, ſinguli aſſes in 12 denarios dividuntur.

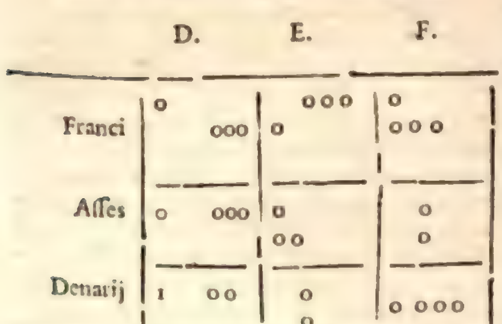
Hæc additio inchoatur ab inferiori moneta; ut in noſtro caſu, primo ex denariis aſſes conficimus, quos aliis aſſibus addimus; tum ex aſſibus francos conflamus, addimuſque aliis francis, ſint addendi 525 franci 15 aſſes, denarij 10, francis 351, aſſibus 18, denariis 8.



Incipe à denariis adde denarios 10 & 8 fiunt 18 ſeu aſſis, cum 6 denariis; pone 6 in columna C, & retine aſſem. Adde quinque aſſes numeri A cum octo numeri B, & aſſe retento fiunt 14: pone 4 aſſes in columna C & retine 1 ſeu 10, & cum aliis duabus decadibus, efficiunt 30 aſſes ſeu unum francum, & 10 aſſes; ſcribe 10 aſſes in columna C & retine francum: denique adde francos numerorum A & B; cum franco retento fiunt 876 franci, aſſes 14, denarij 6.

PROPOSITIO VII.

Subtractio numerorum denominatorum.



Proponatur numerus E, ſubtrahendus ex numero D, nempe 35 franci, 16 aſſes 11 denarij; ex francis 18, aſſibus 8, denariis 7. Incipe ab infimo ordine ſeu denariorum: Et quia ſubtrahere non potes 11 denarios ex 7, intellige deſumptum eſſe, unum aſſem ex numero D, & eſſe reſolutum in 12 denarios. Subtrahe 11 ex 12, reſtat unus, cum 7 numeri C, reſtant octo denarij notandi in col. F.

Secundò ſubtrahe 16 aſſes ex 8. quod cum fieri non poſſit, aſſume ex ordine ſuperiori numeri C calculum reſolvendum in 20 aſſes, ex quibus ſi ſubtrahas 16, reſtant 4 cum ſeptem aſſibus numeri D; reſtant enim tantum 7, eo quod unus fuerit reſolutus.

Denique ſubtrahe 35 francos ex 52, reſtant enim tantum 52, reliqui erunt 17. In hunc modum perficies ſimiles ſubtractiones.

Cum regulæ omnes ad quatuor elementares reducantur, facilè ex dictis methodum verſandi calculos colliges.

ARITHMETICA Divinatoria.

Problema I.

Numerum ab alio cogitatum divinare.

Jube ut numerus cogitatus triplicetur, & productus dividatur bifariam ſi poſſit: ſi verò dividi non poſſit ſine fractione, hunc unitate, auctum divide bifariam, ejuſque ſemiſſem rurſus triplica, & pete quoties novenarius in hoc ultimo producto inveniatur; dico ſi pro ſingulis novenariis ponas binarium, invenies numerum cogitatum.

Si numerus primo productus per 3 dividi non poſſit bifariam, illi addetur unitas, ut dividatur. Sit verbi gratia cogitatus numerus 5, qui multiplicatus per 3 producat 15, & addendo unitatem fiat 16, dividatur bifariam fiet 8, multiplicetur per 3 producetur 24, in quo bis invenitur numerus 9, pro ſingulis vicibus aſſume 2, fient 4, cui propter additam prius unitatem addes etiam unitatem.

Cogitetur unitas quæ multiplicata per 3 efficit 3, dividatur bifariam, priùs addita unitate, fit 2; triplica exurget 6, in quo numero non invenitur novenarius quare exhibebis ſolam unitatem additam ad diviſionem faciendam.

Demonſtratio. Duplici multiplicatione per tria, idem facis, ac ſi multiplicares per novenarium, ergo ſi ſolæ eſſent hæ multiplicationes, tot deberent eſſe novenarij, quot ſunt in numero cogitato unitates, ſed diviſiſti per binarium; ergo debes habere mediam tantum partem numeri cogitati; ergo ſi numerum novenariorum multiplices per duo, habebis numerum cogitatum.

Quando vero numerus eſt impar verbi gratia 5. primò triplicas habeſque 15; dividis bifariam habere deberes $7\frac{1}{2}$ multiplica iterum per tria proveniet $22\frac{1}{2}$ media pars novenariorum qui fierent ſi 5 multiplicaretur per 9, fierent enim 45, & media pars eſt $22\frac{1}{2}$ ſi divideres $22\frac{1}{2}$ per 9, haberes quotientem $2\frac{1}{2}$ quem numerum ſi multiplices per binarium fiet 5, quia tamen volumus vitare fractiones, pro $7\frac{1}{2}$ aſſumimus 8, & triplicamus

mus rurſus fitque 24 numerus paulò major quam oporteat; non tamen tantus qui proveniret ſi primus numerus eſſet 6, quare ſufficit neglectis fractionibus addere unitatem.

PROBLEMA II.

Aliter numerum cogitatum invenire.

Ex dictis ſuperiori propoſitione facilè viam aperiemus, aliis praxibus loco multiplicantium 3 & 3, aſſumantur 4 & 3, quæ efficiunt 12, hoc modo numerum cogitatum multiplica per 4; tum divide bifariam, & multiplica per 3, tum exquire quoties inveniatur 12, dico numerum illum multiplicatum per 2, exhibere numerum quæſitum.

Sit cogitatus numerus 6, qui quadruplicetur fit 24, divide bifariam, fiet 12, multiplica per 3, producentur 36, quære quoties inveniatur 12, erit ter; duplica hunc numerum, habebis intentum ſeu 6.

Ratio eadem eſt quia hoc modo exurgit dimidius numerum duodecadum, qui ſunt in tali numero propter diviſionem per 2.

Quod ſi incipiamus multiplicationem per 3, fiatque numerus impar, ſi nempe cogitatus fuerit numerus impar, adde producto unitatem, ut dividi poſſit; tum multiplica per 4, ut ſi cogitatus fuerit numerus 5, multiplica per 3, producentur 15, adde unum ut dividi poſſit, & divide per 2 fiet 8, multiplica per 4 producentur 32, quære quoties duodenarius inveniatur in hoc ultimo producto, pro ſingulis vicibus ſume binarium, fient 4, cui addes unitatem quæ adjecta fuerat ad diviſionem peragendam: habebiſque 5 numerum cogitatum. Eò recidunt omnes ferè praxes quæ communiter à multis afferuntur.

PROBLEMA III.

Varii modi divinandi numerum ab alio cogitatum.

Primò Numerus cogitatus triplicetur, productus dividatur bifariam, ſi par fuerit; ſi impar, addatur unitas ut diviſio peragi poſſit. Hæc medietas iterum triplicetur, dividaturque bifariam, additâ unitate ſi diviſio aliter fieri nequit. Quære quoties inveniatur novenarius in reliquo, & pro ſingulis aſſume quaternarium, additâ tamen unitate, ſi in prima diviſione adjecta eſt, vel duabus ſi in ſecunda, & ſi in utraque adjecta eſt tribus unitatibus, ut ſi cogitatus fuerit numerus 6, multiplicando per tria producitur 18, dividendo bifariam fit numerus 9, multiplicando per tria fiunt 27, dividendo bifariam addita unitate fiunt 14, in quo novenarius invenitur ſemel; aſſume 4, & adde duo, eò quòd addita ſit unitas in ſecunda diviſione.

Ratio eſt quòd duplici multiplicatione per 3 æquivalenter multiplicetur numerus cogitatus per 9, & duplici diviſione per 2 dividitur per 4, ergo benè pro ſingulis novenariis quaternarium aſſumis.

Secundò numerus cogitatus duplicetur, tum productus multiplicetur per 5, & iterum multiplicetur per 10, ſi manifeſtetur tibi hic numerus, erit centuplus producti; nam multiplica hos numeros 2.5.10. produces 100. quare ſi quilibet multiplicetur per 2. 5. 10. perinde eſt ac ſi multiplicaretur per 100. ex quo alium modum inveniemus.

Tertiò numerum cogitatum duplica, huic duplicato adde 5. tum multiplica ſummam per 5. tum adde 10. & ſummam multiplica per 10. ſi manifeſtetur tibi productus & ex eo auferas 350, & numerus relictus erit centuplus cogitati.

Ratio eſt quod ſi numerum cogitatum duplicares, tum multiplicares per 5, & per 10, fieret numerus centuplus cogitati per præcedens punctum; ſed primò addis 5, quem numerum multiplicas per 5, fiunt 25, huic addis 10, fiunt 35, multiplicas per 10, producitur numerus 350, ergo producitur numerus centuplus producti, auctus numero 350.

Quartò multiplicetur numerus cogitatus per quemcumque numerum, dividaturque per alium, & iterum multiplicetur, & dividatur per quoſcumque alios, ad arbitrium; ſed eodem tempore; tu ſecretò aſſume aliquem numerum alium quem pariter multiplicabis, & divides per eoſdem numeros, in fine tamen jube ut ultimum numerum dividat per numerum cogitatum, tu pariter divide tuum ultimum numerum per numerum primò aſſumptum, eundem quotientem habebis ac alius, huic ergo jube addi numerum cogitatum, & ſummam tibi manifeſtari, à quâ eumdem quotientem ſubtrahes, habebiſque numerum cogitatum.

Sit numerus cogitatus 5, qui multiplicetur per 4, producitur 20, dividatur bifariam fiunt 10, multiplicetur per 6, productus erit 60, dividatur per 4, relinquetur 15, tu ſimiliter aſſume ad libitum numerum 4, quem multiplica per 4, divide per 2, multiplica per 6, divide per 4, & habebis 12. Jube ut dividat relictum 15, per cogitatum ſeu per 5, quotiens erit 3, tu ſimiliter divide 12, per numerum aſſumptum 4, idem erit quotiens 3, tibi cognitus. Quare ſi tibi manifeſtetur ſumma ex numero cogitato, & tali quotiente nempe 8, ſubtrahendo hunc quotientem 3, habebis numerum cogitatum 5.

Quintò poteris numerum divinare nihil petendo hoc eſt ſi ſupra numerum aſſumptum eaſdem operationes peragas, ac ille ſupra numerum cogitatum, tum ut ſupra imperes ut reliquum dividat per numerum cogitatum; tu pariter dividas tuum reliquum per numerum aſſumptum, cum eumdem habeas quotientem eum exhibere poteris, & divinare nihil petendo.

Sextò numerus cogitatus multiplicetur per 4, & producto adde quemcumque numerum verbi gratiâ 15, omnia divide per 3, dico quod ſi dividas multiplicatorem 4, per diviſorem 3, fitque quotiens $1\frac{1}{3}$ ſi jubeas ex reliquo auferri ſemel numerum cogitatum; cum triente; relinquetur numerus 5, quem divinabis ſi dividas numerum additum 15, per 3, cogitaverit aliquis numerum 5, jubeo illum quadruplicari producitur 20, cui addo 12, ſunt 32, jubeo ſummam dividi per 2, erit quotiens 16, divido multipli-

catorem 4. per 2. quotiens erit 2. quare ſubtrahe ex quotiente 16. bis numerum cogitatum, relinquetur idem numerus 6. qui relinquitur, dividendo numerum additum per primum diviſorem 2. quare hunc numerum divinabis nihil petendo. Ratio hujus praxis fundatur ex parte in prima ſecundi, nam numerus 32 coaleſcit ex numero 20. & numero addito 12. qui dividatur per 2. quotiens erit 6. ſi igitur ſummam 32. dividas per 2. habebis mediam partem numeri 20. ſeu numerum cogitatum bis ſumptum, & mediam partem numeri 12. ſeu 6. quare ſi 4. auferas, bis numerum cogitatum, relinquetur idem numerus 6.

Hæc praxis variari poteſt, aſſumptis aliis numeris.

PROBLEMA IV.

Ex duobus numeris pari, & impari divinare quem duo elegerint.

Proponantur duo numeri 8. & 7. par & impar ſeligendi à Petro & Paulo, divinandum eſt quem ſelegerit Petrus an parem aut imparem, aſſumantur duo alii numeri, quorum unus ſit par, alter ſit impar verbi gratiâ 2. & 3. jube ut Petrus multiplicet ſuum numerum per 2. & Paulus ſuum per 3. Si ſumma productorum eſt par; numerus 2. imparem multiplicavit, & numerus 3. parem, ſic enim utrobique naſcitur numerus par, ſi ſumma fuerit impar, impar 3. imparem multiplicavit; quare ut ſcias an ſumma ſit impar; jube ut dividatur bifariam, ſi nequit adde unitatem, & alias operationes facito inutiles, certò tamen cognoſces eum eſſe imparem.

Idem præſtari poteſt in duobus numeris paribus quorum unus fuerit pariter par, alter pariter impar.

PROBLEMA V.

Plures numeros cogitatos denario minorés divinare.

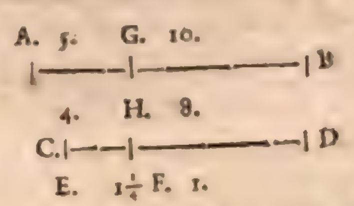
Multiplicetur primus numerus per 2. producto adde 5. ſummam multiplica per 5. & producto adde 10. huic adde ſecundum numerum, & ſummam multiplica per 10. tum adde tertium numerum, & multiplica per 10. & adde numerum quartum & ita conſequenter ſi plures fuerint, dicatur tibi ſumma, ex qua ſubtrahes 35. ſi duo ſint numeri, 350. ſi tres, 3500. ſi quatuor &c. tum character digitorum exhibebit ultimum cyphra decadum penultimum, centenariorum ante penultimum. Sint cogitati 3. 5. 8. 2. primum 3. multiplico per 2. fit 6. cui addo 5. fit ſumma 11. quam ſummam multiplico per 10. producitur 55. cui addo 10. fit 65. huic addo ſecundum numerum 5. fit 70. multiplico per 10. producitur 700. addo tertium numerum 8. fit 708. multiplico per 10. erit 7080. addo quartum numerum ſeu 2. fiet 7082. quia ſunt quatuor numeri, ſubtraho 3500. reſtabit 3582. nempe numeri propoſiti 3. 5. 8. 2. Ratio clara eſt; ſi enim ponatur primus numerus 3. qui per 10. multiplicetur, & addatur ſecundus, & ita conſequenter, clarum eſt quod ordine diſponentur numeri propoſiti; prima autem operatio multiplicat per 2. & per 5. ſeu per 10. ſed inſerit numerum 5. poſt primam multiplicationem, ut nempe lateat artificium; cætera ſunt facilia.

PROBLEMA VI.

Si duo accipiant certos numeros calculorum divinare quot unus habeat.

Petrus & Paulus accipiant quilibet numerum calculorum qui certam rationem habeant, Petrus accipiat 15. Paulus 12. Eſt autem ratio 15. ad 12. ut $1\frac{1}{4}$ ad 1. eſtque $1\frac{1}{4}$ denominator hujuſmodi proportionis; det Paulus Petro quemcumque numerum calculorum, qui habeat quadrantem verbi gratia 8. tum Petrus reddat Paulo numerum calculorum, qui ad eos quos habet Paulus rationem habeat quam habet $1\frac{1}{4}$ ad 1. divinabis hoc modo quot calculos habeat Petrus. Denominatori proportionis adde 1. ut fiat $2\frac{1}{4}$ Primum numerum quem Paulus dedit Petro, nempe 8. multiplica par $2\frac{1}{4}$ fient 18. dico Petrum habere 18. calculos.

Sit numerus calculorum à Petro acceptorum 15. numerus calculorum à Paulo ſumptorum ſit 12. proportio ſit $1\frac{1}{4}$ ad 1. tranſlatis à Paulo ad Petrum 8. reſtant Paulo 4. Petrus autem habet 23. tum ſi reddantur Paulo calculi 5. ſecundùm denominationem proportionis 1 ad $1\frac{1}{4}$; hoc eſt ut ſit eadem ratio reliqui 4. ad numerum qui addetur, quæ eſt 1. ad $1\frac{1}{4}$ hoc eſt 4. ad 5. reſtabunt Petro 18. quem numerum ita invenies ad $1\frac{1}{4}$ adde 1. ut fiant $2\frac{1}{4}$ per hunc numerum multiplica primum numerum 8. quem Paulus dedit Petro.



Sint AB, CD, numeri calculorum AB eorum quos accepit Petrus, & CD illorum quos accepit Paulus; ſi ſe habeant ut E ad F, ſit HD numerus calculorum quos Paulus dat Petro; ſitque ut E ad F, hoc eſt ut AB ad CD, ita AG ad CH, ita erit reliquum GB ad HD ut E ad F, & ut F ad E & F, ſimul ita HD ad ſummam GB, HD; quare multiplicando HD per E & F, & dividendo per F, quæ diviſio per unitatem nihil immutat, habebimus ſummam GB, HD, quam habet Petrus; quod erat demonſtrandum.

PROBLE

PROBLEMA VII.

Si duo, certos numeros calculorum accipiant: divinare quot quiſque acceperit.

Quia per præcedentem cognoviſti numerum calculorum, quos habet Petrus, ſi petas quam proportionem habeat hic numerus, ad eum quem habet Paulus; per regulam trium innoteſcet hic numerus, atque adeò, & tota ſumma, & per regreſſum quantum quiſque acceperit.

PROBLEMA VIII.

Quot ſint puncta, in una chartula Luſoria divinare.

Suppono omnes Luſorias chartulas eſſe numero 52, volo autem ut unitas æquivaleat unitati, & ſingulæ perſonæ denario æquivaleant, ex quo ſequitur numerum punctorum omnium chartularum, habere denarium pro communi menſura. Seligat alius ſibi chartulam, quam non oſtendat, tu exinde puncta primæ chartulæ addes punctis ſecundæ, & ſummam addes punctis tertiæ, rejecto denario quoties occurret, quod ſumma celeritate fieri poteſt; differentia numeri ultimi à denario, erit is qui quæritur nempe punctorum detractæ chartulæ.

PROBLEMA IX.

Chartularum in plures ordines digeſtarum, divinare quam quis cogitaverit.

Diſponantur in quatuor aut quinque ordines, quotcumque chartulæ luſoriæ, verbi gratiâ ſint 25, digeſtæ in 5 ordines, & interroga in quo ordine inveniatur chartula cogitata, ſupponatur eſſe in tertio ordine; collige chartulas, ſecundum alios ordines, ita ut ſingulæ tertii ordinis, fiant ſingulæ tertiæ in ſuo ordine, hoc eſt fiat alia diſpoſitio in qua.

A. B. C. D. E.	A. F. L. Q. X.
F. G. H. I. K.	B. G. M. R. Y.
L. M. N. O. P.	C. H. N. S. Z.
Q. R. S. T. V.	D. I. O. T. 2.
X. Y. Z. 2. 3.	E. K. P. V. 3.

Fiant alii ordines ut verbi gratiâ, ſi primus ordo ſit ABCDE, Secundus FGHIK, &c. In ſecundâ diſpoſitione ſit primus AFLQX; ſecundus BGMRY &c. dico quod ſi rurſus interroges ordinem in quo invenitur chartula cogitata, dico (inquam) eſſe tertiam ſui ordinis, nam tertius ordo primæ diſpoſitionis ita in ſecunda digeritur, ut eius chartulæ obtineant tertiam ſedem in ſingulis ordinibus. Totum artificium poſitum eſt in eo ut fiat appoſitè hæc ordinum transmutatio.

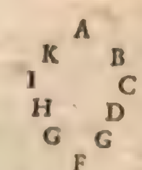
PROBLEMA X.

Divinare chartulam quam quis cogitaverit.

Oſtende alicui ordine chartulas, & jube ut cogitet unam, & ſimul mente retineat numerum illius, nempe an ſit prima, ſecunda, tertia; tu etiam certum numerum chartularum, numera. Verbi gratiâ, numera triginta chartulas in quarum ſcilicèt maſſa invenitur chartula cogitata; eaſque ita diſpone ordine retrogrado, hoc eſt ut ultima ſit prima, penultima ſecunda; interroga numerum chartulæ cogitatæ; ſupponamus eſſe ſeptimam, hunc numerum aſſignabis ultimæ dicéſque ſeptima, numerabiſque ordine retrogrado, trigeſima erit chartula cogitata. Ponamus exempli gratia numerum breviorem, ſint chartulæ ABCDEFGHI novem numero & aliquis cogitaverit tertiam ſeu C, dico ſi ponas ſupra I. tertiam, & H fiat quarta; & numeres ad nonam uſque, novenarius cadet ſupra C. Si enim addas BA in fine, erit numerus AI, numero AC retrogrado æqualis, ſed numerus AC retrogradus facit chartulam I tertiam: ergo numerando hoc modo, numerus novenarius chartulam cogitatam exhibebit.

PROBLEMA XI.

Ex pluribus chartulis in orbem diſpoſitis, divinare quam quis cogitaverit.



Sint 10. chartulæ, aut quæcumque aliæ res in orbem diſpoſitæ, ſitque A prima; B ſecunda, C tertia, aliquis cogitet quamcumque verbi gratiâ E quintam, vidimus ſuperiori propoſitione, quòd ſi ab ultima K incipiat cui addicat numerum chartulæ cogitatæ nempe dicat K quinta, I ſexta, H ſeptima, G octava, F nona, decima erit E, chartula cogitata: ergo ſi incipiat numerare ab A, erit addenda unitas, ſi incipiat à B, erit procedendum ad numerum 12; ſi à C uſque ad 13, addendo ſcilicèt numero chartulæ à qua incipiendum eſt, denarium numerum.

Poteſt artificium hujus problematis occultari, ſi nempe jubeas inchoari numerationem à quocumque volueris; addaſque numero duas aut tres unitates, ſic enim non finietur numeratio in ipſa chartula cogitata, ſed in alia diſtante duobus, aut tribus gradibus ab ea, ideoque regrediendo totidem gradibus, chartulam cogitatam invenies.

PROBLEMA XII.

De diſpoſitione Chriſtianorum, & Turcarum ut ſedes novenaria in Turcam ſemper incurrant.

Ita ſolet proponi hæc quæſtio 15 chriſtiani, & 15 Turcæ in eâdem navi inveniuntur; ingruente procellâ, exoneranda eſt navis, ſortitione

ne autem id peragendum eſt, navarchus qui Chriſtianus ſupponitur, omnes in orbem diſponit, eâ conditione ut novenarius quique pereat; quæritur diſpoſitio apta, ut primi pereant omnes Turcæ, nullo chriſtiano pereunte. Id communiter efficitur hoc verſu.

Populeam virgam mater regina tenebat.

In quo verſu attendendus eſt tantum ordo vocalium, ut (*po*) ſignificat inchoandum à 4, chriſtianis (*pu*) indicat 5. Turcas addendos, cum vocalis u ſit quinta in ordine vocalium, exinde duo Chriſtiani, unus Turca, tres Chriſtiani.

Methodus autem id præſtandi in aliis quibuſcumque numeris nulla datur alia niſi attentatio, nempe ut aſſumptis quotcumque calculis incipias numerationem, noteſque eos in quibus numerus propoſitus verbi gratia novenarius, aut alius quilibet ceciderit, tum notato ordine facilè memoriæ causâ ſimilis verſus excogitandus erit.

PROBLEMA XIII.

Propoſitis tribus rebus, & tribus hominibus divinare quam quilibet acceperit.

Sint tres homines Primus, Secundus, Tertius, ſume 24 nummos, ſeu calculos; & da unum primo; duos ſecundo, tres tertio, relictiſque reliquis octodecim ſupra menſam, permitte ut ex tribus rebus propoſitis nempe A, E, I, quilibet unam ſibi vindicet; tum jube ut qui accepit A tot nummos accipiat quot ei dediſti initio, qui accepit B duplum accipiat ſibi initio collatæ pecuniæ, & qui accepit C, quadruplum accipiat, tum reliquum nummorum cognoſces, reſtabit autem 1 vel 2 vel 3 vel 5 vel 6 vel 7, numquam 4, nec plures: communiter hic verſus traditur.

Par fer Ceſar jadis devint ſi grand Prince.

Sex conſtans vocibus, prima tribuitur primo caſui in quo reſtat unus calculus. Secunda ſecundo, in quo reſtant 2. Tertia tertio in quo reſtant tria. In quâlibet voce duæ ſunt ſyllabæ prima primæ perſonæ, ſecunda ſecundæ convenit, vocalis autem ſignificat rem, ſi ergo reſtat 1; uteris primâ voce (*Par fer*) & dices primum hominem qui nempe habuit unum calculum accepiſſe A ſeu primam rem, & ſecundùm accepiſſe E ſecundam, ſi reſtant duo calculi utere ſecunda, voce nempe (*Ceſar*) & dices primum hominem accepiſſe E, & ſecundùm A, ſi reſtant 3, utere tertia voce (*jadis*) & dices primum hominem accepiſſe A, & ſecundum accepiſſe tertiam rem propter illud I.

Hæc problemata quamvis vulgaria, & alias propoſita à Domino Bachet Demeſeriac, nolui ommittere, ne ſcilicet Mathematicus noſter hujuſmodi ludicrorum eſſet penitus ignarus.

TRACTA

Digitized by Google

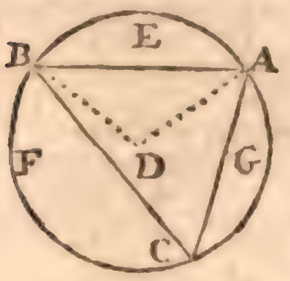
TRACTATUS V.

TRIGONOMETRIA.

TRIGONOMETRIA, ſeu triangulorum ſcientia, metiendorum triangulorum methodum docet, cognitiſque a iquibus in triangulo partibus, cæteras inveſtigat. Sex autem tantum partes in triangulo agnoſcimus; nempe tres angulos, & tria latera; quarum ſi tres ſaltem heterogeneæ cognoſcantur, cætera hujus ope ſcientiæ innoteſcent. Triangula vel rectilinea ſunt, quorum nempe latera rectis lineis conſtant; vel Sphærica quorum latera ſunt arcus maximorum circulorum in ſuperficie globi, ſeu Sphæræ deſcriptorum, quare triangulorum Sphæricorum ſolutionem ne attingat ille qui primum librum Sphæricorum Theodoſii, & mediam ſaltem partem ſecundi non viderit; hærebit enim haud dubie in pleriſque. Trigonometriam vero rectilineam, ille facile intelliget, qui Euclidis Elementorum libros ſex priores tenuerit; modo tamen Arithmeticam ſciat mediocriter, & ſaltem in quatuor primis regulis Elementaribus verſatus ſit. Quàm autem utilis ſit hic tractatus, vix quiſquam in mentem inducat: ſi enim rectilineam facillimam quidem in ſe ſpectemus, ex eâ tot geodæſiæ inſtrumenta & praxes oriuntur, ut quæ alioquin abſtruſa videbantur, ipſo intuitu à trigonometra demonſtrentur; ſi verò de Sphæricâ ſit quæſtio, nullus aut in cœleſtibus, aut etiam in terreſtribus certò pedem figere poteſt, qui illâ caruerit.

Ut ergo ad rem veniamus, hanc ſcientiam in ſex partes, ſeu libros divido. Primus Liber, ſinus tangentes & ſecantes inveſtigabit, & canonis conſtruendi methodum tradet. Quamvis autem Sphæricam trigonometriam Tyro non uſque adeo perfectè conciperet, praxes ſaltem addiſcat, uſu enim & praxi ſenſim & plana, & facilis evadet.

Secundus logarithmorum originem, & naturam aperiet.
Tertius triangula rectilinea ſolvet.
Quartus erit Iſagogicus ad triangula Sphærica.
Quintus Sphærica triangula rectangula ſolvet.
Sextus denique obliquangula.



Primi duo libri ſunt quaſi prævii, parantque inſtrumenta, ad triangulorum omnium ſolutionem neceſſaria; alii rem ipſam abſolvunt. Ut autem hujus communis inſtituti cognitio habeatur, cum omne triangulum rectilineum circulo inſcribi poſſit; ſequitur quòd ejus quodlibet latus ſubtendat aliquem arcum circuli. Ut ſi triangulum ABC inſcribatur circulo cujus centrum D, latus AB ſubtenditur arcui AEB, & BC arcui BFC; item AC arcui AGC: quare ſi cognoſceretur habitudo, ſeu ratio quam habent ſubtenſæ ſingulæ arcuum, vel inter ſe, vel ad diametrum, illud multùm conferret ad cognoſcenda aut latera aut arcus, aut etiam angulos. Atque hoc ſufficiat ut habeatur aliqua notitia generalis, cur ad triangulorum ſolutionem requiratur cognitio ſubtenſarum in circulo inſcriptarum, quod tamen meliùs infrà patebit.

Quia omnis operatio trigonometica in regulâ porportionum poſita eſt, quam communiter vocant regulam auream, aut regulam trium, quâ nempe datis tribus numeris, quartus proportionalis reperitur; quæ regula multiplicationem, & diviſionem continet, operationes in numeris longioribus difficiles, & tædii plenas; nos eo labore ſublevavit Nobilis Scotus Neperus, omni laude dignus, & de mathematicis diſciplinis ideò bene meritus, qui ſubſtitutis aliis numeris, quos logarithmos vocat, multiplicationem in additionem; diviſionem in ſubtractionem commutavit; ita ut intra horæ quadrantem plura triangula ſolvere poſſimus illius methodo, quàm aliàs intra duas horas. Atque hæc in genere ſufficiant.

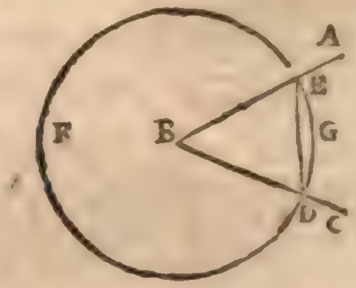
LIBER PRIMUS
Trigonometriæ.

De ſinubus, tangentibus, & ſecantibus.

DEFINITIO I.

Anguli rectilinei menſura eſt arcus circuli, ex concurſu linearum tanquam centro, ad quodlibet intervallum deſcripti, inter lineas angulum comprehendentes interceptus. Ut anguli ABC menſura eſt arcus DGE, circuli DEF deſcripti ex puncto B, apice ipſius anguli, tanquam centro, qui

arcus DGE intercipitur inter lineas AB, CB comprehendentes angulum ABC.



Ex hoc ſequitur, quòd ſubtenſa alicujus arcus dicatur etiam ſubtenſa anguli ejus, ut linea DE tàm dicitur ſubtendere arcum EGD, quàm angulum EBD. Quidquid igitur dicemus de arcubus, de angulis dictum intelligatur.

Communis eſt diviſio circumferentiæ circuli in 360 partes æquales. Ideoque tam benè dicimus arcum conſtare 20, verbi gratiâ gradibus, quàm angulum.

DEFINITIO II.



Subtenſa ſeu chorda alicujus arcus, eſt linea connectens extremitates illius arcus.

Ut linea AB eſt ſubtenſa arcus ACB; dicitur autem chorda metaphorâ ductâ, ex arcu quo ſagitæ emittuntur.

In quo notandum eſt, ſi linea AB non tranſeat per centrum circuli, eam tàm ſubtendere arcum ACB minorem ſemicirculo, quam ADB majorem; communiter tamen potiùs reſpicitur arcus minor qui poteſt eſſe menſura alicujus anguli quam major.

DEFINITIO III.

Subtenſa reſidui ad ſemicirculum, eſt linea connectens extremitates arcus qui relinquitur ad ſemicirculum, ut ſi loquamur de arcu ACB ſitque BAE ſemicirculus; linea AE eſt ſubtenſa reſidui ad ſemicirculum.

DEFINITIO IV.

Sinus rectus alicujus arcus, aut anguli, eſt linea perpendicularis, ducta ab extremitate unius arcus ad lineam ductam à centro per aliam extremitatem.

Sit arcus CB, ducatur ex puncto B ad lineam HC, perpendicularis BG; hæc vocatur ſinus rectus arcus CB, vel anguli BHC.

Vel eſt dimidia ſubtenſa arcus dupli: ſi enim producatur BG ad A, & BA dividatur biſariàm in G, (*per* 3.3.) GH erit perpendicularis, & arcus AC, CB æquales: eſt igitur BG dimidia ſubtenſa arcus ACB, qui duplus erit arcus BC, & AB erit ſubtenſa illius, cujus BG dimidia eſt ſinus anguli BHG. Ex qua definitione ſequitur, quòd cognitis ſubtenſis cognoſcentur omnes ſinus. Ideoque poſſumus quærere ſubtenſas, ut inveniamus ſinus.

Notandum item eſt, quòd ſicut ſubtenſa duos, arcus ſubtendit, ita etiam ſinus eſt ſinus duorum arcuum; unius quidem minoris quadrante, & alterius majoris quadrante. Ita BG eſt ſinus arcus CB, item arcus BD, reliqui ad ſemicirculum. Reſpectu enim utriuſque illi convenit definitio. Ex quo fit, ut in canone, ſeu tabulâ ſinuum, ſufficiat ſcribere arcus, uſque ad quadrantem, ſeu ad nonaginta gradus. Cognito enim ſinu recto unius arcus minoris quadrante, cognoſcitur & ſinus, reliqui ad ſemicirculum: hoc eſt ſinus idem, eſt arcus 20 graduum, & reliqui ad ſemicirculum, ſeu arcus 160 graduum.

Notandum item; quoties ſimpliciter dicimus ſinum alicujus arcus, nos intelligere ſinum rectum.

DEFINITIO V.

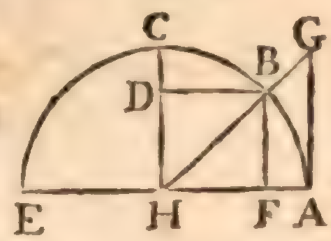
Sinus totus, eſt ſinus rectus quadrantis circuli; ſeu arcûs nonaginta graduum, qui æqualis eſt radio, ſeu ſemidiametro.

Ut ſi arcus CBI ſit quadrans circuli, linea HI, aut HC erit ejus ſinus rectus: quia nempè eſt, perpendicularis ducta ab extremitate unius arcus, nempè C, ad lineam ductam à centro H per aliam extremitatem.

Hic autem ſinus eſt omnium maximus, nam arcus majores quadrante habent ſinum minorem; eſt item æqualis radio, ſeu ſemidiametro.

DEFINITIO VI.

Complementum alicujus arcus, aut anguli, eſt exceſſus quo exceditur à quadrante, ſi illo minor ſit; vel quo excedit quadrantem, ſi illo major ſit.



Sit arcus AC, minor quadrante ACB, BC eſt exceſſus, quo ſuperatur à quadrante, vel ſi ſumatur arcus ECB major quadrante; idem arcus CB, erit illius complementum. Quia CB eſt exceſſus quo excedit quadrantem.

DEFINITIO VII.

Sinus complementi, qui ab aliquibus vocatur ſinus ſecundus, eſt ſinus rectus complementi alicujus arcus. Ut linea DB eſt ſinus arcus CB; qui comparatus cum AB, aut cum ECB, eſt complementum illorum. Unde linea DB eſt ſinus complementi arcus AB aut arcus ACB.

DEFINI

DEFINITIO VIII.

Sinus verſus alicujus arcus, eſt linea intercepta inter ſinum rectum illius, & peripheriam circuli, ut arcus AB ſinus verſus, eſt linea FA, quæ intercipitur inter ſinum rectum BF, & peripheriam circuli.

Hic autem ſinus verſus, eſt reſiduum ſemidiametri, ablato ab eo ſinu complementi. Ut ſi ex ſemidiametro HA, auferas lineam HF, æqualem ſinui complementi, nempe lineæ DB relinquitur ſinus verſus.

DEFINITIO IX.

Tangens alicujus arcus, eſt linea tangens circulum in extremitate illius arcus, & terminata ad lineam ex centro, per aliam extremitatem arcus ductam. Ut linea AG, quæ tangit circulum in puncto A, extremitate arcus AB, & terminantur ad lineam ABG, quæ ducitur ex centro H, per aliam extremitatem B, eſt tangens arcus AB.

DEFINITIO X.

Secans alicujus arcus, eſt linea à centro circuli, per extremitatem illius ducta, & ad tangentem extra circulum terminata. Ut linea HG ducta à centro H, per extremitatem B, arcus AB; & terminata extra circulum, ad tangentem AG, eſt ſecans arcus AB. Dantur tangentes, & ſecantes complementorum.

Notandum autem, ut jam monui, non tantùm dari ſinus, tangentes, ſecantes arcuum; ſed etiam eaſdem lineas vocari ſinus, ſecantes, & tangentes angulorum, nempè angulorum quorum arcus ſunt menſuræ. Ut quia arcus AB eſt menſura anguli BHA, linea FB dicetur ſinus, AG tangens; HG ſecans, anguli AHB.

SUPPOSITIO I.

Suppono ex arithmetica, datâ longitudine alicujus lineæ in numeris, poſſe per multiplicationem cognoſci eius quadratum; ſi nempè multiplicetur numerus datus per ſeipſum.

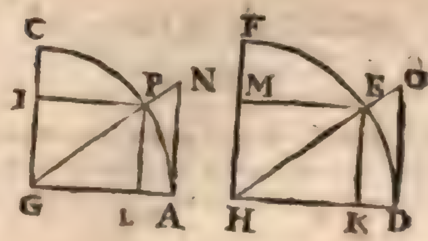
SUPPOSITIO II.

Suppono item datâ in numeris areâ alicujus quadrati, poſſe per extractionem radicis quadratæ, haberi in numeris longitudinem illius lineæ. Unde dixi initio hujus tractatus, neminem trigonometriam attingere debere, qui non fuerit in arithmeticis exercitatus.

PROPOSITIO I.

In circulis quibuſcumque eadem eſt ratio, radij, ad ſinum rectum, ſinum verſum, ſecantem, tangentem, & ſubtenſam arcuum ſimilium.

Sint circuli APC, DEF, etiam inæquales, ſintque arcus AP, DE, ſimiles; dico ita eſſe ſemidiametrum GP ad ſinum rectum PL, aut ſinum verſum LA; tangentem AN; ſecantem GN; ſinum complementi IP; ſubtenſam AP: ſicut radius EH, ad ſinum rectum EK; ſinum verſum KD; tangentem DO; ſecantem HO ſinum complementi EM ſubtenſam ED.



Demonſtratio. Arcus AP, DE ſupponuntur ſimiles; igitur (*per defin. 9. 1.*) anguli PGL, EHK, ſunt æquales: anguli autem, L & K ſunt recti (*per def. ſinus*) ergo triangula PGL, EHK ſunt æquiangula: quare (*per 4. 6.*) erit ut GP ad PL, ita HE ad EK; quòd eſt primum. Pariter ut GP ad GL, aut ad IP, illi æqualem, ſinum nempè complementi: ita HE ad HK, aut ad illi æqualem EM, ſinum pariter complementi; propter eandem æqualitatem angulorum PGA, EHD, concludam triangula AGN, DHO, rectangula in D, & A eſſe etiam æquiangula: erit igitur ut radius AG ad tangentem AN; ita radius HD ad tangentem DO. Et ut idem radius AG ad ſecantem GN, ita radius HD ad ſecantem HO. Denique triangula APG, EHD; ductis lineis AP, DE eſſent etiam æquiangula, cùm haberent angulos AGP, DHE æquales, & reliqui duo ſint æquales inter ſe (*per 5. 1.*) cùm latera GP, GA ſint æqualia ex definitione circuli, ſicut HD, HE: igitur (*per eandem 4. 6.*) erit ut ſinus totus ſeu radius GA ad ſubtenſam AP; ita radius HD ad ſubtenſam ED; quod erat ultimò demonſtrandum. De ſinubus verſis idem demonſtratur.

COROLLARIUM.

Ex hoc ſequitur quod ſi ſemel habeantur rationes diametri, aut ſemidiametri unius circuli, ad ſubtenſas, ſinus, ſecantes, & tangentes omnium arcuum, ejuſdem circuli, habebitur pariter ratio quam habent diametri omnium circulorum ad ſubtenſas ſinus, tangentes, ſecantes ſuorum circulorum.

Supponitur igitur diameter diviſa in aliquòt partes æquales, in quâ ſuppoſitione quæritur quot partium ſint ſubtenſæ ſingulorum arcuum, aut ſinus, tangentes, ſecantes.

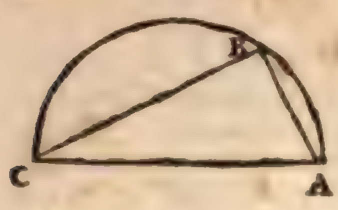
Ptolomæus & communiter antiqui dividebant diametrum in 120 partes æquales, ita ut ſemidiameter eſſet 60 partium; hunc autem numerum aſſumebant potiùs quam alium, quia plurimas continet partes aliquotas. Quia tamen eâ ſuppoſitione factâ plurimæ ſubtenſæ adjectas habebant fractiones, quæ in operationibus geometricis multùm tædii afferebant, ideò recentiores diametrum in multò plures partes dividunt, ut ſi quæ in reliquis lineis fractiones inveniantur, facilè ſine periculo erroris notabilis, negligi poſſint. Communiter autem dividitur à recentioribus diameter in 20000000. & radius in 10000000 partes æquales; in quâ hypotheſi, quærimus quotnam partium ſit ſinus, ſecans, & tangens uniuſcujuſque arcus; faciliùs autem eſt uti ſinubus,

ſinubus, quàm ſubtenſis, ideóque canon continebit tantùm ſinus.

PROPOSITIO II.

Problema.

Cognitâ ſubtenſa alicujus arcus; cognoſcere ſubtenſam reliqui arcus ad ſemicirculum.



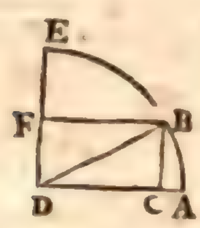
Sit cognita ſubtenſa AB, in partibus diametri AC, cognitæ (ſupponitur enim in omnibus iſtis diameter cognita) quæritur longitudo ſubtenſa CB, reliqui arcus ad ſemicirculum. Cognita AB, cognoſcitur eius quadratum per ſuppoſitionem primam. Item cognoſcitur quadratum AC. Aufer quadratum AB, à quadrato AC, & habebis quadratum CB, & per ſuppoſitionem ſecundam lineam ipſam CB.

Demonſtratio. Angulus ABC, in ſemicirculo (*per* 31.3.) rectus eſt, ergo (*per* 47.1.) quadratum AC, æquale eſt quadratis AB, BC. Ergo auferendo quadratum AB, ex quadrato AC, relinquitur quadratum ex BC.

PROPOSITIO III.

Problema.

Dato ſinu arcus, invenire ſinum complementi.



Sit datus CB ſinus arcus AB; quæritur FB ſinus arcus BE, eius complementi.

Aufer quadratum CB, ex quadrato DB, nempè ſemidiametri, relinquitur quadratum lineæ DC, ſeu FB illi æqualis.

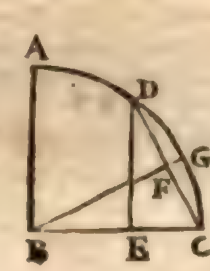
Demonſtratio. Eadem eſt, cum angulus BCD rectus ſit ex definitione ſinus.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Dato ſinu alicujus arcus, invenire ſinum arcus dupli, & dimidij.

Cognoſcatur ſinus CF, quæritur ſinus arcus CD, dupli, nempè DE, BF eſt ſinus complementi, aut certè illi æqualis, nam in figurâ ulimâ, linea BF, eſt ſinus complementi cui æqualis eſt DC



intercepta inter centrum, & ſinum rectum; fiat igitur ut ſinus totus BC, ſeu radius ad ſinum complem. BF; ita ſinus arcus duplicatus, nempe DC, ad DE.

Demonſtr. Triangula BFC, EDC, ſunt æquiangula, cum habeant angulum communem C, & angulos DEC, BFC, æquales, utpote rectos; ergo erit ut BC radius, ad BF, ſinum complementi arcus CG, ita CD, dupla ſinus CF, ad DE, ſinum arcus CD qui duplus eſt ipſius CG.

COROLLARIUM I.

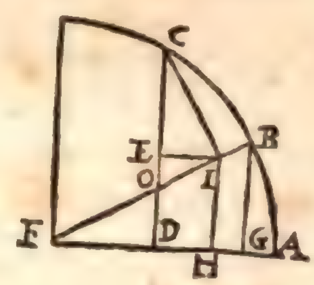
Sinus dimidii arcus eſt medius proportionalis inter ſinum verſum totius arcus, & dimidium radium, cum enim ſit ut BC ad CD; ita CF ad CE; ut autem BC, ad CD, ita dimidius radius ad dimidiam CD, ſeu CF; ergo erit dimidius radius ad CF ſinum dimidii arcus, ut CF ad CE ſinum verſum totius arcus.

COROLLARIUM II.

Cognito ſinu DE, dabitur ſinus arcus dimidii, ſeu dimidium ſubtenſæ DC; nam cognito DE, datur per tertiam BE, qua ablatâ ex radio BC, reſtat EC; ſed (*per* 47. 1.) quadrata ex DE, EC æqualia ſunt quadrato ex DC, ergo habetur DC, cujus dimidium CF, eſt ſinus arcus dimidii.

PROPOSITIO V.

Datis ſinubus duorum arcuum invenire ſinum aggregati eorum.



Proponatur arcus AB, BC, ſintque cogniti eorum ſinus, nempe BG ſinus arcus AB, & CI, ſinus arcus BC, ſupponitur enim CI perpendicularis ad FB. Quæritur linea CD, ſinus arcus ABC, compoſiti ex utroque.

Demonſtratio. Primò triangula FOD, OCI æquiangula ſunt, cum pariter angulos rectos ODF, CIO habeant angulos ad Verticem in pun-

cto

Digitized by Google

'cto O quales. Item triangula OCI, ECI æquiangula ſunt, & per 4. 5. ita erit radius F B ad FI, ſinum complementi arcus BC, cognitum per 3, ut ſinus B G cognitus, ad H I, ſeu E D. Rurſus ita eſt F B ad F G ſinum complementi arcus BA item cogniti, ut CI, ad EC. Quare addendo CE, E D dabitur tota CD quæ quærebatur.

PROPOSITIO VI.

Datis ſinubus duorum arcuum, invenire ſinum differentiæ eorum.

Sint dati ſinus arcuum AB, AC, hoc eſt BG, CD; dico cognoſci poſſe lineam CI, ſinum differentiæ illorum arcuum; iiſdem enim poſitis ut priùs, cum detur ſinus CD, datur (*per tertiam*) ſinus complementi ſeu FD. Fiat ut FG ad BG, ita FD ad DO, habebitur D O, & conſequenter OC. Fiat item ut FB ad FG, ita O C ad C I, triangula enim OCI, FBG, ſunt æquiangula: ergo dabitur CI.

PROPOSITIO VII.

Sinus arcuum minimorum ſunt ſenſibiliter in eâdem ratione cum arcubus.

Sint duo arcus minimi verbi gratiâ arcus unius minuti; & arcus trientis minuti; dico eorum arcuum ſinus eſſe in eâdem ratione cum arcubus, non quidem exactè, ſed phyſicè. In initio quadrantis circumferentia circuli perpendicularis eſt ad diametrum, & cum perpendiculari phyſicè coincidit; ſed ſinus arcuum ſunt etiam perpendiculares ad diametrum, ut fert eorum definitio: ergo cum circumferentia ſenſibiliter coincidunt: ergo eandem phyſicè & ſenſibiliter habent rationem, ac arcus cujus ſunt ſinus.

Quia tamen aliquid deeſt ad perfectam æqualitatem rationis, prout majorem requiremus præciſionem, minores arcus erunt aſſumendi; quare ſi ſumendo duos arcus quorum teneatur ratio, ſi inveniamus eorum ſinus eandem habere ſenſibiliter, ita ut differentia ſi quæ eſt, non adæquet unam particulam æqualem illis in quas diviſus eſt radius. Verbi gratiâ ſi radius aſſumptus eſt partium centies mille, ſi id quod deeſt ſinui, ut ſit ad alium, ut arcus ad arcum, minus eſt centies milleſima parte radii, tutò aſſumere poſſumus in ordine ad inſtitutum noſtrum, eandem eſſe rationem ſinus illius ad alium, ſicut arcus ad arcum.

PROPOSITIO VIII.

Si eadem quantitas duplici diviſione dividatur erit numerus partium primæ diviſionis, ad numerum partium ſecundæ, ut una pars ſecundæ diviſionis ad unam partem primæ diviſionis reciprocè.

A. B. C. D. E. Numerus A dividatur in
60. 6. 10. 15. 4. quotcumque partes, numero B æquales, ſitque C, numerus earum partium, ita ut ducendo B in C, fiat A: dividatur pariter idem A, in parte numero D æquales, ſitque E, numerus talium partium, hoc eſt multiplicando D per E, fiat idem A: dico ita-eſſe C, numerum partium primæ diviſionis, ad E numerum partium ſecundæ; ut pars D ad partem B: cum enim idem rectangulum comprehendatur ſub C, & B, quod ſub E, & D: ſi B ponatur ultima, (*per 16. 6.*) ita erit C ad E, ſicut D, ad B, quod erat demonſtrandum.

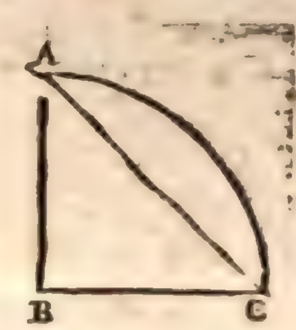
PROPOSITIO IX.

Subtenſa arcus 60 graduum, æqualis eſt ſemidiametro.

Demonſtratio. Cùm totus ſemicirculus contineat gradus 360 arcus 60 erit ſexta ejus pars, & conſequenter ejus ſubtenſa latus exagoni: ſed latus exagoni ex coroll. (*propoſ. 15 l. 4*) eſt æquale radio ſeu ſemidiametro; Ergo habetur ſubtenſa arcus 60, & conſequenter ejus ſemiſſis eſt ſinus arcus graduum 30.

PROPOSITIO X.

Quadratum ſubtenſæ graduum 90 eſt dupli quadrati ſemidiametri.



Sit quadrans circuli, arcus AC hoc eſt 90 graduum, ſitque ejus ſubtenſa AC, dico illius quadratum duplum eſſe quadrati ſemidiametri. Sit centrum circuli B, ducanturque BA, BC.

Demonſtratio. Angulus ABC rectus eſt, cum menſura ejus ſit AC, quadrans, ergo (*per 47. 1.*) quadratum AC, erit æquale quadratis AB BC, hoc eſt duobus quadratis ſemidiametri; quod eſt eſſe duplum.

PROPOSITIO XI.

Canonem ſinuum conſtruere.

Supponitur ſinus totus ſeu radius quotcumque partium, ſeu diviſus in partes verbi gratiâ 10000000. huic (*per 13.*) æqualis eſt ſubtenſa graduum 60, & ejus ſemiſſis æqualis erit ſinui graduum 30, & ſubdividendo hunc arcum bifariam habebitur (*per 4.*) ſinus arcus 15 gr. & ſubdividendo iterum ſinum arcus 7. 30. & ita conſequenter ſubdividendo habebimus iſtorum arcuum ſinus, ita ut duodecimâ diviſione perveniamus

niamus ad ſinus qui eandem rationem habent, ac arcus (*per 7.*) Quod deprehendemus facilè,

Gr.	Mi.	Sec.	Terti.		
30.					
15.					
7.	30.				
3.	45.				
1.	52.	30.			
0.	56.	15.			
	28.	7.	30.		
	14.	3.	45.		
	7.	1.	52.	30.	
	3.	30.	56.	15.	
	1.	45.	28.	7.	30.
		52.	44.	3.	45.

inveniemus enim rationem ſinus penultimi, ad ultimum eiſe duplam ſenſibiliter, ſicut unus arcus eſt duplus alterius.

Supponatur idem arcus 30 graduum diviſus in minuta, eruntque minuta in 30 gradibus 1800. Per primam autem diviſionem numerus partium erat in 2048 partes diviſus, ſed ſinus ſe habent ut arcus ſenſibiliter, & (*per 8. hujus*) ita eſt numerus partium duarum diviſionum, ut ipſæ partes reciprocè: ergo ita erit 1800 ad 2048. ut ſinus qui ſupponitur ultimò inventus pro arcu ſecundorum 52. 44. 3. 45. ad ſinum unius minuti qui quæritur.

Cognito ſinu unius minuti dabitur per quartam ſinus duorum minutorum.

Dato ſinu unius minuti & ſinu duorum (*per 5.*) datur ſinus trium.

Dato ſinu trium & unius, per eandem dabitur ſinus quatuor, & ita conſequenter uſque ad 30 gradus.

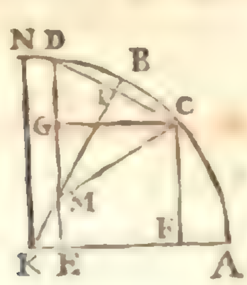
Tum (*per 10.*) uſque ad ſexageſimum gradum, & per 9, uſque ad gradus 90.

Hæ propoſitiones ſufficere poſſent abſolutè, ad conſtruendum canonem ſinuum, ſequentes tamen ſunt neceſſariæ ad minuendum laborem.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Differentia ſinuum duorum arcuum, æqualiter à gradu ſexageſimo diſtantium, æqualis eſt ſinui diſtantiæ alterutrius à gradu ſexageſimo.



Sit arcus AB 60 graduum, ſintque arcus AC, AD æqualiter diſtantes ab arcu AB, hoc eſt tam arcus AD ſuperet arcum AB quàm arcus AB, ſuperat arcum AC, ſeu arcus BC, BD ſint æquales. Ducatur CG parallela ipſi EF: DE, ſit ſinus arcus AD & FC ſinus arcus AC, & quia tàm CG, EF, quàm EG, CF, ſunt parallelæ propter angulos rectos ad E, & F, parallelogrammum erit EFCG, eruntque CF, EG, æquales; (*per 34.1.*) quare GD, erit exceſſus quo DE, ſinus arcus AD, ſuperat lineam FC, ſinum arcus AC. Dico illum exceſſum æqualem eſſe lineæ CI, ſeu ſinui arcus CB, ducatur linea CM.

Demonſtratio. Contendo triangulum CDM, eſſe æquilaterum; nam triangula MID, MIC, habent unus latus MI commune, latera DI, IC, ſunt æqualia, (*per 3.3.*) cum arcus DB, & BC ſint æquales, & anguli ad I, ſint recti erunt (*per 4.1.*) anguli MDI, MCI, æquales & latera MD, MC æqualia; item anguli DMI, BMC, æquales erunt. Cum autem angulus DMB, externus in parallelis NK, DE æqualis ſit interno NKB, qui eſt 30. graduum; igitur totus DMC eſt 60 graduum; & alii duo MDC, MCD qui æquales probati ſunt, erunt etiam 60 graduum, ut perficiantur duo recti. Quare æquiangulum eſt triangulum DMC, & (*per cor. quintæ 1.*) æquilaterum: ergo æquales ſunt CD, MD: linea autem GD, eſt dimidia pars lineæ MD; cum enim CG facta ſit parallela lineæ KA, & angulus E rectus ſit, ex (*definitione ſinus*) anguli ad G recti ſunt. Cum igitur triangula CGD, CMG, habeant duos angulos, & duo latera CD CM, æqualia, erunt (*per 26.1.*) lineæ GD, GM æquales: ergo GD eſt dimidia lineæ GM, ergo æqualis lineæ CI, quæ eſt dimidia lineæ CD. Quod erat demonſtrandum.

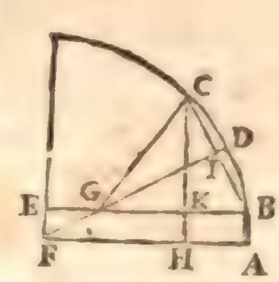
COROLLARIUM.

Sequitur ex hoc, quòd datis ſinubus arcuum uſque ad 60. dabuntur facilè reliqui per ſolam additionem. Sit enim datus ſinus arcus gr. 59. huic adde ſinum arcus unius gradus efficieſque ſinum arcus 61. ſi ſinui arcus 58. addas ſinum arcus duorum graduum efficies ſinum arcus graduum 62.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Si ſint duo arcus æqualiter à gradu trigeſimo diſtantes, quadratum ſinus diſtantiæ eſt tertia pars quadrati differentiæ ſinuum illorum arcuum.



Sit arcus AD, triginta graduum, ſintque arcus AB, AC, æqualiter ab illo diſtantes; hoc eſt ſint BD, DC arcus æquales. Ducaturque linea BC, & linea FD, eritque BC ſicut priùs diviſa biſariàm, & ad angulos rectos. Sit CH ſinus arcus AC, & AB ſinus arcus AB, erit CK differentia ſinuum, & BI, ſinus arcus BD, ſeu differentiæ inter arcum AB, & AD. Dico quadratum lineæ BI eſſe tertiam partem quadrati KC, jungatur linea CG.

Demonſtratio. Triangulum CGB oſtendetur ut priùs eſſe æquilaterum; quare triangula CKB; GIB, quorum communis eſt angulus CBK, & anguli

Digitized by Google

guli ad K, & I recti, & latera GB, & BC æqualia, (*per* 26.1.) ſunt æqualia, & latera BK, BI æqualia ſunt, ſed (*per* 47.1.) quadratum BC, quod eſt quadruplum quadrati BI, (cum BC ſit dupla ipſius BI,) eſt æquale quadratis CK, & KB ſeu BI. Ergo ſi ab utroque auferas quadratum BI, erunt tres quadrantes quadrati BC æquales quadrato KC. Ergo quadratum KC eſt triplum quadrati BI, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

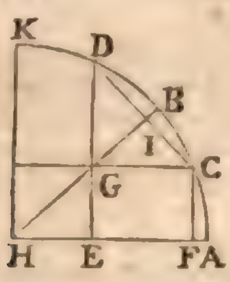
Ex hoc Theoremate cognitis ſinubus arcuum ad trigeſimum gradum cognoſcentur reliqui uſque ad ſexageſimum.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Si ſint duo arcus æqualiter ab arcu graduum 45 diſtantes; erit quadratum ſinus arcus quo ab arcu 45 differunt, media pars quadrati differentiæ ſinuum.

Sit arcus AB 45 graduum, ſintque duo arcus AC, AD æqualiter diſtantes ab eo; hoc eſt arcus BC, BD ſint æquales. Sintque eorum ſinus DE, FC; DE autem ſecet HB, in G, ducatur GC quæ erit parallela lineæ AH. Nam cum lineæ HK, DE,



ſint perpendiculares ad eandem AH, & parallelæ erunt inter ſe: igitur angulus DGB externus, æqualis eſt interno KHB, qui ſemirectus eſt. Triangula autem GDI, GIC, ſunt æqualia (*per* 4. *primi*) quare æquales ſunt anguli DGB, BGC: ſemirectus ergo eſt BGC, ergo etiam æqualis angulo interno GHE, & (*per* 28.1.) parallelæ ſunt GC, EF: parallelæ item ſunt DE, CF cum ſint perpendiculares ad eandem HA. Igitur (*per* 34.1) æquales ſunt CF, EG; ergo GD eſt differentia ſinuum. Dico autem illius quadratum duplum eſſe quadrati DI, vel IC.

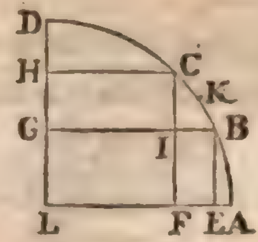
Demonſtratio. In triangulo GID, angulus in I, rectus eſt, cum arcus DB, BC ſupponantur æquales, angulus DGI, eſt jam probatus ſemirectus; ergo & GDI ſemirectus erit, ut perficiantur duo recti: ergo (*per* 6.1.) latera DI, GI ſunt æqualia. Sed (*per* 47.1.) quadratum GD eſt æquale quadratis GI, ID; ergo duplum eſt quadrati DI, quod erat demondrandum.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Aggregatum ex quadratis differentiæ ſinuum arcuum, & differentiæ ſinuum complementorum, eſt quadruplum quadrati ſinus ſemidifferentiæ arcuum.

Sint duo arcus AB, AC, quorum differentia CB, ſemidifferentia KB; ſint ſinus eorum BE; CF, quorum differentia CI; ſinus complemento-



rum CH, BG, quorum differentia IB: dico aggregatum quadratorum CI, IB, eſſe quadruplum quadrati ſinus arcus KB.

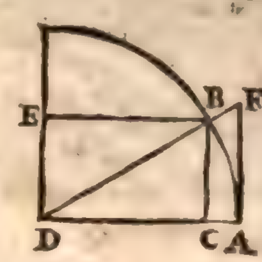
Demonſtratio. Angulus CIB eſt rectus, ut facilè colligi poteſt ex definitionibus ſinuum; ergo (*per* 47.1.) quadratum CB æquale eſt quadratis CI, IB, ſed quadratum CB eſt quadruplum quadrati ſinus arcus KB. Nam ſinus arcus KB eſt dimidia ſubtenſa arcus CB dupli. Ergo quadrata CI, IB ſunt quadrupla quadrati ſinus KB.

Sequuntur propoſitiones neceſſariæ ad compoſitionem canonis Tangentium & Secantium.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Ut ſinus complementi ad ſinum arcûs, ita ſinus totus ad tangentem ejuſdem arcus.



Sit arcus AB, cujus ſinus BC; tangens AF; ſinus complementi EB, aut illi æqualis DC; dico ita eſſe DC ad CB, ſicut DA radius, ad DF.

Demonſtratio. BC (*per definit. ſinuum*) eſt perpendicularis ad DA. Item AF eſt ad eandem perpendicularis, cùm ſit tangens. Ergo (*per* 28.1.) ſunt CB, AF parallelæ: ergo in triangulo FDA eſt ducta CB parallela baſi: igitur (*per* 2.6.) ita eſt DC ad CB, ſicut DA ad AF.

Ex hàc ſolâ propoſitione confici poteſt canon tangentium, licèt ſimus daturi alias utiles ad facilitatem.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Radius eſt medius proportionalis, inter ſinum complementi, & ſecantem arcus.

Sit in eâdem figurâ ſinus complementi EB, aut illi æqualis DC, & ſecans DF: dico ita eſſe CD ad DA, ut DA ad DF, ſecantem.

Demonſtratio. In triangulo ADF, ducta eſt ut oſtendimus CB parallela baſi AF; ergo (*per* 2. 6.) ita eſt DC ad DB (aut DA illi æqualem)

Digitized by Google

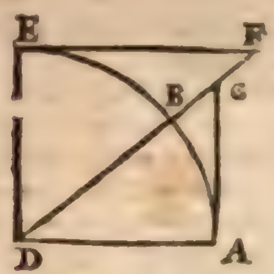
lem) ſicut D A ad D F, quod erat oſtendendum.

Hâc ſola propoſitione abſolvi poteſt canon ſecantium.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Radius eſt medius proportionalis, inter tangentes arcûs, & complementi.



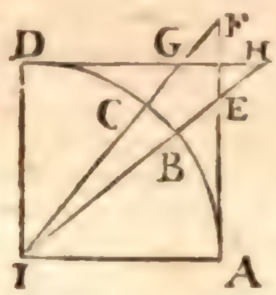
Sit arcus AB, cujus tangens AC, complementum ejus ſit BE, cujus tangens EF: dico ita eſſe tangentem AC ad radium, ſicut radius ad EF.

Demonſtratio. Cùm linea ED ſit perpendicularis ad DA, ex conſtructione (ſupponitur enim AE eſſe quadrans, & conſequenter ADE, eſſe angulus rectus; E D ſit etiam perpendicularis ad EF, cum EF ſit tangens; erunt DA, EF parallelæ: quare (*per* 29.1.) anguli alterni ADC,DFE, ſunt æquales. Item anguli A, & E ſunt recti, & æquales, & triangula DEF, DAC ſunt æquiangula; unde (*per* 4. 6.) erit ut tangens AC, oppoſita angulo D ad AD radium, ita ED radius oppoſitus angulo F, (qui æqualis eſt angulo D) ad tangentem EF, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Tangentes arcuum; tangentibus complementorum ſunt reciprocè proportionales.



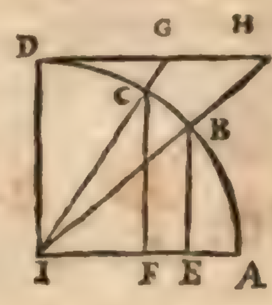
Sint arcus AB, AC, quorum complementa BD, CD, ſitque tangens arcus AB, linea AE; tangens arcus A C, ſit AF; tangens complementi arcus AB, nempe BD, ſit DH; & complementi AC; nempe arcus CD ſit DG; dico ita eſſe A E ad AF, ſicut D G ad DH; & hoc eſt reciprocè, nempè prima ſit tangens arcus ſecundi, tertia ſit tangens complementi arcus ſecundi, quarta erit tangens complementi arcus primi.

Demonſtratio. Radius eſt medius proportionalis inter tangentem arcûs AB, & tangentem complementi, hoc eſt; ita eſt tangens EA, ad radium, ut radius ad DH, igitur rectangulum ſub EA, DH, æquale eſt quadrato radii. Pariter rectangulum ſub AF, DG, æquatur eidem quadrato radii: ergo rectangulum ſub EA, DH æquale eſt rectangulo ſub AF, DG, quare (*per* 16.6.) ita eſt EA ad A F, ſicut D G ad D H. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Sinus arcuum, & ſecantes complementorum reciprocè ſunt proportionales.



Sint arcus AB, AC, quorum complementa BD, CD, ſinus BE, CF, ſecantes IH, IG, dico ita eſſe ſinum primi A B, nempè B E ad ſinum ſecundi, nempè CF; ut IG, ſecans complementi ſecundi, ad IH, ſecantem complementi primi arcus.

Demonſtratio. (*Per* 17.*hujus*) radius eſt medius proportionalis inter ſinum arcus, & ſecantem complementi: quare ut E B ad radium; ita radius ad I H: ergo rectangulum ſub E B, I H æquatur quadrato radii, pariter rectangulum ſub CF,IG æquabitur eidem quadrato: ergo (*per* 16.6.) erit ut EB, ad CF; ita IG, ad IH; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Ut tangens arcus, ad ſecantem ejus; ita radius ad ſecantem complementi.

In figurâ proportionis 18. oſtendimus triangula CAD, DEF eſſe æquiangula; igitur ut tangens AC, oppoſita angulo ADC, ad ſecantem DC, oppoſitam angulo recto A; ita radius DE, oppoſitus angulo F, (qui angulo ADC eſt æqualis) ad DF ſecantem complementi, oppoſitam angulo recto E; quod erat demonſtrandum.

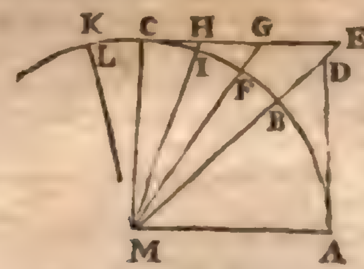
PROPOSITIO XXII.

Theorema.

Differentia tangentium arcuum, qui ſimul ſumpti æquales ſunt quadranti, eſt dupla tangentis arcus, quo major minorem ſuperat.

Sint duo arcus AB, BC qui ſimul ſumpti quadranti ſint æquales ſive qui ſint ſibi invicem complementa; ſitque AD, tangens minoris; & CE, tangens majoris; ſitque arcus B I æqualis arcui AB,

AB, & conſequenter LC erit differentia arcuum, & CH, erit tangens illius; ſumatur item CF



æqualis ipſi AB, eritque CG, ejus tangens, æqualis tangenti AD. Dico GE, exceſſum tangentis CE ſupra CG, aut AD, illi æqualem, eſſe duplam lineæ CH, tangentis differentiæ arcuum. Sumatur arcus CL, æqualis ipſi CI, ſitque KC illius tangens, æqualis ipſi CH, ideoque tota KH, illius erit dupla. Volo probare lineam GE æqualem eſſe lineæ KH.

Demonſtratio. Arcus BI, factus eſt æqualis arcui AB, ergo (*per* 27.3.) anguli AMB, HMB, ſunt æquales; ſed AMB, & MEC alterni, ſunt etiam æquales: ergo anguli E, & BMH ſunt æquales: ergo (*per* 6. 1.) lineæ MH, ſeu MK, & HE æquales ſunt.

Pariter cum arcus AB, CF ſint facti æquales, ſi addantur utrinque arcus CL, FB æquales; erunt arcus AF, FL æquales, & conſequenter æquales erunt anguli KMG, AMG; ſed AMG, MGK, alterni ſunt etiam æquales; ergo anguli KMG, MGK, ſunt æquales; ergo (*per* 6.1.) latera KM, GK, ſunt æqualia: quare æquales erunt lineæ KG, HE, ut pote eidem MK, æquales; igitur ablatâ communi HG, erunt æquales KH, GE, quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Datâ tangente differentiæ duorum arcuum, qui ſimul ſunt æquales quadranti, & tangente minoris, habebitur tangens majoris; ſi nempe tangenti minoris addatur dupla tangens differentiæ arcuum. Et viciſſim.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Tangens differentiæ arcuum, qui ſimul æquales ſunt quadranti, unâ cum tangente arcus minoris, æqualis eſt ſecanti differentiæ.

Oſtendimus enim lineam KG, compoſitam ex CG æquali ipſi AD, & ex KC tangente differentiæ, æqualem eſſe, lineæ KM, quæ eſt ſecans differentiæ.

Quare datâ tangente differentiæ, & tangente arcus minoris, dabitur per ſolam additionem, ſecans differentiæ arcuum.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Tangens differentiæ arcuum, qui ſimul æquales ſunt quadranti, & ſecans ejuſdem differentiæ ſimul, æquales ſunt tangenti majoris arcus.

Oſtendi enim lineas HE, HM, eſſe æquales, quibus ſi addatur CH tangens differentiæ, fiet linea CE, æqualis lineis CH, MH.

TRIGONOMETRIÆ
LIBER SECUNDUS.
De Logarithmis.

OMNIS ferè ſolutio trianguli ope canonis ſubtenſarum, ſinuum, tangentium, & ſecantium abſolvitur per regulam proportionum; in quâ tribus numeris datis, quartus proportionalis invenitur. Hæc autem regula perficitur, multiplicando ſecundum per tertium, & productum dividendo per primum. Numeri autem qui inveniuntur in tabulis ſecantium, ſinuum, tangentium, ut vitentur fractiones, eamque habeant accurationem quæ requiritur, ſeptem aut octo characteribus conſtant; ex quo fit ut operationes trigonometricæ multum laboris, & tadij contineant, immo & periculi, ne in tam longis operationibus aliquid erroris irrepat. Unde valde ſapienter Neperus de totâ matheſi propterea benè meritus, & nunquam ſatis laudandus, alios numeros, pro ſinubus tangentibus aut ſecantibus ſubſtituit, quorum ope idem ſola additione præſtamus, quod multiplicatione, idem ſubtractione quod alias diviſione efficiebamus: eos quaſi exponentes numerorum coſſicorum logarithmos vocat, quorum naturam, proprietates, inventionem & uſum, toto hoc libro explicamus.

DEFINITIO I.

Numeri proportionales geometricè ſunt qui eandem habent inter ſe rationem, nempe quorum primus ſecundi tot partes aliquotas quaſcumque continet, quot tertius ſimiles partes aliquotas ſecundi. Ut 2. 4. 3. 6. qui ſunt (*per* 15. 6.) eam habent proprietatem, ut rectangulum comprehenſum ſub extremis 2, & 6, æquetur rectangulo comprehenſo ſub mediis: nam bis ſex efficiunt 12. ſicut ter quatuor. Hi numeri poſſunt eſſe continuè proportionales, ut 2. 4. 8. 16. 32. Nempe eſt eadem ratio 2 ad 4, quæ 4 ad 8, & 8 ad 16.

Numeri proportionales arithmeticè ſunt numeri

meri æqualis exceſſu ſe ſuperantes, ut 2. 4. 3. 5. ſicut enim ſecundus ſuperat primum binario, ita quartus 5 ſuperat binario numerum 3. Hanc autem habent proprietatem hi numeri ut ſumma extremorum, æquetur ſummæ mediorum, nempe 2 & 5 efficiunt 7. ſicut 4 & 3.

Poſſunt hi numeri eſſe continuè proportionales; ut 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. qui numeri continuè ſe excedat unitate, ut 1. 3. 5. 7 9. 11. qui ſe continue binario excedunt.

DEFINITIO II.

Logarithmi ſunt numeri proportionales arithmeticè, numeris geometricè proportionalibus applicati. Seu numeri æqualibus ſemper differentiis ſe excedentes, pro numeris geometricè proportionalibus ſubſtituti.

Sit verbi gratiâ ſeries A numerorum geometricè proportionalium, quibus è regione, ſcribatur ſeries numerorum æquali ſemper exceſſu ſe ſuperantium, ſive ſe ſuperent unitate, ut in ſerie B, ſive binario ut in ſerie C; ſive ternario ut in ſerie D, ſive quocumque alio exceſſu. Numeri ſerierum B, C, D aut alterius cujuſcomque poſſunt eſſe Logarithmi numerorum in ſerie A poſitorum. Singuli igitur numeri ſerierum arithmeticarum, ſunt Logarithmi numerorum ſibi reſpondentium in ſerie geometrica.

A.	B.	C.	D.
1.	1.	2.	1.
2.	2.	4.	4.
4.	3.	6.	7.
8.	4.	8.	10.
16.	5.	10.	13.
32.	6.	12.	16.
64.	7.	14.	19.
128.	8.	16.	22.

Ut autem jam ab ipſo initio percipias finem cujus gratiâ inventi ſunt hujuſmodi logarithmi; ſupponamus me velle, datis tribus numeris quærere quartum numerum proportionalem. Sint dati tres numeri ſeriei A. 2. 4. 8. quibus quæritur quartus proportionalis. Regula conſueta jubet multiplicari 8 per 4. & productum nempe 32. dividi per primum 2. quotiens ſcilicèt 16. eſt ille qui quæritur. Nos aliter operabimur per logarithmos, ſi trium numerorum geometricorum 2. 4. 8. logarithmis in prima ſerie acceptis: 2. 3. 4. addamus duos ultimos 3. & 4 fientque 7. Ab hoc numero 7. auferatur primus nempe 2. reſtant 5. Dico hunc numerum 5. eſſe logarithmum numeri quæſiti. Ideoque ſi tabulam inſpicias videaſque numerum geometricum in ſerie A, reſpondentem numero 5. ſeriei B, invenies pariter 16.

Liberum eſt cuique logarithmorum, ſeriem quam voluerit adhibere; determinatis tamen logarithmis duorum numerorum; jam ampliùs liberum non eſt quoſcumque logarithmos aſſignare cæteris numeris. Verbi gratiâ poſito quod logarithmus unitatis ſit 1 & binarii ſit 2 neceſſariò logarithmus quaternarii erit 3. & octonarii erit 4 & ita de cæteris ſeriebus quæ applicari poſſunt.

Facillimum quidem eſſet datâ qualibet ſerie numerorum geometricorum, aſſignare ſeriem numerorum arithmeticè proportionalium, ſeu eorum logarithmos invenire; quia tamen in quacumque ſerie geometricâ multi deſunt numeri intermedii, quibus in noſtris operationibus indigere poſſumus; ideò logarithmi applicati cuicumque ſeriei geometricæ, debent maximo exceſſu ſe invicem ſuperare, ut intermediis, poſſint etiam ſui logarithmi, ſine ulla fractione aſſignari. Quod ut intelligere faciliùs poſſis, ponamus ſeriem B continere logarithmos ſeriei A; cùm unitas ſit logarithmus unitatis binarii, ternarius quaternarii, hic jam deeſſet logarithmus ternarii. Pariter nullus inveniretur logarithmus numerorum 5. 6. 7. item 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. in quo eſſet maximus defectus; nam quotieſcumque occurrerent numeri hujuſmodi, ceſſaret omnis logarithmorum uſus.

Ex quo fit ut ſi logarithmus unitatis eſſet 0, pro logarithmo binarii poſſent accipi 1000000, & pro logarithmo quaternarii 2000000, pro logarithmo octonarii 3000000, & tunc poſſent ſuppetere aliqui logarithmi pro intermediis: ſicut enim logarithmus unitatis ſuperatur à logarithmo binarij, hoc numeri 1000000, ita etiam logarithmus binarii ſuperatur à logarithmo quaternarii eodem exceſſu, atque ita obſervatur definitio logarithmorum.

Notandum item poſſe logarithmos decreſcere æquali ſemper decremento, interea dum numeri geometricè creſcunt, proportionalibus ſemper incrementis. Ut ſi ſint duæ ſeries E, & F, quarum prima creſcat geometricè alia vero decreſcat arithmeticè, idem tamen habe-

E.	F.	G.
1.	20.	20.
2.	19.	17.
4.	18.	14.
8.	17.	11.
16.	16.	8.
32.	15.	5.
46.	14.	2.
128.	13.	—1.
256.	12.	—4.

tur emolumentum; nempe ut per additionem, & ſubtractionem logarithmorum, idem efficiatur; quod per multiplicationem, & diviſionem numerorum geometricorum. Sequitur autem in eâ ſerie quod cum ſeries geometricorum ſemper creſcere poſſit in infinitum, ſeries autem logarithmorum quæ decreſcit per æqualia decrementa, non poſſit decreſcere in infinitum, inveniatur tandem aliquis numerus qui habeat pro logarithmo aliquid minus quam o ideoque habeat numerum deficientem. Ut eidem ſeriei geometricæ E, reſpondeat ſeries arithmeticè decreſcens G, cum logarithmus numeri geometrici 64. ſit 2. & logarithmus ſequentis nempè 128. debeat decreſcere tribus unitatibus, debet logarithmus eſſe —1. hoc eſt una unitas infra o. & logarithmus numeri geometrici 256. eſſe — 4. ſeu quatuor unitates infra o. Ut autem videas etiam eos logarithmos deficientes poſſe eſſe utiles, dentur tres numeri geometrici

metrici 2, 4, 128, quibus methodo logarithmicâ debet quæri quartus proportionalis. Sumantur datorum numerorum logarithmi 17, 14, — 1, adde duos ultimos, id eſt quatuordecim & minus unitate fiet 13, aufer 17 ex 13, deſunt quatuor; ideoque reſtabit — 4, logarithmus numeri quæſiti.

Iſti autem numeri defectivi ſunt communes in algebrâ.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Si quatuor quantitates ſint arithmeticè proportionales: prima & quarta ſimul ſumptæ, æquales ſunt, tertiæ, & ſecundæ, item ſimul ſumptis.

	F.		H.
	2.		2.
	E.		G.
4.	4.	3.	3.
A.	B.	C.	D.

Sint quatuor quantitates, A, BF, C, DH; arithmeticè proportionales, hoc eſt eodem exceſſu ſe ſuperantes, ut in appoſito exemplo ſecunda quantitas, BF ſuperet primam A, eodem prorſus exceſſu, quo quarta DH, ſuperat ſecundam C, dico A, & DH, ſimul æquales eſſe, quantitatibus C, & BF, ſimul ſumptis. Sit EF exceſſus quantitatis BF ſupra A, & exceſſus quo, quantitas DH ſuperat C ſit GH, ſupponuntur igitur EF, & GH, æquales.

Demonſtratio. Si quantitati A, addatur GH, fient A, GH, æquales ipſi BF; nam A, & BE, ſunt æquales, cum EF ſit exceſſus lineæ BE, ſupra A. Quare ſi æqualibus A, & BE, addantur GH, & EF, æquales, ex ſuppoſitione; fient A, & GH ſimul, æquales toti BF. Si iterum æquales lineas DG & C æqualibus addas, fient A, DG, & GH, ſeu A, DH, æquales lineis BF, & C. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Sequitur ex hâc propoſitione, quòd ſi ex quatuor numeris arithmeticè proportionalibus, dentur tres primi, facilè innoteſcet quartus per additionem, & ſubtractionem. Supponantur enim cognitæ quantitates A, BF, C, & ignota eſſe DH; ſimul addantur BF, & C, cognoſcitur aggregatum, ex BF, & C, cui cum aggregatum ex A & DH æquale ſit; cognoſcitur etiam illud Ex hoc aggregato ſubtrahatur A. Relinquitur DH.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si tres quantitates fuerint arithmeticè proportionales, prima, & tertia ſimul ſumptæ, duplæ ſunt quantitatis mediæ.

Sint tres quantitates A, B, C, arithmeticè proportionales; hoc eſt quantitas A eodem exceſſu ſuperet quantitatem B, quo quantitas B ſuperat quantitatem C; dico A, & C, ſimul eſſe duplas quantitatis B. Ponatur enim quantitas D æqualis ipſi B.

Demonſtratio. Cum quantitas B ſupponatur eodem exceſſu ſuperare quantitatem C, quo quantitas A ſuperat B; & D facta ſit æqualis ipſi B:

A. B. D. C.

D etiam ſuperabit eodem exceſſu quantitatem C, quo A ſuperat quantitatem B. Ergo A, B, D, C, ſunt quatuor quantitates arithmeticè proportionales. Quare (*per præcedentem*) A, & C ſimul æquales ſunt, quantitatibus B, & D ſimul etiam ſumptis; hoc eſt duplo ipſius B. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Si ex tribus numeris continuè arithmeticè proportionalibus, detur primus, & ſecundus, dabitur etiam tertius; ſi nempe ſecundum duplices, & ab eo ſic duplicato ſubtrahas primum.

PROPOSITIO III.

Si ſint quotcumque quantitates arithmeticè continuè proportionales, earum differentiæ erunt intervallis geometricè proportionales.

4.	A.
5.	B
6.	C.
7.	D.
8.	E.
9.	F.

Sint quot volueris quantitates arithmeticè, & continuè proportionales, hoc eſt B ſuperet quantitatem A, eodem exceſſu, quo C ſuperat ipſam B; & quo D ſuperat ipſam C, & E ipſam D, & F ipſam E. Dico differentias eſſe intervallis proportionales; hoc eſt differentiam quâ F ſuperat A, eſſe quintuplam differentiæ quâ B ſuperat ipſam A, eò quòd intervallum F ſupra A ſit quintuplum intervalli inter B & A.

Demonſtratio. Quoties multiplicatur intervallum toties multiplicatur eadem differentia; ſed æquè multiplicia ſunt in eâdem ratione, ac quantitates, quorum ſunt multiplicia, (*per* 15.5.) ergo ut ſe habet intervallum ad intervallum, ita etiam differentia, ad differentiam.

PROPOSITIO IV.

Si ſint quotcumque quantitates continuè arithmeticè proportionales; exceſſus ultimæ ſupra primam diviſus per numerum intervallorum, dat differentiam quâ ſe excedunt invicem.

Sint iidem numeri A, B, C, D, E, F, continuè proportionales arithmeticè; dico quòd ſi exceſſus quo F ſuperat quantitatem A, dividatur per numerum intervallorum, quæ ſunt inter F, & A, dabitur differentia quâ ſe invicem ſuperant ſingulæ quantitates.

Demonſtratio. (*Per præcedentem*) ita ſe habet intervallum ad intervallum, ſicut differentia ad differentiam; quæritur autem differentia unius intervalli. Si ergo fiat ut quinque verbi gratiâ intervalla ad differentiam 10, ita unum intervallum ad quartum numerum; erit rectangulum ſub mediis æquale rectangulo ſub extremis (*per* 16.6.) Cum autem ut fiat rectangulum ſub mediis debeat multiplicari 10 per unitatem & unitas nihil immutet; igitur ſi dividatur differentia per numerum intervallorum quotiens erit exceſſus, quo numeri ſe invicem ſuperant.

PROPO

Digitized by Google

PROPOSITIO V.

Si ſint quatuor numeri geometricè proportionales, Logarithmi mediorum ſimul ſumpti, æquales ſunt logarithmus extremorum.

A. B. C. D. Sint quatuor numeri A, B,
4. 6. 8. 12. C, D, geometricè proportiona-
E. F. G. H. les; dico illorum Logarithmos
E, F, G, H, ita ſe habere, ut F, G, ſimul ſumpti, æquales ſint numeris E, H, ſimul etiam ſumptis.

Demonſtratio. Logarithmi ſunt numeri arithmeticè proportionales pro geometricis ſubſtituti; ſed numeri arithmeticè proportionales ita ſe habent, ut ſumma mediorum æqualis ſit ſummæ extremorum: igitur, & logarithmi ita ſe habebunt.

COROLLARIUM.

Si à ſumma mediorum auferas logarithmum primi, relinquitur logarithmus quarti.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si ſint tres numeri continuè proportionales geometricè, logarithmi extremorum ſunt dupli logarithmi medii.

Demonſtratio. Logarithmi (*ex defin.*) ſunt numeri arithmeticè proportionales, pro geometricè proportionalibus ſubſtituti: ſed numeri arithmeticè continuè proportionales, ita ſe habent, ut extremi ſint dupli medii: ergo & logarithmi ita ſe habebunt.

COROLLARIUM.

Ex tribus numeris continuè proportionalibus, ſi detur logarithmus primi, & ſecundi, dabitur logarithmus tertii Si enim duplices logarithmum ſecundi, & ab eo ſic duplicato, auferas logarithmum primi, reſtabit logarithmus tertii.

PROPOSITIO VII.

Si duo numeri ſe invicem multiplicantes, alium produxerint; erunt multiplicantium logarithmi, æquales logarithmo producti, & unitatis.

D. A. B. C. Sint duo numeri A, & B qui ſe invicem multiplicantes, pro-
1. 4. 6. 24. ducant numerum C; dico logarithmos numerorum A, & B, ſimul ſumptos, æquales eſſe logarithmo numeri C, & logarithmo unitatis. Præponatur his numeris unitas D.

Demonſtratio. Cum per multiplicationem numeri B per A, producatur numerus C, toties numerus C continebit numerum B, quot A continet unitates. Ergo (*ut jam demonſtravimus in arithmeticis cum de multiplicatione*) ita erit unitas D ad A, ſicut B ad C. Ergo (*per 4. hujus*) logarithmus mediorum A, & B æqualis eſt logarithmis numeri C, & unitatis. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

In illa ſerie logarithmorum, in qua unitas habet logarithmum o, logarithmi multiplicatorum ſimul ſumpti æquales ſunt logarithmo producti.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Logarithmus alicujus numeri duplicatus, & imminutus logarithmo unitatis; æqualis eſt logarithmo quadrati eius.

D. A, B. C. Sit numerus A, dico ſi ab
1. 4 4. 16. eius logarithmo duplicato, auferas logarithmum unitatis; relinquetur logarithmus eius quadrati. Sit enim eius quadratum C, ponaturque numerus B, æqualis ipſi A, & præponatur unitas D.

Demonſtratio. (*Per præcedentem*) logarithmi numerorum A, & B æquales ſunt logarithmis D & C: ſed logarithmi A, & B ſunt logarithmus A duplicatus, cum A & B ſint æquales, igitur logarithmus A duplicatus; æqualis eſt logarithmo numeri C, & logarithmo unitatis. Ergo ſi à logarithmo A duplicato, auferatur logarithmus unitatis, relinquetur logarithmus numeri C.

COROLLARIUM I.

Si logarithmo quadrati addas logarithmum unitatis, habebis duplum logarithmum radicis.

COROLLARIUM II.

In ſerie in qua logarithmus unitatis eſt o, logarithmus quadrati eſt duplus logarithmi radicis; ideóque dato logarithmo quadrati, facilè dabitur logarithmus radicis, & viciſſim.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Logarithmus radicis triplicatus, æqualis eſt logarithmo cubi, & duplo logarithmo unitatis.

D. A. B. C. Sit radix A, cubus eius C;
1. 4. 16. 64. dico logarithmum numeri A triplicatum, æqualem eſſe logarithmo numeri C, & logarithmo unitatis duplicato. Sit enim B, quadratus numerus ipſius A, præponatur etiam unitas D.

Demonſtratio. Quoniam radix A, multiplicando quadratum B producit cubum C; erunt logarithmi A, & B ſimul ſumpti, æquales logarithmis D & C. Sed (*per præcedentem*) logarithmus B, ſimul cum logarithmo unitatis, eſt duplus logarithmi A. Ergo logarithmi A & B ſimul cum logarithmo unitatis æquales ſunt triplo logarithmi A. Sed (*per 5. hujus*) logarithmi D, & C æquales, ſunt logarithmis A, B, ergo logarithmi D & C, ſimul cum logarithmo unitatis æquales ſunt triplo logarithmi A. In hoc autem aggregato bis invenitur logarithmus unitatis. Ergo duplus logarithmus unitatis, cum logarithmo cubi, æquantur triplo radicis; quod erat oſtendendum.

COROLLA

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

In ſerie in quâ logarithmus unitatis eſt o, cubi logarithmus eſt præciſè triplus logarithmi radicis. Quare ſi habeatur tabula logarithmorum, facilè eruitur radix cubica, vel facilè datâ radice habetur cubus.

COROLLARIUM II.

Logarithmus tertiæ poteſtatis ſimul cum triplo logarithmo unitatis, eſt quadruplus logarithmi radicis, & ita conſequenter de reliquis proportionalibus ab unitate incipientibus.

PROPOSITIO X.

Problema.

Si fuerint quotcumque numeri geometricè continuè proportionales, cognito logarithmo primi, & ſecundi; reliquorum dare logarithmos.

Sint numeri A, B, C, D, E, F, continuè proportionales, deturque logarithmus primi A, & ſecundi B, quæritur logarithmus reliquorum. Subtrahe logarithmum minorem à majori, & differentiam habebis quam ſubtrahes à logarithmo B, ſi logarithmi decreſcunt, aut addes logarithmo numeri B, ſi creſcunt; & habebis logarithmum numeri C.

Demonſtratio. Numerorum geometricè proportionalium logarithmi, æquali exceſſu ſe ſuperant: ergo ſi ſemel hunc exceſſum habeas, cum ſemper addendo, vel ſubtrahendo, habebis logarithmos conſequentes.

Vel duplica logarithmum numeri B, & ab eo ſic duplicato aufer logarithmum numeri A, & habebis logarithmum numeri C. Pariter ſi duplicaveris logarithmum numeri C, & ab eo ſic duplicato auferas B, habebis logarithmum D.

Demonſtratio patet ex 6 hujus.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Si dentur quotcumque numeri geometricè continuè proportionales, cognito logarithmo primi, & ultimi; & numero intervallorum aſſignare logarithmos reliquorum.

Sint quotcumque numeri A, B, C, D, E, F, continuè proportionales geometricè, deturque logarithmus primi A & ultimi F; item ſciatur numerus intervallorum, quæritur logarithmus uniuſcujuſque. Ex logarithmis primi, & ultimi, ſubtrahes majorem à minori, & differentiam divides per numerum intervallorum, ut habeas differentiam unius logarithmi ab alio vicino, quam addes, vel ſubtrahes, prout logarithmi creſcent aut decreſcent.

Demonſtratio. Logarithmi numerorum geometricè proportionalium continuè, ſunt arithmeticè continuè proportionales. Nam ſi A eſt ad B, ut B, ad C, debebit logarithmus medius æquè ſuperare primum ac tertius medium, & ita conſequenter. Sed (*per 4. hujus*) quando numeri ſunt arithmeticè continuè proportionales, ita habetur differentia uniuſcujuſque ab antecedente, ergo eodem modo habebitur differentia logarithmorum.

Præcedentes propoſitiones omnibus omnino logarithmis communes ſunt. Iam ad logarithmos communes veniamus.

DE LOGARITHMIS communibus.

Logarithmi communes ſunt à Nepero indicati, qui aſſerit eam fore optimam ſpeciem Logarithmorum in qua unitatis Logarithmus eſſet o. Logarithmus denarii eſſet 10000000. Logarithmus centenarii eſſet 20000000, millenarii, &c. Sed ut puto nimio labore deterritus hanc aliis ſuſcipiendam provinciam reliquit. Horum autem Logarithmorum conſtruendorum methodum hîc tradendum ſuſcipio.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Omnium numerorum in proportione decuplа præcedentium, Logarithmos aſſignare.

Supponuntur ad libitum duo Logarithmi dati; nempe unitatis qui eſt o, & denarii qui eſt 10000000, dico quod ſi dupletur hic Logarithmus denarii, habebitur Logarithmus centenarii, ſi tripletur millenarii, ſi quadrupletur, numeri 10000. Si continuè augeatur eodem augmento habebuntur cæterorum in proportione decula procedentium Logarithmi, ut hæc tabula indicat.

Numeri abſoluti. A	B *Logarithmi.*
1	0. 0000000
10	1. 0000000
100	2. 0000000
1000	3. 0000000
10000	4. 0000000
100000	5. 0000000
1000000	6. 0000000
10000000	7. 0000000
100000000	8. 0000000
1000000000	9. 0000000
10000000000	10. 0000000

Demonſtratio. Cùm ita ſit unitas ad 10, ſicut 10 ad 100, logarithmus denarii duplicatus, æqualis erit logarithmo unitatis, & logarithmo centenarii, (*per 6 hujus*) ergo ſi ex logarithmo denarii duplicato auferas logarithmum unitatis, qui eſt o, reſtabit logarithmus centenarii: ergo logarithmus centenarii eſt duplus logarithmi denarii.

Pariter quia ita eſt 1 ad 10, ut 100 ad 1000, erunt logarithmi mediorum 10 & 100, æquales logarithmo unitatis & millenarii; quare ſi addas eos ſimul, fiatque ſumma 30000000 & ab ea ſubtrahas logarithmum unitatis, nempe o, reſtabit logarithmus millenarii, triplus logarithmi unitatis. Cùm igitur reliqui procedant in eadem ſerie Geometricâ continuâ, eorum logarithmi ſe ſuperabunt æquali ſemper exceſſu (*per 10. hujus*) quare

Digitized by Google

quare ſi continuè addas logarithmum denarii, habebis logarithmos ſequentium numerorum in ratione decuplâ continuâ procedentium.

COROLLARIUM I.

Solemus in Algebra quoties proponitur ſeries continuè Geometricè proportionalium unitati componere, o, primo numero quem radicem vocamus apponimus 1, ſecundo numero ab unitate, ſeu quadrato 2, tertio qui ſemper cubus eſt 3, & quarto, qui quadratoquadratus numeratur 4, & ita conſequenter, hoſque numeros exponentes vocamus, eò quòd exponant quam ſedem ab unitate occupent. Id etiam præſtamus modò, ſuntque logarithmi quaſi exponentes: ſed quia debemus intermediorum logarithmos invenire, ideo illos multis cyphris augemus. Conſideranda tamen eſt prima cyphra, quæ propterea dicitur characteriſtica, eò quòd indicare poſſit quot characteres contineat numerus cui reſpondet. Quare omnes numeri qui ſunt inter unitatem & denarium, ſeu qui unico charactere ſcribuntur, habent logarithmum cujus characteriſtica eſt o, qui inter 10 & 100, ſeu qui duplici charactere conſtant, habent logarithmū cujus characteriſtica 1, qui triplici, characteriſticâ 2. qui quadruplici, ſuntque inter 1000 & 10000 habent logarithmum inſignitum characteriſtica 3, & ita conſequenter, characteriſtica logarithmi minor eſt unitate, numero characterum quibus ſcribitur numerus reſpondens.

Colligo hîc regulas hujus ſpeciei logarithmorum.

1. Logarithmi multiplicatorum æquales ſunt logarithmo producti, ut ſi numeri B & C ſe multiplicantes, faciant numerum D, dico addendo logarithmos, numerorum C & D, fieri logarithmum numeri D.

A	B	C	D
1	3	4	12

Eſt enim ut vidimus in proportione Arithmetica, unitas ad B, ut C ad D, ergo logarithmi B & C æquantur logarithmo A & D; quapropter cùm logarithmus unitatis A ſit o, logarithmi B & C æquantur logarithmo D.

2. Pariter ſi dividendo D per C, fiat quotiens B ex logarithmo numeri D, aufer logarithmum numeri C, fiet logarithmus numeri B.

3. Logarithmus quadrati duplus eſt logarithmi radicis; cùm enim radix ſeipſum multiplicando faciat quadratum, (*per* 1. *regulam.*) addendo logarithmum radicis ejuſdem radicis logarithmo, habetur logarithmus quadrati. Quare dato logarithmo quadrati facilè habetur logarithmus radicis, vel viciſſim.

4. Logarithmus cubi eſt triplus logarithmi radicis. Eſt enim ut unitas ad radicem, ita quadratus ad cubum; ergo logarithmi mediorum, nempe radicis & quadrati, æquales ſunt logarithmis cubi & unitatis, quæ unitas habet logarithmum o, ergo logarithmi radicis, & quadrati æquales ſunt logarithmo cubi, ſive triplo logarithmo radicis.

5. Si quotcumque numeri ſe multiplicent, dico logarithmos omnium multiplicantium ſimul ſumptos, æquales eſſe logarithmo ultimi producti. Ut ſi numeri 2. 4. 5. 3. ſe invicem multiplicent, efficiantque numerum 120, erit logarithmus numeri 120 æqualis logarithmo numerorum 2. 4. 5. 3. Primâ enim multiplicatione 2 per 4 fiat 8, logarithmus numeri 8 æquabitur logarithmis 2 & 4 (*per* 1 *regulam.*) Tum ſecundâ multiplicatione ſi 8 multiplicemur per 5, fient 40, cujus logarithmus æquabitur logarithmis 8, id eſt 2 & 4, & logarithmo 5. Pariter ſi 3 multiplicando per 40, faciat 120, logarithmus 120 æqualis eſt logarithmo 40, ſeu 2, 4, 5, & logarithmo 3.

6. Si plurimi numeri ab unitate incipientes ſint continuè proportionales, logarithmus ultimi diviſus per numerum intervallorum, pro quotiente exhibet logarithmum primi, ſeu radicis. Ut ſi ſint numeri A, B, C, D, E, ab unitate A continuè proportionales, ſitque datus logarithmus 12, numeri E, cùm logarithmus unitatis ſit o, & logarithmi ſe excedant eodem exceſſu, erit 3 logarithmus primi poſt unitatem, differentia ſcilicet cujuſlibet ſequentis ſupra antecedentem, & logarithmus ultimus, ſeu 12, coaleſcet ex omnibus his differentiis. Sunt autem tot differentiæ, ſeu exceſſus, quot intervalla, ergo ſi dividas numerum 12 per numerum intervallorum qui eſt 4, quotiens 3 erit differentia ſeu logarithmus primi, quæ continuè reliquis addita, reliquorum logarithmos exhibet.

1.	2.	4.	8.	16
A	B	C	D	E
o.	3.	6.	9.	12

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Inter unitatem & denarium, quot volueris media proportionalia invenire.

Sint invenienda multa proportionalia inter unitatem, & denarium; ex denario extrahe radicem quadratam, dico illam radicem eſſe proportionalem inter unitatem & denarium, hoc eſt ita eſſe unitatem ad hanc radicem ſicut hæc radix ad denarium. Si enim intelligatur unitas multiplicare denarium, numerus productus erit denarius, cum unitas multiplicando, & dividendo nihil immutet. Igitur rectangulum comprehenſum ſub unitate, & denario, eſt æquale quadrato radicis illius: ita ergo eſt unitas ad radicem quadratam, ſicut radix quadrata ad denarium. Si velis inter hanc radicem & unitatem alium numerum proportionalem, illius extrahe radicem quadratam, & ita deinceps.

In quo notandum eſt hæc media proportionalia non eſſe continua, hoc eſt non ita eſſe unitatem ad ultimò inventum, ſicut illud ultimum ad penultimum, & iſtud ad antepenultimum, & antepenultimum ad proantepenultimum; ſic enim illi numeri eſſent in proportione continuâ geometricâ, ſed ſemper unitas ita ſe habet ad quemcumque ex his numeris, ſicut ille ſe habet ad præcedentem.

P R A X I S.

Quia difficile eſt tot extrahere radices ex numeris tam parvis, augeatur tam unitas quam denarius quot volueris cyphris o, intelligendo verbi gratiâ unitatem diviſam eſſe in centum partes, & pariter denarii quamcumque unitatem eſſe diviſam in centum partes, fient ergo mille in denario, tunc multiplicentur mille partes denarii per centum partes unitatis, fientque in denarin 100000 partes, vel ſi velis, ſupponatur unitas diviſa in mille partes, & denarius conſequenter in decies mille;

Digitized by Google

le; intelligatur facta multiplicatio, proveniet 10000000; ita ut numerus cyphrarum additarum denario, ſit ſemper impar, quod neceſſariò debet fieri ut in extrahendâ radice quadratâ. Quæratur prima cyphra radicis, nempe radix quadrata numeri 10.

Numerus autem denarius ſcribi poteſt vel ut in A vel ut in B.

A. $10.\frac{000000000000000000000000}{1000000000000000000000000}$

B. 1000000000000000000000000000.

Primo modo ita enunciatur 10, cum nullis partibus centies milleſimis &c. in ſecundo mille centeſimæ partes, ſi diviſa eſſet unitas tantùm in centum partes, & in hoc ſecundo modo reducitur totus numerus in fractionem, ſubintelligendo illius denominatorem.

Quod ut intelligatur, in numero minori poſſet ſcribi denarius, hoc modo ſuppoſitâ diviſione unitatis in centum partes $10\frac{00}{100}$ decem cum nullis partibus centeſimis, vel hoc modo $\frac{1000}{100}$ mille partes centeſimæ, & ſubticendo denominatorem 100. intelligendo tamen hunc numerum non eſſe abſolutum.

Quæratur ergo inter unitatem ita auctam, & denarium ſimiliter auctum, medius proportionalis, proveniet numerus D, cui ſubintelligendus eſt

D. $\frac{316227766016837933199889354}{000000000000000000000000000}$

E.

Denominator E, & quia numerator major eſt ſignificat aliquas unitates abſolutas, ut vides hîc.

$3.\frac{16227766016837933199889354}{1000000000000000000000000000}$

Hujus numeri D denuò extrahatur radix quadrata, fiet alius numerus F.

F. 177827941003892280119730413.

Atque ita deinceps ſi ſemper extrahas, radicem quadratam quinquageſimus ſecundus erit.

G. 1000000000000000255638298640064 70.

Qui poteſt ſcribi hoc modo.

H. I. $\frac{2556382986400647 0}{1000000000000000000000000000000000}$

Hic numerus major eſt unitate, & fractio habet in ſuo denominatore 15, cyphras plures quam ſint in numeratore, quod manifeſtum eſt.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Primus modus inveniendi logarithmum numero dato reſpondentem.

Proponatur numeri cujuſcumque logarithmus quærendus, verbi gratia numeri 9. inter unitatem A, auctam pluribus cyphris exactioris præciſionis causâ, & denarium B, quæratur medius proportionalis C, qui facilè habebitur, ſi denarii aucti cyphris totidem extrahatur radix quadrata, nam ita eſt unitas ad radicem quadratam ut radix quadrata, ad quadratum: cùm numerus ortus ex mul-

		Logarithmi.
A	1. 0000000	0. 0000000
C	3: 1622777	0. 5000000
B	10. 0000000	1. 0000000
D	5. 6234162	0. 7500000
E	7. 4989421	0. 8750000
F	8. 6596432	0. 9375000
G	9. 3057204	0. 9687500
H	8. 9768713	0. 9531250
I	9. 1398170	0. 9609375
K	9. 0579777	0. 95:0312
L	9. 0000004	0. 9542425. 3
M	9. 0000000	0. 9542425. 1
N	8. 9999998	0. 9542425. 0

tiplicatione radicis quadratæ, æqualis ſit contento ſub unitate, & ultimo. Illius autem logarithmus habetur dividendo bifariam denarii logarithmum, nempe *per precedentem regulam*, ſi ſint numeri continuè proportionales, ab unitate incipientes, diviſo logarithmo ultimi per numerum intervallorum habetur logarithmus ſecundi. Hic numerus C non eſt ille cujus logarithmus quæritur, eſt enim 9. 0000000, quare inter numerum C & denarium quæratur medius proportionalis qui habetur, ſi multiplices numerum C, per denarium B, & ex producto extrahes radicem quadratam. Habetur eius logarithmus, ſi addas logarithmos numerorum B & C, & hujus ſummæ aſſumas dimidium. Quia autem hic numerus D differt à propoſito, quæratur inter B & D, medius proportionalis E eadem methodo, & eius logarithmus, ſumendo dimidium aggregati ex logarithmis numerorum B & D. Quia autem numerus E nimis adhuc diſtat à numero propoſito qui debet eſſe 9. 0000000, quæratur inter B & E, alius medius F, cum ſuo logarithmo. Hic numerus adhuc minor eſt numero 9. 0000000. Quare iterum alter medius inter F & E quæratur, qui erit G major numero propoſito. Quare inter G, & F quæratur alius numerus medius H, qui minor eſt propoſito, quare inter G majorem & H minorem quæratur medius I cum ſuo logarithmo.

Hic quidem numerus I jam ſatis accedit ad propoſitum, quare inter H minorem proximè, & I majorem proximè, quæratur alius K, cum alius inter K, & H, & ita conſequenter inter proximè minorem, & majorem poſt 15 medios proportionales tandem invenies numeros L, & N, & medium proportionalem M, qui exactè convenit cum propoſito, ita ut ſi quæ ſit differentia, inveniatur ultra terminos præſcriptos, hoc eſt ut exacta ſit operatio, tam logarithmis quam numeris plures adduntur cyphræ quæ poſt operationem abjiciuntur.

Hæc prima operatio pro inveniendo numero 9, uſui eſſe poteſt ad inveniendos alios numeros, verbi gratia numerus D eſt minor numero 6.0000000, & numerus E major, quare quæſito inter D & E, medio, invenies numerum, magis accedentem ad 6, atque ita deinceps, donec occurrat 6.

Invento numero 9, habebis numerum 3, nam cum ſit ut 1 ad 3, ita 3 ad 9, logarithmus numeri 3 erit ſemiſſis logarithmi numeri 9, ſi inveneris logarithmum numeri 6, habebis logarithmum binarii, cum enim binarius multiplicando 3 efficiat 6, erit logarithmus 6 æqualis logarithmis 3 & 2.

& 2 ; quare ſubtrahendo logarithmum 3 à logarithmo 6, reſtat logarithmus 2.

Dato logarithmo 2, dantur logarithmi omnium numerorum in ſerie dupla 1 , 2 , 4, 8, 16, 32 &c. per continuam additionem logarithmi 2 , logarithmus 3 dat logarithmos totius ſeriei in proportione tripla 3, 9, 27 , 81. &c.

Multiplicando 10 per 2 fit 20 , adde logarithmos 10 & 2, habebis logarithmum 20.

Dividendo 10 per 2 habes 5, ſubtrahe log 2, ex logarithmo 10, reſtat logarithmus 5 , ſubtrahe iterum log.2, ex log.5, reſtat log.$2\frac{1}{2}$, & iterum reſtat logarithmus $1\frac{1}{4}$, ſubtrahe iterum logar. 2, ex log. $1\frac{1}{1}$, fit logarithmus $\frac{1}{4}$ & quia major numerus ex minori ſubtrahitur , fit numerus defectivus.

Quare ſi habeantur logarithmi numerorum 9, 6, habentur logarithmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, & omnium compoſitorum ex ipſis 10 , 20 , 30 , 40, 50, 60, 80, 90 100 ; & quia bis ſex ſunt 12, habetur illius logarithmus , ter 5 ſunt 15 , habetur logarithmus ejus per additionem logarithmorum 5 & 3, & ita de reliquis.

Hæc methodus melius ſuccedit in numeris majoribus,verbi gratiâ. Sit datus logarithmus 30 & 32 , quæritur logarithmus 31 , quæratur medius proportionalis geometricè , qui vix aberrabit à numero 31 , ita ut pauciſſimis operationibus ſit opus.

Sequens methodus eſt paulò difficilior,eam tamen prætermittere non auſim; qui eam non poterit intelligere,prima contentus ſit.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

Si aliquis numerus minor binario,& major unitate in denominatore ſuæ fractionis 15 cyphras habeat , antequam numerator aliquam habeat , & hujus numeri radix quadrata extrahatur ; dico quod numerator fractionis hujus primi numeri, duplus erit numeratoris fractionis radicis ſuæ, demptâ utrinque ſua unitate.

Sit numerus H propoſitus unitatem habens,& adjunctam fractionem , cujus denominator habet quindecim o antequam numerator habeat aliquem ſignificativum characterem. Dico ſi extrahatur ejus radix quadrata, quæ pariter erit major unitate ; cùm unitas habeat pro radice unitatem, hæc inquam radix quadrata major unitate,habebit numeratorem fractionis,quâ unitatem excedit, qui erit media pars numeratoris fractionis quâ prior item numerus unitatem excedit.

Proponatur enim numerus H ſubticendo denominatorem , ut ab eo extrahi poſſit radix quadrata.

H. 10000000000000002556382986400647o.

Hic numerus multiplicari priùs debet per unitatem ſuis cyphris auctam, quæ non immutat numerum,ſed tantum in fine illi addit multoties o.

In extractione radicis quadratæ , jubemur extrahere radicem ex primo puncto , quæ erit unitas,quæ extracta ex primo puncto nihil relinquit. Hæc radix quadrata duplicatur , & ſic duplicata dividit ſequentem, cyphram & quia ſequens cyphra eſt o, ſemper quotiens erit o, donec veniatur ad aliquam cyphram ſignificativam,& ſemper radix interea creſcet & erit 1000000000000000 , quot nempe ſunt cyphræ o, ante ſignificativas propoſiti numeri. Tunc demum duplicanda eſt radix jam inventa quæ dividere debet numerum reliquum L. 2556829864006470000. &c.

Et quia conſtat 15 cyphris quotiens qui addetur radici in ſingulis progreſſionibus cadet in cyphras quæ poſt operationem rejiciendæ ſunt , hoc eſt L. 25568298640064700. 00000. K. 2000000000000001.

Si applicetur radix duplicata,nempe K , ipſi L numero reſiduo , cum primus character ipſius K, ſit 2 , dividet primum characterem numeri L bifariam , addeturque ipſi radici quotiens 1. id eſt dimidia pars primi caracteris numeri L . & licet etiam idem quotiens addatur in fine ipſius radicis duplicatæ , quia tamen reſpondet cyphris quæ ſunt poſt trigeſimam primam , quæque ideo poſt operationem abjici debent, ille defectus pro nihilo haberi debet. In ſecunda promotione radix eodem modo applicabitur ſecundo characteri 5 . eodemque modo dividet bifariam , intactæque remanent reliqui , quia cyphræ o quæ ſunt in radice, intactas relinquunt cyphras numeri ſuperioris ; ergo in promotionibus ſequentibus uſque ad trigeſimam ſecundam vel tertiam , ſemper binarius, qui primus eſt radicis duplicatæ , dividet numerum L, ergo radix quæ proveniet poſt quindecim cyphras o , habebit medietatem numeri L; quod erat demonſtrandum. Quod accidet quoties hoc modo in aliqua fractione denominator conſtans unitate & pluribus cyphris o,duplò plures habebit characteres quàm numerator , demptâ nimirum ipſa unitate.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Numerorum mediorum proportionalium inter denarium, & unitatem,logarithmos aſſignare.

Logarithmus denarii dividatur bifariam , & habebitur logarithmus primi medii proportionalis , nempè illius qui eſt medius inter unitatem & denarium ; vocetur ille numerus A.

Demonſtratio. Cùm enim ita ſit unitas ad numerum A, ut numerus A ad denarium , logarithmus medii duplicatus æqualis erit logarithmo extremorum : ſed logarithmus unitatis eſt o, ergo logarithmus numeri A duplicatus, æquabitur logarithmo denarii ; & quia ſecundus numerus inventus nempe B , eſt medius inter unitatem & A, logarithmus numeri A bifariam dividatur ; & ejus pars dimidia erit logarithmus numeri B : atque ita de cæteris uſque ad quinquageſimum ſecundum.

Habeantur ergo illi omnes logarithmi cum reſpondentibus ſibi numeris : præcipuè verò logarithmi illorum numerorum ultimorum quos deſcripſimus ſuperiori propoſitione.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Cujuſcumque numeri primi logarithmum invenire.

Sit numerus primus 2 cujus logarithmus quæritur. Primò ex numero 2 cyphris aucto quantùm volueris, & multiplicato per unitatem totidem cyphris auctam, extrahatur radix quadrata; & hujus radicis ſimiliter multiplicatæ extrahatur radix quadrata; & ita deinceps, donec occurrat aliquis, qui præter unitatem habeat fractionem aliquam cujus denominator 15 cyphras habeat; antequam numerator aliquam ſignificativam contineat: erit (*per* 29.) numerator fractionis duplus numeratoris ſuæ radicis, demptâ utrinque unitate, hoc eſt ita procedunt logarithmi ſicut numeratores iſtarum fractionum: ſint ergo fractionum numerorum ultimò inventorum, numeratores A, & B logarithmi ignoti E, & F, & ſint duo ultimi numeri inventi per propoſ. 28. & eorum fractionis numeratores C, D, & logarithmi cogniti G, & H, (*per coroll.* 30.) iſtæ omnes rationes A ad B, C ad D, E ad F, G ad H ſunt æquales, cum logarithmi majores ſint dupli minorum: ſicut numeratores majorum fractionum, ſunt dupli minorum; ergo alternando erit ut A ad E, ita B ad F, & C ad G, & D ad H. Cùm ergo ſit ut numerator C ad ſuum logarithmum cognitum, ita numerator A, ad ſuum logarithmum E, cognoſcetur logarithmus numeri cujus A eſt numerator fractionis. Quare ſi toties dupletur quoties ſunt inventa media proportionalia inter binarium, & unitatem, tandem habebitur logarithmus binarij.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Numeri primi paulo majoris logarithmum invenire.

Quia tamen, cùm numeri primi quorum quæruntur logarithmi, ſunt majores; plures eſſent inveniendi numeri proportionales, antequam ita proximè deveniretur ad unitatem, ut poſt unitatem adderetur fractio, cujus numerator duplò pauciores cyphras contineat, quàm denominator, ita operaberis. Numerum primum propoſitum multiplica per ſeipſum, & productum per ipſummet, ita ut fiat ejus quadratum cubus &c. donec aliquis occurrat numerus qui incipiat per 1, & 0, hunc divides per aliquem numerum cujus cognoſcitur logarithmus nempe 10. 100. 10000. &c. ſed immediatè ipſo minorem, fiet fractió unitate major, & binario, minor, quæ jam ſatis ad unitatem accedet. Si verò adhuc illius fractionis numerator non habet conditionem ſuperiùs deſcriptam; extrahantur radices, donec aliquis occurrat, habens talem conditionem. Rem in eodem binario oſtendo licèt ſit aptior ad majorum numerorum inveniendos logarithmos. Primò binarius multiplicetur per ſeipſum 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. numerus 1024 aptus eſt. Dividatur per 1000, fietque quotiens $1\frac{24}{1000}$ inter hunc numerum, & unitatem, quære media proportionalia, donec aliquis habeat conditionem ſupra allatam; cujus per præcedentem quæres logarithmum; quem toties duplicabis quot inveniſti proportionalia inter numerum $1\frac{24}{1000}$, & unitatem; & ita habebis logarithmum iſtius numeri cui addes logarithmum millenarii, & (*per coroll.* 7. *hujus*) habebis logarithmum hujus numeri 1024. & quia iſti numeri 1. 2. 4. &c. uſque ad 1024. ſunt continuè proportionales, ſciturque logarithmus extremorum, ſi differentia eorum dividatur per numerum intervallorum (*per* 11. *hujus*) habebis logarithmum reliquorum.

COROLLARIUM.

Invento logarithmo binarii, inveniuntur logarithmi omnium numerorum compoſitorum ex binario, ſeipſum multiplicante, ut ſi fiat ſeries 1. 2. 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, &c. numerorum 10, 20, 40, 80, 160, 320, &c. numerorum 5, $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{4}$, ſi enim ſubtrahas logarithmum binarii ex logarithmo denarii, habebis logarithmum quinarii. Ex quo ſi adhuc ſubtrahas logarithmum binarii, habebis logarithmum iſtius numeri $2\frac{1}{2}$ unde ſi etiam auferas logarithmum binarii habebis logarithmum iſtius $1\frac{1}{4}$, quod ſi adhuc auferres logarithmum binarii ex logarithmo numeri $1\frac{1}{4}$ quia logarithmus binarii major eſt, fiet numerus defectivus logarithmus hujus fractionis $\frac{5}{8}$ & aliarum ut $\frac{5}{16}$ ſi adhuc auferatur logarithmus binarii.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Inventis numerorum primorum logarithmis: invenire numerorum compoſitorum logarithmos.

Sint inventi logarithmi numerorum primorum 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, &c. quærendi ſunt logarithmi numerorum compoſitorum. Primò ſi logarithmum binarii duples, triples, quadruples &c. habebis logarithmos totius ſeriei 2, 4, 8, 16, 32, &c. ſi eodem modo facias pro ternario, habebis ſeriem 3, 9, 27, 81, &c. & ſeriem 5, 25, 125, & omnium numerorum, quos 2, & 3, metiuntur verbi gratiâ 6, 12, 18, 24, 36, &c. Cum autem omnis numerus compoſitus oriatur ex multiplicatione numerorum primorum, quorum logarithmi ſupponuntur cogniti, ſi addas eorum logarithmos, habebis logarithmos omnium compoſitorum. Quod erat faciendum.

VSVS LOGARITHMORVM.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Dati numeri abſoluti logarithmum reperire.

Tres aut quatuor caſus accidere poſſunt. Primò ſit numerus aliquis abſolutus, minor numero 10000, maximo tabularum, quæratur in tabulis ille numerus, invenieturque è regione logarithmus ipſi correſpondens.

Digitized by Google

Si numerus cujus quæritur logarithmus fuerit fractio, cujus tàm numerator, quam denominator non excedant 10000, quæratur utriuſque logarithmus; quod ſi fuerit fractio propriè dicta, in qua denominator excedat numeratorem, minor logarithmus à majori ſubtrahatur; & differentia erit logarithmus præpoſitæ fractionis ſed defectivus, ideoque huic præponi debet hæc nota—

Demonſtr. Primò quod defectivus ſit oſtenditur, quia omnis fractio ſimplex minor eſt unitate; ergo eius logarithmus minor eſt logarithmo unitatis in hac ſpecie logarithmorum; qui cum ſit o, fractionis logarithmus, minor erit quam o, ſeu erit defectivus. Quod etiam differentia duorum logarithmorum numeratoris, & denominatoris ſit logarithmus fractionis, oſtendetur. Sit enim iſte numerus propoſitus $\frac{13}{14}$; hæc fractio eſt quotiens diviſionis in qua 13 per 14, divideretur, ut conſtat ex arithmetica: ſi enim 13, nummi eſſent dividendi inter 14, quilibet tredecim decimas quartas accipere deberet: ergo (*per 7. hujus*) logarithmus diviſoris 14, & quotientis, æquabuntur logarithmo diviſi nempe 13, ergo ſi ex logarithmo numeri 13, auferas logarithmum numeri 14, reſtabit logarithmus fractionis $\frac{13}{14}$ ſed dum auferetur major numerus ex minori, reſtat differentia eorum cum ſigno —; quod erat demonſtrandum.

Tertiò detur numerus cui fractio adhæreat, reducatur ille numerus in fractionem totalem, ut $34\frac{1}{5}$ mutetur in $\frac{171}{5}$ & utriuſque numeri, hoc eſt tàm numeratoris, quàm denominatoris, logarithmus in tabula accipiatur, & differentia eorum erit logarithmus quæſitus.

Alio modo ſumatur logarithmus numeri 34, qui auferatur à proximè ſequenti, ut habeatur quantùm creſcat logarithmus, eò quòd numerus ei reſpondens creſcat unitate, & dices ſi unitas ſeu $\frac{5}{5}$ augent logarithmum tot cyphris, quantùm augebunt $\frac{1}{5}$.

Qui tamen modus non eſt accuratus, quia non creſcunt logarithmi in eâdem ratione in quâ creſcunt numeri ipſis reſpondentes; ſed minus creſcit logarithmus reſpectu totius unitatis, quàm creſcat reſpectu primarum partium ejuſdem numeri.

Si numerus datus cujus quæritur logarithmus ſit major numero 10000, maximo ſcilicet tabulæ, ſi compoſitus eſt, & ſciantur qui numeri eum producant, addantur logarithmi numerorum eum producentium, & habebitur eius logarithmus. Ut ſi numerus 36480, qui oritur ex multiplicatione numerorum 304, & 120, quæratur logarithmus utriuſque; eorum ſumma (*per 7. hujus*) eſt logarithmus numeri 36480.

Quia tamen hæc operatio ſupponit numerum eſſe compoſitum, & cognoſci numeros ipſum producentes, aliam regulam proponam univerſaliorem. Dividatur numerus major quam 10000, per 10, 100, 1000, 10000, donec quotiens ſit minor quam 10000. Si enim adhuc ille quotiens major eſſet, divideretur adhuc. Hujus quotientis quære logarithmum quem addes logarithmo numeri 10, 100, 1000, &c. per quem facta eſt diviſio. quod ſi facta eſt duplex diviſio addatur bis logarithmus illius numeri, per quem facta eſt diviſio. Ut ſi numeri 453507, quæratur logarithmus, dividatur per 1000, fietque quotiens $453\frac{507}{1000}$ hujus numeri adhærentem habentis fractionem, quæratur logarithmus, qui addatur logarithmo numeri 1000, & (*per 6. hujus*) prodibit logarithmus numeri propoſiti.

Coincidit hæc methodus cum praxi traditâ ab Ulac. Sit enim (inquit) propoſitùs numerus 3567894. Primò quæratur numeri 3567, log. 3. 5523031, qui auferatur ex logarithmo ſequenti 3. 55242 [illegible] nempe numeri 3568 & reſtabit differentia. Et quia numerus 3567894 ſupponitur diviſus per mille, ita ut ſit facta fractio decadica, hoc eſt fractio cujus denominator eſt 10, vel 100, vel 1000, &c. hoc modo $3567\frac{894}{1000}$ inſtituenda eſt regula trium. Si numerus 3567 creſceret unitate ſeu $\frac{1000}{1000}$, creſceret logarithmus hoc numero 1217. ſed creſcit tantùm 894 partibus, quantum igitur creſcet ejus logarithmus; multiplica 1217 per 894, fietque 1087998, quem ut dividas per 1000, delendæ ſunt tres ultimæ figuræ, ita ut reſtet 1087, quem addes logarithmo invento 3. 5523031.

Fietque logarithmus nempe hujus numeri $3567\frac{894}{1000}$ ſed iſte numerus eſt tantum quotiens factæ diviſionis; huic ergo, adde logarithmum numeri 1000, qui cum ſit 3. 0000000, tantum addenda eſt characteriſtica nempe 3, fietque 6. 5524118.

COROLLARIUM.

Datus numerus $356\frac{7894}{10000}$ eundem habet logarithmum, exceptâ characteriſtâ ac numerus 3567894. Quia eſt quotiens diviſionis in qua 10000, fuit diviſor, ideoque tantoperè extollunt authores decadicas fractiones quæ logarithmos non immutant, niſi penes characteriſticam logarithmi, quæ tenetur ferè memoriter, nam ab unitate ad denarium eſt o, à denario ad centenarium eſt 1, à centenario ad millenarium eſt 2, à millenario ad decem millia eſt 3.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Dato logarithmo numerum reſpondentem aſſignare.

Si propoſitus logarithmus invenitur in tabulis exactè, è regione invenies numerum cuius eſt logarithmus

Si verò non invenitur exactè, ſed invenitur in tabulis logarithmus in reliquis æqualis, excepta tamen characteriſtica, ut ſi proponeretur logarithmus 2. 5523031, qui non inveniretur in tabula, ſed inveniretur 3. 5523031, ita ut tota differentia ſit in characteriſtica, numerus reſpondens huic ultimo eſt 3567. Certum eſt autem numerum reſpondentem logarithmo cujus characteriſtica eſt 2, inveniri inter 100, & 1000. unde abjicienda eſt numeri inventi ultima cyphra, & facienda fractio hoc modo $356\frac{7}{10}$. Quod ſi datus fuiſſet logarithmus 1. 5523031, abjiciendæ eſſent duæ cyphræ, hoc modo $35\frac{67}{100}$. ſi daretur 4. 5523031, qui inveniretur in tabula, exceptâ characteriſtica quæ eſſet 3, numero reſpondenti 3561, addenda eſſet cyphra o, 35670.

Tertiò ſi lagarithmus propoſitus nullo modo invenitur in tabula, nec ei ſimilis, ſed datur logarithmus eo major, & logarithmus eo minor, ſumatur pro numero ei reſpondente, numerus reſpondens

Digitized by Google

pondens logarithmo proximè minori, & differentia inter hunc minorem & propoſitum fiat numerator fractionis, differentia verò inter hunc minorem, in tabula inventum, & ſequentem majorem etiam in tabula poſitum, ſit denominator fractionis. Sit datus logarithmus 2. 5 2 1 1 9 7 6. proximè minor eſt 2. 5211380. proximè major eſt 2. 5212741. logarithmo proximè minori convenit numerus 332. differentia inter datum logarithmum, & proximè minorem eſt 596. differentia autem inter minorem & majorem eſt 1361. fiat 332. $\frac{596}{1361}$ dico hunc numerum eſſe eum qui reſpondet prædicto logarithmo.

DEMONSTRATIO.

Patet ex ſuperioribus nam 1361 eſt differentia logarithmi numeri 332, & logarithmi numeri 333. quare ſi differentia 1361. dat unitatem, ſeu partes unitatis 1361. differentia 596. dabit $\frac{596}{1361}$.

Oſtendimus autem ſupra hanc fractionem non eſſe exactam, ſed paulò majorem. Unde quia logarithmi majores habent minores differentias; ideò potiùs per majores operandum eſt. Sit ergo logarithmus datus 2. 5211976. addatur hujus characteriſticæ 2, ut fiat major logarithmus, ſeu illi addatur logarithmus centenarii, fietque logarithmus 4. 5 2 1 1 9 7 6, proximè minor in tabulis inventus eſt 4. 5211904. numerus illi reſpondens eſt 33204; differentia inter logarithmum inventum minorem, & datum eſt 72. differentia inter hunc minorem, & proximè majorem eſt 130, fiat ut 130. ad 72 ita unitas ad aliud; quam unitatem augent 6 cyphris exactioris calculi gratiâ; fietque pro $\frac{72}{130}$ alia fractio æqualis $\frac{553846}{1000000}$. ideoque numerus reſpondens logarithmo 4. 5211976; eſſet 33204, $\frac{553846}{1000000}$. ſed quia numerus ille nimis magnus eſt, dividatur per 100, numerus 33204, diviſus per 100, eſt 332.

Progreſſus oſtendit rationem, quia enim logarithmus habebat cyphram majorem characteriſticâ logarithmi propoſiti, ideò debuit minui; ergo numerus ipſi reſpondens dividi. Cætera ſunt clara. Hic ut oſtenderetur progreſſus; volui dividi denominatorem 553846, per 100; unde inutilis fuit illa diviſio: hoc tamen debui indicare ut oſtenderem rationem operationis.

Sit logarithmus quicumque defectivus 415634, cujus quæritur valor, ſeu quæritur numerus ei reſpondens: addatur ei logarithmo, quicumque logarithmus verbi gratiâ numeri 360, fiatque ex his duobus numeris logarithmus, cujus exquiratur numerus: ſit 119 dico hujus primò exhibiti logarithmi, numerum eſſe $\frac{119}{360}$, ratio eſt, cùm additur logarithmus numeri 360, idem eſt ac ſi numerus 360 multiplicaret talem fractionem (*per 7. hujus*) & ut eſt unitas ad hanc fractionem: ita 360 ad 119; ergo per ea quæ diximus in arithmeticis benè explicatur fractio per $\frac{119}{360}$; quod erat oſtendendum.

Sit denique aliquis magnus logarithmus. Ab eo auferatur logarithmus alicujus ex inſraſcriptis 10, 100, 1000, 10000, vel alter ejuſdem rationis, donec ſit non major ultimo tabulæ quâ uteris. Hujus logarithmi quæratur valor, inventus numerus multiplicetur per 10, 100, 1000, &c. & habebis numerum quæſitum.

Sit inveniendus numerus logarithmi, 5. 8734670; ſi ab eo detrahatur logarithmus numeri 1000, reſtabit logarithmus 2. 8734670. cujus numerus quæſitus, ut ſupra eſt 747 $\frac{1004}{5810}$ qui multiplicatus per 1000, dabit 747252.

Ratio eadem eſt quæ in ſuperioribus.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Cujuſcumque numeri dati radicem quadratam, cubicam, aut cujuſcumque poteſtatis invenire.

Cujuſcumque numeri quære logarithmum (*per 31.*) quem bifariàm divides, numerus reſpondens huic dimidio logarithmo, eſt radix quadrata; ſi per 3 diviſus fuiſſet, habuiſſes logarithmum radicis cubicæ, ſi per quatuor tertiæ poteſtatis, habuiſſes logarithmum. Hæc propoſitio per ſe patet.

Demonſtratio ſupponit in ſerie quacumque geometricâ ita ſe habere unitatem ad primum numerum, qui eſt radix cæterorum omnium, & à quo tota ſeries ſuam denominationem accipit, ſicut hæc radix ad quadratum; quadratus, ad cubum; cubus ad quadratoquadratum, & ita conſequenter. Hæc enim eſt natura ſeriei geometricæ, ut termini ſint in eadem ſemper proportione geometrica continua. Dum ergo quæritur radix quadrata, alicujus numeri; quæritur ſeries geometrica, in qua numerus propoſitus ſit ſecundus ab unitate. Supponitur autem cognitus illius numeri logarithmus, inter quem & logarithmum unitatis, debet intercedere aliquis medius proportionalis arithmeticè, habetur autem logarithmus unitatis qui eſt 0, qui ſubtractus ex logarithmo propoſito, eum relinquit intactum. Quare logarithmus numeri propoſiti eſt differentia inter hunc logarithmum & logarithmum unitatis. Jubet autem praxis ut logarithmus propoſitus dividatur bifariam, quo facto habentur tres numeri arithmeticè proportionales, nempe logarithmus unitatis, media pars logarithmi propoſiti, & logarithmus propoſitus, qui eſt logarithmus propoſiti numeri; ſi habeantur numeri iis reſpondentes, nempe unitas, numerus intermedius, & numerus propoſitus illi erunt geometricè proportionales, ergo ſecundus erit radix quadrata numeri propoſiti.

Idem applicari poteſt cubo; ſi enim numerus pro cubo ſumatur, debent quæri duo numeri intermedii proportionales inter unitatem & cubum; cùm ergo habeatur logarithmus primi numeri, & unitatis, qui eſt 0, bene triſariam dividimus hunc logarithmum. Sic enim habetur logarithmus primi intermedii, qui eſt radix cubica, & ita de aliis omnibus poteſtatibus intelligendum eſt.

PROPOSITIO XXIII.

Vſus tabularum logarithmicarum reſpondentium arcubus quadrantis.

Primò ſciendum eſt tabulas communes continere 6 ordines, ſeu columnas. Prima columna continet minuta, gradus illius notatus eſt in fronte ipſius paginæ; progreſſuſque talium minutorum

nutorum ſit deſcendendo. Singulis minutis reſpondent in ſecundâ columnâ ſinus proprius, in tertia tangens, in quarta ſecans, in quinta logarithmus ſinûs. Ultimâ logarithmus tangentis. Logarithmus ſecantis non eſt adhibitus, quia facile haberi poteſt ſi logarithmum ſinus complementi auferas à logarithmo ſinûs totius duplicato. Cum enim ita ſit ſinus complementi ad ſinum totum, ut ſinus totus ad ſecantem erunt logarithmi extremorum æquales duplo logarithmo medii.

Alia pagina totidem habet columnas. Prima continet minuta gradûs in fronte paginæ notati, progreſſuſque minutorum fit aſcendendo; ut cuilibet arcui alterius paginæ ſuum in iſta reſpondeat complementum; ſequuntur eodem ordine reſpondentes ſinus, tangentes, ſecantes, logarithmi ſinuum, logarithmi tangentium.

Inveniuntur tantùm arcus uſque ad quadrantem, quia arcus majores quadrante, eundem habent ſinum, tangentem, & ſecantem, ac ſua complementa ad ſemicirculum; tabulæ autem ita ſupponunt ſinum totum eſſe partium 10000000.

Primus uſus, & præcipuus tabularum in eo conſiſtit, ut propoſito arcu, tot graduum, & minutorum; eius aſſignes ſinum, tangentem, & ſecantem, In partibus quas ſinus totus ſupponitur continere 10000000. Quod facillimum eſt, ſi arcus contineat tantùm gradus, & minuta; ſi enim adhuc minuta ſecunda haberet adjuncta talis arcus, pars proportionalis addenda eſſet. Ut ſi ſit ſinus arcus grad. 36, 25′, 34″, ſume differentiam inter ſinum grad. 36, 25′, & ſinum arcus 36, 26′, invenieſque differentiam 1712. Fiat regula aurea, ſi unum minutum primum ſeu 60 minuta ſecunda dant 1712, quid dabunt 34, ſec. & invenies 970, addenda ſinui grad. 36, 25′, qui eſt 9.7735327, fietque 9.7736297, quod intelligendum ſi exactiſſimè velis procedere, nam in pleriſque operationibus iſta negligi poſſunt. Idem intelligendum eſt de tangentibus & ſecantibus, & logarithmis.

Si velis ſinum verſum, aufer ſinum complementi à ſinu toto, relinquetur ſinus verſus, ſimplex & linearis.

Si logarithmum ſinûs verſi requiris, quia ita eſt ſemiradius, ad ſinum arcûs; ut ſinus arcus ad ſinum verſum arcûs dupli (*per 1. coroll. prop. 4. 1 huius*) ex logarithmo ſinûs dimidii arcûs duplicato, aufer logarithmum ſemiradii, ſive logarithmum ſinûs arcûs graduum 30, relinquitur logarithmus ſinûs verſi quæſiti.

Secunda pars iſtius uſûs conſiſtit in eo, ut dato ſinu, tangente, ſecante, logarithmo ſinus, aut tangentis, aſſignetur arcus illis reſpondens; ſi ſinus datus, tangens, aut ſecans, inveniantur in tabulis, arcus illis reſpondens in primâ columna, eſt ille qui quæritur. Si verò non inveniatur in tabula, quæratur in tabula proximè major, & minor; ſubtrahaturque minor à majori, ut habeatur eorum differentia, tum minor à propoſito etiam auferatur, ut habeatur differentia eorum: tum fiet regula aurea; ſi differentia majoris à minori, dat minuta ſecunda 60, quot dabit ſecunda differentia minoris à propoſito. Sit datus iſte ſinus 9.7736297, in tabula proximus eo minor eſt 9.7735327. Cui reſpondent gradus 36, 25′ & proximè major 9.7737039 graduum 36 26′, differentia inter hos tabulatos eſt 1712, differentia inter propoſitum & minorem eſt 970. Fiat regula trium, ſi differentia 1712 dat ſecunda 60, differentia 970 dabit ſecunda 34, igitur arcus reſpondens eſt grad. 36, min. 25. ſecunda 34.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Uſus logarithmorum.

Uſus proprius logarithmorum conſiſtit in eo ut propoſitis duobus numeris, tertium proportionalem invenias per ſolam additionem, & ſubtractionem.

Dupletur logarithmus ſecundi, & ab hoc duplo auferatur logarithmus primi, reſtabit logarithmus numeri quæſiti quod manifeſtum eſt ex definitione logarithmorum.

Pariter datis tribus numeris quartum proportionalem inveniemus, ſi addamus logarithmos ſecundi & tertii, & à ſummâ eorum ſubtrahimus logarithmum primi; relinquetur logarithmus quarti. Dentur num. 25, 60, 120, inveniendus eſt quartus proportionalis 288.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Datis tribus numeris, quartum proportionalem invenire in ratione inverſâ.

Logarithmi primi, & ſecundi ſimul addantur, & ab eorum ſumma, ſubtrahatur logarithmus tertii, reſtabitque logarithmus quarti Quod clariſſimum eſt ex definitione logarithmorum & praxi communi regulæ proportionis inverſæ.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Datis tribus numeris quartum proportionalem invenire in ratione duplicatâ illius, quæ eſt primi ad ſecundum.

Sint dati numeri A, & B, & tertius C, cui quartus proportionalis inveniendus in ratione duplicata illius quæ eſt A ad B: logarithmus A, ſubtrahatur ex logarithmo B, & differentia duplata addatur logarithmo C, ſumma dabit logarithmum numeri quæſiti.

Ratio eſt, quia ſi differentia adderetur logarithmo numeri C; fieret logarithmus quarti numeri, & ita eſſet A ad B; ut C ad quartum illum numerum; cum proportionalium æquè differentes ſint logarithmi. Si rurſus addatur ſemel hæc differentia, fiet ut A ad B, ita quartus ille numerus ad quintum. Sed idem factum eſt cum differentia duplicata addita eſt: ergo inventus eſt quintus ad quem C habet rationem duplicatam illius quæ eſt A ad B. Eâdem methodo inveniemus numerum in triplicata ratione, in quadruplicatâ, &c.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Inter datos numeros quotcumque medios proportionales invenire.

Differentia logarithmorum datorum numerorum dividatur bifariàm, ſi unicam mediam proportionalem velis; trifariàm ſi duas; in quatuor partes ſi tres. Hæc differentia addita logarithmo primi numeri dabit logarithmum primi medii, & huic adhuc addita dabit logarithmum ſecundi medii.

Ut inter datos numeros A, & B ſint inveniendi duo medii proportionales.

A			B
8.	64.	512.	4096.

Differentia logarithmorum diviſa per 3, dat 9.030900, quæ ſi addatur logarithmo minoris 9.030909, dabit logarithmum primi medii 1.8061800, & huic logarithmo iterum addita, dabit logarithmum: 2.7092700, igitur inter 8, & 4096 erunt duo medii proportionales 64, 512, hoc eſt ut 8 ad 64, ita 64 ad 512; & 512 ad 4096.

Ratio clara eſt, quia logarithmi illorum numerorum ſunt æquedifferentes; ergo numeri ſunt continuè proportionales.

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Uſus ultima tabulæ.

Quia ultima tabula ſolummodo continet logarithmos numerorum ab unitate ad 10000, modum docebo quo logarithmus cujuſcumque numeri 10000000 non excedentis inveniatur & viciſſim, licet autem jam de hoc locutus ſim ſupra, hic melius demonſtrabo.

Quære in ultima tabula quatuor primarum figurarum numeri dati 2, ſubtrahe logarithmum inventum ex logarithmo proximo ſequenti, ut habeas eorum differentiam, quam per reliquas figuras numeri dati multiplicabis, & ex producto abſcinde ad dexteram tot figuras quot reliquæ fuerint; reliquum adde logarithmo prius invento, mutetur item characteriſtica quæ unitate minor eſſe debet numero characterum, quibus numerus reſpondens conſtat exempli gratiâ, quæratur logarithmus numeri 3567894, qui eſt 3. 5523031, quo ſubtracto ex ſequenti 3.5524248, reſtat 1217, fit autem regula trium, ſi 1000 dederint 1217, quid dabunt 894, fit multiplicatio 1217 per 894, reliquas cyphras numeri dati, habeturque productum 1087998, & facta diviſione, per rejectionem trium characterum in fine, reſtat fere 1088, quibus adjectis ad primum logarithmum 3. 5523031, & mutata characteriſtica 3 in 6, fit logarithmus 6. 5524118, numero 3567894 reſpondens: pariter ut exercearis; logarithmus 125607 eſt 5. 0990117, & numeri 2358009 eſt 6. 3725454.

Demonſtratio petitur ex eo quod in tam magnis numeris unitate tantum differentibus, logarithmi intermediorum proportionales ſunt proximè numeris ipſis, quare numerorum 3567 & 3568, vel numerorum 3567.000 & 3568.000, intermedii logarithmi ſunt proximè proportionales, hoc eſt ſi logarithmus ſecundi ſuperat logarithmum primi partibus 1217, ſeu ſi unitas aut 1.000, aut $\frac{1000}{1000}$ dat 1217, intermedia fractio 0. 894 ſeu $\frac{894}{1000}$ tribuet quartum proportionalem, atque ita invenio logarithmum numeri $3567\frac{894}{1000}$ eſſe 3. 5524118. Multiplicetur numerus propoſitus per 1000, ſecundum regulam decadicarum fractionum in Arithmetica traditas, fiet numerus 3567894, addendus autem eſt logarithmus numeri 1000, ut logarithmus producti, æqualis ſit logarithmis multiplicantium, eſt autem logarithmus numeri 1000, 3.0000000; fit ergo logarithmus numeri propoſiti 6. 5524118, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Hi numeri $3\frac{567894}{1000000}$ vel $35\frac{67894}{100000}$ vel $356\frac{7894}{10000}$ vel $3567\frac{894}{1000}$ vel $35678\frac{94}{100}$ vel $356789\frac{4}{10}$ vel 3567894 eoſdem habent logarithmos, excepta characteriſtica nempe primi numeri logarithmus eſt 0. 5524118, ſecundi, 1.5524118, tertii 2 5524118, quarti 3.5524118, quinti 4.5524118, ſexti 5. 5524118, ſeptimi 6. 5524118.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema.

Numeri integri cum fractione adhærente logarithmum invenire.

Si detur numerus integer cum fractione decimali adhærente, ita ut in numero & in numeratore fractionis ſimul, ſint quatuor tantum cyphræ ejus in tabula logarithmum inveniemus mutata tantum charaſteriſtica. Ut ſi proponatur numerus $3.\frac{567}{1000}$ vel $35\frac{67}{100}$ vel $356\frac{7}{10}$ idem eſt logarithmus ac numeri 3567, ſed primus habet characteriſticam 0, ſecundus 1, tertius 2, quartus 3.

Si numerus cum denominatore fractionis adhærentis plures quam quatuor cyphras contineret ut $356\frac{7894}{10000}$ quære ut prius logarithmum numeri $3567\frac{894}{1000}$ deinde decurtabis, aut augebis characteriſticam prout exiget numerus characterum. Secundò ſi alia ſpecies fractionis, revocari facilè poterit ad decadicam prout docuimus in Arithmetica, tum per prius dicta hujus numeri cum fractione adhærente logarithmum invenies.

Quod ſi non lubet fractionem propoſitam ad decimalem revocare, ex numero integro, & fractione fac fractionem impropriè dictam, & ſubtrahe logarithmum denominatoris, ex logarithmo numeratoris, reſtabit logarithmus aggregati ex integro, & fractione. Ut ſi proponatur $3\frac{3}{4}$ fiat fractio impropria $\frac{15}{4}$ logarithmus 0. 6020600 numeri 4, ſubtrahatur ex 1. 1760913 logarithmo numeratoris 15, relinquetur 0. 5740313 logarithmus quæſitus.

Demonſtratio. In omni fractione intelligitur numerator dividi per denominatorem, ſed cùm unus numerus alium dividit, ſubtrahendus eſt logarithmus diviſoris ex logarithmo diviſi, fitque logarithmus quotientis. Ut ſi 15 dividas per 4, erit quotiens $\frac{15}{4}$; ergo hoc modo habetur logarithmus hujus numeri $3\frac{3}{4}$.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXX.

Invenire logarithmum fractionis propriè dictæ.

Proponatur fractio propriè dicta, cujus nempe numerator eſt minor denominatore verbi gratiâ $\frac{2}{5}$ ſubtrahatur numeratoris 2 logarithmus 0.3010300 ex denominatoris 5 logarithmo 0.6989700, & reliquo præponatur nota defectiva, reſtabitque —0.3979405.

Demonſtratio. Logarithmus fractionis eſt minus quam 0, cùm enim fractio ſit minor quam unitas, unitas autem habeat logarithmum 0, fractio neceſſariò numerum minorem quam 0, habebit pro ſuo logarithmo. Quod verò ita habeatur probatur fractio $\frac{2}{5}$ eſt quotiens diviſioni, in qua numerus 2 eſſet dividendus, & numerus 5 diviſor, quotiens enim eſſet $\frac{2}{5}$, ſed ſi ex dato logarithmo dividendi ſubtrahatur logarithmus diviſoris, reſtat logarithmus quotientis; ergo ſi ſubtraheretur logarithmus 5, ex logarithmo 2, haberetur logarithmus quæſitus. Sed id non poteſt, cùm ſubtrahendus ſit major, tunc ergo ſubtrahitur minor ex majore, & reſiduo præponitur nota defectus — ut ſi aliquis habeat duos nummos & debeat creditori 5, non tantum nihil habet, ſed ſi haberet adhuc tria nihil haberet. Igitur, hujuſmodi praxi bene exurgit fractionis logarithmus.

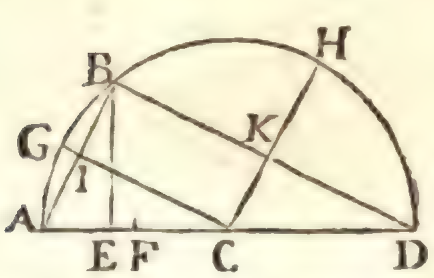
FACILIOR CONSTRUCTIO CANONIS Logarithmorum, ſinubus, tangentibus & ſecantibus reſpondentium.

Quamvis conſtruere tabulas logarithmorum ſinubus, tagentibus & ſecantibus reſpondentium, non ſit difficilius, quàm numeris abſolutis ſuos tribuere logarithmos; cum ſinus, tangentes, & ſecantes ſint etiam numeri ſimplices: ſunt tamen propoſitiones nonnullæ quæ compendia ſuppeditant. In genere igitur dicere poſſumus, ubi ſinus aliquis invenitur per regulam proportionum geometricam, logarithmum inveniri poſſe per regulam trium Arithmeticam, ſeu per additionem, & ſubtractionem: præmitto tamen unam propoſitionem.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

Ut dimidium ſinus totius ad ſinum dimidii arcus, ita ſinus complementi ipſius dimidii ad ſinum totius arcûs.



Sit arcus AB, cujus dimidium AG, ſitque AF ſemiſſis ſinus totius AC, ducantur AB, BD quæ dividantur bifariam in I & K, junganturque ex centro C, lineæ CIG, CKH quæ (*per* 2. 3.) perpendiculares erunt, eruntque AI, BK ſinus arcuum AG, BH, qui ſunt dimidii arcuum AB, BD. Dico ita eſſe AF, dimidium ſinus totius ad AI ſinum dimidii arcus AG; ſicut IC, ſinus complementi ejuſdem dimidii arcûs AG, ad BE, ſinum arcus AB.

Demonſtratio. Triangula ABD, BED, habent angulum communem BDA; angulus ABD in ſemicirculo rectus eſt, angulus item E rectus eſt, (*per defin. ſinus* 3;) ergo ſunt æquiangula, & (*per* 3. 6.) Eucl. ita eſt AD ad AB, in majori, ſicut BD ad BE in minori, quare & dimidium AD ſeu AC eodem modo ſe habet ad AB, ſicut dimidium BD, nempe IC, ad BE, ut autem AC ad AB, ita AF ad AI utriuſque dimidium; ergo ita eſt AF ad AI, ſicut IC ad BE; quod demonſtrandum erat.

COROLLARIUM.

Dato logarithmo ſinus arcus AG, & logarithmo ſinus complementi, datur logarithmus ſinus arcus dupli. Si nempe addas logarithmos datos, & à ſumma ſubtrahas logarithmum dimidii ſinûs totius, qui facilè habetur, ſi ex logarithmo ſinûs totius ſubtrahas logarithmum binarii.

PROPOSITIO XXXII.

Problema.

Canonem logarithmicum tangentium conſtruere.

Quoniam ita ſinus complementi ad ſinum alicujus arcûs, ut ſinus totus ad tangentem (*per* 22. *præcedentis*) & logarithmi mediorum æquantur logarithmis extremorum (*per* 5. *hujus*) ſi ex aggregato logarithmorum ſinus arcûs, & ſinus totius, auferas logarithmum ſinus complementi, dabitur logarithmus tangentis.

PROPOSITIO XXXIII.

Problema.

Canonem logarithmicum ſecantium conſtruere.

Quoniam (*per* 23. *præcedentis*) ſinus totus eſt medius proportionalis inter ſinum complementi & ſecantem arcus, erit (*per* 6. *hujus*) logarithmus ſinus totius bis ſumptus æqualis logarithmis ſecantis, arcus, & complementi. Quare ſi ex logarithmo ſinus totius duplicato auferas logarithmum complementi, habebis logarithmum ſecantis.

COROLLARIUM.

Quia in adverſa pagina logarithmorum pro ſinubus habentur logarithmi complementorum, teneturque memoria logarithmus ſinus totius duplicatus, facilis eſt ſubtractio hujus logarithmi complementi à duplo logarithmo ſinus totius, ut non ſit poſita tabula logarithmorum pro ſecantibus. Quoties igitur indiges logarithmo ſecantis, ſubtrahe logarithmum complementi ex 20.0000000.

PROPO

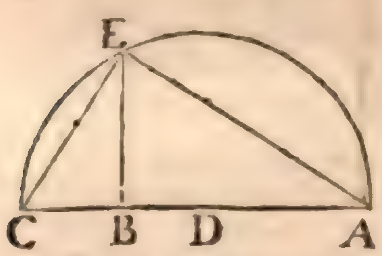
Digitized by Google

Pro ſinubus verſis.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema.

Subtenſa eſt media proportionalis inter diametrum, & ſinum verſum.



Sit arcus CE, cujus chorda CE, ſinus verſus CB, dico cordam CE eſſe mediam proportionalem inter diametrum AC, & ſinum verſum CB.

Demonſtratio. Triangula CEA, CEB habent angulum communem C; item angulus AEC in ſemicirculo rectus eſt, ſicut angulus B; ergo (*per 3. 6.*) ita eſt AC ad CE in magno triangulo, ut in parvo CE ad CB, quod demonſtrandum erat.

COROLLARIUM I.

Dato logarithmo chordæ, datur logarithmus ſinus Verſi, ſubtrahendo ſcilicet ex chordæ duplo logarithmo, logarithmum diametri: eſt autem logarithmus diametri, logarithmus ſinus totius auctus logarithmo binarii, & logarithmus chordæ eſt logarithmus ſinus arcus dimidii auctus eodem logarithmo binarii.

COROLLARIUM II.

Pariter ita eſt CB ad BE, ſicut BE ad AB ſinum complementi auctum ſinu tota DA.

DE LOGARITHMIS A NEPER traditis.

Quamvis ea quæ reliquo hoc libro continentur, ſint minimè neceſſaria, atque adeò ſine ullo diſpendio omitti poſſint; in honorem tamen Neperi Nobilis Scoti, qui logarithmorum inventor fuit, peculiarem eorum rationem, quæ ipſe ingenioſiſſimè uſus eſt, breviter aperiendam cenſui; quod inutile non erit, cum in eo authore non ita facilè percipi poſſit.

SUPPOSITIO.

Supponit Neperus in logarithmis majoribus, omnem errorem qui ad unitatem non perveniat negligi poſſe, & illius nullam rationem haberi. Id uſurpatur in ſinubus, tangentibus, & ſecantibus, nã ratio cur ſemidiameter, ſeu ſinus totus non aſſumitur 120 partium, ut eum fecerunt Ptolemæus, & alii veteres, ſed 10000000 non eſt alia, niſi ut ſine fractionibus ſinus ſingulorum arcuum, aut etiam chordæ aſſignarentur ſine ullo erroris notabilis periculo; in majoribus enim numeris error non adæquans unam unitatem, eſt tam parva pars ſui totius, ut evaneſcat. Multò minus fractionum haberi debebit ratio, ſi majori numero majoris accurationis gratiâ multas addamus cyphras. Ut ſi numero A 10000000. 00 adderemus duas cyphras interpunctione notatas, deinde operandó exurgeret hic numerus A 10000000. 04 dico hanc fractionem poſſe tutò negligi poſt omnes operationes, licet dum operamur illius rationem habeamus ne repetitione augeatur. Ratio eſt quia illa additio duarum cypharum numerum multiplicat per 100, ſignificaretque 10000000. $\frac{4}{100}$ decem milliones, cum 4 centeſimis partibus unius unitatis.

Ut autem accuratiſſima ſit operatio, ſinui toti addit alias 7 cyphras hoc modo 10000000. 0000000. Colliges primò ſufficienter cognoſci aliquam quantitatem in ordine ad tabulam conficiendam, ſi dicatur minor eſſe aliquo numèro maximo, & major alio item maximo. Ut ſi dicatur aliqua quantitas eſſe minor numero 9999999. 0000006, & major numero 9999999. 0000004, dicam enim in ordine ad tabulam noſtram quæ negligit errores minores unitate, eam quantitatem eſſe 9999999 ſimpliciter & ſine addito.

Hæc ratio nova non eſt, nam Archimedes poſitâ diametro circuli 497 circumferentiam definit eſſe inter terminos 1562. & 1561, hoc eſt minorem primo, majorem ſecundo numero.

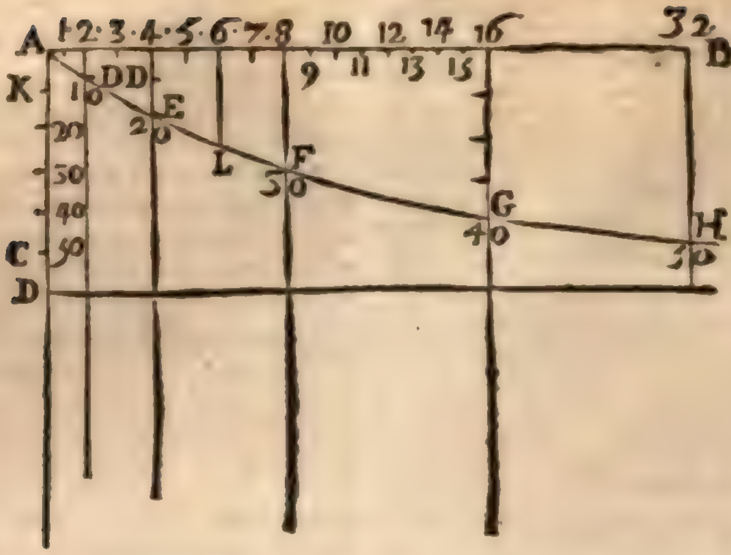
Colliges 2, loco quantitatis ignotæ poſſe illius terminos uſurpari, pariterque addi, ſubtrahi, multiplicari, dividi, ac ſi hanc quantitatem haberemus, ut ſi ſemidiametrum circuli $248\frac{1}{2}$ multiplicemus per 781, fiet area circuli $194078\frac{1}{2}$ verâ major, ſi eandem ſemidiametrum multiplicemus $780\frac{1}{2}$ exurget verâ minor $193908\frac{1}{4}$.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema.

De linea logarithmica.

Neperus geneſin logarithmorum explicat exemplo duorum mobilium, quorum unum æquabiliter, aliud motu ſecundum aliquam rationem moveatur. Ut autem explicationem addam de meo, quæ melius rem oculis ſubjiciat: ſupponantur eſſe duæ lineæ AB, AC ſe invicem perpendiculariter ſecantes, quarum altera AB immobilis ſit, alia verò AC ita moveatur ſupra AB, ut ſemper perpendiculariter inſiſtat. Moveatur autem accelerato motu, ita ut primo quocumque tempore transferatur in 2, ſecundo in 4, tertio in 8, quarto in 16, hæc linea AB quæ hoc modo percurritur repræſentabit numeros ſimplices. Supponatur ſimul cum linea AC transferri aliquod mobile, verbi gratia muſcam, quæ moveatur æquabiliter in linea AC tranſlata. & quo tempore linea motu accelerato percurrit A2, muſca percurrat AK, ita ut cum linea AC erit in puncto 2, muſca erit in puncto D, pariter dum linea AC pervenerit in 4, muſca æquabiliter mota ſit in E, ſintque 4D, DB æquales.



æquales. Dum linea A C erit tranſlata in punctum 8, muſca percurrerit in ſua linea tria intervalla intervallo AK æqualia, dum linea AC erit in puncto 16 muſca percurrerit quatuor intervalla ſitque in G, dum erit in puncto 32, muſca erit in H.

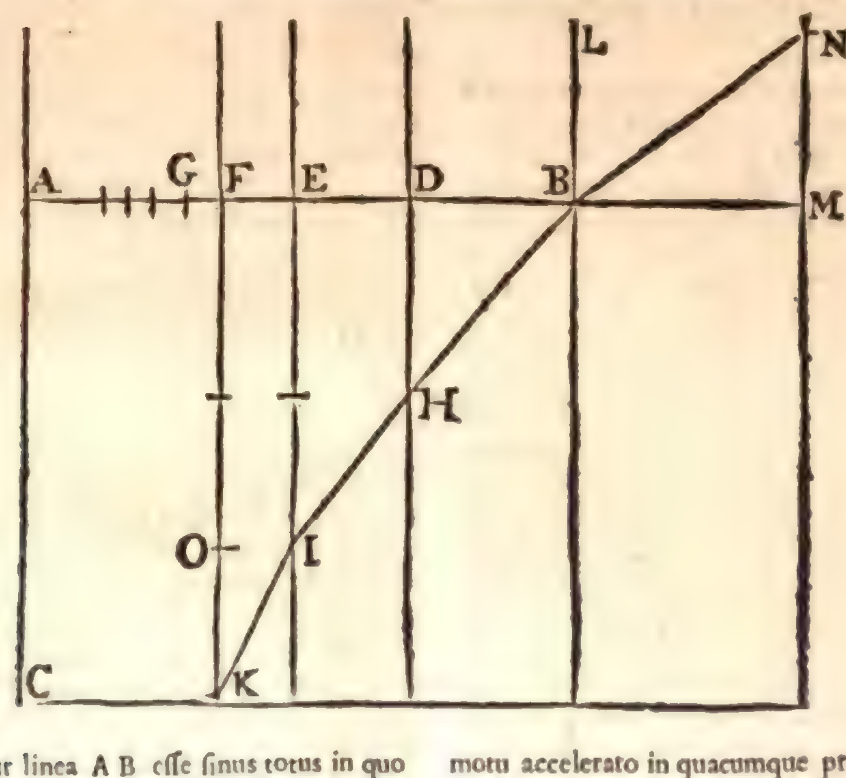
In linea AB ſunt numeri abſoluti & ſimplices, lineæ perpendiculares 2D, 4E, 8F, 16G, 32, H ſunt logarithmi numerorum 2, 4, 8, 16, 32 &c. Linea autem ex duplici illo motu reſultans, nempe linea curva ADEFGH ſit linea logarithmica. Si divideretur A B in partes æquales, exciperetque omnes numeros, in ea inveniremus logarithmos omnium numerorum intermediorum, ut ſi numeri 6 quærendus eſſet logarithmus ductâ in puncto 6 perpendicularis 6L, erit eius logarithmus, & ſic aliæ perpendiculares ad lineam uſque logarithmicam terminatæ exhibent logarithmos omnium numerorum. Neperus rem non ita ſubjicit oculis, neque hanc figuram facit, quæ tamen meo judicio ſatis appoſitè rem demonſtrat. Immo ſi in maximo plano aliquis operaretur, hancque figuram fideliſſimè deſcriberet, haberet inſtrumentum in quo logarithmos omnium numerorum quantum ad praxes geometricas pertinet, ſatis exactè determinaret.

Poterat linea A B dividi ſimpliciter in partes æquales, ita ut motus lineæ AC ſupra lineam A B eſſet æquabilis; motus autem muſcæ ſupra lineam AC tranſlatam, eſſet acceleratus quod figuram omnino diverſam exhiberet; & quidem prior ſuppoſitio rectè explicat logarithmos communes, hæc verò poſterior neceſſaria eſt ad logarithmos Neperi quos propoſitione ſequenti explico.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Explicatio logarithmorum propoſitorum à Nepero,



Intelligatur linea A B eſſe ſinus totus in quo linea A C, perpendicularis moveri concipiatur motu accelerato in quacumque proportione voluerimus, ita ut ita ſit AG ad AF, ſicut AF ad A E,

AE, & AE ad AD, & AD ad AB, & dividendo ita ſit GF ad FE, ſicut FE ad ED, & ED ad DB, & convertendo ut DB ad DE, ita DE ad EF, & EF ad GF, & componendo ut AB ad AD, ita AD ad AE, & AE ad AF, & AF ad AG, & ita conſequenter. Volo autem ut linea AC tranſlata motu accelerato perpendiculariter ſemper inſiſtat lineæ AB. Suppono item in linea AC muſcam moveri æquabiliter non ex A versùs C, ſed ex C versùs A, ita ut dum linea AC tranſlata fuerit in B, muſca etiam mota æquabiliter ex C versùs A, perveniat in A; hoc eſt inveniatur in B. Volo inſuper ut motus muſcæ in ipſo puncto B, inveniatur æqualis, ſeu æque velox, ac motus tranſlationis ipſius lineæ AC, qui computatur in AB, ex quo fit, ut quia motus tranſlationis lineæ AC, eſt acceleratus, velocior ſit in B quam in D, quia omnis motus acceleratus minuitur versùs initium motûs; ex quo fit etiam ut æquè velox ſit motus muſcæ in H ac in B; ergo motus muſcæ velocior eſt in H, quam ipſe motus tranſlationis ſit velox in D, quare à puncto C uſque ad punctum B ſemper muſca movebitur velocius quam linea; quare cum eodem tempore quo linea AC, transfertur ex D in B, ac ſuper A B muſca percurrat lineam HD, & velocitatem æqualem habeat velocitati tranſlationis in B, quæ major eſt quam in DB cùm creſcat, linea HD quam percurret muſca major erit quam linea DB; ita oſtendam lineam EI eſſe majorem quam ED, & FK majorem quàm FD. Quod probabo de aliis omnibus ſimiliter.

Suppono ſecundò muſcam ubi pervenerit in B ulterius continuare ſuum motum æquabilem versùs partes L, item lineam AC ultra B transferri motu accelerato in eadem ratione, ita ut ſit eadem ratio AE ad AD & AD ad AB, quæ AB ad AM, & pariter dividendo eadem ſit ratio ED ad DB, quæ DB ad BM. Quia autem motus muſcæ eſt ſemper æquè velox ac erat in B, motus autem tranſlationis ſit velocior in tota BM, quam erat in B cum ſit acceleratus, ideo in BM motus tranſlationis major erit motu muſcæ. Supponamus igitur interea dum linea transfertur ex B in M, muſcam conficere lineam MN, clarum eſt lineam BM, majorem eſſe linea MN, quod de aliis omnibus probabo ultra punctum B.

Quia autem diximus ſuprà, nos poſſe ponere logarithmos decreſcere, interea dum numeri geometricè proportionales creſcunt, ſint lineæ AG, AF, AE, AD, AB, AM, numeri geometricè creſcentes, ſintque lineæ FK, EI, DH logarithmi decreſcentes æquabiliter, erunt igitur logarithmi, diſtantia muſcæ à linea AB, quæ in puncto B nulla eſt, cum muſca ſit in linea AB, eſt igitur logarithmus lineæ AB, ſeu ſinus totius O. Quia autem logarithmi eundem ſemper tenorem obſervare debent, utpote in proportione Arithmetica continua, cùm decreſcant uſque ad B, decreſcere etiam debent ultra B, ſeu ultra nihilum, id eſt O; igitur in tota linea AB logarithmi decreſcunt uſque ad O, at verò ultra B recedent à zero, è contraria parte nempe erunt numeri defectivi. Ponamus logarithmum EI eſſe 200, & DH eſſe 100. in B eſſe O, logarithmus MN erit—100. Hoc eſt minus 100. Explicuimus autem jam ſupra quomodo intelligendi ſint numeri defectivi.

COROLLARIUM.

In hac logarithmorum ſpecie, omnis numerus major ſinu toto habet logarithmum defectivum, quare tangentes omnes arcuum majorum gradibus 45 habent ſinum defectivum ſicut & ſecantes omnes. Ratio autem quare Neperus ſelegit hanc ſpeciem logarithmorum in qua ſinus totus haberet logarithmum o, hæc videtur eſſe, quod ut plurimum in operationibus trigonometricis ſit regula trium, in qua ſinus totus primum locum obtinet, quare ſecundùm regulam proportionum ſubtrahendus eſſet logarithmus ſinus totius, qui cum ſit o, ſubtractio nulla eſt quare ſola additione tunc peragitur tota operatio.

Sequitur item cum numeri minores infra ſinum totum majores habeant logarithmos, initio lineæ A habere pro logarithmo lineam infinitam, cùm enim dividitur linea AB in partes proportionales, quarum BD ſit prima incipiendo à puncto B, & & decreſcant in certa proportione, erunt in AB termini infiniti, ſed pro ſingulis terminis augetur logarithmus lineâ, quæ ſit æqualis lineæ DH, logarithmus initii lineæ AB erit linea continens infinitas lineas, æquales lineæ DH, quæ neceſſariò infinita eſſe debebit.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Logarithmus cujuſcumque ſinus major eſt exceſſu ſinu totius ſupra illum, & minor eſt exceſſu quo tertia proportionalis huic ſinui, & ſinui toti, ſuperat ſinum totum.

Proponatur ſinus quicumque AD, qui neceſſariò ſinu toto AB minor erit, ſit DB exceſſus quo à ſinu toto ſuperatur, ſit item AM tertia proportionalis huic ſinui AD, & ſinui toti AB, hoc eſt ita ſit AD ad AB, ſicut AB ad AM, ſit BM exceſſus hujus tertiæ proportionalis ſupra ſinum totum AB, dico DH logarithmum ſinus AD, majorem eſſe quam DB, & minorem quam BM.

Demonſtratio. Cum muſca noſtra ſeu mobile æquabile, æquè velociter moveatur dum percurrit HD, ac movetur in B, & motus tranſlationis ſit minus velox quam in B, & eodem tempore percurrantur DH & DB, erit DH major quam DB, è contra cum eodem tempore percurratur BM, quo DB, & DH, & in BM motus tranſlationis, utpote acceleratus major ſit quam in B, velocior erit quam motus muſcæ; ergo DH minor erit quam BM, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVIII.

Theorema.

Cujuſlibet ſinûs exhibere terminos logarithmicos, ſeu numeros intra quos poſitus ſit eius logarithmus.

Sit ſinus datus AD prioris figuræ, 9999999, cujus logarithmus quæritur; qui quia non poteſt facilè inveniri, quæruntur termini intra quos exiſtat. Ex numero

S	10000000 . 0000000
T	9999999 . 0000000
V	1 . 0000000
X	1 . 0000001

S, ſinu toto ſeptem cyphris aucto, ſubtrahe ſinum

 propo

propoſitum T, ſeptem cyphris pariter auctum, reſtabit numerus V, repræſentans in figura lineam DB, fiat ut T ad S, ita V ad X, eritque numerus X repræſentans figuræ lineam BM, dico logarithmum ſinus T, conſiſtere intra numeros V & X, ſeu majorem eſſe numero V, & minorem numero X.

Demonſtratio. Cum ita ſit in priori figura AD ad AB, ſicut AB ad AM, erit viciſſim ut AM ad AB, ita AB ad AD; auferatur ex AM linea AB, ex AB auferatur AD, erit ut totum AM ad totum AB, ita ablatum AB ad ablatum AD, ergo reliquum BM ad reliquum DB erit ut totum AM ad totum AB, ergo etiam erit ut AD ad AB, ita DB ad BM, ſeu ut numerus T ad S, ita V ad X; igitur numerus X eſt idem ac linea BM prioris figuræ: logarithmus autem DH major eſt quam DB, ſeu quam numerus V, & minor quam BM, ſeu quam numerus T; quod erat demonſtrandum.

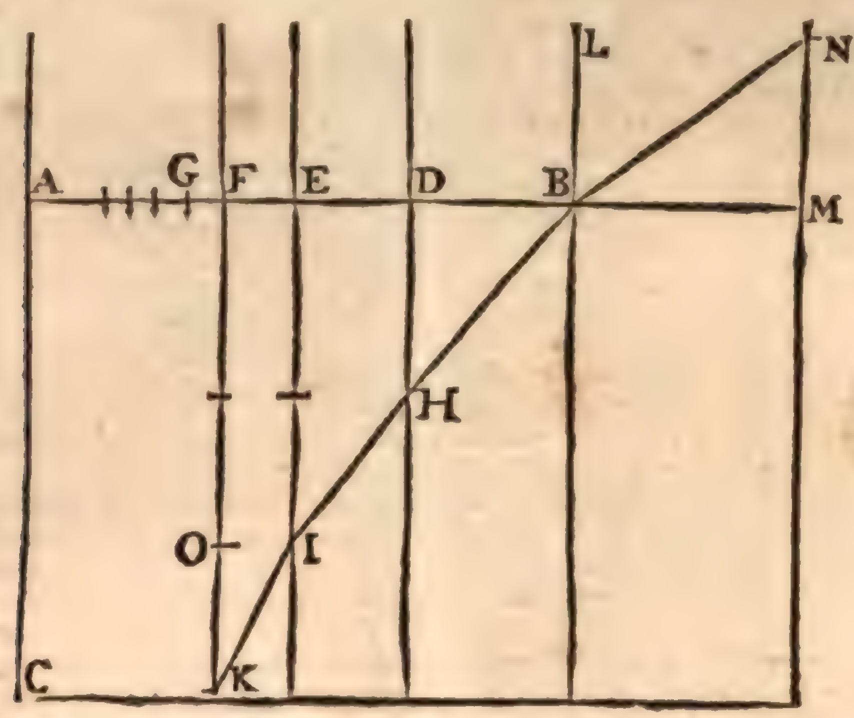
COROLLARIUM.

Si dentur plurimi ſinus decreſcentes in eadem ratione quæ eſt AB ad AD, ſciaturque numerus terminorum, habebis (*per 4. huius*) logarithmum ultimi, ſcilicet multiplicando logarithmum primi per numerum intervallorum.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema.

Sinus totus ad differentiam logarithmorum ſinuum maiorem rationem habet, quam minor ſinus ad differentiam ſinuum, & minorem quam maior ſinus.



Proponantur duo ſinus AF, AE, quorum differentia FE, ſint eorum logarithmi FK, EI, quorum differentia ſit OK; dico majorem eſſe rationem ſinus totius AB ad OK, quam AF ad FE, & eius ſinus totius AB ad OK minorem eſſe rationem quam AE ad eandem FE; fiat ut AF ad FE, ita AB ad BM, & ut AE ad FE ita AB ad BD.

Demonſtratio. Cum ſit ut AF ad FE, ita AB ad BM, erit componendo ut AE ad EF ita AM ad BM, ſed ut AE ad EF; ita fecimus AB ad BD, igitur ita eſt AM ad BM ſicut AB ad BD: & per converſionem rationis ut AE ad AF, ita AB ad AD, ergo logarithmi erunt æquè differentes; ſed logarithmus ſinus AD major eſt quam linea DB, & minor quam DM, & ſeipſo toto differt à logarithmo ſinus totius AB qui eſt O; ergo etiam OK differentia ipſorum FK, EI major eſt quam DB, & minor quam BM. Sed ut AF ad FE, ita AB ad BM; AB autem ad BM majorem, minorem habet rationem quam ad OK minorem, ergo ſinus totus ad OK majorem habet rationem quam AF ad FE, pariter ita eſt AE ad EF, ſicut AB ad BD, ſed AB ad BD minorem, majorem habet rationem quam ad OK majorem; ergo minor eſt ratio AB ad OK, quam AE ad EF, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Ex cognito alicujus ſinus logarithmo, alterius cujuſcumque ſinûs logarithmum eliciemus, verbi gratia detur ſinus 9900473, & alius quicumque ſinus 9900000, ſitque cognitus logarithmus prioris, differentia ſinuum eſt 473, fiat ut major ſinus ad differentiam 473, ita ſinus totus ad 477, & ut minor ſinus ad 473, ita ſinus totus ad 479, ſinus totus ad differentiam logarithmorum majorem rationem habebit, quam ad 479, & minorem quam ad 477, ergo differentia bene conſtitui poteſt 478.

PROPOSITIO XL.

Problema.

Sinuum majorum quam 999700 logarithmos exhibere.

Subtrahatur ſinus datus, à ſinu toto, & ille erit logarithmus,

Digitized by Google

logarithmus. Quamvis enim logarithmus ſit paulò major, non tamen differentia erit unitatis, quod potius ipſa operatione probatur, quàm ulla demonſtratione.

PROPOSITIO XLI.

Problema.

Continuare 100 numeros in proportione Geometrica quæ eſt inter ſinum totum, & ſinum eo minorem unitate nempe 9999999.

Jam ad praxin accedimus, & quia facilè numerorum non magno intervallo à ſinu toto diſtantium facilè logarithmos invenimus, qui proximo eſt exceſſus ſinus totius, ſupra propoſitum ſinum; & aliunde datis pluribus numeris geometricè proportionalibus, & dato logarithmo primi, facilè exceſſum logarithmi ſinus totius ſupra iſtius logarithmum, (quæ eſt ipſemet logarithmus, cum logarithmus ſinus totius ſit 0) multiplicando per numerum intervallorum, habetur logarithmus ultimi, ideo plurimos numeros proportionales inveſtigamus incipiendo ſcilicet à ſinu toto, id autem hoc modo præſtamus.

Primò majoris accurationis gratiâ augetur ſinus totus 7 cyphris, eſtque numerus A. Secundus numerus eſt B qui fit per ſubtractionem numeri C, qui eſt 10000000 pars illius. Ut habeas numerum auferendum ex B, fiat ut A ad C, ita B ad D, quod ut præſtes multiplica B per C quod fit additione 7 cyphrarum cum ſit numerus decadicus, divide per A, qui cum ſit numerus etiam decadicus diviſio fiet abjectione 14 cyphrarum ex producto habebiſque numerum D qui ſubtractus ex B dat tertium numerum E. Fiat item ut A ad C ita E ad F, nempe multiplica E per C additione 7 cyphrarum habebitque numerus E ſic multiplicatus cyphras 14, diviſio autem per A fit abjectione 14 cyphrarum, unde quotiens eſt F qui ſubtractus ex E, efficit quartum numerum G, fiat ut A ad C ita G ad H, atque ita deinceps intra unam horam poteris continuare centum numeros in proportione numeri A ad B, quorum ultimus ſi bene operatus es, erit numerus S.

A	10000000	. 0000000
	C 1	. 0000000
B	9999999	. 0000000
	D	9999999
E	9999998	. 0000001
	F	9999998
G	9999997	. 0000003
	H	9999997
I	9999996	. 0000006
	K	9999996
L	9999995	. 0000010
	M	9999995
N	9999994	. 0000015
	O	9999994
P	9999993	. 0000021
	Q	9999993
R	9999992	. 0000027
S.	9999900	. 0000021

Quia autem primi habes logarithmum nempe differentiam inter numerum A & B quæ eſt C hæc multiplicata per numerum intervallorum dabit logarithmum numeri 5, nempe 100.

PROPOSITIO XLII.

Theorema.

Continuare quinquaginta numeros, in proportione, quæ eſt 10000000 ad 9999900.

Secunda tabula quam Neperus proponit eſt quinquaginta numerorum continuè proportionalium quorum primus ſit ſinus totus A, ſecundus ſit C, proximè inventus, hæc ratio ut ad minores numeros revocetur ablatis utrinque duabus cyphris, eſt ut 100000 ad 99999, hæc autem proportio habetur delendo ex quolibet numero partem 100000, quod fit delendo numeri quinque ultimas cyphras.

A	10000000	. 0000000
	B 100	. 0000000
C	9999900	. 0000000
	D 99	. 9990000
E	9999800	. 0010000
	F 99	. 9980000
G	9999700	. 0030000
	Quinquageſimus	
H	9995001	. 222927

Sit ergo ſinus totus A 7 cyphris auctus, cujus ſi deleas quinque ultimas cyphras fiet numerus B, qui ſi ſubtrahatur ex A, fiet C, ſecundus. Hujus numeri ſi deleantur quinque ultimæ cyphræ, fiet numerus D, quo ſubtracto ex D, reliquus erit tertius E, atque ita ſemper operando uſque ad quinquageſimum qui erit numerus H, quinquaginta fient numeri in ratione numeri A ad C, nam auferendo 100000 partem numeri A, fit numerus C, pariter auferendo 100000 partem ex numero C fit numerus E, atque ita conſequenter. Non continuatur tamen ulterius hæc ſeries, quia fractio eſt jam ſatis magna, nempe major quinta parte unitatis. Cum igitur habeatur logarithmus primi nempe ſinus totius, & ſecundi qui eſt C, cujus cognitus eſt logarithmus per præcedentem, multiplicato ejus logarithmo per 50 numerum intervallorum habebitur logarithmus numeri H.

PROPOSITIO XLIII.

Problema.

Continuare numeros 2 in proportione quæ eſt ſinus totius 10000000 ad numerum 9995000.

Primò cognito logarithmo numeri 9995001 facilè habetur logarithmus numeri 9995000, nam ſinus totus majorem habet rationem ad differentiam logarithmorum quam ſinus minor ad differentiam ſinuum nempe unitatem, & minorem quam major ſinus ad eamdem unitatem, ideoque (*per coroll. 39.*) habebitur logarithmus numeri 9995000.

Reducatur ſinus totius ad propoſitum numerum ratio ad minores terminos; deletis utrinque tribus cyphris, eritque ut 1000 ad 9995. Fit autem ex numero 10000, numerus 9995, ſi auferas 5, nempe partem ejus bis milleſimam; quare ex ſingulis auferre debes partem bis milleſimam, habetur autem numeri cujuſlibet pars milleſima, ſi ejus deleas tres ultimas cyphras, & bis milleſima, ſi reliquum dividas per medium, ut ſi numeri A deleas tres ultimas cyphras, & reliqui aſſumas dimidium, habebis numerum B, partem bis milleſimam numeri A, quo numero B ſubtracto ex numero A fit numerus C, pariter habebis numeri C partem bis milleſimam D deletis tribus ultimis ejus cyphris & reliquo bifariam diviſo.

A	10000000	. 0000000
	B 5000	. 0000000
C	9995000	. 0000000
	D 4997	. 5000000
E	9990002	. 5000000
	F 4995	. 0012000
G	9985007	. 4987500
H	9900473	. 5780800

diviſo. Hoc numero D ſubtracto ex C fit numerus E, atque ita conſequenter numeros 2 abſolves, eritque H vigeſimus primus ſi benè opereris. Horum omnium habebis logarithmos, cùm enim habeas logarithmum primi nempe ſinus totius, & ſecundi C, hic logarithmus continuè additus ſingulorum.

PROPOSITIO XLIV.

Problema.

Conſtruere viginti unam ſeriem in proportione ſinûs totius ad numerum H, in quibus numeri præcedenti propoſitione inventi, primum locum occupent.

Numerus præcedenti propoſitione inventus fuit 9900473. 57808000. cujus conſequenter habetur logarithmus, quæratur (*per prop.* 39.) logarithmus numeri 9900000, continuenturque quotquot poterunt numeri in proportione quæ eſt ſinus totius 10 00000 ad 9900000 eſt ſeu 100 ad 99, habetur autem centeſima pars alicujus numeri ſi ejus duas ultimas cyphras deleas, quare ſingulas hujuſmodi ſeries continuare poteris quamdiu fractio major non erit, quoties verò fiet aliqua fractio, (*per* 39 *hujus*) invenies numeri vicinioris integri logarithmum, atque ita eandem ſeriem & in eadem proportione continuabis ut ſi numeri R. 9806049. 5000000 ſcias logarithmum facilè numeri 9806049. invenies logarithmum (*per* 39.)

A	10000000 . 0000000
K	100000 . 0000000
L	9900000 . 0000000
M	99000 . 0000000
N	9801000 . 0000000
Secunda ſeries	
C	9995000 . 0000000
O	99950 .
P	9905050 . 0000000
Q	99050 . 5000000
R	9806049 . 5000000
Tertia ſeries	
E	9990001 . 5000000
Quarta ſeries.	
G	9985007 . 49875000

Iſtæ omnes ſeries in eadem ratione procedunt, atque adeo logarithmi ſe eodem exceſſu ſuperant.

Atque hoc modo habentur omnes numeri procedentes geometricè quantum ſufficit ad conſtruendum canonem præcipuè cum ope prop. 39. facilè lacunas replere poſſimus; conſtitutis etiam logarithmis ſinuum facilè logarithmos numerorū abſolutorum ex iis eruemus. Nam ſinus eſt aliquis numerus abſolutus. Si deſunt nonnulli numeri abſoluti intermedii prop. 39. ejus inveniet logarithmum.

PROPOSITIO XLV.

Problema.

Uſus logarithmorum Neperi.

Quia ut diximus ſuprà, omnes numeri majores ſinu toto, logarithmos habent deficientes, ſeu minores nihilo qui hanc notam defectus habent —, quæ minus ſignificat, debet igitur logiſta acceſſere ex Algebra modum addendi, aut ſubtrahendi hujuſmodi numeros; ne autem cogatur ad alia recurrere, hîc breviter praxin & explicationem perſtringo.

Solent hujuſmodi numeri defectivi explicari exemplo debitorum, & numeri poſitivi exemplo creditorum, quo major eſt numerus debitorum eo pauperior eſt mercator, quare ſi debeat 10, & habeat tantum 6, compenſatis omnibus, debebit adhuc 4, hoc eſt nihil habet, immo minus habet 4 nummis, nempe ſi alicunde illi accederent 4 nummi, nihil haberet, deberet enim illos creditori reddere.

Debita ergo ſignentur notâ — & credita nota †.

Omnis numerus cui nullum ſignum præponitur poſitivus eſt, cenſeturque habere ſignum † quod plus ſignificat.

Omnis numerus cui præponitur ſignum — defectivus eſt, hoc eſt ſi huic numero adderentur poſitivæ unitates totidem quod ſignificat, adhuc nihil efficeretur.

1 Regula Additionis ſi numeri eodem ſigno notentur debeantque addi fiat additio ſimplex & ſummæ prænotetur idem ſignum, ut ſi numeri A & B addendi ſint fiet numerus C, ſi D & E fiet numerus F.

A † 100	D — 36
B † 400	E — 40
C † 500	F — 36

Ratio quia ſi mercator habeat credita A & B, verè habebit creditum C quod illis duobus æquale eſt, pariter ſi debeat ex una parte 36, & ex alia 40, verè debebit 76.

2 Regula additionis, ſi ſigna fuerint diverſa, minor à majori ſubtrahatur & reliquo præponatur ſignum majoris. Ut ſi numeri G & H addendi ſint, ſubtrahatur H & G, & reliquo P, præpone ſignum majoris G mercator habet 50, & debent 40, debet fieri additio; ſeu componendæ ſunt partes, compenſatione facta habebit adhuc 10.

G + 50	K — 60
H — 40	L + 40
P + 10	M — 20

Quod ſi debeat 60, & habeat 40, compenſatione facta debebit adhuc 20.

1 Regula ſubtractionis ſi ſigna fuerint eadem, debeatque minor numerus ſubtrahi ex majore, fiat ſubtractio ſimplex ſervatis iiſdem ſignis, ut ſi B ſubtrahendus ſit ex A relinquitur C, ſi E ſubtrahi debeat ex D relinquitur F.

A + 50	D — 60
B + 40	E — 20
C + 10	F — 40

2 Regula ſubtractionis, ſi ſigna fuerint eadem, ſubtrahique debeat major numerus à minori, tunc ſubtrahatur minor numerus à majore, & reliquo præponatur ſignum contrarium, nam dum ſubtrahis H ex G, perinde eſt ac ſi adderes —70 ad + 50, ſed tunc ſubtrahis 50 à 70, & reliquo præponis ſignum —; ergo id etiam in tali caſu præſtare debes.

G + 50	K — 30
H + 70	L — 90
I — 20	M + 60

3 Regula ſubtractionis ſi ſigna fuerint diſſimilia fiat additio, maneat ſignum illius à quo fit ſubſtractio, ut ſi ex numero N ſubtrahere velis numerum O, fiet numerus P, neque enim auferre potes — 50 niſi ponendo 50, pariter ex q — 60 auferre debes R + 35, dico ſubtractionem fieri ſi augeas negationem ſeu numerum defectivum.

N + 40	q — 60
O — 50	R + 35
P + 90	S — 95

Pro Tangentibus.

In talibus Neperi logarithmi tangentium ſunt

differentiæ

differentiæ inter ſinum, & ſinum complementi, quæ differentiæ ſumptæ cum ſigno † plus inſerviunt arcubus minoribus quadrageſimo gradu, & prout defectivæ ſunt inſerviunt arcubus majoribus gradu 45.

Demonſtratio. Vidimus in propoſitione 16. præcedentis libri; ita eſſe ſinum complem. ad ſinum arcus, ut ſinus totus ad tangentem. Erunt logarithmi mediorum nempe ſinûs totius qui eſt o, & ſinûs arcûs, æquales logarithmis extremorum. Si ergo ex mediis nempe ex logarithmo ſinûs arcus auferatur logarithmus complementi qui eſt minor reſtat differentia abundans & poſitiva pro logarithmo tangentis.

In arcubus verò majoribus quadrante, cum logarithmus ſinus complementi ſit major quam ſinûs arcûs, debebit fieri ſubtractio majoris à minore, quare per 2 regulam ſubtractionis, ſubtrahi debet minor à majori, & reliquo, ſeu differentiæ præponitur ſignum.

Quare differentiæ ſinuum arcûs & complementi ut abundans, eſt logarithmus tangentis illius arcûs qui ad ſiniſtram eſt, minoris ſcilicet gradu 45, & ut defectiva eſt, logarithmus tangentis arcus ad dexteram, majoris quadrante, ideo hæc differentia in medio habet utrumque ſignum. Videnda eſſet tabula Neperi in ipſo Nepero, quæ ingenioſiſſimè conſtructa eſt.

Pro ſecantibus.

Per propoſitionem 17 *præcedentis*, ſinus totus medius eſt proportionalis inter ſinum complementi, & ſecantem arcûs (*ergo per 6. hujus*) erit logarithmus medii bis ſumptus æqualis logarithmis extremorum ſeu complementi, & ſecantis. Sed logarithmus ſinus totius ex conſtructione, eſt o, qui bis ſumptus eſt o; ergo logarithmi ſinus complementi, & ſecantis arcus debent efficere o. Quod ut præſtetur, cum logarithmus ſinus complementi ſit abundans, ſeu poſitivus, habeatque ſignum †, logarithmus ſecantis debebit habere eaſdem cyphras, & ſignum — ut ſi logarithmus complementi eſſet † 1000, logarithmus ſecantis arcus deberet eſſe — 1000. ſic enim additi efficerent o.

Atque hæc de logarithmis Neperi ſufficiant tam ad eorum conſtructionem, quam ad eorum uſum. Facilitatem autem ſummam habent ut conſtruantur, & in multis operationibus trigonometricis compendioſius rem quæſitam exhibent unica ut plurimum additione.

PROPOSITIO XLVI.

Problema.

Uſus nonnulli logarithmorum in Arithmeticis.

Cum regulæ præcipuæ quæ in arithmetica traduntur, in regula proportionum ſitæ ſint, & hæc nullo negotio per logarithmos abſolvatur, in logarithmis totius Arithmeticæ compendium habemus. Abſolvitur autem (*ut dixi ſupra*) regula proportionum ſi datis tribus numeris logarithmos ſecundi, & tertii addamus. & ex ſumma auferamus logarithmum primi. Alios etiam uſus ſupra tradidimus. Reſtat tantum unus, aut alter quem omittere nolui. Dabo etiam poſtea uſum logarithmorum in geometricis.

Propoſitis quotcunque continuè proportionalibus Geometricè, inter datos quemlibet ejuſdem ſeriei invenire.

Primò quidem ſi proponatur aliquis numerus qui dicatur obtinere certam ſedem in continua ſerie proportionalium, incipientium ab unitate, facilè hunc primum invenies, dividendo ejus logarithmum per numerum intervallorum uſque ad unitatem habebis logarithmum primi numeri ab unitate, ut ſi dicatur numerus 64 obtinere ſextam ſedem ab unitate, quæritur ejus radix, ſeu primus numerus in tali ſerie. Logarithmum numeri 64, dividè in 6, & habebis logarithmum binarii qui eſt primus numerus poſt unitatem & ratione dupla 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.

Demonſtratio clara eſt. Cum enim hi 7 numeri ſint continuè proportionales, eorum logarithmi æquali exceſſu ſe ſuperabunt, & cum logarithmus unitatis ſit o (de logarithmis enim communibus quæſtio eſt) ſi dividas logarithmum ultimi per numerum intervallorum, habebis logarithmum binarii. Ita logarithmum quadrati qui in ſerie continuè proportionalium ab unitate incipientium ſecundus eſt ab ea, bifariam dividimus ut logarithmum radicis habeamus. Logarithmum cubi in tres partes dividimus, quadratoquadrati in quatuor partes &c. ut radicem ipſam habeamus.

Secundò. Proponantur duo numeri 729. 15625, inter quos dicantur eſſe quinque medii proportionales, minoris logarithmus à majoris logarithmo ſubtrahatur, ut eorum differentia habeatur, quæ dividi debet in 6, nempe per numerum intervallorum, ut habeatur differentia inter unius logarithmum ſequentem, hæc ultima differentia multiplicetur per ſedem numeri quæſiti, ut ſi quæras tertium horum intermediorum, & addatur logarithmo numeri 729. exurget logarithmus tertii intermedii. Res per ſe patet. Hinc ſolvitur Problema Deliacum, non tamen Geometricè, eò quòd conſtitutio logarithmorum Geometrica non ſit, ſed conſiſtat in extractionibus radicum quæ per attentationem abſolvuntur.

COROLLARIUM.

Hæc propoſitio poteſt habere locum in exemplo mercatorio. Nempe in Anatociſmo ut vocant. Supponamus fœnus mercatorium eſſe 6 in ſingula centenaria, ita tamen ut fœnus ſorti accedat pro ratione temporis decurſi; ſitque initio data ſors 123, & cupio ſcire quantum ſorti accedat in fine ſingulorum annorum. Sumantur logarithmi numerorum principalium 100 & 106, ſitque eorum differentia quaſi annua, quæ in partes 12 diviſa, dabit differentiam menſtruam. Quæratur quantum accedere debeat ſorti 123 in fine annorum 7, menſium quinque.

Multiplicetur differentia annua per 7 & menſtrua per 5. fiatque ſumma quæ logarithmo ſortis 123. addatur exurgetque logarithmus juſti pretii, ita invenies 123 nummos in fine annorum 7, menſium 5, & dierum 9, exigere nummos 189. [illegible]

Ratio eſt quod in tali praxi conſtituuntur tot continue proportionalia in ea ratione quæ eſt 100 ad 106, quot ſunt anni, multiplicatione differentiæ logarithmorum, idem præſtatur circa

menſem, in ea ratione quæ eſt ſortis ad lucrum menſtruum.

Converſa præcedentis praxis facilè habebitur. nempe nummorum.

Data ſorte, & quotlibet annorum lucro, Rationem ſortis ad lucrum annuum exhibere.

Hic caſus propriè loquendo in inventione mediorum proportionalium conſiſtit. Sit ergo data ſors 1234, & decennii ſpatio lucrum ſorti additum fuerit 766. Quæritur quæ ſit ratio ſortis ad lucrum annuum.

Fiat ſumma ſortis & lucri 2000, ſumatur differentia logarithmorum ſortis 1234, & ſummæ 2000, hujus differentiæ pars decima addita logarithmo numeri 100, dabit logarithmum ſortis auctæ fœnore, inveniesque 104 $\frac{9471517}{[illegible]}$.

Demonſtratio. Addita parte decima differentiæ logarithmorum, logarithmo ſortis invenis primum medium proportionalem è novem continuis proportionalibus, qui ſunt inter ſortem & ſummam ex ſorte & lucro decennali, & quia ut hæc ſors ad ſummam ſortis & lucri annui, ita vis facere 100 ad idem 100, cum ſuo lucro annuo & quatuor proportionalium logarithmi ſunt æque differentes: ergo ſi hanc decimam partem differentiæ addas logarithmo centenarii, habebis hunc quartum numerum proportionalem qui quæritur.

Invenire pretium quo redimi debet annua penſi in 10 annos, ante tempus conſtitutum.

Supponitur annua penſio 57 nummorum, quæ annuatim pendi debet in 10 annos. Quæritur pretium quo redimatur, facta æſtimatione ſecundùm uſuram quæ ſingulis annis addit 6 centeſimas.

Primò quæratur ſumma quæ annuatim reddat nummos 57 facta regula trium ſi 6 dant 100, quid dabunt 57, nempe exceſſum logarithmi numeri 100. Supra logarithmum numeri 6. adde logarithmo numeri 57, inveniesque 950 pro ſorte quæ annuatim efficit uſuram 57, ſed prima ſolutio fieri debet tantum ad finem quinquennii.

Secundò exceſſum logarithmi 106, ſupra logarithmum 100, multiplica per 10 annos & adde logarithmo ſortis inventæ 950, habebiſque logarithmum ſortis auctæ ad finem decennii, quæ erit 1701 [illegible], è qua ſi auferas ſortem prius inventam, reſtabit 751.

Sed cum ſolutio fieri non debeat niſi poſt exactum quinquennium, ſumma expectanda eſſet poſt annos 14. Quæritur ergo quantum imminui debeat. Ex logarithmo ſummæ 751 aufer differentiam logarithmorum prius inventam, multiplicatam per 14, habebiſque logarithmum hujus numeri 332; debet igitur redimi hoc pretio.

Aliæ multæ quæſtiones Arithmeticæ fieri poſſunt quæ in hunc modum per logarithmos facilè ſolventur.

CANON

Sinuum, Tangentium & Secantium. Item Logarithmorum Sinuum, & Tangentium.

Sinus

Digitized by Google

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	0	0	100000.00	0	0	60	10000000	Infinit.	Infinit.	10.0000000	Infinit.
1	29.09	29.09	100000.00	6.4637251	6.4637261	59	99999.99	343774667.	343774682.	9.9999999	13.5362739
2	58.18	58.18	100000.02	6.7647561	6.7647562	58	99999.98	171887319.	171887348.	9.9999999	13.2352438
3	87.27	87.27	100000.04	6.9408473	6.9408470	57	99999.96	114591530.	114591574.	9.9999998	13.0591525
4	116.36	116.36	100000.07	7.0657860	7.0657863	56	99999.93	85943630	85943689.	9.9999997	12.9342137
5	145.44	145.44	100900 11	7.1626960	7.1626964	55	99999.89	68754887.	68754960.	9.9999995	12.8373036
6	174.53	174.53	100000.16	7.2418771	7.2418778	54	99999.85	57295721.	57295809	9.9999993	12.7581222
7	203.62	203.62	100000.21	7.3088239	9.3088249	53	99999.79	49110600.	49110702.	9.9999991	12.6981752
8	232.71	232.71	100000.27	7.3668157	7.3668169	52	99999.73	41971757.	41971873.	9.9999988	12.6331831
9	261.80	261.80	100000.34	7.4179681	7. 417969	51	99999.66	38197099.	38197230.	9.9999985	12.5820304
10	290.89	290.89	100000.42	7.4637255	8.4637273	50	99999.58	34377371.	34377516.	9.9999982	12.5362727
11	319.9.	319.98	100000.51	7.5051181	7.5051203	49	99999.49	31252137.	31252297.	9.9999978	12.4948797
12	349.06	349.07	100000.61	7.5429065	7.5429091	48	99999.39	28647773.	28647948.	9.9999974	12.4570909
13	378.15	378.16	100000.72	7.5776684	7.5776715	47	99999.28	26444080.	26444269	9.9999969	12.4223285
14	407.24	407.25	100000.83	7.6098530	7.6098566	46	99999.17	24555198.	2455540[illegible]	9.9999954	12.3901434
15	436.33	436.33	100000.95	7.6398160	7.6398201	45	99999.05	22918166.	22918385.	9.9999959	12.3601799
16	465.42	465.42	100001.08	7.6678445	7.6678492	44	99998.92	21485762.	21485995.	9.9999953	12.3321508
17	494.51	494.51	100001.22	7.6941733	7.6941786	43	99998.78	20221875.	20222122.	9.9999947	12.3058214
18	523.60	523.60	100001.37	7.7189966	7.7190026	42	99998.63	19098419.	19098[illegible]8.	9.9999940	12.2809974
19	552.68	552.69	100001.53	7.7424775	7.7424841	41	99998.47	18093220.	18093496.	9.9999934	12.2575159
20	581.77	581.78	100001.70	7.7647537	7.7647610	40	99998.31	17188540.	17188831.	9.9999927	12.2352390
21	610.86	610.87	100001.87	7.7859427	7.7856503	39	99998.13	16370019	16370325.	9.9999919	12.2140492
22	639.95	639.96	100002.05	7.8061458	7.8061547	38	99997.95	15625908.	15626228.	9.9999911	12.1938453
23	669.04	669.05	100002.24	7.8254507	7.8254604	37	99997.76	14946502.	14946837.	9.9999903	12.1745396
24	698.13	698.14	100002.44	7.8439338	7.8439444	36	99997.56	14323712.	14324061.	9.9999994	12.15 0556
25	727.21	727.23	100002.65	7.8616623	7.8616738	35	99997.36	13750745	13751108.	9.9999885	12.1383262
26	756.30	756.32	100002.86	7.8786953	7.8787077	34	99997.14	13221851.	13222229.	9.9999876	12.1212923
27	785.39	785.41	100003.08	7.8950854	7.8950988	33	99996.92	12732134.	12732526.	9.9999866	12.1049012
28	814.48	814.50	100003.31	7.9108793	7.9108938	32	99996.68	12277395	12277803.	9.9999896	12.0890062
29	843.57	841.60	100003.55	7.9261190	7.9261344	31	99996.44	118540.2	11854440.	9.9999845	12.0738656
30	872.65	872.69	100003.80	7.9408419	7.9408584	30	99996.19	11458865.	11459301.	9.9999835	12.0591416
31	901.74	901.78	100004.06	7.9550819	7.9550996	29	99995.93	11089105 1	11089656.0	9.9999823	12.0449004
32	930.83	930.87	100004.33	7.9688698	7.9688886	28	99995.66	10742648 4	10743113.8	9.9999812	12.0311114
33	959.92	959.96	100004.61	7.9822334	7.9822534	27	99995.39	10417094.5	10417574.5	9.9999800	12.0177466
34	989.00	989.05	100004.89	8.9951980	7.9952192	26	99995.11	10110693.2	10111184.8	9.9999788	12.0047808
35	1018.09	1018.14	100005.18	8.0077867	8.0078092	25	99994.82	9821794.3	9822303 3	9.9999775	11.9921908
36	1047.18	1047.24	100005.48	8.0200207	8.0200445	24	99994.52	9548947.5	9549471.1	9.9999762	11.9799555
37	1076.27	1076.33	100005.79	8.0319195	8.0319446	23	99994.21	9290848.7	9291386.9	9.9999748	11.9680554
38	1105.35	1105.42	100006.11	8.0435009	8.0435274	22	99993.89	9046333.6	9046886.3	9.9999735	11.9564726
39	1134.44	1134.51	100006 44	8.0547814	8.0548094	21	99993.56	8814357.2	8814924 4	9.9999721	11.9451905
40	1163.53	1153.61	100006.77	8.0657763	8.0658057	20	99993.23	8593979 1	8594560 9	9.9999706	11.9341943
41	1192.61	1192.70	100007.11	8.0764997	8.0765306	19	99992.89	8384350.7	8384947.0	9.9999691	11.9214694
42	1221.70	1221.79	100007.46	8.0869646	8.0869970	18	99992.54	8184704.1	8185315.0	9.9999676	11.9130050
43	1250.79	1250.88	100007.82	8.0971832	8.0972172	17	99992.18	7994343.0	7994968 4	9.9999660	11.9027828
44	1279.87	1279.98	100008.19	8.1071669	8.1072025	16	99991.81	7812634.1	7813274.2	9.9999644	11.8927975
45	1308.96	1309.07	100008.57	8.1169262	8.1169634	15	99991.43	7639000.9	7639655.4	9.9999628	11.8830366
46	1338.05	1338.17	100008.96	8.1264710	8.1265099	14	99991.04	7472916.5	7473585.6	9.9999611	11.8734901
47	1367.13	1367.26	100009.35	8.1358104	8.1358510	13	99990.65	7313899 1	7314582.7	9.9999594	11.8641490
48	1396.22	1396.35	100009.75	8.1449532	8.1449956	12	99990.25	7161507.0	7162205.2	9.9999577	11.8550044
49	1425.30	1425.45	100010 16	8.1539075	8.1539516	11	99989.84	7015334.6	7016047.4	9.9999559	11.8460484
50	1454.39	1454.54	100010.58	8.1626808	8.1627267	10	99989.42	6875008.7	6875736.0	9.9999541	11.8372733
51	1483.48	1483.64	100011.01	8.1712804	8.1713282	9	99988.99	6740185.5	6740927.2	9.9999522	11.8286718
52	1512.56	1512.72	100011.45	8.1797129	8.1797626	8	99988.55	6610547.3	6611303.6	9.9999503	11.8202374
53	1541.65	1541.83	100011.89	8.1879848	8.1880364	7	99988.11	6485800.8	6486571.6	9.9999484	11.8119636
54	1570.73	1570.93	100012.34	8.1961020	8.1961556	6	99987.66	6365674.1	6366459.5	9.9999464	11.8038444
55	1599.82	1600.02	100012.80	8.2040703	8.2041259	5	99987.20	6249915.4	6250715.3	9.9999444	11.7958741
56	1628.90	1629.12	100013.27	8.2118949	8.2119526	4	99986.73	6138290 9	6139105.0	9.9999424	11.7880474
57	1657.99	1658.21	100013.75	8.2195811	8.2196408	3	99986.25	6030582.0	6031411.0	9.9999403	11.7803592
58	1687.07	1687.31	100014.24	8.2271335	8.2271953	2	99985.76	5926587.2	5927430.8	9.9999382	11.7728047
59	1716.16	1716.41	100014.73	8.2345568	8.2346208	1	99985.27	5826117.4	5826975.5	9.9999360	11.7653792
60	1745.24	1745.51	100015.23	8.2418553	8.2410215	0	99984.77	5728996.2	5729868.9	9.9999338	11.7580785

Grad. 1. — 88. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang
0	1745.24	1745.51	100015.23	8.2418553	8.2419215	60	99984.77	5728996.16	5729868.85	9.9999338	11.7580785
1	1774.32	1774.60	100015.74	8.2490332	8.2491015	59	99984.26	5635058.96	5635946.19	9.9999316	11.7508985
2	1803.41	1803.70	100016.26	8.2560943	8.2561649	58	99983.74	5544151.67	5545053.45	9.9999294	11.7438351
3	1832.49	1832.80	100016.76	8.2630424	6.2631153	57	99983.21	5456130.03	5457046.35	9.9999271	11.7368247
4	1861.58	1861.90	100017.33	8.2698810	8.2699563	56	99982.67	5370858.75	5371789.62	9.9999247	11.7300437
5	1890.66	1891.00	100017.88	8.2766136	8.2766912	55	99982.12	5288210.91	5289156.37	9.9999224	11.7233088
6	1919.74	1920.10	100018.43	8.2832434	8.2833234	54	99981.57	5208067.26	5209027.22	9.9999200	11.7166766
7	1948.83	1949.20	100018.99	8.2897734	8.2898559	53	99981.01	5130315.66	5131290.17	9.9999175	11.7101441
8	1977.91	1978.30	100019.56	8.2962067	8.2961917	52	99980.44	5054850.59	5055839.65	9.9999150	11.7037083
9	2006.99	2007.40	100020.14	8.3025460	8.3026335	51	99979.86	4981571.64	4982576.23	9.9999125	11.6973665
10	2036.08	2036.50	100020.73	8.3087941	8.3088842	50	99979.27	4910388.06	4911406.20	9.9999100	11.6911158
11	2065.16	2065.60	100021.33	8.3149136	8.3150462	49	99978.67	4841208.41	4842241.10	9.9999074	11.6849538
12	2094.24	2094.70	100021.94	8.3210269	8.3211221	48	99978.06	4773950.14	4774997.38	9.9999047	11.6788779
13	2123.32	2123.80	100022.55	8.3270163	8.3271143	47	99977.45	4708534.30	4709596.08	9.9999021	11.6728857
14	2152.41	2152.9[illegible]	[illegible]00023.17	8.3329243	8.3330249	46	99976.83	4644886.20	4645962.53	9.9998934	11.6669751
15	2181.49	2182.01	100023.80	8.3387529	8.3388563	45	99976.20	4582935.12	4584025.99	9.9998966	11.6611437
16	2210.57	2211.11	100024.44	8.3445043	8.3446105	44	99975.56	4522614.07	4523719.49	9.9998939	11.6553895
17	2239.65	2240.21	100025.09	8.3501805	8.3502895	43	99974.91	4463859.56	4464979.52	9.9998911	11.6497105
18	2268.73	2269.32	100025.75	8.3557835	8.3558953	42	99974.25	4406611.32	4407745.83	9.9998882	11.6441047
19	2297.81	2298.42	100026.41	8.3613150	8.3614297	41	99973.59	4350812.16	4351961.22	9.9998853	11.6385703
20	2326.90	2327.53	100027.08	8.3667769	8.3668945	40	99972.92	4296407.73	4297571.34	9.9998824	11.6331055
21	2355.98	2356.63	100027.76	8.3721710	8.3722915	39	99972.24	4243346.39	4244524.54	9.9998794	11.6277085
22	2385.06	2385.74	100028.45	8.3774988	8.3776223	38	99971.55	4191578.99	4192771.68	9.9998764	11.6223777
23	2414.14	2414.84	100029.15	8.3827620	8.3828886	37	99970.85	4141058.76	4142266.00	9.9998734	11.6171114
24	2443.22	2443.95	100029.86	8.3879622	8.3880918	36	99970.14	4091741.16	4092962.95	9.9998703	11.6119082
25	2472.30	2473.05	100030.58	8.3931008	8.3932336	35	99969.43	4043583.75	4044820.09	9.9998672	11.6067664
26	2501.38	2502.16	100031.30	8.3981793	8.3983152	34	99968.71	3996546.05	3997796.94	9.9998641	11.6016848
27	2530.46	2531.27	100032.03	8.4031990	8.4033381	33	99967.98	3950589.46	3951854.89	9.9998609	11.5966619
28	2559.54	2560.38	100032.77	8.4081614	8.4083037	32	99967.24	3905677.11	3906957.09	9.9998577	11.5916963
29	2588.62	2589.48	100033.52	8.4130676	8.4132132	31	99966.49	3861773.81	3863068.34	9.9998544	11.5867868
30	2617.69	2618.59	100034.28	8.4179190	8.4180679	30	99965.73	3818845.93	3820155.00	9.9998512	11.5819322
31	2646.77	2647.70	100035.05	8.4227168	8.4228690	29	99964.96	3776861.30	3778184.92	9.9998478	11.5771310
32	2675.85	2676.81	100035.82	8.4274621	8.4276176	28	99964.19	3735789.17	3737127.34	9.9998445	11.5723824
33	2704.93	2705.92	100036.60	8.4321561	8.4323150	27	99963.41	3695600.11	3696952.82	9.9998411	11.5676850
34	2734.01	2735.03	100037.39	8.4367999	8.4369622	26	99962.62	3656265.92	3657633.18	9.9998376	11.5630378
35	2763.09	2764.14	100038.19	8.4413944	8.4415603	25	99961.82	3617759.61	3619141.43	9.9998342	11.5584397
36	2792.16	2793.25	100039.00	8.4459409	8.4461103	24	99961.01	3580055.33	3581451.68	9.9998306	11.5538897
37	2821.24	2822.36	100039.82	8.4504402	8.4506131	23	99960.19	3543128.25	3544539.15	9.9998271	11.5493869
38	2850.32	2851.48	100040.65	8.4548934	8.4550699	22	99959.36	3506954.58	3508380.03	9.9998235	11.5449301
39	2879.40	2880.59	100041.48	8.4593013	8.4594814	21	99958.53	3471511.50	3472951.50	9.9998199	11.5405186
40	2908.47	2909.70	100042.32	8.4636645	8.4638486	20	99957.69	3436777.09	3438231.63	9.9998162	11.5361514
41	2937.55	2938.82	100043.17	8.4679850	8.4681725	19	99956.84	3402730.29	3404199.39	9.9998125	11.5318275
42	2966.62	2967.93	100044.03	8.4722626	8.4724538	18	99955.98	3369350.89	3370834.53	9.9998088	11.5275462
43	2995.70	2997.05	100044.90	8.4764984	8.4766933	17	99955.11	3336619.45	3338117.63	9.9998050	11.5233067
44	3024.78	3026.16	100045.78	8.4806932	8.4808920	16	99954.24	3304517.27	3306030.00	9.9998012	11.5191080
45	3053.85	3055.28	100046.67	8.4848479	8.4850505	15	99953.36	3273026.37	3274553.65	9.9997974	11.5149495
46	3082.93	3084.39	100047.56	8.4889632	8.4891696	14	99952.47	3242129.46	3243671.29	9.9997935	11.5108304
47	3112.00	3113.51	100048.46	8.4930398	8.4932502	13	99951.57	3211809.88	3213366.26	9.9997896	11.5067498
48	3141.08	3142.63	100049.37	8.4970784	8.4972928	12	99950.66	3182051.60	3183622.52	9.9997856	11.5027072
49	3170.15	3171.74	100050.29	8.5010798	8.5012982	11	99949.74	3152839.16	3154424.63	9.9997817	11.4987018
50	3199.22	3200.86	100051.22	8.5050447	8.5052671	10	99948.81	3124157.67	3125757.70	9.9997776	11.4947329
51	3228.30	3229.98	100052.15	8.5089736	8.5092001	9	99947.88	3095992.80	3097607.37	9.9997736	11.4907999
52	3257.37	3259.10	100253.09	8.5128673	8.5130978	8	99946.94	3068330.70	3069956.82	9.9997695	11.4869022
53	3286.44	3288.22	100054.05	8.5127264	8.5169610	7	99945.99	3041158.02	3042801.69	9.9997653	11.4830387
54	3315.52	3317.34	100055.01	8.5205514	8.5207902	6	99945.03	3014461.89	3016120.10	9.9997612	11.4792098
55	3344.59	3346.46	100055.98	8.5243430	8.5245860	5	99944.06	2988229.86	2989901.63	9.9997570	11.4754140
56	3373.66	3375.58	100056.96	8.5281017	8.5283490	4	99943.08	2962449.95	2964137.20	9.9997527	11.4716510
57	3402.73	3404.71	100057.95	8.5318281	8.5320797	3	99942.09	2937110.55	2938812.41	9.9997484	11.4679203
58	3431.81	3433.83	100058.94	8.5355228	8.5357787	2	99941.09	2912200.47	2913916.88	9.9997441	11.4642213
59	3460.88	3462.95	100059.94	8.5391863	8.5394466	1	99940.09	2887708.88	2889439.84	9.9997398	11.4605534
60	3489.95	3492.08	100060.95	8.5428192	8.5430838	0	99939.08	2863625.33	2865370.83	7.9997354	11.4569162

3489.95

Grad. 2.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log Tang.
0	3489.95	3492.08	100060.95	8.5428192	8.5430838
1	3519.02	3521.20	100061.97	8.5464218	8.5466909
2	3548.09	3550.33	100063.00	8.5499948	8.5502683
3	3577.16	3579.45	100064.04	8.5535386	8.5538166
4	3606.23	3608.58	100065.09	8.5670536	8.5573362
5	3635.30	3637.71	100066.15	8.5605404	8.5608276
6	3664.37	3666.83	100067.21	8.5639994	8.5642912
7	3693.44	3695.96	100068.28	8.5674310	8.5677275
8	3722.51	3725.09	100069.36	8.5708357	8.5711360
9	3751.58	3754.22	100070.45	8.5742139	8.5745197
10	3780.65	3783.35	100071.55	8.5775660	8.5778766
11	3809.71	3812.48	100072.66	8.5808923	8.5812077
12	3838.78	3841.61	100073.77	8.5841933	8.5845136
13	3867.85	3870.74	100074.89	8.5874694	8.5877945
14	3896.91	3899.88	100076.02	8.5907209	8.5910509
15	3925.98	3929.01	100077.16	8.5939483	8.5942832
16	3955.05	3958.14	100078.31	8.5971517	8.5974917
17	3984.11	3987.28	100079.47	8.6003317	8.6006767
18	4013.18	4016.41	100080.63	8.6934886	8.6038386
19	4042.24	4045.55	100081.80	8.6056126	8.6069777
20	4071.31	4074.69	100082.98	8.6097341	8.6100943
21	4100.37	4103.83	100084.17	8.6128235	8.6131889
22	4129.44	4132.96	100085.37	8.6158910	8.6162616
23	4158.50	4162.10	100086.58	8.6189369	8.6193127
24	4187.57	4191.24	100087.80	8.6219616	8.6223427
25	4216.63	4220.38	100089.02	8.6249653	8.6253518
26	4245.69	4239.52	100090.25	8.6279484	8.6283402
27	4274.75	4278.66	100091.49	8.6309111	8.6313083
28	4303.82	4307.81	100092.74	8.6338537	8.6342563
29	4332.88	4336.65	100094.00	8.6367764	8.6371845
30	4361.94	4366.09	100095.27	8.6396796	8.6400931
31	4391.00	4395.24	100096.55	8.6425634	8.6429825
32	4420.06	4424.38	100097.83	8.6454282	8.6458528
33	4449.12	4453.53	100090.12	8.6482742	8.6487044
34	4478.18	4482.68	100100.42	8.6511016	8.6515375
35	4507.24	4511.82	100101.73	8.6539107	8.6543522
36	4536.30	4540.97	100103.05	8.6567017	8.6571490
37	4565.36	4570.12	100104.38	8.6594748	8.6599279
38	4594.42	4599.27	100105.71	8.6622303	8.6626891
39	4623.47	4628.42	100107.05	8.6649684	8.6654331
40	4652.53	4657.57	100108.40	8.6676893	8.6681598
41	4681.59	4686.73	100109.76	8.6703932	8.6708697
42	4710.64	4715.88	100111.13	8.6730804	8.6735628
43	4739.70	4745.03	100112.51	8.6757510	8.6762393
44	4768.76	4774.19	100113.90	8.6784052	8.6789096
45	4797.81	4803.34	100115.30	8.6810433	8.6815437
46	4826.87	4832.50	100116.70	8.6836654	8.6841719
47	4855.92	4861.66	100118.11	8.6862718	8.6867844
48	4884.98	4890.82	100119.53	8.6888625	8.6893813
49	4914.03	4919.97	100120.96	8.6914379	8.6919629
50	4943.08	4949.13	100122.40	8.6939980	8.6945292
51	4972.14	4978.29	100123.85	8.6965431	8.6970806
52	5001.19	5007.46	100125.30	8.6990734	8.6996173
53	5230.24	5036.62	100126.76	8.7015889	8.7021390
54	5059.29	5065.78	100128.23	8.7040899	8.7046465
55	5088.35	5094.95	100129.71	8.7065766	8.7071395
56	5127.40	5124.11	100131.20	8.7090490	8.7096185
57	5146.45	5153.28	100132.70	8.7115075	8.7120834
58	5175.50	5182.44	100134.20	8.7139520	8.7145345
59	5204.55	5211.61	100135.71	8.7163829	8.7169719
60	5233.60	5240.78	100137.23	8.7188002	8.7193958

87. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
60	99939.08	2863625.33	2865370.83	9.9997354	11.4569162
59	99938.06	2839939.69	2841699.74	9.9997309	13.4533096
58	99937.03	2816642.18	2818416.78	9.9997265	11.4497317
57	99935.99	2793723.33	2795512.48	9.9997220	11.4461834
56	99934.95	2771173.99	2772977.69	9.9997174	11.4426638
55	99933.90	2748985.28	2750803.53	9.9997128	11.4391724
54	99932.84	2727148.61	2728981.41	9.9997082	11.4357088
53	99931.77	2705655.68	2707503.03	9.9997036	11.4312725
52	99930.60	2684498.43	2687360.33	9.9996989	11.4288632
51	99929.69	2663669.04	2665545.49	9.9996942	11.4254803
50	99928.51	2643159.95	2645050.96	9.9996894	11.4221234
49	99927.40	2622963.84	2624879.39	9.9996846	11.4187923
48	99926.29	2603073.58	2604993.68	9.9996798	11.4154864
47	99925.17	2583482.27	2585416.92	9.9996740	11.4122055
46	99924.04	2564183.23	2566132.43	9.9996709	11.4089491
45	99922.90	2545169.96	2547133.71	9.9996650	11.4057168
44	99921.75	2526436.15	3528454.47	9.9996601	11.4025083
43	99920.60	2507975.68	2509968.55	9.9996550	11.3993233
42	99919.44	2489781.62	2491790.02	9.9996500	11.3961614
41	99918.27	2471851.19	2473873.14	9.9995449	11.3930223
40	99917.09	2454175.78	2456212.28	9.9996398	11.3899057
39	99915.90	2436750.95	2438802.0[illegible]	9.9996346	11.3868111
38	99914.70	2419571.40	2421637.00	9.9996294	11.3837384
37	99913.49	2402631.99	2404711.14	9.9996242	11.3806873
36	99912.28	2385927.72	2388022.42	9.9996189	11.3776573
35	99911.06	2369453.72	2371562.97	9.9996136	11.3746482
34	99909.83	2353205.25	2355329.05	9.9996082	11.3716598
33	99908.59	2337177.72	2339316.07	9.9996028	11.3686917
32	99907.34	2321365.65	2323519.55	9.9995974	11.3657437
31	99906.08	2305767.67	2307935.13	9.9995919	11.3628155
30	99904.82	2290376.54	2292558.56	9.9995865	11.3599059
29	99903.55	2275189.16	2277385.72	9.9995809	11.3570175
28	99902.27	2260201.45	2262412.59	9.9995753	11.3541472
27	99900.98	2245409.55	2247635.25	9.9995697	11.3512956
26	99894.86	2230809.67	2233049.89	9.9995641	11.3484625
25	99898.37	2216398.[illegible]	2218652.78	9.9995584	11.3456478
24	99897.05	2202171.0[illegible]	2204440.32	9.9995527	11.3428510
23	99895.73	2188125.10	2190408.97	9.9995469	11.3400721
22	99894.40	2174256.87	2176555.29	9.9995411	11.3373109
21	99893.06	2160562.9[illegible]	2162875.93	9.9995353	11.3345669
20	99891.71	2147040.10	2149367.63	9.9995297	11.3318402
19	99890.35	2133685.11	2136027.19	9.9995236	11.3291303
18	99888.98	2120494.8[illegible]	2122831.51	9.9995176	11.3264372
17	99887.61	2107466.37	2109817.55	9.9995116	11.3237607
16	99886.25	2094595.63	2096982.36	9.9995056	11.3211004
15	99884.84	2081882.76	2084283.05	9.9994996	11.3184563
14	99883.44	2066321.96	2071736.70	9.9994935	11.3158281
13	99882.03	2056911.47	2059340.86	9.9994874	11.3132156
12	99880.61	2044648.61	2047092.55	9.9994812	11.3106187
11	99879.18	2032530.75	2034989.25	9.9994750	11.3080371
10	99877.75	2020555.35	2023028.40	9.9994688	11.3054708
9	99876.31	1008719.89	2011207.50	9.9994625	11.3029194
8	99874.86	1997021.95	1999524.11	9.9994562	11.3003828
7	99873.40	1985459.12	1987975.84	9.9994498	11.2978610
6	99871.93	1974029.10	1976560.36	9.9994435	11.2953535
5	99870.45	1962729.59	2965275.41	9.9994370	11.2928605
4	99868.97	1951558.37	1954118.74	9.9994306	11.2903815
3	99867.25	1940513.27	1943088.20	9.9994241	11.2879166
2	99865.98	1929592.17	1932181.65	9.9994176	11.2854653
1	99864.47	1918792.98	1921397.01	9.9994110	11.2830281
0	99862.95	1908113.67	1910732.26	9.9994044	11.2806042

Grad. 3.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	5233.60	5240.78	100137.23	8.7188001	8.7193958
1	5262.64	5269.75	100138.76	8.7212040	8.7218063
2	5291.69	5299.12	100140.30	8.7235946	8.7242035
3	5320.74	5328.29	100141.85	8.7259721	8.7265877
4	5349.79	5357.49	100143.41	8.7283366	8.7289589
5	5378.83	5386.63	100144.98	8.7306882	8.7313174
6	5407.88	5415.81	100146.55	8.7330272	8.7336631
7	5436.93	5444.98	100184.13	8.7353535	8.7359964
8	5465.97	1474.16	100149.72	8.7376675	8.7383172
9	5495.02	5503.33	100151.32	8.7399691	8.7406258
10	5524.06	5532.91	100152.93	8.7422586	8.7419222
11	5553.11	5561.69	100154.53	8.7445360	8.7452067
12	5582.15	5590.87	100156.17	8.7468015	8.7474792
13	5611.19	5620.05	100157.80	8.7490553	8.7497400
14	5640.24	5649.23	100159.44	8.7512973	8.7519892
15	5669.28	5678.41	100161.09	8.7535278	8.7542269
16	5698.32	5707.59	100162.75	8.7557469	8.7564531
17	5727.36	5736.78	100164.42	8.7579546	8.7586681
18	5756.40	5765.96	100166.10	8.7601512	8.7608719
19	9785.44	1795.15	100167.78	8.7623366	8.7630647
20	5814.48	5824.34	100169.47	8.7645111	8.7652465
21	5843.52	5853.52	100171.17	8.7666747	8.7674175
22	5872.56	5882.71	100172.88	8.7688275	8.7695777
23	5901.60	5911.90	100174.60	8.7709697	8.7717274
24	5930.64	5941.09	100176.33	8.7731014	8.7738665
25	5959.67	5970.29	100178.07	8.7752226	8.7759952
26	5988.71	5999.48	100179.81	8.7773334	8.7781136
27	6017.75	6028.67	100181.56	8.7794340	8.7802218
28	6046.78	6057.87	100183.32	8.7815244	8.7823199
29	6075.82	6087.06	100185.79	8.7836048	8.7844079
30	6104.85	6116.26	100186.87	8.7856753	8.7864861
31	6133.89	6145.46	100188.66	8.7877359	8.7885544
32	6162.92	6174.66	100190.46	8.7897867	8.7906130
33	6191.96	6203.86	100192.26	8.7918278	8.7926620
34	6220.99	6233.06	100194.07	8.7938594	8.7947014
35	6250.02	6262.26	100195.89	8.7958814	8.7967313
36	6279.05	6291.47	100197.72	8.7978941	8.7987519
37	6308.08	6320.67	100199.56	8.7998974	8.8007632
38	6337.11	6349.88	100201.41	8.8018915	8.8027653
39	6366.14	6379.08	100203.26	8.8038764	8.8047583
40	6395.17	6408.29	100205.12	8.8058523	8.8067422
41	6424.20	6437.50	100206.99	8.8078192	8.8087172
42	6453.23	6466.71	100208.87	8.8097772	8.8106834
43	6482.26	6495.92	100210.76	8.8117264	8.8126407
44	6511.29	6526.13	100212.66	8.8136668	8.8145894
45	6540.31	6554.35	100214.57	8.8155985	8.8165294
46	6569.34	6583.56	100216.49	8.8175217	8.8184608
47	6598.36	6612.78	100218.41	8.8194363	8.8203838
48	6627.39	6641.99	100220.34	8.8213425	8.8222984
49	6656.41	6671.21	100222.28	8.8232404	8.8242046
50	6685.44	6700.43	100224.23	8.8251299	8.8261026
51	6714.46	6729.65	100226.19	8.8270112	8.8279924
52	6743.48	6758.87	100228.16	8.8288844	8.8298741
53	6772.51	6788.09	100230.13	8.8307495	8.8317478
54	6801.53	6817.32	100232.11	8.8326066	8.8336134
55	6830.55	6846.54	100234.10	8.8344357	8.8354712
56	6859.57	6875.77	100236.10	8.8362969	8.8373211
57	6888.59	6904.99	100238.11	8.8381304	8.8391633
58	6917.62	6934.22	100240.13	8.8399561	8.8409977
59	6946.63	6963.45	100242.16	8.8417741	8.8428245
60	6975.65	6992.68	100244.19	8.8435845	8.8446457

86. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
60	99862.95	1908113.67	19[illegible]873.26	9.9994044	11.2806042
59	99861.41	1897552.26	1900185.40	9.9993978	11.2781937
58	99859.89	1887106.80	1889754.50	9.9993911	11.2757965
57	99858.35	1876775.39	1879437.65	9.9993844	11.2734123
56	99856.80	1866556.18	1869232.99	9.9993776	11.2710411
55	99854.24	1856447.34	1859138.71	9.9993708	11.2686826
54	99853.67	1846447.09	1849153.01	9.9993640	11.2663369
53	99852.09	1836553.70	1839274.17	9.9993572	11.2640035
52	99850.50	1826765.44	1829500.48	9.9993503	11.2616818
51	99848.91	1817080.67	1819830.26	9.9993433	11.2593742
50	99847.31	1807497.74	1810261.88	9.9993364	11.2570778
49	99845.70	1798015.05	1800793.75	9.9993293	11.5547933
48	99844.08	1788631.04	1791424.29	9.9993223	11.2525208
47	99842.45	1779344.17	1782151.98	9.9993152	11.2502600
46	99840.81	1770152.94	1772975.31	9.9993081	11.2480108
45	99839.16	1761055.88	1763892.80	9.9993009	11.2457731
44	99837.51	1752051.55	1754903.03	9.9992938	11.2435469
43	99835.85	1743138.54	1746004.57	9.9992865	11.2413119
42	99834.18	1734315.46	1737196.05	9.9992793	11.2391281
41	99832.50	1725580.95	1728476.10	9.9992720	11.2369353
40	99830.81	1716953.69	1719843.45	9.9992646	11.2347553
39	99829.11	1708372.38	1711296.64	9.9992572	11.2325825
38	99827.41	1699895.74	1702834.56	9.9992498	11.2304223
37	99825.70	1691502.51	1694455.89	9.9992424	11.2282726
36	99823.98	1683191.48	1686159.41	9.9992349	11.2261335
35	99822.25	1674961.44	1677943.92	9.9992274	11.2240048
34	99820.51	1666811.20	1669808.25	9.9992198	11.2218864
33	99818.76	1658739.62	1661751.22	9.9992122	11.2197782
32	99817.01	1650745.55	1653771.71	9.9992046	11.2176801
31	99815.25	1642817.89	1645868.61	9.9991969	11.2155921
30	99813.48	1634985.55	1638040.82	9.9991892	11.2135139
29	99811.70	1627217.44	1630287.28	9.9991815	11.2114456
28	99809.91	1619522.53	1622606.93	9.9991737	11.2093870
27	99808.11	1611899.79	1614998.74	9.9991659	11.2073380
26	99806.30	1604348.19	1607461.70	9.9991580	11.2052986
25	99804.49	1596866.74	1599994.81	9.9991501	11.2032687
24	99802.67	1589454.48	1592597.11	9.9991422	11.2012481
23	99800.84	1582110.45	1585267.64	9.9991342	11.1992368
22	99799.00	1574833.71	1578005.45	9.9991262	11.1972347
21	99797.15	1567623.33	1570809.63	9.9991182	11.1952417
20	99795.29	1560478.41	1563679.27	9.9991101	11.1932578
19	99793.43	1553398.05	1556613.48	9.9991020	11.1912828
18	99791.56	1546381.41	1549611.39	9.9990938	11.1893166
17	99789.68	1539427.60	1542672.15	9.9990858	11.1873593
16	99787.49	1532535.80	1535784.90	9.9990774	11.1854106
15	99785.79	1525705.17	1528978.83	9.9990691	11.1834706
14	99783.98	1518994.90	1522223.12	9.9990608	11.1815392
13	99782.06	1512224.20	1515526.98	9.9990525	11.1796162
12	99780.14	1505572.27	1508889.61	9.9990441	11.1777016
11	99778.21	1498978.36	1502310.26	9.9990357	11.1757954
10	99776.27	1492441.70	1495788.16	9.9990273	11.1738974
9	99774.32	1485961.55	1489322.58	9.9990188	11.1770076
8	99772.36	1479537.18	1482912.77	9.9990103	11.1701259
7	99770.39	1473167.87	1476558.02	9.9990017	11.1682522
6	99768.42	1466852.92	1470257.63	9.9989931	11.1663866
5	99766.44	1460591.63	1464010.90	9.9989845	11.1645288
4	99764.45	1454383.32	1457817.15	9.9989758	10.1626789
3	99762.45	1448227.32	1451676.91	9.9989671	11.1608367
2	99760.44	1442122.97	1445585.92	9.9989584	11.1590023
1	99758.42	1436[illegible]9.61	1439547.13	9.9989496	11.1571755
0	99756.40	[illegible]	1433558.70	9.99894[illegible]8	11.1553563

6975.65

Grad. 4.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	6975.65	6992.68	100244.19	8.8435845	8.8446437
1	7004.65	7021.91	100246.23	8.8453874	8.8464554
2	7033.68	7050.85	100248.28	8.8471827	8.8482597
3	7062.72	7080.15	100250.34	8.8489707	8.8500566
4	7091.71	7109.61	100252.41	8.8507512	8.8518461
5	7120.73	7138.85	100254.49	8.8525245	8.8536283
6	7149.74	7168.09	100256.58	8.8542905	8.8554034
7	7178.76	7197.33	100258.68	8.8560493	8.8571713
8	7207.77	7226.57	100260.78	8.8578010	8.8589321
9	7236.78	7255.81	100262.89	8.8591457	8.8606859
10	7265.80	7285.05	100265.01	8.8612833	8.8624327
11	7294.81	7314.30	100267.14	8.8630139	8.8641725
12	7323.82	7343.54	100269.28	8.8647376	8.8659055
13	7352.83	7372.79	100271.43	8.8664545	8.8676317
14	7381.84	7402.05	100273.58	8.8681646	8.8693511
15	7410.85	7431.28	100275.74	8.8698680	8.8710638
16	7439.86	7460.53	100277.91	8.8715646	8.8727699
17	7468.87	7489.79	100280.09	8.8732546	8.8744694
18	7497.87	7519.04	100282.28	8.8749381	8.8761623
19	7526.88	7548.29	100284.48	8.8766150	8.8778487
20	7555.89	7577.55	100286.68	8.8782854	8.8795286
21	7584.89	7606.80	100288.89	8.8799493	8.8812022
22	7613.90	7636.06	100291.11	8.8816069	8.8828694
23	7642.90	7665.32	100293.34	8.8832581	8.8845303
24	7671.90	7694.58	100295.58	8.8849031	8.8861850
25	7700.91	7723.84	100297.83	8.8865418	8.8878334
26	7729.91	7753.11	100300.09	8.8881743	8.8894757
27	7758.91	7782.37	100302.36	8.8898007	8.8911119
28	7787.91	7811.64	100304.64	8.8914209	8.8927420
29	7816.91	7840.91	100306.93	8.8930351	8.8943660
30	7845.91	7870.17	100309.22	8.8946433	8.8959842
31	7874.91	7899.44	100311.52	8.8962455	8.8975963
32	7903.91	7928.71	100313.83	8.8978418	8.8992026
33	7932.90	7957.98	100316.15	8.8994322	8.9008030
34	7961.90	7987.26	100318.48	8.9010168	8.9023977
35	7990.90	8016.53	100320.81	8.9025955	8.9039866
36	8019.89	8045.81	100323.15	8.9041685	8.9055697
37	8048.89	8075.09	100325.50	8.9057358	8.9071472
38	8077.88	8104.37	100327.86	8.9072975	8.9087190
39	8106.87	8133.65	100330.23	8.9088535	8.9102853
40	8135.87	8162.93	100332.61	8.9104039	8.9118460
41	8164.86	8192.21	100335.00	8.9119487	8.9134012
42	8193.85	8221.50	100337.40	8.9134881	8.9149509
43	8222.84	8250.78	100339.80	8.9150219	8.9164952
44	8251.83	8280.07	100342.21	8.9165504	8.9180340
45	8280.82	8309.36	100344.63	8.9180734	8.9195675
46	8309.81	8338.65	100347.06	8.9195911	8.9210957
47	8338.80	8367.94	100349.50	8.9211034	8.9226186
48	8367.78	8397.23	100351.95	8.9226105	8.9241363
49	8396.77	8426.53	100354.42	8.9241123	8.9256487
50	8425.76	8455.83	100356.87	8.9256089	8.9271560
51	8454.74	8485.12	100359.34	8.9271003	8.9286581
52	8483.73	8514.42	100361.82	8.9285866	8.9301552
53	8512.71	8543.72	100364.31	8.9300678	8.9316471
54	8541.69	8573.02	100366.81	8.9315439	8.9331340
55	8570.67	8602.33	100369.32	8.9330150	8.9346160
56	8599.66	8631.63	100371.84	8.9344811	8.9360929
57	8628.64	8660.94	100374.36	8.9359422	8.9375650
58	8657.62	8690.25	100376.89	8.9373983	8.9390321
59	8686.60	8719.56	100379.43	8.9388496	8.9401944
60	8715.57	8748.87	100381.98	8.9402960	8.9419518

85. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	99756.40	1430066.53	1433558.70	9.9989408	11.1553563
59	99754.37	1424113.37	1427620.01	9.9989319	11.1535446
58	99752.33	1418209.24	1421730.45	9.9989230	11.1517403
57	99750.28	1412353.63	1415889.39	9.9989141	11.1499434
56	99748.22	1405545.93	1410096.21	9.9989052	11.1481539
55	99746.15	1400785.56	1404350.45	9.9988962	11.1463717
54	99744.07	1395091.94	1398651.39	9.9988871	11.1445966
53	99741.99	1389404.51	1392998.52	9.9988780	11.1428287
52	99739.90	1383782.70	1387391.28	9.9988689	11.1410679
51	99737.80	1378205.98	1381829.12	9.9988598	11.1393141
50	99735.69	1372673.79	1376311.49	9.9988506	11.1375673
49	99733.57	1367185.60	1370837.87	9.9988414	11.1358275
48	99731.44	1361740.89	1365407.71	9.9988321	11.1340945
47	99729.31	1356339.15	1360020.54	9.9988228	11.1323683
46	99727.17	1350979.86	1354675.82	9.9988135	11.1306489
45	99725.02	1345662.53	1349373.06	9.9988041	11.1289362
44	99722.86	1340386.67	1344111.76	9.9987947	11.1272302
43	99720.69	1335151.79	1338891.44	9.9987853	11.1255306
42	99718.51	1329957.41	1333711.63	9.9987758	11.1238377
41	99716.32	1324803.07	1328571.86	9.9987663	11.1221513
40	99714.13	1319688.30	1323471.66	9.9987567	11.1204714
39	99711.93	1314612.66	1318410.57	9.9987471	11.1187978
38	99709.72	1309575.68	1313388.16	9.9987375	11.1171306
37	99707.50	1304576.93	1308403.98	9.9987278	11.1154697
36	99705.17	1299615.9	1303457.60	9.9987181	11.1138150
35	99703.03	1294692.40	1298548.38	9.9987084	11.1121666
34	99700.79	1289805.[illegible]	1293676.51	9.9986986	11.1105243
33	99698.54	1284955.60	1288840.97	9.9986888	11.1088881
32	99696.28	1280141.62	1284041.55	9.9986790	11.1072580
31	99694.02	1275363.41	1279277.85	9.9986691	11.1056340
30	99691.73	1270620.4[illegible]	1274549.48	9.9986591	11.1040158
29	99689.44	1265912.47	1269856.04	9.9986492	11.1024037
28	99687.15	1261239.06	1265197.15	9.9986392	11.1007974
27	99684.85	1256599.71	1260572.42	9.9986292	11.0991970
26	99682.54	1251994.20	1255981.48	9.9986191	11.0976023
25	99680.22	1247422.12	1251423.97	9.9986090	11.0960134
24	99677.89	1242883.10	1246899.52	9.9985988	11.0944303
23	99675.55	1238376.74	1242407.77	9.9985886	11.0928528
22	99673.20	1233902.82	1237948.37	9.9985784	11.0912810
21	99670.85	1229460.85	1233520.97	9.9985682	11.0897147
20	99668.49	1225050.55	1229125.23	9.9985579	11.0881540
19	99666.12	1220671.56	1224760.82	9.9985475	11.0865988
18	99663.74	1216323.46	1220427.39	9.9985372	11.0850491
17	99661.35	1212006.22	1216124.62	9.9985268	11.0835048
16	99658.95	1207719.22	1211852.18	9.9985163	11.0819660
15	99656.55	1203462.23	1207609.76	9.9985058	11.0804325
14	99654.14	1199234.95	1203397.05	9.9984953	11.0789043
13	99651.72	1195037.05	1199213.73	9.9984848	11.0773814
12	99649.29	1190868.24	1195059.48	9.9984742	11.0758637
11	99646.85	1186728.21	1190934.02	9.9984636	11.0743513
10	99644.40	1182616.67	1186837.05	9.9984529	11.0728440
9	99641.94	1178533.31	1182768.27	9.9984422	11.0713419
8	99639.48	1174477.86	1178727.39	9.9984315	11.0698448
7	99637.01	1170450.01	1174714.12	9.9984207	11.0683529
6	99634.53	1166449.53	1170728.19	9.9984099	11.0668660
5	99632.04	1162467.08	1166769.32	9.9983990	11.0653840
4	99629.54	1158529.42	1162837.23	9.9983881	11.0639071
3	99627.03	1154609.27	1158931.65	9.9983772	11.0624350
2	99624.52	1150715.36	1155052.31	9.9983663	11.0609679
1	99622.00	1146847.43	1151198.96	9.9983553	11.0595056
0	99619.47	1143005.23	1147371.42	9.9983442	11.0580482

8715.57

Grad. 5. — 84 Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	8715.57	8748.87	100381.98	8.9402960	8.9419518	60	99619.47	1143005.23	1147371.32	9.9983442	11.0580482
1	8744.55	8778.18	100384.54	8.9417376	8.9434044	59	99616.93	1139188.49	1143569.16	9.9983332	11.0565956
2	8773.54	8807.49	100387.11	8.9431743	8.9448523	58	99614.38	1135396.95	1139792.20	9.9983220	11.0551477
3	8802.51	8836.81	100389.69	8.9446063	8.9462954	57	99611.82	1131630.40	1136040.21	9.9983109	11.0537046
4	8831.48	8866.12	100392.28	8.9460335	8.9477338	56	99609.26	1127888.55	1132312.91	9.9982997	11.0522662
5	8860.46	8895.42	100394.97	8.9474501	8.9491676	55	99606.69	1124171.17	1128610.13	9.9982885	11.0508324
6	8889.43	8924.76	100397.47	8.9488739	8.9505967	54	99604.11	1120478.03	1124931.56	9.9982772	11.0494033
7	8918.40	8954.08	100400.08	8.9501871	8.9520211	53	99601.52	1116808.88	1121276.99	9.9982660	11.0479789
8	8947.38	8983.41	100402.70	8.9516957	8.9534410	52	99598.93	1113163.50	1117646.17	9.9982546	11.0465590
9	8976.35	9012.73	100405.33	8.9530996	8.9548484	51	99596.31	1109541.64	1114038.92	9.9982433	11.0451436
10	9005.32	9042.06	100407.97	8.9544991	8.9562672	50	99593.69	1105943.10	1110454.91	9.9982318	11.0437328
11	9034.29	9071.38	100410.61	8.9558942	8.9576735	49	99591.07	1102367.65	1106894.03	9.9982204	11.0423265
12	9063.26	9100.71	100413.26	8.9572845	8.9590754	48	99588.44	1098815.01	1103355.99	9.9982089	11.0409246
13	9092.23	9130.04	100415.92	8.9586703	8.9604728	47	99585.80	1095285.04	1099840.59	9.9981974	11.0395272
14	9121.19	9159.38	100418.59	8.9600517	8.9618659	46	99583.15	1091777.49	1096347.61	9.9981859	11.0381341
15	9150.16	9188.71	100421.27	8.9614288	8.9632545	45	99580.49	1088292.14	1092876.84	9.9981743	11.0367455
16	9179.13	9218.04	100423.96	8.9628014	8.9646386	44	99577.82	1084828.80	1089428.07	9.9981629	11.0353612
17	9208.09	9247.38	100426.66	8.9641697	8.9660188	43	99575.15	1081387.24	1086001.39	9.9981510	11.0339812
18	9237.06	9276.72	100429.37	8.9655337	8.9673944	42	99572.47	1077967.27	1082595.29	9.9981393	11.0326056
19	9266.02	9306.06	100432.08	8.9668934	8.9687658	41	99569.78	1074568.68	1079211.65	9.9981275	11.0312342
20	9294.99	9335.40	100434.82	8.9682487	8.9701330	40	99567.08	1071191.26	1075848.84	9.9981158	11.0298670
21	9323.95	9364.74	100437.53	8.9695999	8.9714959	39	99564.37	1067834.84	1072506.94	9.9981040	11.0285041
22	9352.91	9394.09	100440.27	8.9709468	8.9728547	38	99561.65	1064499.19	1069185.92	9.9980921	11.0271453
23	9381.87	9423.44	100443.02	8.9722895	8.9742092	37	99558.92	1061184.14	1065885.43	9.9980802	11.0257908
24	9410.83	9452.78	100445.78	8.9736280	8.9755597	36	99556.19	1057889.50	1062605.38	9.9980683	11.0244403
25	9439.79	9482.13	100448.55	8.9749624	8.9769060	35	99553.45	1054615.07	1059345.53	9.9980563	11.0230940
26	9468.75	9511.48	100451.33	8.9762926	8.9782483	34	99550.70	1051360.67	1056105.72	9.9980443	11.0217517
27	9497.71	9540.84	100454.11	8.9776183	8.9795865	33	99547.94	1048126.11	1052885.72	9.9980323	11.0204135
28	9526.66	9570.19	100456.90	8.9789408	8.9809206	32	99545.17	1044911.22	1049685.41	9.9980201	11.0190794
29	9555.62	9599.55	100459.70	8.9802589	8.9822507	31	99542.40	1041715.81	1046504.53	9.9980081	11.0177493
30	9584.58	9628.90	100462.51	8.9815729	8.9835769	30	99539.62	1038539.71	1043343.[illegible]	9.9979960	11.0164231
31	9613.53	9658.26	100465.33	8.9828829	8.9848991	29	99536.83	1035382.74	1040200.66	9.9979838	11.0151009
32	9642.48	9687.63	100468.16	8.9841884	8.9862173	28	99534.03	1032244.73	1037077.21	9.9979716	11.0137827
33	9671.44	9716.99	100470.99	8.9854910	8.9875317	27	99531.22	1029125.31	1033972.59	9.9979593	11.0124683
34	9700.39	9746.35	100473.83	8.9867891	8.9888421	26	99528.41	1026024.90	1330886.56	9.9979470	11.0111579
35	9729.34	9775.72	100476.68	8.9880834	8.9901487	25	99525.57	1022942.76	1027818.90	9.9979347	11.0098514
36	9758.29	9805.09	100479.54	8.9893737	8.9914514	24	99522.74	1019878.92	1024769.71	9.9979223	11.0085487
37	9787.24	9834.46	100482.41	8.9906602	8.9927503	23	99519.90	1016833.16	1021738.55	9.9979099	11.0072497
38	9816.19	9863.83	100485.29	8.9919429	8.9940454	22	99517.05	1013805.34	1018725.36	9.9978975	11.0059545
39	9845.14	9893.20	100488.18	8.9932217	8.9953367	21	99514.19	1010795.42	1015729.98	9.9978850	11.0046633
40	9874.08	9922.57	100491.07	8.9944968	8.9966243	20	99511.32	1007803.11	1012752.24	9.9978725	11.0033757
41	9903.03	9951.95	100493.99	8.9957681	8.9979081	19	99508.44	1004828.28	1009792.06	9.9978599	11.0020918
42	9931.97	9981.33	100496.91	8.9970356	8.9991883	18	99505.55	1001870.80	1006849.09	9.9978473	11.0008117
43	9960.92	10010.71	100499.82	8.9982994	9.0004647	17	99502.66	998930.50	1003923.38	9.9978347	10.9995353
44	9989.86	10040.09	100502.65	8.9995595	9.0017375	16	99499.76	996007.24	1001014.70	9.9978220	10.9982625
45	10018.81	10069.47	100505.69	9.0008162	9.0030066	15	99496.85	993100.88	998122.91	9.9978093	10.9969934
46	10047.75	10098.85	100508.64	9.0020687	9.0042721	14	99493.93	990211.25	995247.87	9.9977966	10.9957279
47	10076.69	10128.24	100511.60	9.0033179	9.0055340	13	99491.00	987338.23	992389.43	9.9977838	10.9944660
48	10105.63	10157.63	100514.57	9.0045634	9.0067924	12	99488.06	984481.66	989547.44	9.9977710	10.9932076
49	10134.57	10187.02	100517.54	9.0058053	9.0080471	11	99485.12	981641.40	986721.76	9.9977582	10.9919529
50	10163.51	10216.41	100520.52	9.0070436	9.0092984	10	99482.17	978817.32	983912.27	9.9977493	10.9907016
51	10192.45	10245.80	100523.51	9.0082784	9.0105461	9	99479.21	976009.27	981118.80	9.9977323	10.9894539
52	10221.38	10275.20	100526.51	9.0095096	9.0117903	8	99476.24	973217.13	978241.24	9.9977194	10.9882097
53	10250.32	10304.60	100529.52	9.0107374	9.0130310	7	99473.26	970440.75	975579.44	9.9977074	10.9869690
54	10279.25	10334.00	100532.54	9.0119616	9.0142682	6	99470.27	967680.20	972833.27	9.9976931	10.9857318
55	10308.19	10363.40	100535.57	9.0131823	9.0155021	5	99467.28	964534.75	970102.60	9.9976803	10.9844979
56	10337.12	10392.80	100538.60	9.0143996	9.0167325	4	99464.28	961204.86	967387.30	9.9976672	10.9832675
57	10366.05	10422.20	100541.64	9.0156135	9.0179594	3	99461.27	959490.21	964087.24	9.9976540	10.9820406
58	10394.99	10451.60	100544.69	9.0168219	9.0191831	2	99458.25	956790.68	962002.29	9.9976408	10.9808169
59	10423.91	10481.01	100547.75	9.0180309	9.0204033	1	99455.22	954106.13	959332.33	9.9976276	10.9795967
60	10452.85	10510.24	100550.42	9.0192346	9.0216202	0	99452.18	951436.45	956677.22	9.9976143	10.9783798

10452.85

Grad. 6.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
0	10452.83	10510.42	100550.82	9.0192346	9.0216202
1	10481.78	10539.83	100553.90	9.0204348	9.0228338
2	10510.70	10569.24	100556.99	9.0216318	9.0240441
3	10539.63	10598.66	100560.09	9.0228254	9.0252510
4	10568.56	10628.08	100563.20	9.0240157	9.0264548
5	10597.48	10657.50	100566.31	9.0252027	9.0276552
6	10626.41	10686.92	100569.43	9.0263865	9.0288524
7	10655.33	10716.34	100572.56	9.0275669	9.0300464
8	10684.25	10745.76	100575.70	9.0287442	9.0312373
9	10713.18	10775.19	100578.85	9.0299182	9.0324249
10	10742.10	10804.62	100582.01	9.0310890	9.0336093
11	10771.02	10834.05	100585.18	9.0322567	9.0347906
12	10799.94	10863.48	100588.35	9.0334212	9.0359588
13	10828.85	10892.91	100591.53	9.0345825	9.0371439
14	10857.77	10922.34	100594.72	9.0357407	9.0383159
15	10886.69	10951.78	100597.92	9.0368958	9.0394848
16	10915.60	10981.22	100601.13	9.0380477	9.0406506
17	10944.52	11010.66	100604.35	9.0391926	9.0418134
18	10973.43	11040.10	100607.58	9.0403424	9.0429731
19	11002.34	11069.54	100610.81	9.0414852	9.0441299
20	11031.26	11098.99	100614.05	9.0426249	9.0452836
21	11060.17	11128.44	100617.30	9.0437617	9.0494343
22	11089.08	11157.89	100620.56	9.0448954	9.0475821
23	11117.99	11187.34	100623.83	9.0460261	9.0487270
24	11146.89	11216.79	100627.11	9.0471538	9.0498689
25	11175.80	11246.25	100630.40	9.0482786	9.0510078
26	11204.71	11275.71	100633.70	9.0494005	9.0521439
27	11233.61	11305.17	100637.01	9.0505194	9.0532771
28	11262.52	11334.63	100640.32	9.0516354	9.0544074
29	11291.42	11364.09	100643.64	9.0527485	9.0555349
30	11320.32	11393.56	100642.97	9.0538588	9.0566595
31	11349.22	11423.03	100650.31	9.0549661	9.0577813
32	11378.12	11452.50	100653.66	9.0560706	9.0589002
33	11407.02	11481.97	100657.02	9.0571723	9.0600164
34	11435.92	11511.44	100660.39	9.0582711	9.0611297
35	11464.82	11540.91	100663.77	9.0593672	9.0622403
35	11493.71	11570.39	100667.15	9.0604604	9.0633482
37	11522.61	11599.87	100670.54	9.0615509	9.0644533
38	11551.51	11629.35	100673.94	9.0626386	9.0655516
39	11580.40	11658.83	100677.35	9.0637235	9.0666553
40	11609.29	11688.31	100680.77	9.0648057	9.0677522
41	11638.18	11717.80	100684.20	9.0658852	9.0688465
42	11667.07	11747.29	100687.64	9.0669619	9.0699381
43	11695.96	11776.78	100691.08	9.0680360	9.0710270
44	11724.85	11806.28	100694.53	9.0691074	9.0721133
45	11753.74	11835.78	100697.99	9.0701761	9.0731969
46	11782.63	11865.28	100701.46	9.0712421	9.0742779
47	11811.51	11894.78	100704.94	9.0723055	9.0753563
48	11840.40	11924.28	100708.43	9.0733663	9.0764321
49	11869.28	11953.78	100711.93	9.0744244	9.0775053
50	11898.16	11983.28	100715.44	9.0754799	9.0785760
51	11927.04	12012.79	100718.96	9.0765329	9.0796441
52	11955.93	12042.30	100722.48	9.0775832	9.0807096
53	11984.81	12071.81	100726.01	9.0786310	9.0817726
54	12013.68	12101.32	100729.55	9.0796762	9.0828331
55	12042.56	12130.84	100733.10	9.0807189	9.0838911
56	12071.44	12160.36	100736.66	9.0817590	9.0849466
57	12100.31	12189.88	100740.23	9.0827966	9.0859996
58	12129.19	12219.40	100743.81	9.0838317	9.0870501
59	12158.06	12248.93	100747.40	9.0848643	9.0880981
60	12186.93	12278.46	100750.99	9.0858945	9.0891438

83. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
60	99452.18	951436.45	956677.25	9.9976143	10.9783798
59	99449.14	948781.49	954036.86	9.9976011	10.9771662
58	99446.09	946141.16	951411.10	9.9975877	10.9759559
57	99443.03	943515.31	948799.84	9.9975743	10.9747490
56	99439.96	940903.84	946201.95	9.9975609	10.9735452
55	99436.88	938306.63	943620.33	9.9975475	10.9723448
54	99433.79	935723.55	941051.84	9.9975340	10.9711476
53	99430.69	933154.50	938497.38	9.9975205	10.9699531
52	99427.59	930599.36	935956.82	9.9975069	10.9687628
51	99424.48	928058.02	933430.06	9.9974933	10.9675751
50	99421.36	925530.35	930916.99	9.9974797	10.9663907
49	99418.23	923016.27	928417.49	9.9974660	10.9652094
48	99415.09	920515.64	925931.45	9.9974523	10.9640312
47	99411.94	918028.38	923458.77	9.9974386	10.9628561
46	99408.79	915554.36	920999.34	9.9974248	10.9616841
45	99405.63	913093.48	918553.05	9.9974110	10.9605152
44	99402.46	910645.64	916119.80	9.9973971	10.9593494
43	99399.28	908210.74	913699.49	9.9973833	10.9581866
42	99396.09	905788.67	911292.00	9.9973693	10.9570269
41	99392.89	903379.33	908897.25	9.9973554	10.9558701
40	99389.69	900982.61	906515.12	9.9973414	10.9547164
39	99386.48	898598.43	904145.53	9.9973273	10.9535657
38	99383.26	896226.68	901788.37	9.9973132	10.9524179
37	99380.03	893867.16	899443.54	9.9972991	10.9512730
36	99376.79	891520.08	897110.95	9.9972850	10.9501311
35	99373.54	889185.05	894790.51	9.9972708	10.9489922
34	99370.28	886862.06	892482.11	9.9972566	10.9478561
33	99367.02	884551.03	890185.67	9.9972423	10.9467229
32	99363.75	882251.86	887901.09	9.9972280	10.9455926
31	99360.47	879964.48	885628.28	9.9972137	10.9444651
30	99357.18	877688.74	883367.15	9.9971993	10.9433405
29	99353.88	875424.61	881117.61	9.9971849	10.9422187
28	99350.58	873171.98	878879.57	9.9971704	10.9410998
27	99347.27	870930.77	876652.95	9.9971559	10.9399836
26	99343.95	868700.88	874437.66	9.9971414	10.9388703
25	99340.62	866482.23	872233.61	9.9971268	10.9377597
24	99337.28	864274.75	870040.71	9.9971122	10.9366518
23	99333.93	862078.33	867858.89	9.9970976	10.9355467
22	99330.57	859892.90	865688.05	9.9970829	10.9344444
21	99327.20	857718.38	863528.12	9.9970682	10.9333447
20	99323.83	855554.68	861379.01	9.9970535	10.9322478
19	99320.45	853401.74	859240.65	9.9970387	10.9311531
18	99317.06	851259.45	857112.95	9.9970239	10.9300619
17	99313.66	849127.72	854995.84	9.9970090	10.9289730
16	99310.25	847006.51	852889.23	9.9969941	10.9278867
15	99306.84	844895.73	850793.04	9.9969792	10.9268031
14	99303.42	842795.31	848707.21	9.9969642	10.9257221
13	99299.99	840705.15	846631.65	9.9969492	10.9246427
12	99296.55	838625.19	844566.29	9.9969342	10.9235679
11	99293.10	836555.36	842511.01	9.9969191	10.9224947
10	99289.64	834495.57	840465.86	9.9969040	10.9214240
9	99286.17	832445.77	838430.65	9.9968888	10.9203559
8	99282.70	830405.86	836405.34	9.9968736	10.9192904
7	99279.22	828375.79	834389.86	9.9968584	10.9182274
6	99275.73	826355.47	832384.15	9.9968431	10.9171669
5	99272.23	824344.85	830388.12	9.9968278	10.9161089
4	99268.72	822343.84	828401.71	9.9968125	10.9150534
3	99265.21	820352.39	826424.85	9.9967971	10.9140004
2	99261.69	818370.41	824457.48	9.9967817	10.9129499
1	99258.16	816397.86	822499.52	9.9967662	10.9119019
0	99254.62	814434.64	820550.90	9.9967507	10.9108562

Grad. 7.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	12186.03	12276.46	100750.99	9.0858945	9.0891438
1	12215.81	12307.99	100754.59	9.0869211	9.0901869
2	12244.68	12337.52	100758.20	9.0879473	9.0912277
3	12273.55	12367.05	100761.82	9.0889700	9.0922660
4	12302.41	12395.58	100765.45	9.0899903	9.0933020
5	12331.26	12426.12	100769.09	9.0910082	9.0943355
6	12360.15	12455.66	100772.74	9.0920137	9.0953669
7	12389.01	12485.20	100776.39	9.0930367	9.0963955
8	12417.88	12514.74	100780.05	9.0940474	9.0974219
9	12446.74	12544.29	100783.73	9.0950556	9.0984460
10	12475.60	12573.84	100787.40	9.0960615	9.0994678
11	12504.46	12603.39	100791.09	9.0970691	9.1004872
12	12533.32	12632.94	100794.79	9.0980662	9.1015044
13	12562.18	12662.49	100798.50	9.0990651	9.1025192
14	12591.04	12692.05	100802.22	9.1000616	9.1035317
15	12619.90	12721.61	100805.95	9.1010558	9.1045420
16	12648.75	12751.17	100809.69	9.1020477	9.1055500
17	12677.61	12780.73	100813.43	9.1030373	9.1065557
18	12706.46	12810.29	100817.18	9.1040246	9.1075591
19	12735.31	12839.85	100820.94	9.1050096	9.1085604
20	12764.16	12869.43	100824.71	9.1059924	9.1095594
21	12793.01	12899.00	100828.49	9.1069729	9.1105562
22	12821.86	12928.57	100832.28	9.1079512	9.1115508
23	12850.71	12958.15	100836.07	9.1089272	9.1125431
24	12879.56	12987.73	100839.88	9.1099010	9.1135333
25	12908.41	13017.31	100843.70	9.1108726	9.1145213
26	12937.25	13046.89	100847.52	9.1118410	9.1155072
27	12966.09	13076.48	100851.35	9.1128092	9.1164909
28	12994.94	13106.07	100855.19	9.1137742	9.1174724
29	13023.78	13135.66	100859.04	9.1147370	9.1184518
30	13052.62	13165.25	100862.9[illegible]	9.1156977	9.1194291
31	13081.46	13194.84	100866.77	9.1166562	9.1204043
32	13110.30	13224.44	100870.65	9.1176125	9.1213773
33	13139.13	13254.04	100874.53	9.1185667	9.1223482
34	13167.97	13283.64	100878.42	9.1195188	9.1233171
35	13196.81	13313.24	100882.32	9.1204688	9.1242839
36	13225.64	13342.85	100886.23	9.1214167	9.1252486
37	13254.47	13372.46	100890.15	9.1223624	9.1262112
38	13283.30	13402.07	100894.08	9.1233061	9.1271718
39	13312.13	13431.68	100898.02	9.1242477	9.1281303
40	13340.96	13461.29	100901.97	9.1251872	9.1290868
41	13369.79	13490.91	100905.92	9.1261246	9.1300413
42	13398.62	13520.53	100909.88	9.1270600	9.1309937
43	13427.44	13550.15	100913.85	9.1279934	9.1319442
44	13456.27	13579.77	100917.83	9.1289247	9.1328926
45	13485.09	13609.40	100921.82	9.1298539	9.1338391
46	13513.92	13639.03	100925.82	9.1307812	9.1347835
47	13542.74	13668.66	100929.83	9.1317064	9.1357260
48	13571.56	13698.29	100933.85	9.1326297	9.1366665
49	13600.38	13727.93	100937.88	9.1335509	9.1376051
50	13629.19	13757.57	100941.92	9.1344702	9.1385417
51	13658.01	13787.21	100945.96	9.1353875	9.1394764
52	13686.83	13816.85	100950.01	9.1363028	9.1404092
53	13715.64	13849.50	100954.07	9.1372161	9.1413400
54	13744.45	13876.15	100958.14	9.1381275	9.1422689
55	13773.27	13905.80	100962.22	9.1390370	9.1431959
56	13802.08	13935.45	100966.31	9.1399445	9.1441210
57	13830.89	13965.10	100970.41	9.1408501	9.1450442
58	13859.70	13994.76	100974.52	9.1417537	9.1459655
59	13888.50	14024.42	100978.64	9.1426555	9.1468850
60	13917.31	14054.08	100982.76	9.1435553	9.1478025

82. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
60	99254.62	814434.64	820550.90	9.9967507	10.9108562
59	99251.07	812480.71	818911.57	9.9967352	10.9098131
58	99247.51	810535.99	816681.45	9.9967196	10.9087723
57	99243.94	808600.42	814760.48	9.9967040	10.9077340
56	99240.36	806673.94	812848.60	9.9966884	10.9066980
55	99236.78	804756.47	810945.73	9.9966723	10.9056645
54	99233.19	802847.96	809051.82	9.9966570	10.9046333
53	99229.59	800948.35	807166.81	9.9966412	10.9036045
52	99225.98	799057.56	805290.62	9.9966254	10.9025781
51	99222.36	797175.55	803423.21	9.9966096	10.9015540
50	99218.74	795302.24	801564.50	9.9965937	10.9005322
49	99215.11	793437.58	799714.45	9.9965778	10.8995128
48	99211.47	791581.51	797872.98	9.9965616	10.8984956
47	99207.82	789733.96	796040.03	9.9965459	10.8974808
46	99204.26	787894.89	794215.56	9.9965299	10.8964683
45	99200.49	786064.23	792399.50	9.9965138	10.8954580
44	99196.81	784241.91	790591.79	9.9964977	10.8944500
43	99193.13	782427.90	788792.38	9.9963816	10.8934423
42	99189.44	780622.12	787001.10	9.9964655	10.8924409
41	99185.74	778824.53	785218.21	9.9964493	10.8914396
40	99182.03	777035.06	783443.35	9.9964330	10.8904406
39	99178.31	775253.66	781676.56	9.9964167	10.8894438
38	99174.59	773480.28	779917.78	9.9964004	10.8884491
37	99170.86	771714.85	778166.97	9.9963841	10.8874569
36	99167.12	769957.35	776424.06	9.9963677	10.8864667
35	99163.37	768207.69	774689.01	9.9963513	10.8854787
34	99159.51	766465.84	772961.66	9.9963348	10.8844028
33	99155.84	764731.74	771242.27	9.9963183	10.8835091
32	99152.06	763005.33	769530.47	9.9963018	10.8825276
31	99148.28	761286.57	767826.31	9.9962852	10.8815482
30	99144.49	759575.41	766129.76	9.9962686	10.8805709
29	99140.69	757871.79	764440.75	9.9962519	10.8795957
28	99136.88	756175.67	762759.23	9.9962352	10.8786227
27	99133.06	754486.99	762085.16	9.9962185	10.8776518
26	99129.23	752805.71	759418.49	9.9962017	10.8766829
25	99125.39	751131.78	757759.16	9.9961849	10.8757161
24	99121.55	749465.14	756107.13	9.9961681	10.8747514
23	99117.70	747805.76	754462.36	9.9961512	10.8737883
22	99113.84	746153.57	752824.78	9.9961343	10.8728252
21	99109.97	744508.55	751194.37	9.9961174	10.8718697
20	99106.09	742872.64	749571.06	9.9961004	10.8709132
19	99102.21	741239.7[illegible]	747974.82	9.9960834	10.8699587
18	99098.32	746345.95	746345.60	9.9960663	10.8690063
17	99094.42	737999.09	744743.35	9.9960492	10.8680558
16	99090.51	736389.16	743148.03	9.9960321	10.8671074
15	99086.59	734786.10	741559.59	9.9960149	10.8661609
14	99082.66	733189.89	739977.98	9.9959977	10.8652165
13	99078.72	732600.47	738403.18	9.9959804	10.8642740
12	99074.78	730017.80	736835.12	9.9959631	10.8633335
11	99070.83	728441.84	735273.77	9.9959458	10.8623949
10	99066.87	726872.55	733719.09	9.9959284	10.8614583
9	99062.90	725309.87	732171.02	9.9959111	10.8605236
8	99058.92	723753.78	730629.54	9.9958936	10.8595908
7	99054.93	722204.22	729094.60	9.9958761	10.8584600
6	99050.94	720561.16	727566.16	9.9958586	10.8577311
5	99046.94	719124.56	726044.17	9.9958411	10.8568041
4	99042.93	717594.37	724528.59	9.9958235	10.8558790
3	99038.91	716070.56	723019.40	9.9958059	10.8549558
2	99034.88	714553.08	721516.53	9.9957882	10.8540345
1	99030.84	713041.90	720019.96	9.9957705	10.8531150
0	99026.80	711536.97	718529.65	9.9957528	10.8521975

Grad. 8.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log.Sin.*	*Log.Tang.*
0	13917.31	14054.08	100982.76	9.1435553	9.1478025
1	13946.12	14083.74	100986.89	9.1444532	9.1487182
2	13974.92	14113.41	100991.05	9.1453493	9.1496321
3	14003.72	14143.08	100995.18	9.1462435	9.1505441
4	14032.52	14172.75	100999.34	9.1471358	9.1514543
5	14061.32	14202.43	101003.51	9.1480262	9.1523627
6	14090.12	14232.11	101007.69	9.1489148	9.1532692
7	14118.92	14261.79	101011.81	9.1498015	9.1541739
8	14147.72	14291.47	101016.07	9.1506864	9.1551769
9	14176.51	14321.15	101020.27	9.1515694	9.1559780
10	14205.31	14350.84	101024.48	9.1524507	9.1568773
11	14234.10	14380.53	101028.70	9.1533301	9.1577748
12	14262.89	14410.12	101032.93	9.1542076	9.1586706
13	14291.68	14439.91	101037.17	9.1550834	9.1595646
14	14320.47	14469.61	101041.42	9.1559574	9.1604569
15	14349.26	14499.31	101045.68	9.1568296	9.1613473
16	14378.05	14529.01	101049.95	9.1577000	9.1622361
17	14406.84	14558.71	101054.23	9.1585686	9.1631231
18	14435.62	14588.42	101058.51	9.1594354	9.1640083
19	14464.40	14618.13	101062.80	9.1603005	9.1648919
20	14493.19	14647.84	101067.10	9.1611639	9.1657737
21	14521.97	14677.55	101071.41	9.1620254	9.1666538
22	14550.75	14707.27	101075.73	9.1628853	9.1675322
23	14579.53	14736.99	101080.06	9.1637434	9.1684089
24	14608.30	14766.71	101084.40	9.1645998	9.1692839
25	14637.08	14796.44	101088.75	9.1654544	9.1601572
26	15665.85	14826.17	101093.11	9.1663074	9.1710289
27	14694.63	14855.90	101097.47	9.1671586	9.1718989
28	14723.40	14885.63	101101.84	9.1680081	9.1727672
29	14752.17	14915.36	101106.22	9.1688559	9.1736338
30	14780.94	14945.10	101110.61	9.1697021	9.1744988
31	14809.71	14974.84	101115.01	9.1705465	9.1753622
32	14838.48	15004.58	101119.42	9.1713893	9.1762239
33	14867.24	15034.33	101123.84	9.1722305	9.1770840
34	14896.01	15064.08	101128.27	9.1730699	9.1779425
35	14924.77	15093.83	101132.71	9.1739077	9.1787993
36	14953.53	15123.58	101137.15	9.1747439	9.1796546
37	14982.30	15153.33	101141.60	9.1755784	9.1805082
38	15011.06	15183.09	101146.06	9.1764112	9.1813602
39	15039.81	15212.83	101150.53	9.1772425	9.1822106
40	15068.57	15242.61	101155.01	9.1780721	9.1830595
41	15097.33	15272.38	101159.50	9.1789001	9.1839068
42	15126.08	15302.15	101164.00	9.1797265	9.1847525
43	15154.84	15331.92	101168.51	9.1805512	9.1855966
44	15183.59	15361.89	101173.03	9.1813744	9.1864392
45	15212.34	15391.47	101177.56	9.1821960	9.1872802
46	15241.09	15421.25	101182.09	9.1830160	9.1881196
47	15269.84	15451.03	101186.63	9.1838344	9.1889575
48	15298.58	15480.83	101191.18	9.1846512	9.1897939
49	15327.33	15510.61	101195.74	9.1854665	9.1906287
50	15356.07	15540.40	101200.31	9.1862802	9.1914621
51	15384.82	15570.19	101204.89	9.1870923	9.1922939
52	15413.56	15599.98	101209.48	9.1879029	9.1931241
53	15442.30	15629.78	101214.08	9.1887120	9.1939529
54	15471.04	15659.58	101218.69	9.1895195	9.1947801
55	15499.78	15689.38	101223.31	9.1903254	9.1956059
56	15528.51	15719.19	101227.93	9.1911299	9.1964302
57	15557.25	15749.00	101232.56	9.1919328	9.1972530
58	15585.98	15778.81	101237.20	9.1927342	9.1980743
59	15614.72	15808.62	101241.85	9.1935341	9.1988942
60	15643.45	15838.44	101246.51	9.1943324	9.1997125

81. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log.Sin.*	*Log.Tang.*
60	99026.80	711536.97	718529.65	9.9957528	10.8521975
59	99022.75	710038.26	717045.56	9.9957350	10.8512818
58	99018.69	708545.73	715567.64	9.9957172	10.8503679
57	99014.62	707059.34	714095.87	9.9956993	10.8494559
56	99010.54	705579.05	712630.19	9.9956815	10.8485457
55	99006.45	704104.82	711170.58	9.9956635	10.8476373
54	99002.36	702636.62	709717.00	9.9956456	10.8467308
53	98998.26	701174.41	708269.41	9.9956276	10.8458261
52	98994.15	699718.06	706827.77	9.9956095	10.8449231
51	98990.03	698267.81	705392.05	9.9955915	10.8440220
50	98985.90	696823.35	703962.20	9.9955734	10.8431227
49	98981.76	695384.73	702538.20	9.9955552	10.8422252
48	98977.62	693951.92	701120.01	9.9955370	10.8413294
47	98973.47	692524.89	699707.60	9.9955188	10.8404354
46	98969.31	691103.59	698300.92	9.9955005	10.8395431
45	98965.14	689687.99	696899.94	9.9954822	10.8386527
44	98960.96	688278.07	695504.64	9.9954639	10.8377639
43	98986.77	686873.78	694114.96	9.9954455	10.8368769
42	98952.57	685475.08	692730.89	9.9954272	10.8359917
41	98948.37	684081.96	691352.39	9.9954087	10.8351081
40	98944.16	682694.37	689979.42	9.9953902	10.8342263
39	98939.94	681312.27	688611.95	9.9843717	10.8333462
38	98935.71	679935.68	687249.95	9.9953531	10.8324678
37	98931.47	678564.46	685893.38	9.9953345	10.8315911
36	98927.23	677198.67	684542.21	9.9953159	10.8307161
35	98922.98	675838.26	683195.42	9.9952972	10.8298428
34	98918.72	674483.18	681855.97	9.9952785	10.8289711
33	98914.45	673133.41	680520.81	9.9952597	10.8281011
32	98910.17	671788.91	679190.95	9.9952409	10.8272328
31	98905.88	670449.66	677866.32	9.9952221	10.8263662
30	98901.58	669115.62	676546.91	9.9952033	10.8255012
29	98897.28	667786.77	675232.68	9.9951844	10.8246378
28	98892.97	666463.07	673923.60	9.9951654	10.8237761
27	98888.65	665144.49	672619.65	9.9951464	10.8229160
26	98884.32	663831.00	671320.79	9.9951274	10.8220575
25	98879.98	662522.58	670026.99	9.9951084	10.8212007
24	98875.63	661219.19	668738.22	9.9950893	10.8203454
23	98871.28	659920.80	667454.46	9.9950701	10.8194918
22	98866.92	658627.39	666175.68	9.9950510	10.8186398
21	98862.55	657338.02	664901.84	9.9950318	10.8177894
20	98858.17	656055.38	663632.93	9.9950126	10.8169405
19	98853.78	654776.72	662368.90	9.9949933	10.8160932
18	98849.38	653502.93	661109.73	9.9949740	10.8152475
17	98844.98	652233.96	659855.40	9.9949546	10.8144034
16	98840.57	650969.8[illegible]	658605.87	9.9949352	10.8135608
15	98836.15	649710.43	657361.12	9.9949158	10.8127198
14	98831.72	648455.81	656121.23	9.9948964	10.8118804
13	98827.28	647205.91	654885.86	9.9948769	10.8110425
12	98822.83	645960.70	653655.28	9.9948573	10.8102061
11	98818.38	644720.17	652429.38	9.9948377	10.8093713
10	98813.92	643484.28	651208.12	9.9948181	10.8085379
9	98809.45	642253.01	649991.48	9.9947985	10.8077061
8	98804.97	641026.33	648779.44	9.9947788	10.8068759
7	98800.48	639804.22	647571.95	9.9947591	10.8060471
6	98795.98	638586.65	646369.01	9.9947393	10.8052198
5	98791.48	637373.59	645170.59	9.9947195	10.8043941
4	98786.97	636165.02	643976.66	9.9946997	10.8035698
3	98782.45	634960.92	642787.19	9.9946798	10.8027470
2	98777.92	633761.26	641601.16	9.9946599	10.8019257
1	98773.38	632566.01	640421.54	9.9946399	10.8011059
0	98768.83	631375.15	639245.32	9.9946199	10.8002875

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	15643.45	15838.44	101246.51	9.1943324	9.1997125
1	15672.18	15868.26	101251.18	9.1951293	9.2005294
2	15700.91	15898.08	101255.86	9.1959247	9.2013449
3	15729.63	15927.91	101260.55	9.1967186	9.2021588
4	15758.36	15957.74	101265.25	9.1975110	9.2029714
5	15787.08	15987.57	101269.96	9.1983019	9.2037825
6	15815.81	16017.40	101274.67	9.1990913	9.2045922
7	15844.53	16047.24	101279.49	9.1998793	9.2054004
8	15873.25	16077.08	101284.12	9.2006658	6.2062072
9	15901.97	16106.92	101288.86	9.2014509	9.2070126
10	15930.69	16136.77	101293.61	9.2022345	9.2078165
11	15959.40	16166.62	101298.37	9.2030167	9.2086191
12	15988.12	16196.47	101303.14	9.2037974	9.2094203
13	16016.83	16226.32	101307.92	9.2045766	9.2102200
14	16045.55	16256.17	101312.71	9.2053545	9.2110184
15	16074.26	16286.03	101317.51	9.2061309	9.2118153
16	16102.97	16315.89	101322.31	9.2069059	9.2126109
17	16131.67	16345.76	101327.12	9.2076795	9.2134051
18	16160.83	16375.63	101331.94	9.2084516	9.2141980
19	16189.09	16405.50	101336.77	9.2092224	9.2149894
20	16217.79	16435.37	101341.61	9.2099917	9.2157795
21	16246.50	16465.25	101346.46	9.2107597	9.2165683
22	16275.20	16495.13	101351.32	9.2115263	9.2173556
23	16303.91	16525.01	101356.19	9.2122914	9.2181417
24	16332.62	16554.89	101361.07	9.2130552	9.2189264
25	16361.29	16584.78	101365.95	9.2138176	9.2197097
26	16389.99	16614.67	101370.84	9.2145787	9.2204917
27	16418.68	16644.56	101375.74	9.2153384	9.2212724
28	16447.38	16674.46	101380.65	9.2160967	9.2220718
29	16476.07	16704.36	101385.57	9.2168536	9.2228298
30	16504.76	16734.26	101390.50	9.2176092	9.2236065
31	16533.45	16764.16	101395.44	9.2183635	9.2243819
32	16562.14	16794.07	101400.39	9.2191164	9.2251561
33	16590.82	16823.98	101405.35	9.2198680	9.2259289
34	16619.51	16853.89	101410.32	9.2206182	9.2267004
35	16648.19	16883.81	101415.30	9.2213671	9.2274706
36	16676.87	16913.73	101420.29	9.2221147	9.2282595
37	16705.55	16943.65	101425.29	9.2228909	9.2290071
38	16734.23	16973.58	101430.29	9.2236059	9.2297735
39	16762.91	17003.51	101435.30	9.2243495	9.2305386
40	16791.39	17033.44	101440.32	9.2250918	9.2313024
41	16820.26	17065.37	101445.35	9.2258328	9.2320650
42	16848.94	17093.31	101450.39	9.2265725	9.2328262
43	16687.01	17123.25	101455.44	9.2273110	8.2335863
44	16906.28	17153.19	101460.50	9.2280481	9.2343451
45	16934.95	17183.14	101465.57	9.2287839	9.2351026
46	16963.62	17213.09	101470.64	9.2295185	9.2358589
47	16992.28	17243.04	101475.72	9.2302518	9.2366139
48	17020.95	17273.00	101480.81	9.2309838	9.2373678
49	17049.61	17302.96	101485.91	9.2317145	9.2381203
50	17078.28	17332.92	101491.02	9.2324440	9.2388717
51	17106.94	17362.88	101496.14	9.2331722	9.2396218
52	17135.60	17392.85	101501.27	9.2338992	9.2403708
53	17164.25	17422.82	101506.41	9.2346249	9.2411185
54	17192.91	17452.79	101511.56	9.2332494	9.2418650
55	17221.56	17482.77	101516.72	9.2360726	9.2426103
56	17250.22	17512.75	101521.89	9.2367946	9.2433543
57	17278.87	17542.73	101527.07	9.2375153	9.2440972
58	17307.52	17572.72	101532.26	9.2382349	9.2448389
59	17336.17	17601.71	101537.46	9.2389532	9.2455794
60	17364.82	18632.70	101542.67	9.2396702	9.2463188

80. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log Tang.
60	98768.83	631375.15	639245.32	9.9946199	10.8002875
59	98764.28	630188.66	638073.47	9.9945999	10.7994706
58	98759.72	629006.51	636905.95	9.9945798	10.7986551
57	98755.15	627828.68	635742.76	9.9945597	10.7978411
56	98750.57	626655.14	634583.86	9.9945396	10.7970286
55	98745.98	625485.88	633429.23	9.9945194	10.7962175
54	98741.38	624320.86	632278.84	9.9944992	10.7954078
53	98736.77	623160.07	631132.69	9.9944789	10.7945996
52	98732.16	622003.47	629990.73	9.9944587	10.7937928
51	98727.54	620851.06	628852.95	9.9944383	10.7919874
50	98722.91	619702.79	627719.33	9.9944180	10.7921835
49	98718.27	618558.67	626589.84	9.9943975	10.7913809
48	98713.62	617418.65	625464.46	9.9943771	10.7605797
47	98708.97	616282.72	624343.16	9.9943566	10.7867800
46	98704.31	615150.85	623225.94	9.9943361	10.7889816
45	98699.64	614023.03	622112.75	9.9943156	10.7881847
44	98694.96	612899.23	621003.59	9.9942950	10.7873891
43	98690.27	611779.43	619898.43	9.9942743	10.7865949
42	98685.57	610663.60	617797.25	9.9942537	10.7858020
41	98680.86	609551.74	617700.03	9.9942330	10.7850105
40	98676.15	608443.81	616606.74	9.9942122	10.7842205
39	98671.43	607339.79	615517.36	9.9941914	10.7834317
38	98666.70	606239.67	614431.89	9.9941706	10.7826444
37	98661.96	605143.43	613350.28	9.9941498	10.7818583
36	98657.21	604051.03	612272.53	9.9941289	10.7810736
35	98652.46	602962.47	611198.61	9.9941079	10.7802903
34	98647.70	601877.72	610128.50	9.9940870	10.7795083
33	98642.93	600796.76	609062.19	9.9940659	10.7787276
32	98638.15	599719.57	607999.64	9.9940449	10.7776482
31	98633.36	598646.14	606940.85	9.9940238	10.7771701
30	98628.56	597576.44	605885.80	9.9940027	10.7763935
29	98623.75	596510.45	604834.45	9.9939815	10.7756181
28	98618.94	595448.15	603786.80	9.9939603	10.7748439
27	98614.12	594389.52	602742.82	9.9939391	10.7740711
26	98609.29	593334.55	601702.50	9.9939176	10.7732096
25	98604.45	592283.22	600665.81	9.9938965	[illegible]
24	98599.60	591235.50	599632.74	9.9938752	10.7717605
23	98594.74	590191.38	598603.26	9.9938538	10.7709929
22	98589.88	589150.84	597577.37	9.9938324	10.7702245
21	98585.01	588113.86	596555.04	9.9938109	10.7694614
20	98580.13	587080.42	595536.25	9.9937894	10.7686976
19	98575.24	586050.51	594520.98	9.9937679	10.7679350
18	98570.34	585024.10	593509.22	9.9937463	10.7671738
17	98565.44	584001.17	592500.95	9.9937247	10.7664137
16	98560.53	582981.72	591496.14	9.9937030	10.7656549
15	98555.61	581965.72	590494.79	9.9936813	10.7648974
14	98550.68	580953.15	589496.88	9.9936596	10.7641411
13	98545.74	579944.00	588502.38	9.9936378	10.7633861
12	98540.79	578938.25	587511.28	9.9936160	11.7626322
11	98535.83	577935.88	586523.56	9.9935942	10.7618797
10	98530.87	576936.88	585539.20	9.9935723	10.7611183
9	98525.90	575941.22	584558.20	9.9935504	10.7603781
8	98520.92	574945.59	583580.53	9.9935285	10.7596292
7	98515.93	574959.88	582606.17	9.9935065	10.7587815
6	98510.93	572974.16	581635.10	9.9934844	10.7581350
5	98505.92	571991.73	580667.32	9.9934624	10.7573897
4	98500.91	571012.56	579702.80	9.9934403	10.7566457
3	98495.89	570036.63	578741.53	9.9934181	10.7559028
2	98490.86	569063.94	577783.50	9.9933959	10.7554611
1	98485.82	568094.46	576828.07	7.9933737	10.7544206
0	98480.77	567128.18	575877.05	9.9933515	10.7536812

13764.82

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang
0	17364.82	17632.70	101542.67	9.2396702	9.2463188	60	98480.77	567128.18	575877.05	9.9933515	10.7536812
1	17393.46	17662.69	101547.88	9.2403861	9.2470569	59	98475.71	566165.09	574928.61	9.9933292	10.7529431
2	17422.11	17692.69	101553.10	9.2411007	9.2477939	58	98470.65	565205.16	573983.33	9.9933068	10.7522061
3	17450.75	17722.69	101558.33	9.2418141	9.2485297	57	98465.58	564248.38	573041.21	9.9932845	10.7514703
4	17479.39	17752.69	101563.57	9.2425264	9.2492643	56	98460.50	563294.74	572102.23	9.9932621	10.7507357
5	17508.03	17782.70	101568.82	9.2432374	9.2499978	55	98455.41	562344.21	571166.36	9.9932396	10.7500022
6	17536.67	17812.71	101574.08	9.2439472	9.2507301	54	98450.31	561396.80	570233.60	9.9932171	10.7492699
7	17565.31	17842.72	101579.35	9.2446558	9.2513612	53	98445.21	560452.47	569303.93	9.9931946	10.7485388
8	17593.95	17872.74	101584.35	9.2443632	9.2521912	52	98440.10	559511.21	568377.34	9.9931720	10.7478088
9	17622.58	17902.76	101589.92	9.2460695	9.2529200	51	98434.98	558573.02	567453.80	9.9931494	10.7470800
10	17651.21	17932.78	101595.21	9.2467746	9.2536477	50	98429.85	557637.86	566533.31	9.9931268	10.7463523
11	17679.84	17962.81	101600.51	9.2474784	9.2543743	49	98424.71	556705.74	565615.84	9.9931041	10.7456257
12	17708.47	17992.84	101605.82	9.2481811	9.2550997	48	98419.56	555776.63	564701.40	9.9930814	10.7456003
13	17737.10	18022.87	101611.14	9.2488827	9.2558240	47	98414.40	554850.52	563789.95	9.9930587	10.7441760
14	17765.73	18052.91	101616.47	9.2495830	9.2565472	46	98409.24	553927.40	562881.43	9.9930359	10.7434528
15	17794.35	18082.95	101621.81	9.2502822	9.2572691	45	98404.07	553007.24	561975.99	9.9930131	10.7427308
16	17822.98	18112.99	101627.16	9.2509803	9.2579901	44	98398.89	552090.05	561073.45	9.9929901	10.7420099
17	17851.60	18143.03	101632.52	9.2516772	9.2587099	43	98393.70	551175.79	560173.82	9.9929673	10.7412901
18	17880.22	18173.08	101637.89	9.2523729	9.2594285	42	98388.50	550264.46	559277.15	9.9929444	10.7405715
19	17908.84	18203.13	101643.27	9.2530675	9.2601461	41	98383.29	549356.04	558383.43	9.9929214	10.7398534
20	17937.46	18233.18	101648.66	9.2537609	9.2608525	40	98378.08	548450.52	557492.58	9.992 984	10.7391375
21	17966.07	18263.24	101654.06	9.2544532	9.2655779	39	98372.86	547547.88	556604.60	9.9928753	10.7384221
22	17994.69	18293.30	101659.46	9.2551444	9.2622921	38	98367.63	546648.12	555719.50	9.9928522	10.7377079
23	18023.0	18323.36	101664.87	9.2558344	9.2630053	37	98362.39	545751.21	554837.26	9.9928291	10.7369947
24	18051.91	18353.43	101670.29	9.2565233	9.2637173	36	98357.14	544857.15	553957.86	9.9928059	10.7362827
25	18080.52	18383.50	101675.72	9.2572110	9.2644283	35	98351.89	543965.92	553081.29	9.9927827	10.7355717
26	18109.13	18413.57	101681.16	9.2578977	9.2651382	34	98346.63	543037.50	552207.54	9.9927595	10.7348618
27	18137.74	18443.65	101686.61	9.2585832	9.2658470	35	98341.36	541191.88	551336.59	9.9927362	10.7341530
28	18166.35	18473.73	101692.07	9.2592676	9.2665547	32	98336.08	541309.36	550468.43	9.9927129	10.7334453
29	18194.95	18503.81	101697.54	9.2599509	9.2672613	31	98330.79	540429.01	549603.05	9.9926895	10.7328387
30	18223.55	18533.90	101703.02	9.2606330	9.2679669	30	98325.49	539551.72	548740.43	9.9926661	10.7320331
31	18252.15	18563.99	101708.51	9.2613141	9.2686714	29	98320.18	538677.18	547880.55	9.9926427	10.7313286
32	18280.75	18594.08	101714.01	9.2619941	9.2693749	28	98314.87	537805.38	547023.42	9.9926192	10.7306251
33	18309.35	18624.18	101719.52	9.2626729	9.2700772	27	98309.55	536936.30	546169.01	9.9925957	10.7299228
34	18337.95	18654.20	101725.04	0.2633507	9.2707786	26	98304.22	536069.63	545317.31	9.9925722	10.7292214
35	18366.54	18684.38	101730.56	9.2640274	9.2714788	25	98298.88	535206.26	544468.31	9.9925486	10.7285212
36	18395.13	18714.49	101736.09	9.2647030	9.2721780	24	98293.53	534345.28	543621.99	9.9925250	10.7278220
37	18423.73	18744.60	101741.63	9.2653775	9.2728762	23	98288.17	533486.96	542778.35	9.9925013	10.7271238
38	18452.32	18774.71	101747.18	9.2660509	9.2735733	22	98282.81	532631.31	541937.37	9.9924776	10.7264267
39	18480.91	18904.83	101752.74	9.2667232	9.2742694	21	98277.44	531778.30	541099.03	9.9924539	10.7257306
40	18509.49	18834.95	101758.31	9.2673945	9.2749644	20	98272.06	530927.4	540263.33	9.9924301	10.7250356
41	18538.08	18865.07	101763.31	9.2680647	9.2756584	19	98266.67	530080.18	539430.26	9.9924063	10.7243416
42	18566.66	18895.20	101769.48	9.2687338	9.2763514	18	98261.27	529235.05	538599.79	9.9923824	10.7236486
43	18595.24	18925.33	101775.08	9.2694019	9.2770434	17	98255.87	528392.51	537771.92	9.9923585	10.7229566
44	18623.82	18955.46	101780.69	9.2700689	9.2777343	16	98250.46	527552.55	536946.64	9.9923346	10.7222657
45	18652.40	18985.59	101786.31	9.2707348	9.2784242	15	98245.04	526715.17	536123.93	9.9923106	10.7215758
46	18680.98	19015.73	101761.94	9.2713997	9.2791131	14	98239.61	525880.31	535303.79	9.9922866	10.7208869
47	18709.56	19045.87	101797.58	9.2720635	9.2798009	13	98234.17	525048.[illegible]	534486.20	9.9922626	10.7201991
48	18738.13	19076.02	101803.22	9.2727263	9.2804878	12	98228.72	524218.36	533671.14	9.9922385	10.7195122
49	18766.70	19106.17	101808.87	9.2733880	9.2811736	11	98223.27	523391.[illegible]	532858.62	9.9922144	10.7188264
50	18795.27	19136.32	101814.53	9.2740487	9.2818585	10	98217.81	522566.47	532048.60	9.9921902	10.7181415
51	18823.84	19166.48	101820.20	9.2747083	9.2824423	9	98212.34	521744.28	531241.09	9.9921660	10.7174577
52	18852.41	19196.64	101825.88	9.2753669	9.2832251	8	98206.86	520924.59	530436.08	9.9921418	10.7167749
53	18880.98	19226.83	101831.57	9.2760245	9.2839070	7	98201.37	520107.38	529633.54	9.9921175	10.7160930
54	18909.54	19256.96	101837.27	9.2766811	9.2845878	6	98195.87	519292.64	528833.47	9.9920932	10.7154122
55	18938.11	19287.13	101842.99	9.2773366	9.2852677	5	98190.36	518480.35	528035.87	9.9920689	10.7147323
56	18966.67	19317.30	101848.70	9.2779911	9.2859466	4	98184.85	517670.71	527240.70	9.9920445	10.7140534
57	18995.23	19347.48	101854.43	9.2786445	9.2866245	3	98179.33	516863.11	526447.98	9.9920201	10.7133755
58	19023.79	19377.66	101860.17	9.2792970	9.2873014	2	98173.80	516058.13	525657.68	9.9919956	10.7126986
59	19052.34	19407.84	101865.92	9.2799484	9.2879773	1	98168.26	515255.57	524869.79	9.9919711	10.7120227
60	19080.90	19438.03	101871.68	9.2805988	9.2886523	0	98162.71	514455.40	524084.31	9.9919466	10.7113477

Grad. 11.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	19080.90	19438.03	101871.68	9.1805988	9.2886523
1	19109.45	19468.22	101877.44	9.2812483	9.2893263
2	19138.00	19498.41	101883.21	9.2818967	9.2899993
3	19166.55	19528.61	101888.99	9.2825441	9.2906713
4	19195.10	19558.81	101894.78	9.2831905	9.2913424
5	19223.65	19589.01	101900.58	9.2838359	9.2920126
6	19252.20	19619.22	101906.39	9.2844803	9.2926817
7	19280.74	19649.43	101912.21	9.2851237	9.2933500
8	19309.28	19679.64	101918.04	9.2857671	9.2940172
9	19337.82	19709.86	101923.88	9.2864076	9.2946836
10	19366.36	19740.08	101929.73	9.2870480	9.2953489
11	19394.90	19770.30	101935.59	9.2876875	9.2960134
12	19423.44	19800.53	101941.46	9.2883260	9.2966769
13	19451.97	19830.76	101947.34	9.2889636	9.2973395
14	19480.50	19861.00	101953.23	9.2896001	9.2980011
15	19509.03	19891.24	101959.12	9.2902357	9.2986618
16	19537.56	19921.48	101965.02	9.2908704	9.2993216
17	19566.09	19951.72	101970.93	9.2915040	9.2999804
18	19594.61	19981.97	101976.85	9.2921367	9.3006383
19	19623.14	20012.22	101982.78	9.2927685	9.3012954
20	19651.66	20042.48	101898.72	9.2933993	9.3019514
21	19680.18	20072.74	101994.67	9.2940291	9.3026066
22	19708.70	20103.00	102000.63	9.2946580	9.3032609
23	19737.22	20133.27	102006.60	9.2952859	9.3039143
24	19765.73	20163.54	102012.58	9.2959129	9.3045667
25	19794.25	20193.81	102018.57	9.2961390	9.3052183
26	19822.76	20224.09	102024.57	9.2971641	9.3058689
27	19851.27	20254.37	102030.58	9.2977883	9.3065187
28	19879.78	20284.65	102036.60	9.2984116	9.3071675
29	19908.29	20314.94	102042.63	9.2990339	9.3078155
30	19936.79	20345.23	102048.67	9.2996553	9.3084626
31	19965.30	20375.52	102054.71	9.3002758	9.3091088
32	19993.80	20405.82	10206[illegible].76	9.3008953	9.3097541
33	20022.30	20436.12	102066.82	9.3015140	9.3103985
34	20050.80	20466.43	102072.89	9.3021317	9.3110421
35	20079.30	20496.74	102078.97	9.3027485	9.3116848
36	20107.79	20527.05	10208[illegible].06	9.3033644	9.3123266
37	20136.29	20557.37	102091.16	9.3039794	9.3129675
38	20164.78	20587.69	102097.27	9.3045934	9.3136076
39	20193.27	20618.01	102103.39	9.9052066	9.3142468
40	20221.76	20648.34	102109.52	9.3058189	9.3148851
41	20250.24	20678.67	102115.66	9.3064303	9.3155226
42	20278.73	20709.00	102121.81	9.3070407	9.3161592
43	20307.21	20739.34	102127.97	9.3076503	9.3167950
44	20335.69	20769.58	102134.14	9.3082590	9.3174299
45	20364.17	20800.03	102140.32	9.3088668	9.3180640
46	20392.65	20830.38	102146.50	9.3094737	9.3186972
47	20421.13	20860.73	102152.69	9.3100798	9.3193295
48	20449.61	20891.09	102158.89	9.3106849	9.3199611
49	20478.08	20921.45	102165.10	9.3112892	9.3205918
50	20506.55	20951.81	102171.32	9.3118926	9.3212216
51	20535.02	20982.18	102177.55	9.3124951	9.3218506
52	20563.49	21012.55	102183.79	9.3130968	9.3223788
53	20591.95	21042.93	102190.04	9.3136976	9.3231061
54	20620.42	21073.31	102196.30	9.3142975	9.3237327
55	20648.88	21103.69	102202.57	9.3148965	9.3243584
56	20677.34	21134.07	102208.85	9.3154947	9.3249832
57	20705.80	21164.46	102215.14	9.3160921	9.3256073
58	20734.26	21194.85	102221.44	9.3166885	9.3262305
59	20762.71	21225.25	102227.75	9.3172841	9.3268529
60	20791.17	21255.65	102234.07	9.3178789	9.3274745

78. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	98162.71	514455.40	524084.31	9.9919466	10.7113477
59	98157.16	513657.63	523301.21	9.9919220	10.7106737
58	98151.60	512862.24	522520.50	9.9918974	10.7100007
57	98146.03	512069.21	521742.16	9.9918727	10.7093287
56	98140.45	511278.55	521966.18	9.9908480	10.7086576
55	98134.86	510490.24	520192.54	9.9918233	10.7079874
54	98129.26	509704.26	519421.25	9.9917986	10.7073183
53	98123.66	508920.61	518652.28	9.9917737	10.7066500
52	98118.05	508139.28	517885.63	9.9917489	10.7059828
51	98112.43	507360.25	517121.28	9.9917240	10.7053164
50	98106.80	506583.52	516359.24	9.9916991	10.7046511
49	98101.16	505809.07	515599.48	9.9916741	10.7039866
48	98095.51	505036.90	514841.97	9.9916492	10.7033231
47	98089.86	504267.00	514086.77	9.9916241	10.7026605
46	98084.20	503499.35	513333.81	9.9915990	10.7019989
45	98078.53	502733.95	512583.09	9.9915739	10.7013382
44	98072.85	501970.78	511834.61	9.9915488	10.7006784
43	98067.16	501209.84	511088.35	9.9915236	10.7000196
42	98061.46	500451.11	510344.31	9.9914984	10.6993617
41	98055.76	499694.69	509602.48	9.9914731	10.6987046
40	98050.05	498940.27	508862.84	9.9914478	10.6980486
39	98044.33	498188.13	508125.39	9.9914228	10.6973934
38	98038.60	497438.17	507390.12	9.9913975	10.6967391
37	98032.86	496690.37	506657.01	9.9913717	10.6960857
36	98027.11	495944.74	505926.06	9.9913462	10.6954333
35	98021.36	495201.25	505197.26	9.9913207	10.6947817
34	98015.60	494459.90	504470.60	9.9912952	10.6941311
33	98009.83	493720.67	503746.07	9.9912696	10.6934813
32	98004.05	492983.58	503013.67	9.9912440	10.6928325
31	97998.26	492248.59	502303.37	9.9912184	10.6921845
30	97992.47	491515.70	501585.17	9.9911927	10.6915374
29	97986.67	490784.91	500869.07	9.9911670	10.6908912
28	97980.86	490056.20	500155.05	9.9911412	10.6902459
27	97975.04	489329.56	499443.11	9.9911154	10.6896015
26	97969.21	488504.99	498733.23	9.9910896	10.6889579
25	97963.37	487882.48	498025.41	9.9910637	10.6883152
24	97957.52	487162.01	497319.64	9.9910378	10.6876734
23	97951.67	486443.59	496615.91	9.9910119	10.6870325
22	97945.81	485727.19	495914.21	9.9909859	10.6863924
21	97939.94	485012.81	495214.53	9.9909598	10.6857532
20	97934.06	484300.45	494516.87	9.9909338	10.6851149
19	97928.17	483590.10	493821.20	9.9909077	10.6844774
18	97922.28	482881.74	493127.54	9.9908815	10.6838408
17	97916.38	482175.36	492435.86	9.9908553	10.6832050
16	97910.47	481470.9[illegible]	491746.16	9.9908291	10.6825701
15	97904.55	480768.54	491058.44	9.9908029	10.6819360
14	97898.62	480068.08	490372.67	9.9907766	10.6813028
13	97992.68	479369.57	489688.86	9.9907502	10.6806705
12	97886.74	478673.00	489007.01	9.9907239	10.6800389
11	97880.79	477978.37	488327.07	9.9906974	10.6794082
10	97874.83	477285.67	487649.07	9.9906710	10.6787784
9	97868.86	476594.90	486972.99	9.9906445	10.6781494
8	97862.88	475906.03	486298.83	9.9906180	10.6775211
7	97856.89	475219.07	485627.57	9.9905914	10.6768939
6	97850.90	474534.01	484956.21	9.9905648	10.6762673
5	97844.90	473850.83	484287.74	9.9905382	10.6756416
4	97838.89	473169.54	483621.14	9.9905115	10.6750168
3	97832.87	472490.12	482956.43	9.9904848	10.6743927
2	97826.84	471812.56	482293.57	9.9904580	10.6737695
1	97820.80	471136.86	481632.58	9.9904312	10.6731471
0	97814.76	470463.01	480973.43	9.9904044	10.6725255

20791.17

Grad. 12.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
0	20791.17	21255.65	102234.07	9.3178789	9.3274745
1	20819.62	21286.06	102240.40	9.3184728	9. 280953
2	20848.07	21316.47	102246.73	9.3190659	9.3287153
3	20876.52	21346.88	102253.07	9.3196581	9.3293345
4	20904.97	21377.30	102259.42	9.3202495	9.3299528
5	20933.41	21407.72	102265.78	9.3208400	9.3305704
6	20961.86	21438.14	102272.15	9.3214297	9.3311872
7	20990.30	21468.57	102278.53	9.3220186	9.3318031
8	21018.74	21499.00	102284.92	9.3226066	9.3324183
9	21047.18	21529.44	102291.32	9.3231938	9.3330327
10	21075.61	21559.88	102297.73	9.3237802	9.3336463
11	21104.05	21590.32	102304.15	9.3243657	9.3342591
12	21132.48	21620.77	102310.58	9.3249505	9.3348711
13	21160.91	21651.22	102317.02	9.3255344	9.3354823
14	21189.34	21681.67	102323.47	9.3261174	9.3360927
15	21217.77	21712.13	102329.93	9.3266997	9.3367024
16	21246.19	21742.59	102336.40	9.3272811	9.3373113
17	21274.62	21773.06	102342.88	9.3278617	9.3379194
18	21303.04	21803.53	102349.37	9.3284416	9.3385267
19	21331.46	21834.00	102355.87	9.3290205	9.3391333
20	21359.88	21864.48	102362.38	9.3295988	9.3397391
21	21388.29	21894.96	102368.90	9.3301761	9.3403441
22	21416.71	21925.44	102375.43	9.3307527	9.3409484
23	21445.12	21955.93	102381.96	9.3313285	9.3415519
24	21473.53	21986.42	102388.50	9.3319035	9.3421546
25	21501.94	22016.92	102395.05	9.3324777	9.3427566
26	21530.35	22047.42	102401.61	9.3330511	9.3433578
27	21558.76	22077.93	102408.18	9.3336237	9.3439583
28	21587.16	22108.44	102414.76	9.3341955	9.3445580
29	21615.56	22138.95	102421.35	9.3347665	9.3451570
30	21643.96	22169.47	102427.95	9.3353368	9.3457552
31	21672.36	22199.99	102434.56	9.3359062	9.3463527
32	21700.76	22230.51	102441.18	9.3364749	9.3469494
33	21729.15	22261.04	102447.81	9.3370428	9.3475454
34	21757.54	22291.57	102454.45	9.3376099	9.3481407
35	21785.93	22322.11	102461.10	9.3381762	9.3487352
36	21814.32	22352.65	102467.76	9.3387418	9.3493290
37	21842.71	22383.19	102474.43	9.3393065	9.3499220
38	21871.10	22413.74	102481.11	9.3398706	9.3505143
39	21899.48	22444.29	102487.80	9.3404338	9.3511059
40	21927.86	22474.85	102494.49	9.3409963	9.3516968
41	21956.24	22505.41	102501.19	9.3415580	9.3522869
42	21984.62	22535.97	102507.90	9.3421190	9.3528763
43	22013.00	22566.54	102514.62	9.3426792	9.3534650
44	22041.37	22597.11	102521.35	9.3432386	9.3540530
45	22069.74	22627.69	102528.09	9.3437973	9.3546402
46	22098.11	22658.87	102534.84	9.3443552	9.3552267
47	22126.48	22688.85	102541.60	9.3449124	9.3558126
48	22154.85	22719.44	102548.37	9.3454688	9.3563977
49	22183.21	22750.03	102555.15	9.3460245	9.3569821
50	22211.58	22780.63	102561.94	9.3465794	9.3575658
51	22239.94	22811.23	102568.74	9.3471336	9.3581487
52	22268.30	22841.83	102575.55	9.3476870	9.3587310
53	22296.66	22872.44	102582.37	9.3482397	9.3593126
54	22325.01	22903.05	102589.20	9.3487917	9.3598935
55	22353.37	22933.67	102596.04	9.3493429	9.3604736
56	22381.72	22964.29	102602.85	9.3498934	9.3610531
57	22410.07	22994.92	102609.79	9.3504432	9.3616319
58	22438.41	23025.55	102616.60	9.3509922	9.3622100
59	22466.76	23056.18	102623.50	9.3515405	9.3627874
60	22495.11	23086.82	102630.39	9.3520880	9.3633641

77. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
60	97814.76	470463.01	480973.43	9.9904044	10.6725255
59	97808.71	469791.00	480316.13	9. 9903775	10.6719047
58	97802.65	469120.83	479660.66	9. 9903506	10.6712847
57	97796.58	468452.48	479007.02	9. 9903237	10.6706655
56	97790.50	467785.95	478355.20	9. 9902967	10.6700471
55	97784.41	467121.24	477705.19	9. 9902697	10.6694296
54	97778.32	466458.32	477056.99	9. 9902426	10.6688128
53	97772.22	465797.21	476410.58	9. 9902155	10.6681969
52	97766.11	465137.88	475765.96	9. 9901883	10.6675817
51	97759.99	464480.34	475123.12	9. 9901612	10.6669673
50	97753.86	463824.57	474482.06	9. 9901339	10.6663537
49	97747.73	463170.56	473842.77	9. 9901067	10.6657409
48	97741.59	462518.32	473205.23	9. 9900794	10.6651289
47	97735.44	461867.83	472569.45	9. 9900521	10.6645177
46	97729.28	461219.08	471935.42	9. 9900247	10.6639073
45	97723.11	460572.07	471303.13	9. 9899973	10.6632976
44	97716.93	459926.80	470672.56	9. 9899698	10.6626887
43	97710.75	459283.25	470043.72	9. 9899423	10.6620806
42	97704.56	458641.41	469416.60	9. 9899148	10.6614733
41	97698.36	458001.29	468791.19	9. 9898873	10.6608667
40	97692.15	457362.87	468167.45	9. 9898597	10.6621609
39	97685.93	456726.14	467545.48	9. 9898320	10.6596559
38	97679.90	456091.11	466925.16	9. 9898043	10.6590519
37	97673.47	455457.76	466306.52	9. 9897766	10.6584481
36	97667.23	454826.08	465689.56	9. 9897489	10.6578454
35	97660.98	454196.08	465074.27	9. 9897211	10.6572434
34	97654.72	453567.73	464460.64	9. 9896952	10.6566422
33	97648.45	452941.05	463848.67	9. 9896654	10.6560417
32	97642.17	452316.01	463238.35	9. 9896374	10.6554420
31	97635.89	451692.61	462629.67	9. 9896095	10.6548430
30	97629.60	451070.85	462022.63	9. 9895815	10.6542448
29	97623.30	450450.72	461417.22	9. 9895535	10.6536473
28	97616.99	449832.21	460813.43	9. 9895254	10.6530506
27	97610.67	449215.32	460211.26	9. 9894973	10.6524546
26	97604.35	448600.04	459610.70	9. 9894692	10.6518593
25	97598.02	447986.36	459011.74	9. 9894410	10.6512648
24	97591.68	447374.28	458414.39	9. 9894128	10.6506710
23	97585.33	446763.79	457818.62	9. 9893845	10.6500780
22	97578.97	446154.89	457224.44	9. 9893562	10.6494857
21	97572.60	445547.56	456631.83	9. 9893279	10.6488941
20	97566.23	444941.81	456040.80	9. 9892995	10.6483032
19	97559.85	444337.22	455451.34	9. 9892711	10.6477131
18	97553.46	443734.99	454863.44	9. 9892427	10.6471237
17	97547.06	443133.92	454277.09	9. 9892142	10.6465350
16	97540.65	442534.35	453692.29	9. 9891856	10.6459470
15	97534.23	441936.41	453109.03	9. 9891571	10.6453598
14	97527.81	441339.96	452527.30	9. 9891285	10.6447733
13	97521.38	440745.04	451947.11	9. 9890998	10.6441874
12	97514.94	440151.64	451368.44	9. 9890711	10.6436023
11	97508.49	439559.76	450791.29	9. 9890421	10.6430179
10	97502.03	438969.40	450215.65	9. 9890137	10.6424342
9	97495.56	438380.54	449641.52	9. 9889849	10.6418513
8	97489.09	437793.17	449068.89	9. 9889560	10.6412690
7	97482.61	437207.31	448497.75	9. 9889271	10.6406874
6	97476.12	436622.93	447928.10	9. 9888982	10.6401065
5	97469.62	436040.03	447359.93	9. 9888593	10.6395264
4	97463.11	435458.61	446793.24	9. 9888403	10.6389469
3	97456.60	434878.66	446228.03	9. 9888113	10.6383681
2	97450.08	435300.18	445664.28	9. 9887822	10.6377900
1	97443.55	433723.16	445101.98	9. 9887531	10.6372126
0	97437.01	433147.59	444541.15	9. 9887239	10.6366359

Grad. 13.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	22945.11	23086.82	102630.39	9.3520880	9.3633645
1	22523.45	23117.46	102637.29	9.3526349	9.3639401
2	22551.79	23148.11	102644.20	9.3531810	9.3645155
3	22580.13	23178.76	102651.12	9.3537264	9.3650901
4	22608.46	23209.41	102658.05	9.3542710	9.3656641
5	22636.80	23240.07	102664.99	9.3548151	9.3662374
6	22665.13	23270.73	102671.94	9.3553582	9.3668100
7	22693.46	23301.40	102678.90	9.3559007	9.3673819
8	22721.79	23331.07	102685.87	9.3564426	9.3679532
9	22750.12	23362.74	102692.84	9.3569836	9.3685238
10	22778.44	23393.42	102699.82	9.3575240	9.3690937
11	22806.77	23424.10	102706.81	9.3580637	9.3696629
12	22835.09	23454.79	102713.81	9.3586027	9.3702315
13	22863.41	23485.48	102720.82	9.3591409	9.3707994
14	22891.72	23516.17	102727.84	9.3596785	9.3713667
15	22920.04	23546.87	102734.87	9.3602154	9.3719333
16	22948.35	23577.58	102741.91	9.3607515	9.3724992
17	22976.66	23608.29	102748.96	9.3612870	9.3730645
18	23004.97	23639.00	102756.01	9.3618217	9.3736391
19	23033.28	23669.72	102763.09	9.3623558	9.3741930
20	23061.59	23700.44	102770.17	9.3628892	9.3747563
21	23089.89	23731.16	102777.26	9.3634219	9.3753190
22	23118.19	23761.89	102784.36	9.3639539	9.3758810
23	23146.49	23792.62	102791.47	9.3644852	9.3764423
24	23174.79	23823.36	102798.59	9.3650158	9.3770030
25	23203.09	23854.10	102805.72	9.3655458	9.3775631
26	23231.38	23884.85	102812.86	9.3660750	9.3781225
27	23259.67	23915.60	102820.01	9.3666039	9.3786813
28	23287.96	23946.35	102827.17	9.3671315	9.3792394
29	23316.25	23977.11	102834.34	9.3676587	9.3797969
30	23344.54	24007.87	102841.52	9.3681853	9.3803537
31	23372.82	24038.64	102848.71	9.3687111	9.3809100
32	23401.10	24069.41	102855.91	9.3692363	9.3814655
33	23429.38	24100.19	102863.12	9.3697608	9.3820105
34	23457.66	24130.97	102870.34	9.3702847	9.3825748
35	23485.94	24161.76	102877.57	9.3708079	9.3831285
36	23514.22	24192.55	102884.81	9.3713304	9.3836816
37	23542.48	24223.34	102891.06	9.3718527	9.3842340
38	23570.75	24254.14	102899.32	9.3723735	9.3847858
39	23599.02	24284.94	102906.58	9.3728940	9.3853370
40	23627.29	24315.75	102913.85	9.3734139	9.3858876
41	23655.55	24346.56	102921.13	9.3739331	9.3864376
42	23683.81	24377.37	102928.42	9.3744517	9.3869869
43	23712.07	24408.19	102935.72	9.3749696	9.3875356
44	23740.33	24439.01	102943.03	9.3754868	9.3880837
45	23768.59	24469.84	102950.35	9.3760034	9.3886312
46	23796.84	24500.67	102957.68	9.3765194	9.3891781
47	23825.10	24531.51	102965.02	9.3770347	9.3897244
48	23853.35	24562.35	102972.37	9.3775495	9.3902700
49	23881.59	24593.20	102979.73	9.3780633	9.3908151
50	23909.84	24624.05	102987.10	9.3785767	9.3913595
51	23938.08	24654.91	102994.48	9.3790894	9.3919034
52	23966.33	24685.77	103001.87	9.3796015	9.3924466
53	23994.57	24716.63	103009.27	9.3801129	9.3929893
54	24022.80	24747.50	103016.68	9.3806237	9.3935313
55	24051.04	24778.37	103024.10	9.3811339	9.3940727
56	24079.27	24809.25	103031.53	9.3816434	9.3946136
57	24107.51	24840.13	103038.97	9.3821523	9.3951538
58	24135.74	24871.02	103046.42	9.3826605	9.3956935
59	24163.96	24901.90	103053.88	9.3831681	9.3962326
60	24192.19	24932.80	103061.35	9.3836752	9.3967711

76. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log Tang.
60	97437.01	433147.59	444541.15	9.9887239	10.6366359
59	97430.46	432573.47	443981.76	9.9886947	10.6360599
58	97423.90	432000.79	443423.82	9.9886655	10.6354845
57	97417.34	431429.55	442867.31	9.9886363	10.6349099
56	97410.77	430859.74	442312.24	9.9886070	10.6343359
55	97404.19	430291.36	441758.59	9.9885776	10.6337626
54	97397.60	429724.40	441206.37	9.9885482	10.6331900
53	97391.00	429158.85	440655.56	9.9885188	10.6326181
52	97384.39	428594.72	440106.16	9.9884894	10.6320468
51	97377.78	428031.99	439558.17	9.9884599	10.6314762
50	97371.16	427470.66	439011.58	9.9884303	10.6309063
49	97364.53	426910.72	438466.38	9.9884008	10.6303371
48	97357.89	426352.18	437922.57	9.9883712	10.6297685
47	97351.24	425795.01	437380.15	9.9883415	10.6292006
46	97344.58	425239.23	436839.10	9.9883118	10.6286333
45	97337.92	424684.82	436299.43	9.9882821	10.6280667
44	97331.25	424131.77	435761.13	9.9882523	10.6275008
43	97324.57	423580.09	435224.19	9.9882225	10.6269355
42	97317.88	423029.77	434688.61	9.9881927	10.6263709
41	97311.18	422480.80	434154.38	9.9881628	10.6258070
40	97304.48	421933.18	433621.50	9.9881329	10.6252437
39	97297.77	421386.90	433089.96	9.9881029	10.6246810
38	97291.05	420841.96	432559.77	9.9880729	10.6241190
37	97284.32	420298.35	432030.90	9.9880429	10.6235577
36	97277.58	419756.06	431503.36	9.9880128	10.6229970
35	97270.84	419215.10	430977.15	9.9879827	10.6224369
34	97264.09	418676.46	430452.25	9.9879525	10.6218775
33	97257.33	418137.13	429928.67	9.9879223	10.6213187
32	97250.56	417600.11	429406.40	9.9878921	10.6207606
31	97243.78	417064.40	428885.43	9.9878618	10.6202031
30	97236.99	416529.98	428365.76	9.9878315	10.6196463
29	97230.19	415996.85	427847.38	9.9878012	10.6190900
28	97223.39	415465.01	427330.29	9.9877708	10.6185341
27	97216.58	414934.46	426814.49	9.9877404	10.6179795
26	97209.76	414405.19	426299.96	9.9877099	10.6174252
25	97202.95	413877.19	425786.71	9.9876794	10.6168715
24	97196.09	413350.46	425274.74	9.9876488	10.6163184
23	97189.25	412824.99	424764.01	9.9876183	10.6157660
22	97182.40	412300.79	424254.57	9.9875876	10.6152142
21	97175.54	411777.84	423746.37	9.9875570	10.6146630
20	97168.67	411256.14	423239.43	9.9875263	10.6141124
19	97161.79	410735.69	422733.73	9.9874955	10.6135624
18	97154.91	410216.49	422229.28	9.9874648	10.6130131
17	97148.02	409698.52	421726.06	9.9874339	10.6124644
16	97141.12	409181.78	421224.08	9.9874031	10.6119163
15	97134.21	408666.27	420723.33	9.9873722	10.6113688
14	97127.29	408151.99	420223.80	9.9873413	10.6108219
13	97120.36	407638.92	419725.49	9.9873103	10.6102756
12	97113.43	407127.07	419228.40	9.9872793	10.6097300
11	97106.49	406616.43	418732.52	9.9872482	10.6091849
10	97099.54	406107.00	418237.85	9.9872171	10.6086405
9	97092.58	405598.77	417744.28	9.9871860	10.6080966
8	97085.61	405091.74	417252.10	9.9871549	10.6075534
7	97078.63	404585.90	416761.02	9.9871236	10.6070107
6	97071.65	404081.25	416271.14	9.9870924	10.6064687
5	97064.66	403577.79	415782.43	9.9870611	10.6059273
4	97057.66	403075.50	415294.91	9.9870298	10.6053864
3	97050.65	402574.40	414808.56	9.9869984	10.6048462
2	97043.63	402074.46	414323.39	9.9869670	10.6043765
1	97036.60	401575.70	413839.39	9.9869356	10.6037674
0	97029.57	401078.09	413356.55	9.9869041	10.6032289

24192.19

Grad. 14. — 75. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	24192.19	24932.80	103061.35	9.3836752	9.3967711	60	97029.57	401078.09	413356.55	9.9869041	10.6032289
1	24220.41	24963.70	103068.83	9.3841815	9.3973089	59	97022.53	400581.65	412874.87	9.9868726	10.6026911
2	24248.63	24994.60	103076.32	9.3846873	9.3978463	58	97015.48	400086.36	412394.35	9.9868410	10.6021537
3	24276.85	25025.51	103083.82	9.3851924	9.3983830	57	97008.42	399592.23	411914.98	9.9868094	10.6016170
4	24305.07	25056.42	103091.33	9.3856969	9.3989191	56	97001.35	399099.24	411436.75	9.9867778	10.6010809
5	24333.29	25087.34	103098.85	9.3862008	9.3994547	55	96994.28	398607.39	410959.67	9.9867461	10.6005453
6	24361.50	25118.26	103106.38	9.3867040	9.3999896	54	96987.20	398116.69	410483.74	9.9867144	10.6000104
7	24389.71	25149.19	103113.92	9.3872067	9.4005240	53	96980.11	397627.12	410008.93	9.9866827	10.5994760
8	24417.92	25180.12	103121.47	9.3877087	9.4010578	52	96973.01	397138.68	409535.26	9.9866509	10.5989422
9	24446.13	25211.06	103129.03	9.3882101	9.4015910	51	96965.90	396651.37	409062.73	9.9866191	10.5980090
10	24474.33	25242.00	103136.60	9.3887109	9.4021237	50	96958.79	396165.18	408591.30	9.9865872	10.5978763
11	24502.54	25272.94	103144.18	9.3892111	9.4026558	49	96951.67	395680.11	408131.00	9.9865553	10.5973442
12	24530.74	25303.89	103151.77	9.3897106	9.4031873	48	96944.54	395196.15	407651.8.	9.9865233	10.5068127
13	24558.94	25334.84	103159.36	9.3902096	9.4037182	47	96937.40	394713.31	407183.74	9.9864913	10.5962818
14	24587.13	25365.80	103166.97	9.3907079	9.4042486	46	96930.25	394231.57	406716.77	9.9864593	10.5957514
15	24615.33	25396.76	103174.59	9.3912057	9.4047784	45	96923.09	393750.94	406250.91	9.9864273	10.5952216
16	24643.52	25427.73	103182.22	9.3917028	9.4053076	44	96915.92	393271.41	405786.15	9.9863952	10.5946924
17	24671.71	25458.70	103189.85	9.3921993	9.4058363	43	96908.75	392792.97	405322.49	9.9863630	10.5941637
18	24699.90	25489.68	103197.50	9.3926952	9.4063644	42	96901.57	392315.63	404859.92	9.9863308	10.5936356
19	24728.09	25520.66	103205.16	9.3931905	9.4068919	41	96894.38	391839.37	404398.44	9.9862986	10.5931081
20	24756.27	25551.65	103212.82	9.3936852	9.4074189	40	96887.18	391364.20	403938.04	9.9862663	10.5925811
21	24784.45	25582.64	103220.50	9.3941794	9.4079453	39	96879.98	390890.11	403478.72	9.9862340	10.5920547
22	24812.63	25613.63	103228.18	9.3946729	9.4084712	38	96872.77	390417.10	403020.48	9.9862017	10.5915288
23	24840.81	25644.63	103235.88	9.3951658	9.4089965	37	96865.55	389945.16	402563.32	9.9861693	10.5910035
24	24868.99	25675.63	103243.59	9.3956581	9.4095212	36	96858.32	389474.29	402107.22	9.9861369	10.5904788
25	24897.16	25706.64	103251.30	9.3961499	9.4100454	35	96851.08	389004.48	401652.19	9.9861045	10.5899546
26	24925.33	25737.66	103259.03	9.3966410	9.4105690	34	96843.83	388535.74	401198.23	9.9860720	10.5894310
27	24953.50	25768.68	103266.76	9.3971315	9.4110921	33	96836.57	388068.05	400745.32	9.9860394	10.5889079
28	24981.67	25799.70	103274.51	9.3976215	9.4116146	32	96829.31	387601.42	400293.47	9.9860069	10.5883854
29	25009.84	25830.73	103281.27	9.3981109	9.4121366	31	96822.04	387135.84	399842.67	9.9859742	10.5878634
30	25038.00	25861.76	103290.03	9.3985996	9.4126581	30	96814.76	386671.31	399392.92	9.9859416	10.5873419
31	25066.16	25892.80	103297.81	9.3990878	9.4131789	29	96807.47	386207.82	398944.21	9.9859089	10.5868211
32	25094.32	25923.84	103305.59	9.3995754	9.4136993	28	96800.18	385745.37	398496.54	9.9858762	10.5863007
33	25122.48	25954.85	103313.39	9.4000625	9.4142191	27	96792.88	385283.96	398049.91	9.9858434	10.5857809
34	25150.63	25985.93	103321.19	9.4005489	9.4147383	26	95785.57	384823.58	397604.31	9.9858106	10.5852617
35	25178.79	26016.99	103329.01	9.4010348	9.4152570	25	96778.25	384364.24	397159.75	9.9857777	10.5847430
36	25206.94	26048.05	103336.83	9.4015201	9.4157752	24	96770.92	383905.91	396716.21	9.9857449	10.5842248
37	25235.08	26079.11	103344.67	9.4020048	9.4162928	23	96763.58	383448.61	396273.69	9.9857119	10.5837072
38	25263.23	26110.18	103352.51	9.4024889	9.4168099	22	96756.23	382992.33	395832.19	9.9856790	10.5831901
39	25291.37	26141.26	103360.37	9.4029724	9.4173265	21	96748.88	382537.07	395391.71	9.9856460	10.5826735
40	25319.52	26172.34	103368.23	9.4034554	9.4178425	20	96741.52	382082.81	394952.24	9.9856129	10.5821575
41	25347.66	26203.42	103376.11	9.4039378	9.4183580	19	96734.15	381629.57	394513.79	9.9855798	10.5816420
42	25375.79	26234.51	103383.99	9.4044196	9.4188729	18	96726.77	381177.33	394076.33	9.9855467	10.5811271
43	25403.93	26265.60	103391.88	9.4049009	9.4193874	17	96719.38	380726.09	393639.88	9.9855135	10.5806126
44	25432.06	26296.70	103399.79	9.4053816	9.4199013	16	96711.99	380275.85	393204.43	9.9854803	10.5800987
45	25460.19	26327.80	103407.70	9.4058617	9.4204146	15	96704.59	379826.61	392769.97	9.9854471	10.5795854
46	25488.32	26358.91	103415.63	9.4063413	9.4209275	14	96697.18	379378.35	392336.51	9.9854138	10.5790725
47	25516.45	26390.02	103423.56	9.4068203	9.4214398	13	96689.76	378931.09	391904.03	9.9853805	10.5785602
48	25544.58	26421.14	103431.51	9.4072987	9.4219515	12	96682.33	378484.81	391472.54	9.9853471	10.5780485
49	25572.70	26452.26	103439.46	9.4077766	9.4224628	11	96674.90	378039.51	391042.03	9.9853138	10.5775372
50	25600.82	26483.39	103447.43	9.4082539	9.4229735	10	96667.46	377595.19	390612.50	9.9852803	10.5770265
51	25628.94	26514.52	103455.40	9.4087306	9.4234838	9	96660.01	377151.85	390183.95	9.9852468	10.5765162
52	25657.05	26545.66	103463.38	9.4092068	9.4239935	8	96652.55	376709.47	389756.37	9.9852133	10.5760065
53	25685.17	26576.80	103471.38	9.4096824	9.4245026	7	96645.08	376268.07	389329.76	9.9851798	10.5754974
54	25713.28	26607.94	103479.38	9.4101575	9.4250113	6	96637.60	375827.63	388904.11	9.9851462	10.5749887
55	25741.39	26639.09	103487.40	9.4106320	9.4255194	5	96630.12	375388.15	388479.43	9.9851125	10.5744806
56	25769.50	26670.25	103495.42	9.4111059	9.4260271	4	96622.63	374949.63	388055.70	9.9850789	10.5739729
57	25797.60	26701.41	103503.46	9.4115793	9.4265342	3	96615.13	374512.07	387632.93	9.9850452	10.5734658
58	25825.70	26732.57	103511.50	9.4120522	9.4270408	2	95607.62	374075.46	387211.12	9.9850114	10.5729591
59	25853.81	26763.74	103519.55	9.4125245	9.4275469	1	96600.10	373639.80	386790.25	9.9849776	10.5724531
60	25881.90	26794.92	103527.62	9.4129962	9.4280525	0	96592.58	373205.08	386370.33	9.9849438	10.5719475

Grad. 15.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	25881.90	26794.92	103527.62	9.4129962	9.4280525
1	25910.00	26826.10	103535.69	9.4134674	9.4285575
2	25938.10	26857.28	103543.78	9.4139381	9.4290621
3	25966.19	26888.47	103551.87	9.4144082	9.4295661
4	25994.28	26919.67	103559.98	9.4148778	9.4300697
5	26022.37	26950.87	103568.09	9.4153468	9.4305727
6	26050.45	26982.07	103576.21	9.4158152	9.4310753
7	26078.53	27013.28	103584.35	9.4162832	9.4315773
8	26106.61	27044.49	103592.49	9.4167506	9.4320789
9	26134.69	27075.71	103600.65	9.4172174	9.4325799
10	26162.77	27106.93	103608.81	9.4176837	9.4330804
11	26190.85	27138.16	103616.99	9.4181495	9.4335805
12	26218.92	27169.40	103625.17	9.4186148	9.4340800
13	26246.99	27200.64	103633.37	9.4190795	9.4345791
14	26275.06	27231.88	103641.57	9.4195436	9.4350776
15	26303.12	27263.13	103649.79	9.4200073	9.4355757
16	26331.18	27294.38	103658.01	9.4204704	9.4360733
17	26359.24	27325.64	103666.25	9.4209330	9.4365704
18	26387.30	27356.90	103674.49	9.4213950	9.4370670
19	26415.36	27388.17	103682.75	9.4218566	9.4375631
20	26443.42	27419.44	103691.01	9.4223176	9.4380587
21	26471.47	27450.72	103699.29	9.4227780	9.4385538
22	26499.53	27482.01	103707.57	9.4232380	9.4390485
23	26527.57	27513.30	103715.87	9.4236974	9.4395426
24	26555.61	27544.59	103724.17	9.4241563	9.4400363
25	26583.65	27575.89	103732.49	9.4246147	9.4405295
26	26611.69	27607.19	103740.82	9.4250726	9.4410222
27	26639.73	27638.50	103749.15	9.4255299	9.4415145
28	26667.77	27669.81	103757.50	9.4259867	9.4420061
29	26695.41	27701.13	103765.85	9.4264430	9.4424975
30	26723.84	27732.45	103774.12	9.4268988	9.4429883
31	26751.87	27763.78	103782.60	9.4273540	9.4434786
32	26779.89	27795.12	103790.98	9.4278089	9.4439685
33	26807.92	27826.46	103799.38	9.4282631	9.4444579
34	26835.94	27857.80	103807.79	9.4287169	9.4449468
35	26863.96	27889.15	103816.21	9.4291701	9.4454352
36	26891.98	27920.50	103824.63	9.4296228	9.4459232
37	22920.00	27951.86	103833.07	9.4300750	9.4464107
38	26948.01	27983.22	103841.52	9.4305267	9.4468978
39	26976.02	28014.59	103849.98	9.4309779	9.4473843
40	27004.03	28045.97	103858.44	9.4314286	9.4478704
41	27032.04	28077.35	103866.92	9.4318788	9.4483561
42	27060.04	28108.73	103875.41	9.4323285	9.4488413
43	27088.05	28140.12	103883.91	9.4327777	9.4493260
44	27116.05	28171.52	103892.42	9.4332264	9.4498102
45	27144.04	28202.92	103900.94	9.4336746	9.4502940
46	27172.04	28234.32	103909.47	9.4341223	9.4507774
47	27200.03	28265.73	103918.00	9.4345694	9.4512602
48	27228.02	28297.15	103926.53	9.4350161	9.4517427
49	27256.01	28328.57	103935.11	9.4354623	9.4522246
50	27284.00	28359.99	103943.68	9.4359080	9.4527061
51	27311.98	28391.42	103952.26	9.4363532	9.4531872
52	27339.96	28422.86	103960.85	9.4367980	9.4536678
53	27367.94	28454.30	103969.45	9.4372422	9.4541479
54	27395.92	28485.75	103978.06	9.4376859	9.4546276
55	27423.90	28517.20	103986.69	9.4381292	9.4551069
56	27451.87	28548.66	103995.32	9.4385719	9.4555857
57	27479.84	28580.12	104003.96	9.4390142	9.4560641
58	27507.81	28611.59	104012.61	9.4394560	9.4565420
59	27535.78	28643.06	104021.27	9.4398973	9.4570194
60	27563.74	28674.54	104029.94	9.4403381	9.4574964

74. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	96592.58	373205.08	386370.33	9.9849438	10.5719475
59	96585.05	372771.31	385951.35	9.9849099	10.5714425
58	96577.51	372338.47	385533.32	9.9848760	10.5709379
57	96569.96	371906.58	385116.22	9.9848420	10.5704339
56	96562.40	371475.61	384700.05	9.9848081	10.5699303
55	96554.83	371045.58	384284.82	9.9847740	10.5694273
54	96547.26	370616.48	383870.51	9.9847400	10.5689247
53	96539.68	370188.30	383457.13	9.9847059	10.5684227
52	96532.09	369761.03	383044.67	9.9846717	10.5679211
51	96524.49	369334.69	382633.13	9.9846375	10.5674201
50	96516.88	368909.27	382222.51	9.9846033	10.5669196
49	96509.27	368484.75	381812.80	9.9845690	10.5664195
48	96501.65	368061.15	381404.19	9.9845347	10.5659200
47	96494.02	367638.45	380996.10	9.9845004	10.5654209
46	96486.38	367216.65	380589.11	9.9844660	10.5649224
45	96478.74	366795.76	380183.01	9.9844316	10.5644243
44	96471.07	366375.75	379777.82	9.9843971	10.5639267
43	96463.41	365956.65	379473.51	9.9843626	10.5634296
42	96455.74	365538.44	378970.11	9.9843281	10.5629330
41	96448.06	365121.11	378567.60	9.9842935	10.5624369
40	96440.37	364704.67	378165.96	9.9842589	10.5619413
39	96432.67	364289.11	377765.22	9.9842242	10.5614462
38	96424.97	363874.44	377365.35	9.9841895	10.5609515
37	96417.26	363460.64	376966.36	9.9841548	10.5604574
36	96409.54	363047.71	376568.24	9.9841200	10.5599637
35	96401.81	362635.66	376171.00	9.9840852	10.5594705
34	96394.07	362224.47	375774.62	9.9840503	10.5589778
33	96386.33	361814.15	375379.11	9.9840154	10.5584855
32	96378.58	361404.69	374984.47	9.9839805	10.5579938
31	96370.82	360996.09	374590.68	9.9839455	10.5575025
30	96363.06	360588.35	374197.75	9.9839105	10.5570117
29	96355.27	360181.46	373805.68	9.9838755	10.5565214
28	96347.48	359775.43	373414.46	9.9838404	10.5560315
27	96339.69	359370.24	373024.09	9.9838052	10.5555421
26	96331.89	358965.90	372634.57	9.9837701	10.5550532
25	96324.08	358562.41	372245.89	9.9837348	10.5545647
24	96316.26	358159.75	371858.05	9.9836996	10.5540768
23	96308.43	357757.94	371471.05	9.9836643	10.5535893
22	96300.59	357356.96	371084.89	9.9836290	10.5531022
21	96292.75	356956.81	370699.56	9.9835936	10.5526157
20	96284.90	356557.49	370315.06	9.9835582	10.5521296
19	96277.04	356159.00	369931.39	9.9835227	10.5516439
18	96269.17	355761.33	369548.54	9.9834872	10.5511587
17	96261.30	355364.49	369166.52	9.9834517	10.5506740
16	96253.42	354968.46	368785.32	9.9834161	10.5501898
15	96245.53	354573.25	368404.93	9.9833805	10.5497060
14	96247.63	354178.86	368025.36	9.9833449	10.5492226
13	96229.72	353785.28	367646.60	9.9833092	10.5487398
12	96221.80	353392.51	367268.65	9.9832735	10.5482573
11	96213.87	353000.54	366891.51	9.9832377	10.5477754
10	96205.94	352609.35	366515.18	9.9832019	10.5472939
9	96198.00	352219.02	366139.64	9.9831661	10.5468128
8	96190.05	351829.46	365764.91	9.9831302	10.5463322
7	96182.09	351440.70	365390.97	9.9830942	10.5458521
6	96174.13	351052.73	365017.83	9.9830583	10.5453724
5	96166.16	350665.55	364645.48	9.9830223	10.5448931
4	96158.18	350279.16	364273.92	9.9829862	10.5444143
3	96150.19	349893.56	363903.15	9.9829501	10.5439359
2	96142.19	349508.74	363533.16	9.9829140	10.5434580
1	96134.18	349124.70	363163.95	9.9828778	10.5429806
0	96126.17	348741.44	362795.13	9.9828416	10.5425036

27563.74

Grad. 16.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log.Sin.*	*Log.Tang.*
0	27563.74	28674.54	104029.94	9.4403381	9.4574964
1	27591.70	28706.02	104038.63	9.4407784	9.4579730
2	27619.65	28737.51	104047.32	9.4412182	9.4584491
3	27647.61	28769.00	104056.02	9.4416576	9.4589248
4	27675.56	28800.50	104064.73	9.4420965	9.4594001
5	27703.52	28832.01	104073.46	9.4425349	9.4598749
6	27731.47	28863.52	104082.19	9.4429728	9.4603492
7	27759.41	28895.03	104090.94	9.4434103	9.4608232
8	27787.36	28926.55	104099.69	9.4438472	9.4612967
9	27815.30	28958.08	104108.45	9.4442837	9.4617697
10	27843.24	28989.61	104117.23	9.4447197	9.4622423
11	27871.18	29021.14	104126.01	9.4451553	9.4627145
12	27899.11	29052.68	104134.81	9.4455904	9.4631863
13	27927.04	29084.23	104143.62	9.4460250	9.4636576
14	27954.97	29115.78	104152.43	9.4464591	9.4641285
15	27982.90	29147.34	104161.26	9.4468927	9.4645990
16	28010.83	29178.90	104170.09	9.4473259	9.4650690
17	28038.75	29210.47	104178.94	9.4477586	9.4655386
18	28066.67	29242.05	104187.80	9.4481909	9.4660078
19	28094.59	29273.63	104196.67	9.4486227	9.4664765
20	28122.51	29305.21	104205.54	9.4490540	9.4669448
21	28150.42	29336.80	104214.43	9.4494849	9.4674127
22	28178.33	29368.39	104223.33	9.4499153	9.4678802
23	28206.24	29399.99	104232.24	9.4503452	9.4683473
24	28234.15	29431.60	104241.16	9.4507747	9.4688139
25	28262.05	29463.21	104250.09	9.4512037	9.4692801
26	28289.95	29494.83	104259.03	9.4516322	9.4697459
27	28317.85	29526.45	104267.98	9.4520603	9.4702112
28	28345.75	29558.08	104276.94	9.4524879	9.4706762
29	28373.64	29589.71	104285.91	9.4529151	9.4711407
30	28401.53	29621.35	104294.89	9.4533418	9.4716048
31	28429.42	29652.99	104303.88	9.4537681	9.4720685
32	28457.31	29684.64	104312.89	9.4541939	9.4725318
33	28485.20	29716.30	104321.90	9.4546192	9.4729947
34	28513.08	29747.96	104330.92	9.4550441	9.4734571
35	28540.96	29779.62	104339.95	9.4554686	9.4739192
36	28568.84	29811.29	104349.00	9.4558926	9.4743808
37	28596.71	29842.97	104358.05	9.4563161	9.4748421
38	28624.58	29874.65	104367.12	9.4567392	9.4753029
39	28652.45	29906.34	104376.19	9.4571618	9.4757633
40	28680.32	29938.03	104385.28	9.4575840	9.4762233
41	28708.19	29969.73	104394.37	9.4580058	9.4766829
42	28736.05	30001.44	104403.48	9.4584271	9.4771421
43	28763.91	30033.15	104412.59	9.4588480	9.4776009
44	28791.77	30064.86	104421.72	9.4592684	9.4780592
45	28819.63	30096.58	104430.86	9.4596884	9.4785172
46	28847.48	30128.31	104440.01	9.4601079	9.4789748
47	28875.33	30160.04	104449.17	9.4605270	9.4794319
48	28903.18	30191.78	104458.33	9.4609456	9.4798887
49	28931.03	30223.52	104467.51	9.4613638	9.4803451
50	28958.87	30255.27	104476.70	9.4617816	9.4808011
51	28986.71	30287.03	104485.90	9.4621989	9.4812566
52	29014.55	30318.79	104495.11	9.4626158	9.4817118
53	29042.39	30350.55	104504.33	9.4630323	9.4821666
54	29070.22	30382.32	104513.57	9.4634483	9.4826210
55	29098.05	30414.10	104522.81	9.4638639	9.4830750
56	29125.88	30445.88	104532.06	9.4642790	9.4835286
57	29153.71	30477.67	104541.32	9.4646938	9.4839818
58	29181.53	30506.46	104550.60	9.4651081	9.4844346
59	29209.35	30541.26	104559.88	9.4655219	9.4848870
60	29237.17	30573.07	104569.18	9.4659353	9.485339[illegible]

73. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log.Sin.*	*Log.Tang*
60	96126.17	348741.44	362795.53	9.9828416	10.5425036
59	96118.15	348358.96	362427.88	9.9828054	10.5420270
58	96110.12	347977.26	362061.01	9.9827691	10.5415509
57	96102.08	347596.32	361694.90	9.9827328	10.5410752
56	96094.03	347216.16	361329.57	9.9826964	10.5405999
55	96085.98	346836.76	360965.01	9.9826600	10.5401251
54	96077.92	346458.13	360601.21	9.9826236	10.5396508
53	96069.85	346080.26	360238.18	9.9825871	10.5391768
52	96061.77	345703.15	359875.90	9.9825506	10.5387033
51	96053.68	345326.79	359514.39	9.9825140	10.5382303
50	96045.58	344951.20	359153.63	9.9824774	10.5377577
49	96037.48	344576.35	358793.62	9.9824408	10.5372855
48	96029.37	344202.26	358434.37	9.9824041	10.5368137
47	96021.25	343828.91	358075.86	9.9823674	10.5363424
46	96013.12	343456.31	357718.10	9.9823306	10.5358715
45	96004.98	343084.46	357361.08	9.9822938	10.5354010
44	95996.84	342713.34	357004.81	9.9822569	10.5349310
43	95988.69	342342.97	356649.28	9.9822201	10.5344614
42	9.980.53	341973.33	356294.48	9.9821831	10.5339922
41	95973.36	341604.43	355940.42	9.9821462	10.5335235
40	95964.18	341236.26	355587.10	9.9821092	10.5330552
39	95950.00	340868.82	355234.50	9.9820721	10.5325873
38	95947.81	340502.10	354882.63	9.9820351	10.5321198
37	95939.61	340136.12	354351.49	9.9819979	10.5316527
36	95931.40	339770.85	354181.07	9.9819608	10.5311861
35	95923.18	339406.31	353831.38	9.9819236	10.5307199
34	95914.95	339042.49	353482.47	9.9818863	10.5302541
33	95906.72	338679.38	353134.14	9.9818490	10.5297888
32	95898.48	338316.99	352786.60	9.9818117	10.5293238
31	95890.23	337955.31	352439.77	9.9817744	10.5288593
30	95881.97	337594.34	352093.65	9.9817370	10.5283952
29	95873.70	337234.08	351748.24	9.98169[illegible]	10.5279315
28	95865.43	336874.53	351403.54	9.9816620	10.5274682
27	95857.15	336515.68	351059.54	9.9816245	10.5270053
26	95848.86	336157.53	350716.25	9.9815870	10.5265428
25	95840.56	335800.08	350373.65	9.9815494	10.5260808
24	95832.25	335443.33	350031.75	9.9815117	10.5256192
23	95823.94	335087.28	349690.55	9.9814740	10.5251579
22	95815.62	334731.91	349350.05	9.9814363	10.5246971
21	95807.29	334377.24	349010.24	9.9813980	10.5242367
20	95798.95	334023.26	348671.10	9.9813608	10.5237767
19	95790.60	333669.97	348332.67	9.9813229	10.5233171
18	95782.25	333317.30	347994.92	9.9812850	10.5228579
17	95773.89	332965.43	347657.85	9.9812471	10.5223991
16	95765.52	332614.19	347321.46	9.9812091	10.5219408
15	95757.14	332263.62	346985.76	9.9811711	10.5214828
14	95748.75	331913.73	346650.73	9.9811331	10.5210252
13	95740.35	331564.52	346316.37	9.9810950	10.5205681
12	95731.95	331255.98	345982.69	9.9810569	10.5201113
11	95723.54	330868.11	345649.69	9.9810187	10.5196549
10	95715.12	330520.91	345317.35	9.9809805	10.5191989
9	95706.69	330174.38	344985.68	9.9809423	10.5187434
8	95698.29	329828.51	344654.67	9.9809040	10.5182882
7	95689.81	329483.30	344324.33	9.9808657	10.5178334
6	95681.36	329138.76	343994.65	9.9808273	10.5173790
5	95672.90	328794.87	343665.63	9.9807889	10.5169250
4	95664.43	328451.64	343337.27	9.9807505	10.5164714
3	95655.95	328109.07	343009.56	9.9807120	10.5160182
2	95647.47	327767.15	342682.51	9.9806735	10.5155654
1	95638.98	327425.88	342356.11	9.9806349	10.5151130
0	95630.48	327085.26	342030.36	9.9805963	10.5146610

Grad. 17. — 72. Grad.

Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	29237.17	30573.07	104569.18	9.4659353	9.4853390	60	95630.48	327085.26	342030.36	9.9805963	10.5146610
1	29264.99	30604.88	104578.48	9.4663483	9.4857907	59	95621.97	326745.29	341705.26	9.9805577	10.5142093
2	29292.80	30636.69	104587.80	9.4667609	9.4862419	58	95613.45	326405.96	341380.80	9.9805190	10.5137581
3	29320.61	30668.51	104597.12	9.4671730	9.4866928	57	95604.92	326067.28	341056.99	9.9804803	10.5133072
4	29348.42	30700.34	104606.46	9.4675848	9.4871433	56	95596.39	325729.24	340733.82	9.9804415	10.5128567
5	29376.23	30732.18	104615.81	9.4679960	9.4875935	55	95587.85	325391.84	340411.30	9.9804027	10.5124067
6	29404.03	30764.02	104625.16	9.4684069	9.4880430	54	95579.30	325055.08	340089.31	9.9803639	10.5119570
7	29431.83	30795.86	104634.53	9.4688173	9.4884924	53	95570.74	324718.95	339768.16	9.9803250	10.5115076
8	29459.63	30827.71	104643.91	9.4692273	9.4889413	52	95562.17	324383.46	339447.54	9.9802860	10.5110587
9	29487.43	30859.57	104653.30	9.4696369	9.4893898	51	95553.60	324048.60	339127.55	9.9802471	10.5106102
10	29515.22	30891.43	104662.70	9.4700461	9.4898380	50	95545.02	323714.38	338808.20	9.9802081	10.5101620
11	29543.01	30923.30	104672.11	9.4704548	9.4902858	49	95536.43	323380.78	338489.48	9.9801690	10.5097142
12	29570.80	30955.17	104681.53	9.4708631	9.4907332	48	95527.83	323047.80	338171.38	9.9801299	10.5092668
13	29598.59	30987.05	104690.96	9.4712710	9.4911802	47	95519.22	322715.46	337853.91	9.9800908	10.5088198
14	29626.38	31018.93	104700.40	9.4716785	9.4916269	46	95510.61	322383.73	337537.07	9.9800516	10.5083731
15	29654.16	31050.82	104709.86	9.4720856	9.4920731	45	95501.99	322052.63	337220.84	9.9800124	10.5079269
16	29681.94	31082.72	104719.32	9.4724922	9.4925190	44	95493.36	321722.15	336905.24	9.9799732	10.5074810
17	29709.71	31114.62	104728.79	9.4728985	9.4929646	43	95484.72	321392.28	336590.26	9.9799339	10.5070354
18	29737.49	31146.53	104738.28	9.4733043	9.4934097	42	95476.07	321063.04	336275.89	9.9798946	10.5065903
19	29765.26	31178.44	104747.77	9.4737097	9.4938545	41	95467.42	320734.40	335962.14	9.9798552	10.5061455
20	29793.03	31210.36	104757.28	9.4741146	9.4942988	40	95458.76	320406.38	335649.00	9.9798158	10.5057012
21	29820.79	31242.29	104766.79	9.4745192	9.4947419	39	95450.09	320078.97	335336.47	9.9797764	10.5052571
22	29848.56	31274.22	104776.32	9.4749232	9.4951865	38	95441.41	319752.17	335024.55	9.9797369	10.5048135
23	29876.32	31306.16	104785.86	9.4753271	9.4956298	37	95432.72	319425.98	334713.24	9.9796973	10.5043702
24	29904.08	31338.10	104795.40	9.4757304	9.4960727	36	95424.03	319100.39	334402.54	9.9796578	10.5039273
25	29931.84	31370.05	104804.96	9.4761334	9.4965152	35	95415.33	318775.40	334092.44	9.9796181	10.5034848
26	29959.59	31402.00	104814.53	9.4763359	9.4969574	34	95406.62	318451.02	333782.94	9.9795785	10.5030426
27	29987.34	31433.96	104824.11	9.4769380	9.4973991	33	95397.90	318127.24	333474.05	9.9795388	10.5026009
28	30015.09	31465.93	104833.70	9.4773396	9.4978406	32	95349.17	317804.06	333165.75	9.9794991	10.5021594
29	30042.84	31497.90	104843.30	9.4777409	9.4982816	31	95380.43	317481.47	332858.05	9.9794593	10.5017184
30	30070.58	31529.88	104852.91	9.4781418	9.4987223	30	95371.69	317159.48	332550.95	9.9794195	10.5012777
31	30098.32	31561.86	104862.53	9.4785423	9.4991626	29	95362.94	316838.08	332244.44	9.9793790	10.5008374
32	30126.06	31593.85	104872.17	9.4789425	9.4996026	28	95354.18	316517.28	331938.53	9.9793398	10.5003974
33	30153.80	31625.85	104881.81	9.4793420	9.5000422	27	95345.41	316197.06	331633.20	9.9792998	10.4999578
34	30181.53	31657.85	104891.46	9.4797412	9.5004814	26	95336.64	315877.44	331328.47	9.9792599	10.4995186
35	30209.26	31689.86	104901.13	9.4801401	9.5009203	25	95327.86	315558.40	331024.32	9.9792198	10.4990797
36	30236.99	31721.87	104910.80	9.4805385	9.5013588	24	95319.07	315239.94	330720.76	9.9791798	10.4986412
37	30264.71	31753.89	104920.49	9.4809366	9.5017969	23	95310.27	314922.07	330417.78	9.9791397	10.4982031
38	30292.44	31785.91	104930.19	9.4813342	9.5022347	22	95301.46	314604.78	330115.39	9.9790996	10.4977653
39	30320.16	31817.94	104939.89	9.4817315	9.5026721	21	95292.64	314288.07	329813.57	9.9790594	10.4973279
40	30347.88	31849.98	104949.61	9.4821283	9.5031092	20	95283.82	313971.94	329512.34	9.9790192	10.4968908
41	30375.59	31882.02	104959.34	9.4825248	9.5035459	19	95274.99	313656.39	329211.66	9.9789789	10.4964541
42	30403.31	31914.07	104969.08	9.4829208	9.5039822	18	95266.15	313341.41	328911.60	9.9789386	10.4960178
43	30431.02	31946.13	104978.83	9.4833165	9.5044182	17	95257.30	313027.01	328612.09	9.9788983	10.4955818
44	30458.72	31978.19	104988.59	9.4837117	9.5048538	16	95249.44	312713.17	328313.16	9.9788579	10.4951462
45	30486.43	32010.25	104998.36	9.4841066	9.5052891	15	95239.58	312399.91	328014.79	9.9788175	10.4947109
46	30514.13	32042.32	105008.15	9.4845010	9.5057240	14	95230.71	312087.22	327717.00	9.9787770	10.4942760
47	30541.83	32074.40	105017.94	9.4848951	9.5061586	13	95221.83	311775.09	327419.77	9.9787365	10.4938414
48	30569.53	32106.49	105027.74	9.4852888	9.5065928	12	95212.94	311463.53	327123.11	9.9786960	10.4934072
49	30597.23	32138.58	105037.56	9.4856820	9.5070267	11	95204.04	311152.54	326827.02	9.9786554	10.4929733
50	30524.92	32170.67	105047.38	9.4860749	9.5074602	10	95195.14	310842.10	326531.49	9.9786148	10.4925398
51	30652.61	32202.77	105057.22	9.4864674	9.5078933	9	95186.23	310532.23	326236.52	9.9785741	10.4921067
52	30680.29	32234.88	105067.06	9.4868595	9.5083261	8	95177.31	310222.91	325942.11	9.9785334	10.4916738
53	30707.98	32267.00	105076.92	9.4872512	9.5087586	7	95168.38	309914.16	325648.25	9.9784927	10.4912414
54	30735.66	32299.12	105086.79	9.4876426	9.5091907	6	95159.44	309605.96	325354.96	9.9784519	10.4908093
55	30763.34	32331.25	105096.67	9.4880335	9.5096224	5	95150.49	309298.31	325062.22	9.9784111	10.4903776
56	30791.02	32363.38	105106.56	9.4884240	9.5100539	4	95141.54	308991.22	324770.03	9.9783702	10.4899461
57	30818.60	32395.52	105116.46	9.4888142	9.5104849	3	95132.58	308684.68	324478.40	9.9783293	10.4895151
58	30846.36	32427.66	105126.37	9.4892040	9.5109156	2	95123.61	308378.69	324187.32	9.9782883	10.4890844
59	30874.03	32459.81	105136.29	9.4895934	9.5113460	1	95114.63	308073.25	323896.78	9.9782474	10.4886540
60	30901.70	32491.97	105146.22	9.4899824	9.5117760	0	95105.65	307768.35	323606.80	9.9782063	10.4883240

30901.70

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log.Sin.*	*Log.Tang.*	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log.Sin.*	*Log.Tang.*
0	30901.70	32491.97	105146.22	9.4899824	9.5117760	60	95105.65	307768.35	323606.80	9.9781063	10.4882240
1	30929.36	32524.13	105156.17	9.4903710	9.5122057	59	95096.66	307464.70	323317.36	9.9781683	10.4877943
2	30957.02	32556.30	105166.12	9.4907592	9.5126351	58	95087.66	307160.20	323028.46	9.9781241	10.4873649
3	30984.68	32588.48	105176.08	9.4911471	9.5130641	57	95078.65	306856.93	322740.11	9.9780830	10.4869359
4	31012.34	32620.66	105186.06	9.4915345	9.5134927	56	95069.63	306554.21	322452.30	9.9780418	10.4865073
5	31039.99	32652.85	105196.05	9.4916216	9.5139210	55	95060.60	306252.03	322165.03	9.9780006	10.4860790
6	31067.64	32685.04	105206.04	9.4923083	9.5143490	54	95051.57	305950.38	321878.30	9.9779593	10.4856510
7	31095.29	32717.24	105216.05	9.4926946	9.5147766	53	95042.53	305649.28	321592.10	9.9779180	10.4852234
8	31122.94	32749.44	105226.07	9.4930806	9.5152039	52	95033.48	305348.70	321306.44	9.9778766	10.4847961
9	31150.58	32781.65	105236.10	9.4934661	9.5156309	51	95024.42	305048.66	321021.32	9.9778353	10.4843691
10	31178.22	32813.87	105246.14	9.4938513	9.5160575	50	95015.36	304749.15	320736.73	9.9777938	10.4839425
11	31205.86	32846.10	105256.19	9.4942361	9.5164838	49	95006.29	304450.18	320452.66	9.9777523	10.4835162
12	31233.49	32878.33	105266.25	9.4946205	9.5169097	48	94997.21	304151.73	320169.13	9.9777108	10.4830903
13	31261.12	32910.56	105276.33	9.4950046	9.5173353	47	94988.12	303853.81	319886.13	9.9776693	10.4826647
14	31288.75	32942.80	105286.41	9.4953883	9.5177606	46	94979.02	303556.41	319603.65	9.9776277	10.4822394
15	31316.38	32975.05	105296.51	9.4957716	9.5181855	45	94969.91	303259.54	319321.70	9.9775860	10.4818145
16	31344.00	33007.31	105306.61	9.4961545	9.5186101	44	94960.80	302963.20	319040.28	9.9775444	10.4813899
17	31371.63	33039.57	105316.73	9.4965370	9.5190344	43	94951.68	302667.37	318759.37	9.9775026	10.4809656
18	31399.25	33071.84	105326.86	9.4969192	9.5194583	42	94942.55	302372.07	318478.99	9.9774609	10.4805417
19	31426.86	33104.11	105336.99	9.4973010	9.5198819	41	94933.41	302077.28	318199.12	9.9774191	10.4801181
20	31454.48	33136.39	105347.14	9.4976824	9.5203052	40	94924.26	301783.01	317919.78	9.9773772	10.4796948
21	31482.09	33168.68	105357.30	9.4980635	9.5207282	39	94915.11	301489.26	317640.95	9.9773354	10.4792718
22	31509.69	33200.97	105367.47	9.4984442	9.5211508	38	94905.95	301196.03	317362.64	9.9772934	10.4788492
23	31537.30	33233.27	105377.65	9.4988245	9.5215730	37	94896.78	300903.30	317084.84	9.9772515	10.4784270
24	31564.90	33265.57	105387.85	9.4992045	9.5219950	36	94887.60	300611.09	316807.56	9.9772095	10.4780050
25	31592.50	33297.88	105398.05	9.4995840	9.5224166	35	94878.41	300319.39	316530.78	9.9771674	10.4775834
26	31620.10	33330.20	105408.26	9.4999633	9.5228379	34	94869.22	300028.20	316254.52	9.9771253	10.4771621
27	31647.70	33362.52	105418.49	9.5003421	9.5232589	33	94860.02	299737.51	315978.76	9.9770832	10.4767411
28	31675.29	33394.85	105428.73	9.5007206	9.5236795	32	94850.81	299447.34	315703.51	9.9770410	10.4763205
29	31702.88	33427.19	105438.97	9.5010987	9.5240999	31	94841.59	299157.66	315428.77	9.9769988	10.4759001
30	31730.47	33459.53	105449.23	9.5014764	9.5245199	30	94832.36	298868.50	315154.53	9.9769566	10.4754801
31	31758.05	33491.88	105459.50	9.5018538	9.5249395	29	94823.13	298579.83	314880.79	9.9769143	10.4750605
32	31785.63	33524.24	105469.78	9.5022308	9.5253589	28	94813.89	298291.66	314607.56	9.9768722	10.4746411
33	31813.21	33556.60	105480.07	9.5026075	9.5257779	27	94804.64	298004.00	314334.83	9.9768296	10.4742221
34	31840.79	33588.97	105490.37	9.5029838	9.5261966	26	94795.38	297716.83	314062.59	9.9767872	10.4738034
35	31868.36	33621.34	105500.68	9.5033597	9.5266150	25	94786.11	297430.16	313790.86	9.9767447	10.4733850
36	31895.93	33653.72	105511.01	9.5037353	9.5270331	24	94776.84	297143.99	313519.62	9.9767022	10.4729669
37	31923.50	33686.11	105521.34	9.5041105	9.5272508	23	94767.56	296858.31	313248.87	9.9766597	10.4725492
38	31951.06	33718.50	105531.69	9.5044853	9.5278682	22	94758.27	296573.11	312978.62	9.9766171	10.4721318
39	31978.63	33750.90	105542.04	9.5048598	9.5282853	21	94748.97	296288.42	312708.86	9.9765745	10.4717147
40	32006.19	33783.30	105552.41	9.5052339	9.5287021	20	94739.66	296004.21	312439.59	9.9765318	10.4712979
41	32033.74	33815.71	105562.79	9.5056077	9.5291186	19	94730.35	295720.5[illegible]	312170.81	9.9764891	10.4708814
42	32061.30	33848.13	105573.18	9.5059811	9.5295347	18	95721.03	295437.27	311902.52	9.9764464	10.4704653
43	32088.85	33880.56	105583.58	9.5063542	9.5299505	17	94711.70	295154.53	311634.72	9.9764036	10.4700495
44	32116.40	33912.99	105593.99	9.5067268	9.5303661	16	94702.36	294872.27	311367.40	9.9763608	10.4696339
45	32143.95	33945.43	105604.41	9.5070992	9.5307813	15	94693.01	294590.50	311100.57	9.9763179	10.4692187
46	32171.49	33977.87	105614.85	9.5074712	9.5311961	14	94683.66	294309.21	310834.22	9.9762750	10.4688039
47	32199.03	34010.32	105625.29	9.5078428	9.5316107	13	94674.30	294028.46	310568.35	9.9762321	10.4684893
48	32226.57	34042.78	105635.75	9.5082141	9.5320250	12	94664.93	293748.07	310301.96	9.9761891	10.4679750
49	32254.10	34075.24	105646.21	9.5085850	9.5321389	11	94655.55	293468.22	310038.05	9.9761461	10.4675611
50	32281.64	34107.71	105656.69	9.5089556	9.5328526	10	94646.16	293188.85	309773.63	9.9761030	10.4671474
51	32309.17	34140.19	105667.18	9.5093258	9.5332659	9	94636.76	292909.95	309509.67	9.9760599	10.4667341
52	32336.70	34172.67	105677.68	9.5096956	9.5336789	8	94627.36	292231.52	309246.20	9.9760167	10.4663211
53	32364.22	34205.15	105688.19	9.5100651	9.5340916	7	94617.95	292353.58	308985.19	9.9759736	10.4659084
54	32391.74	34237.65	105698.71	9.5104343	9.5345040	6	94608.53	292076.10	308720.66	9.9759305	10.4654960
55	32419.26	34270.15	105709.24	9.5108031	9.5349161	5	94599.10	291799.09	308458.60	9.9758870	10.4660839
56	32446.78	34302.66	105719.78	9.5111716	9.5353278	4	94589.67	291522.56	308197.02	9.9758437	10.4646722
57	32474.29	34335.18	105730.34	9.5115397	9.5357393	3	94580.23	291246.49	307935.90	9.9758004	10.4642607
58	32501.80	34367.70	105740.90	9.5119074	9.5361505	2	94570.78	290970.89	307675.25	9.9757570	10.4638495
59	32529.31	34400.23	105750.48	9.5122749	9.5365613	1	94561.32	290695.76	307415.07	9.9757135	10.4634387
60	32556.82	34432.76	105762.07	9.5126419	9.5369719	0	94552.85	290421.39	307155.35	9.9756701	10.4630281

Grad. 19. | 70. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	32556.82	34432.76	105762.07	9.5126419	9.5369719	60	94551.85	290421.09	307155.35	9.9756701	10.4630281
1	32584.32	34465.30	105772.67	9.5130086	9.5373821	59	94542.38	290146.88	306896.10	9.9756265	10.4626179
2	32611.82	34497.85	105783.28	9.5133750	9.5377920	58	94532.90	289873.14	306637.31	9.9755830	10.4622080
3	32639.31	34530.40	105793.90	9.5137410	9.5382017	57	94523.41	289599.86	306378.98	9.9755394	10.4617983
4	32666.81	34562.96	105804.53	9.5141067	9.5386110	56	94513.91	289327.04	306121.11	9.9754957	10.4613890
5	32694.30	34595.53	105815.17	9.5144721	9.5392200	55	94504.40	289054.67	305863.70	9.9754521	10.4609800
6	32721.79	34628.10	105825.83	9.5148371	9.5394287	54	94494.89	288782.77	305606.75	9.9754083	10.4605713
7	32749.28	34560.68	105836.49	9.5152017	9.5398371	53	94485.37	288511.32	305350.26	9.9753646	1014601629
8	32776.76	34693.27	105847.17	9.5155660	9.5402453	52	94475.84	288240.33	305094.23	9.9753208	10.4597547
9	32804.24	34725.86	105837.86	9.5159300	9.5406531	51	94466.30	287969.79	304838.64	9.9752769	10.4593469
10	32831.72	34758.46	105868.55	9.5162936	9.5410606	50	94456.75	287699.70	304583.52	9.9752330	10.4589394
11	32859.19	34791.07	105879.26	9.5166569	9.5414678	49	94447.20	287430.07	304328.84	9.9751891	10.4585322
12	32885.66	34823.68	105889.99	9.5170198	9.5418747	48	94437.64	287160.88	304074.62	9.9751451	10.4581253
13	32914.13	34856.30	105900.72	9.5173824	9.5422813	47	94428.07	286892.15	303820.84	9.9751011	10.4577187
14	32941.60	34888.93	105911.46	9.5177447	9.5426877	46	94418.49	286623.86	303567.52	9.9750570	10.4573123
15	32969.06	34921.56	105922.21	9.5181066	9.5430937	45	94408.90	286356.02	303314.64	9.9750129	10.4569063
16	32996.52	34954.20	105932.98	9.5184682	9.5434994	44	94399.31	286088.63	303062.21	9.9749688	10.4565006
17	33023.98	34986.85	105943.76	9.5188295	9.5439048	43	94389.71	285821.68	303810.23	9.9749246	10.4560952
18	33051.44	35019.50	105954.54	9.5191904	9.5443100	42	94380.10	285555.19	302558.68	9.9748804	10.4556900
19	33078.89	35052.16	105965.34	9.5195510	9.5447148	41	94370.48	285289.11	302307.59	9.9748361	10.4552852
20	33106.34	35084.83	105976.15	9.5199112	9.5451193	40	94360.85	285023.49	302056.93	9.9747918	10.4548807
21	33133.79	35117.50	105985.97	9.5202711	9.5455235	39	94351.22	284758.31	301806.72	9.9747475	10.4544764
22	33161.23	35150.18	105997.81	9.5206307	9.5459276	38	94341.57	284493.56	301556.94	9.9747031	10.4540724
23	33188.67	35182.87	106008.65	9.5209899	9.5463312	37	94331.92	284229.26	301307.60	9.9746587	10.4536688
24	33216.11	35215.56	106019.51	9.5213458	9.5467346	36	94322.26	283965.39	301058.70	9.9746142	10.4532654
25	33243.55	35248.26	106030.37	9.5217074	9.5471377	35	94312.60	283701.96	300810.24	9.9745697	10.4528623
26	33270.98	35280.97	106041.25	9.5220656	9.5475405	34	94302.93	283438.96	300562.21	9.9745252	10.4534595
27	33298.41	35310.68	106052.14	9.5224235	9.5479433	33	94293.25	283176.39	300314.62	9.9744806	10.4520570
28	33325.84	35346.40	106063.04	9.5227811	9.5483452	32	94283.56	282914.26	300067.46	9.9744359	10.4516548
29	33353.27	35379.13	106073.95	9.5231383	9.5487471	31	94273.86	282652.56	299820.73	9.9743913	10.4512529
30	33380.69	35411.86	106084.87	9.5234953	9.5491487	30	94264.15	282391.29	299674.43	9.9743466	10.4508513
31	33408.10	35444.60	106095.80	9.5238518	9.5495500	29	94254.43	282130.45	299328.56	9.9743018	10.4504500
32	33435.52	35477.35	106106.75	9.5242081	9.5499511	28	94244.71	281870.03	299083.12	9.9742570	10.4500489
33	33462.93	35510.10	106117.70	9.5245640	9.5503519	27	94234.98	281610.04	298838.11	9.9742122	10.4496481
34	33490.34	35542.86	106128.67	9.5249196	9.5507523	26	94225.24	281350.48	298593.52	9.9741673	10.4492477
35	33517.75	35575.60	106139.65	9.5252749	9.5511525	25	94215.50	281091.34	298349.36	9.9741224	10.4488471
36	33545.16	35608.40	106150.64	9.5256298	9.5515524	24	94205.75	280832.63	298105.63	9.9740774	10.4484473
37	33572.56	35641.18	106161.64	9.5259844	9.5519521	23	94195.99	280574.33	297862.31	9.9740324	10.4480479
38	33599.96	35673.97	106172.65	9.5263387	9.5523514	22	94186.22	280316.46	297619.42	9.9739873	10.4476486
39	33627.45	35706.76	106183.67	9.5266927	9.5527504	21	94176.44	280059.01	297376.95	9.9739422	10.4472496
40	33654.75	35739.56	106194.71	9.5270463	9.5531492	20	94166.65	279801.98	197134.90	9.9738971	10.4468508
41	33682.14	35772.37	106205.75	9.5273997	9.5535477	19	94156.85	279545.37	296893.27	9.9738519	10.4464123
42	33709.53	35805.18	106216.81	9.5277526	9.5539459	18	94147.05	279289.17	296652.05	9.9738067	10.4460541
43	33736.91	35838.00	106227.88	9.5281053	9.5543438	17	94137.24	279033.39	296411.25	9.9737615	10.4456552
44	33764.29	35870.38	106238.96	9.5284577	9.5547415	16	94127.42	278778.01	296170.87	9.9737162	10.4452585
45	33791.67	35903.67	106250.05	9.5288097	9.5551388	15	94117.60	278523.07	295930.90	9.9736709	10.4448612
46	33819.05	35936.51	106261.15	9.5291614	9.5555359	14	94107.77	278268.55	295691.35	9.9736255	10.4444641
47	33846.42	35969.36	106272.27	9.5295128	9.5559327	13	94097.93	278014.40	295452.22	9.9735801	10.4440673
48	33873.79	36002.22	106283.39	9.5298638	9.5563292	12	94088.08	277760.69	295213.46	9.9735346	10.4436708
49	33901.16	36035.08	106294.53	9.5302146	9.5567255	11	94078.22	277507.38	294975.16	9.9734891	10.4432745
50	33928.53	36067.95	106305.68	9.5305650	9.5571214	10	94068.35	277254.48	294737.25	9.9734435	10.4428786
51	33955.89	36100.83	106316.84	9.5309151	9.5575171	9	94058.48	277001.99	294499.75	9.9733980	10.4424829
52	33983.25	36133.71	106328.01	9.5312649	9.5579125	8	94048.60	276749.90	294262.65	9.9733523	10.4410875
53	34010.60	36166.60	106339.19	9.5316143	9.5583077	7	94038.71	276498.22	294025.97	9.9733067	10.4416923
54	34037.95	36199.50	106350.38	9.5319635	9.5587025	6	94028.81	276246.95	293789.68	9.9732610	10.4412975
55	34065.30	36232.40	106361.58	9.5323123	9.5590971	5	94018.90	275996.08	293553.80	9.9732152	10.4409029
56	34092.65	36265.31	106372.80	9.5326608	9.5594914	4	94008.99	275745.61	293318.33	9.9731694	10.4405086
57	34120.00	36298.23	106384.03	9.5330090	9.5598854	3	93999.07	275495.54	293083.26	9.9731236	10.4401146
58	34147.34	36331.15	106395.27	9.5333569	9.5602792	2	93989.14	275245.88	292848.58	9.9730777	10.4397208
59	34174.68	36364.08	106406.52	9.5337044	9.5606727	1	93979.20	274996.61	292614.31	9.9730318	10.4393273
60	34202.01	36397.02	106417.78	9.5340517	9.5610659	0	93969.26	274747.74	292380.44	9.9729858	10.4389341

34202 02

Grad. 20. — 69. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	34202.02	36497.92	106417.78	9.5340517	9.5610658	60	93969.26	274747.74	292380.44	9.9729858	10.4389341
1	34229.35	36429.97	106429.05	9.5343986	9.5614588	59	93959.31	274499.27	292146.97	9.9729398	10.4385412
2	34256.68	36462.92	106440.33	9.5347452	9.5618515	58	93949.35	274251.10	291913.80	9.9728938	10.4381485
3	34284.01	36495.88	106451.63	9.5350915	9.5622439	57	93939.38	274003.52	291681.21	9.9728477	10.4377561
4	34311.33	36528.85	106462.94	9.5354375	9.5626360	56	93929.40	273756.23	291448.92	9.9728016	10.4373640
5	34338.65	36561.82	106474.26	9.5357832	9.5630278	55	93919.42	273509.34	291217.03	9.9727554	10.4369722
6	34365.97	36594.80	106485.59	9.5361286	9.5634194	54	93909.43	273262.84	290985.53	9.9727092	10.4365806
7	34393.29	36627.79	106496.93	9.5364737	9.5638107	53	93899.43	273016.74	290754.43	9.9726626	10.4361893
8	34420.60	36660.79	106508.28	9.5368184	9.5642018	52	93889.42	272771.02	290523.72	9.9726166	10.4357982
9	34447.91	36693.79	106519.64	9.5371628	9.5645925	51	93879.40	272525.69	290293.39	9.9725703	10.4354075
10	34475.22	36726.80	106531.01	9.5375069	9.5649831	50	93869.37	272220.75	290063.47	9.9725239	10.4350169
11	34502.52	36759.82	106542.40	9.5378508	9.5653733	49	93859.34	272036.20	289833.91	9.9724775	10.4346267
12	34529.82	36792.84	106553.80	9.5381943	9.5657633	48	93849.30	271792.04	289604.75	9.9724310	10.4342367
13	34557.12	36825.87	106565.21	9.5385375	9.5661530	47	93839.25	271548.26	289375.98	9.9723845	10.4338470
14	34584.42	36859.91	106576.63	9.5388804	9.5665424	46	93829.19	271304.87	289147.60	9.9723380	10.4334576
15	34611.71	36891.95	106588.07	9.5392230	9.5669316	45	93819.13	27106886.	288919.59	9.9722914	10.4330684
16	34639.00	36925.00	106599.51	9.5395653	9.5671205	44	93809.06	270819.23	288691.98	9.9722448	10.4326795
17	34666.29	36958.06	106610.97	9.5399073	9.5677091	43	93798.98	270576.99	288464.74	9.9721981	10.4322909
18	34693.57	36991.13	106622.43	9.5402489	9.5680975	42	93788.89	270335.13	288237.89	9.9721514	10.4319025
19	34720.85	37024.20	106633.91	9.5405903	9.5684856	41	93778.79	270093.64	288011.42	9.9721047	10.4315144
20	34748.13	37057.28	106645.40	9.5409314	9.5688735	40	93768.69	269852.54	287785.32	9.9720579	10.4311265
21	34775.40	37090.37	106656.90	9.5410721	9.5692611	39	93758.58	269611.81	287559.61	9.9720110	10.4307389
22	34802.67	37123.46	106668.42	9.5416126	9.5696484	38	93748.46	269371.47	287334.28	9.9719642	10.4303516
23	34829.94	37156.56	106679.94	9.5419527	9.5700355	37	93738.31	269131.49	287109.32	9.9719172	10.4299645
24	34857.21	37189.67	106691.48	9.5422926	9.5704223	36	93728.19	268891.90	286884.74	9.9718703	10.4295777
25	34884.47	37222.78	106703.02	9.5426321	9.5708088	35	93718.05	268652.67	286660.53	9.9718233	10.4291912
26	34911.73	37255.90	106714.58	9.5429713	9.5711951	34	93707.90	268413.83	286436.7[illegible]	9.9717762	10.4288049
27	34938.99	37289.03	106726.15	9.5433103	9.5715811	33	93697.74	268175.35	286213.24	9.9717291	10.4284189
28	34966.24	37322.17	106737.74	9.5436489	9.5719669	32	93687.57	267937.25	285990.15	9.9716820	10.4280331
29	34993.49	37355.32	106749.34	9.5439873	9.5723524	31	93677.40	267699.51	285767.44	9.9716348	10.4276476
30	35020.74	37388.47	106760.94	9.5443253	9.5727377	30	93667.22	267462.15	285554.09	9.9715876	10.4272623
31	35047.99	37421.63	106772.55	9.5446630	9.5731227	29	93657.03	267225.16	285323.12	9.9715404	10.4268773
32	35075.23	37454.79	106784.18	9.5450005	9.5735074	28	93646.13	266988.53	285101.52	9.9714931	10.4258[illegible]
33	35102.47	37487.97	106795.82	9.5453376	9.5738919	27	93636.62	266752.27	284880.28	9.9714457	10.4261081
34	35129.70	37521.15	106807.47	9.5456745	9.5742761	26	93626.40	266516.38	284659.41	9.9713984	10.4257239
35	35156.93	37554.34	106819.14	9.5460110	9.5746601	25	93616.18	266280.85	284438.91	9.9713509	10.4253999
36	35184.16	37587.53	106830.81	9.5463472	9.5750438	24	73605.95	266045.69	284238.77	9.9713035	10.4249562
37	35211.39	37620.73	106842.50	9.5466832	9.5754272	23	93595.71	265810.89	283998.99	9.9712560	10.4245728
38	35238.62	37653.94	106854.20	9.5470189	9.5758104	22	93585.46	265576.45	223779.58	9.9712084	10.4241796
39	35265.84	37687.16	106865.91	9.5473542	9.5761934	21	93575.21	265342.38	283560.54	9.9711608	10.4238066
40	35293.06	37720.38	106877.63	9.5476893	9.5765761	20	93564.95	265108.67	283341.85	9.9711132	10.4234239
41	35320.27	37753.61	106889.36	9.5480240	9.5769585	19	93554.68	264875.31	283123.53	9.9710655	10.4230415
42	35347.48	37786.85	106901.10	9.5483585	9.5773407	18	93544.40	264642.32	282905.50	9.9710178	10.4226593
43	35374.69	37820.10	106912.86	9.5486927	9.5777226	17	93534.11	264409.69	282687.96	9.9709701	10.4222774
44	35401.90	37853.35	106924.63	9.5490266	9.5781043	16	93523.82	264177.41	282470.71	9.9709223	10.4218959
45	35429.10	37886.61	106936.41	9.5493602	9.5784858	15	93513.52	263941.49	282253.82	9.9708744	10.4215142
46	35456.30	37919.88	106948.20	9.5496935	9.5788669	14	93503.21	263713.92	282037.29	9.9708265	10.4211331
47	35483.50	37953.16	106960.00	9.5500265	9.5792479	13	93492.89	263482.71	281821.11	9.9707786	10.4207521
48	35510.70	37986.44	106971.82	9.5503592	9.5796286	12	93482.96	263251.86	281605.29	9.9707306	10.4203714
49	35537.89	38019.73	106983.64	9.5506916	9.5800090	11	93472.23	263021.36	281389.82	9.9706826	10.4209910
50	35565.08	38053.03	106995.48	9.5510237	9.5803892	10	93461.89	262791.21	281174.71	9.9706346	10.4196108
51	35592.26	38086.33	107007.33	9.5513556	9.5807691	9	93451.54	262561.41	280959.95	9.9705865	10.4192309
52	35619.44	38119.64	107019.19	9.5516871	9.5811488	8	93441.18	262331.96	280745.54	9.9705383	10.4188512
53	35646.62	38152.96	107031.06	9.5520184	9.5815282	7	93430.82	262102.86	280531.48	9.9704902	10.4182718
54	35673.80	38186.29	107042.95	9.5523494	9.5819074	6	93420.45	261874.11	280317.77	9.9704419	10.4180926
55	35700.97	38219.63	107054.84	9.5526801	9.5822864	5	93410.07	261645.71	280104.41	9.9703937	10.4177136
56	35728.14	38252.96	107066.75	9.5530105	9.5826651	4	93399.68	261417.66	279891.40	9.9703454	10.4173349
57	35755.31	38286.31	107078.67	9.5533406	9.5830435	3	93389.28	261189.95	279678.73	9.9702970	10.4169565
58	35782.48	38319.67	107090.60	9.5536704	9.5834217	2	93378.87	260962.59	279466.41	9.9702486	10.4165783
59	35809.24	38353.03	107102.54	9.5539999	9.5837997	1	93368.46	260735.58	279254.44	9.9702002	10.4162003
60	35836.79	38386.40	107114.50	9.5543292	9.5841774	0	93358.04	260508.91	279042.81	9.9701517	10.4158226

35836.79

Grad. 21.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	35836.79	38386.40	107114.50	9.5543292	9.5841774
1	35863.95	38419.78	107126.47	9.5546581	9.5845549
2	35891.10	38453.17	107138.44	9.5549868	9.5849321
3	35918.25	38486.56	107150.43	9.5553152	9.5853091
4	35945.40	38519.96	107162.44	9.5556433	9.5856859
5	35972.54	38553.37	107174.45	9.5559711	9.5860624
6	35999.68	38586.79	107186.47	9.5562987	9.5864386
7	36026.82	38620.21	107198.51	9.5566259	9.5868147
8	36053.95	38653.64	107210.56	9.5569529	9.5871904
9	36081.08	38687.08	107222.61	9.5572796	9.5875660
10	36108.21	38720.53	107234.69	9.5576060	9.5879413
11	36135.33	38753.98	107246.78	9.5579321	9.5883163
12	36162.46	38787.44	107258.87	9.5582579	9.5886912
13	36189.58	38820.91	107270.98	9.5585835	9.5890657
14	36216.69	38854.39	107283.10	9.5589088	9.5894401
15	36243.80	38887.87	107295.23	9.5592338	9.5898142
16	36270.91	38921.36	107307.37	9.5595585	9.5901881
17	36298.02	38954.86	107319.53	9.5598829	9.5905617
18	36325.12	38988.37	107331.70	9.5602071	9.5909351
19	36352.22	39021.83	107343.88	9.5605310	9.5913082
20	36379.32	39055.41	107356.07	9.5608546	9.5916812
21	36406.41	39088.94	107368.27	9.5611779	9.5920539
22	36433.50	39122.48	107380.48	9.5615010	9.5924263
23	36460.59	39156.02	107392.71	9.5618237	9.5927985
24	36487.68	39189.57	107404.95	9.5621462	9.5931705
25	36514.76	39223.13	107417.20	9.5624685	9.5935422
26	36541.84	39256.70	107429.46	9.5627904	9.5939138
27	36568.92	39290.28	107441.73	9.5631121	9.5942851
28	36595.99	39323.86	107454.02	9.5634335	9.5946561
29	36623.06	39357.45	107466.31	9.5637546	9.5950269
30	36650.13	39391.05	107478.62	9.5640754	9.5953975
31	36677.19	39424.66	107490.95	9.5643960	9.5957679
32	36704.25	39458.28	107503.28	9.5647163	9.5961380
33	36731.31	39491.89	107515.62	9.5650363	9.5965079
34	36758.36	39525.52	107527.98	9.5653561	9.5968776
35	36785.41	39559.16	107540.35	9.5656756	9.5972470
36	36812.46	39592.80	107552.73	9.5659948	9.5976162
37	36839.50	39626.45	107565.12	9.5663137	9.5979852
38	36866.54	39660.11	107577.53	9.5666324	9.5983540
39	36893.58	39693.78	107589.95	9.5669508	9.5987225
40	36920.62	39727.46	107602.37	9.5672689	9.5990908
41	36947.65	39761.14	107614.81	9.5675868	9.5994588
42	36974.68	39794.83	107627.27	9.5679044	9.5998267
43	37001.70	39828.53	107639.73	9.5682217	9.6001943
44	37028.72	39862.24	107652.21	9.5685387	9.6005617
45	37055.74	39895.96	107664.70	9.5688555	9.6009289
46	37082.76	39929.68	107677.20	9.5691721	9.6012958
47	37109.77	39963.41	107689.71	9.5694883	9.6016625
48	37136.78	39997.15	107702.24	9.5698043	9.6020290
49	37163.79	40030.89	107714.77	9.5701200	9.6023954
50	37190.80	40064.65	107727.32	9.5704355	9.6027613
51	37217.80	40098.41	107739.88	9.5707506	9.6031271
52	37244.80	40132.18	107752.46	9.5710656	9.6034927
53	37271.79	40165.96	107765.04	9.5713802	9.6038581
54	37298.78	40199.75	107777.64	9.5716946	9.6042233
55	37325.77	40233.54	107790.25	9.5720087	9.6045882
56	37352.75	40267.34	107802.87	9.5723226	9.6049529
57	37379.73	40301.15	107815.50	9.5726362	9.6053174
58	37406.71	40334.97	107828.15	9.5729495	9.6056817
59	37433.69	40368.79	107840.80	9.5732626	9.6060457
60	37460.66	40402.62	107853.47	9.5735754	9.6064095

68. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	93358.04	260508.91	279042.81	9.9701517	10.4158226
59	93347.61	260282.58	278831.53	9.9701032	10.4154451
58	93337.17	260056.59	278620.59	9.9700547	10.4150679
57	93326.73	259830.95	278409.99	9.9700061	10.4146909
56	93316.28	259605.64	278199.73	9.9699574	10.4143141
55	93306.82	259380.68	277989.82	9.9699087	10.4139376
54	93295.35	259156.06	277780.24	9.9698600	10.4135614
53	93284.87	258931.77	277571.00	9.9698112	10.4131853
52	93274.29	258707.82	277362.11	9.9597624	10.4128095
51	93263.90	258484.21	277153.55	9.9697136	10.4124340
50	93253.40	258260.94	276945.32	9.9696647	10.4120587
49	93242.89	258038.00	276737.43	9.9696158	10.4116837
48	93232.38	257815.39	276529.88	9.9695668	10.4113088
47	93221.86	257593.12	276322.66	9.9695177	10.4109343
46	93211.33	257371.18	276115.78	9.9694687	10.4105599
45	93200.79	257149.57	275909.23	9.9694196	10.4101858
44	93190.24	256928.30	275703.01	9.9693704	10.4098119
43	93179.68	256707.35	275497.12	9.9693212	10.4094383
42	93169.12	256486.74	275291.57	9.9692720	10.4090649
41	93158.55	256266.45	275086.34	9.9692227	10.4086918
40	93147.97	256046.49	274881.42	9.9691734	10.4083188
39	93137.38	255826.86	274676.87	9.9691240	10.4079461
38	93127.79	255607.56	274472.63	9.9690746	10.4075737
37	93116.19	255388.58	274268.71	9.9690252	[illegible]
36	93105.58	255169.92	274065.12	9.9689757	10.4068295
35	93094.96	254951.60	273861.86	9.9689262	10.4064577
34	93084.33	254733.59	273658.92	9.9688766	10.4060862
33	93073.70	254515.91	273456.30	9.9688270	10.4057149
32	93063.06	254298.55	273254.00	9.9687773	10.4053439
31	93052.41	254081.51	273052.03	9.9687276	10.4049731
30	93041.75	253864.79	272850.38	9.9686779	10.4046025
29	93031.09	253648.36	272649.05	9.9686281	10.4042321
28	93020.42	253432.31	272448.04	9.9685783	10.4038620
27	93009.74	253216.55	272247.35	9.9685284	[illegible]
26	92999.05	253001.11	272046.98	9.9684785	10.4031224
25	92988.35	252785.98	271846.93	9.9684286	[illegible]
24	92977.65	252571.17	271647.19	9.9683786	[illegible]
23	92966.94	252356.67	271447.77	9.8683285	10.4020148
22	92956.22	252142.49	271248.66	9.9682784	[illegible]
21	92945.45	251928.63	271049.87	9.9682283	[illegible]
20	92934.75	251715.07	270851.39	9.9681781	10.4009092
19	92924.01	251501.83	270653.23	9.9681279	10.4005411
18	92913.06	251288.90	270455.38	9.9680777	10.4001733
17	92902.50	251076.29	270257.84	9.9680274	10.3998057
16	92891.73	250863.98	270060.61	9.9679771	10.3994383
15	92880.95	250651.98	269863.70	9.9679267	10.3990711
14	92870.17	250440.29	269667.09	9.9678763	10.3987042
13	92859.38	250228.91	269470.79	9.9678258	10.3983375
12	92848.58	250017.84	269274.80	9.9677753	10.3979710
11	92837.78	249807.07	269079.12	9.9677247	10.3976047
10	92826.96	249596.61	268883.74	9.9676741	10.3972387
9	92816.14	249386.45	268688.67	9.9676235	10.3968729
8	92805.31	249176.60	268493.91	9.9675728	10.3965073
7	92794.47	248967.06	268299.45	9.9675221	10.3961419
6	92783.62	248757.81	268105.34	9.9674713	10.3957767
5	92772.77	248548.87	267911.45	9.9674205	10.3954118
4	92761.91	248340.23	267717.60	9.9673697	10.3950471
3	92751.04	248131.90	267524.65	9.9673188	10.3946826
2	92740.16	247923.86	267331.70	9.9672679	10.3943183
1	92729.28	247716.12	267139.06	9.9672169	10.3939543
0	92718.39	247508.69	266946.72	9.9671655	10.3935904

Grad. 22.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	37460.66	40402.62	107853.47	9.5735754	9.6064096
1	37487.63	40436.46	107866.16	9.5738880	9.6067732
2	37514.59	40470.31	107878.85	9.5742003	9.6071366
3	37541.56	40504.17	107891.56	9.5745123	9.6074997
4	37568.52	40538.04	107904.27	9.5748240	9.6078627
5	37595.47	40571.91	107917.00	9.5751356	9.6082254
6	37622.43	40605.79	107929.75	9.5754468	9.6085880
7	37649.38	40639.68	107942.50	9.5757578	9.6089503
8	37676.32	40673.58	107755.27	9.5760685	9.6093124
9	37703.27	40707.48	107968.05	9.5763790	9.6096742
10	37730.21	40741.39	107980.84	9.5766892	9.6100359
11	37757.14	40775.31	107993.64	9.5769991	9.6103973
12	37784.08	40809.24	108006.46	9.5773088	9.6107586
13	37811.01	40843.18	108019.28	9.5776183	9.6111196
14	37837.91	40877.13	108032.12	9.5779275	9.6114804
15	37864.86	40911.08	108044.97	9.5782364	9.6118409
16	37891.78	40945.04	108057.84	9.5785450	9.6122013
17	37918.70	40979.01	108070.71	9.5788535	9.6125615
18	37945.62	41012.99	108083.60	9.5791616	9.6129214
19	37972.53	41046.97	108096.50	9.5794695	9.6132812
20	37999.44	41080.97	108109.41	9.5797772	9.6136407
21	38026.34	41114.97	108122.34	9.5800845	9.6140000
22	38053.24	41148.98	108135.28	9.5803917	9.6143591
23	38080.14	41183.00	108148.23	9.5806986	9.6147180
24	38107.04	41217.03	108161.19	9.5810052	9.6150766
25	38133.93	41251.06	108174.17	9.5813116	9.6154351
26	38160.82	41285.10	108187.15	9.5816177	9.6157934
27	38187.70	41319.15	108200.15	9.5819236	9.6161514
28	38214.59	41353.21	108213.16	9.5822292	9.6165093
29	38241.47	41387.28	108226.18	9.5825345	9.6168669
30	38268.34	41421.36	108239.22	9.5828397	9.6172243
31	38295.22	41455.24	108252.27	9.5831445	9.6175815
32	38322.09	41489.53	108265.53	9.5834491	9.6179385
33	38348.95	41523.63	108278.40	9.5837535	9.6182953
34	38375.82	41557.74	108291.49	9.5840576	9.6186519
35	38402.68	41591.86	108304.58	9.5843615	9.6190083
36	38429.53	41625.99	108317.69	9.5846651	9.6193645
37	38456.39	41660.12	108330.81	9.5849685	9.6197205
38	38483.24	41694.26	108343.95	9.5852716	9.6200762
39	38510.04	41728.41	108357.09	9.5855745	9.6204318
40	38536.93	41762.57	108370.25	9.5858771	9.6207872
41	38563.77	41796.74	108383.42	9.5861795	9.6211423
42	38590.60	41830.91	108396.61	9.5864816	9.6214973
43	38617.44	41865.09	108409.80	9.5867835	9.6218520
44	38644.37	41899.28	108423.01	9.5870851	9.6221066
45	38671.10	41933.48	108436.23	9.5873865	9.6225609
46	38697.92	41967.69	108449.47	9.5876876	9.6229150
47	38724.74	42001.91	108462.71	9.5879885	9.6232690
48	38751.56	42036.13	108475.97	9.5882892	9.6236227
49	38778.37	42070.36	108489.24	9.5885896	9.6239763
50	38805.18	42104.60	108502.52	9.5888897	9.6243296
51	38831.99	42138.85	108515.82	9.5891897	9.6246827
52	38858.80	42173.11	108529.13	9.5894893	9.6250356
53	38885.60	42207.38	108542.45	9.5897888	9.6253884
54	38912.39	42241.66	108555.78	9.5900880	9.6257409
55	38939.19	42275.94	108569.12	9.5903869	9.6260932
56	38995.98	42310.23	108582.48	9.5906856	9.6264454
57	38992.77	42344.53	108595.85	9.5909841	9.6267973
58	39019.55	42378.84	108609.24	9.5912823	9.6271491
59	39046.33	42413.16	108622.63	9.5915803	9.6275006
60	39073.11	42447.49	108636.04	9.5918780	9.6278519

67. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
60	92718.39	247508.69	266946.72	9.9671659	10.3935904
59	92707.41	247301.55	266754.67	9.9671148	10.3932268
58	92696.38	247094.70	266562.92	9.9670637	10.3928634
57	92685.66	246888.18	266371.48	9.9670125	10.3925003
56	92674.73	246681.91	266180.33	9.9669614	10.3921373
55	92663.80	246475.69	266989.47	9.9669101	10.3917746
54	92652.86	246270.30	265798.91	9.9668588	10.3914120
53	92641.91	246064.64	265608.65	9.9968075	10.3910497
52	92630.96	245859.87	265418.68	9.9667562	10.3906876
51	92620.00	245655.09	265229.01	9.9667048	10.3903258
50	92609.03	245450.61	265039.62	9.9666533	10.3899641
49	92598.05	245246.42	264850.54	9.9666018	10.3896027
48	92587.06	245642.52	264661.74	9.9665503	10.3892414
47	92576.06	244838.91	264473.23	9.9664987	10.3888804
46	92565.06	244635.59	264285.02	9.9664471	10.3885196
45	92554.05	244432.56	264097.09	9.9663954	10.3881591
44	92543.03	244229.81	263909.46	9.9663437	10.3877987
43	92532.00	244027.56	263722.11	9.9662920	10.3874385
42	92520.97	243925.19	263535.05	9.9662401	10.3870785
41	92509.93	243623.31	263348.26	9.9661884	10.3867188
40	92498.88	243421.72	263161.80	9.9661365	10.3863593
39	92487.82	243220.48	262975.60	9.9660846	10.3860000
38	92472.75	243019.28	262789.69	9.9660326	10.3856409
37	92465.68	242818.64	262604.06	9.9659806	10.3852820
36	92454.60	242618.19	262418.72	9.9659285	10.3849234
35	92443.51	242418.01	262233.66	9.9658764	10.3845649
34	92432.41	242218.12	262048.88	9.9658243	10.3842066
33	92421.31	242018.51	261864.39	9.9657721	10.3838486
32	92410.10	241819.18	261680.18	9.9657199	10.3834907
31	92399.08	241620.13	261496.24	9.9656677	10.3831331
30	92387.95	241421.36	261312.59	9.9656153	10.3827757
29	92376.81	241222.86	261129.22	9.9655630	10.3824185
28	92365.67	241024.65	260946.13	9.9655106	10.3820615
27	92354.52	240826.72	260763.32	9.9654582	10.3817047
26	92343.36	240629.06	260580.78	9.9654057	10.3813481
25	92332.19	240431.67	260398.52	9.9653532	10.3809917
24	92321.02	240134.57	260216.54	9.9653006	10.3806355
23	92309.84	240037.74	260034.84	9.9652480	10.3802795
22	92298.61	239841.18	259853.41	9.9651953	10.3799238
21	92287.45	239644.90	259672.25	9.9651426	10.3795682
20	92276.24	239448.[illegible]	259491.37	9.9650899	10.3792128
19	92265.03	239253.16	259310.77	9.9650371	10.3788577
18	92253.81	239057.69	259130.43	9.9649843	10.3785027
17	92242.58	238862.50	258950.37	9.9649314	10.3781480
16	92231.34	238667.51	258770.58	9.9648785	10.3777934
15	92220.09	238472.[illegible]	258591.07	9.9648256	10.3774391
14	92208.84	238278.55	258411.82	9.9647726	10.3770850
13	92197.58	238084.44	258232.44	9.9647195	10.3767310
12	92186.31	237890.60	258054.14	9.9646665	10.3763773
11	92175.03	237697.03	257875.70	9.9646133	10.3760237
10	92163.75	237503.72	257697.53	9.9645602	10.3756704
9	92152.46	237310.68	257519.64	9.9645069	10.3753173
8	92141.16	237117.91	257341.99	9.9644537	10.3749644
7	92129.85	236925.40	257164.52	9.9644004	10.3746116
6	92118.54	236733.16	256987.52	9.9643470	10.3742591
5	92107.22	236541.18	256810.69	9.9642937	10.3739068
4	92095.89	236349.46	256634.12	9.9642402	10.3735546
3	92084.55	236158.01	256457.81	9.9641862	10.3732027
2	92073.20	235966.83	256281.76	9.9641332	10.3728509
1	92061.85	235775.90	256105.99	9.9640797	10.3724994
0	92050.49	235585.24	255930.47	9.9640261	10.3721481

Grad. 23.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	39073.11	42447.49	108636.04	9.5918780	9.6278519
1	39099.89	42481.82	108649.46	9.5921755	9.6282031
2	39126.66	42516.16	108662.89	9.5924725	9.6285540
3	39153.43	42550.51	108676.34	9.5927698	9.6289048
4	39180.19	42584.87	108689.79	9.5930660	9.6292553
5	39206.95	42619.27	108703.26	9.5933631	9.6296057
6	39233.71	42653.62	108716.75	9.5936594	9.6299558
7	39260.47	42688.00	108730.24	9.5939555	9.6303058
8	39287.22	42722.39	108743.75	9.5942513	9.6306556
9	39313.97	42756.79	108757.27	9.5945469	9.6310052
10	39340.71	42791.20	108770.80	9.5948422	9.6313545
11	39367.45	42825.62	108784.35	9.5951373	9.6317037
12	39394.19	42860.05	108797.91	9.5954322	9.6320527
13	39420.93	42894.49	108811.48	9.5957268	9.6324015
14	39447.66	42928.94	108825.06	9.5960212	9.6327501
15	39474.39	42963.39	108838.66	9.5963154	9.6330985
16	39501.11	42997.85	108852.27	9.5966093	9.6334468
17	39527.83	43032.32	108865.89	9.5969030	9.6337948
18	39554.55	43066.80	108879.52	9.5971965	9.6341426
19	39581.27	43101.29	108893.17	9.5974897	9.6344903
20	39607.98	43135.79	108906.8	9.5977827	9.6348378
21	39634.69	43170.30	108920.50	9.5980754	9.6351850
22	39661.39	43204.81	108934.18	9.5983679	9.6355321
23	39688.09	43239.33	108947.83	9.5986602	9.6358790
24	39714.79	43273.82	108961.59	9.5989523	9.6362257
25	39741.48	43308.40	108975.31	9.5992441	9.6365722
26	39768.17	43342.95	108989.04	9.5995357	9.6369185
27	39794.86	43377.51	109002.79	9.5998271	9.6372646
28	39821.55	43412.08	109016.55	9.6001181	9.6376106
29	39848.23	43446.66	109030.32	9.6004090	9.6379563
30	39874.91	43481.24	109044.11	9.6006997	9.6383019
31	39901.58	43515.83	109057.91	9.6009901	9.6386473
32	39928.25	43550.43	109071.72	9.6012803	9.6389925
33	39954.92	43585.04	109085.54	9.6015703	9.6393375
34	39981.58	43619.66	109099.38	9.6018600	9.6396823
35	40008.24	43654.29	109113.23	9.6021495	9.6400269
36	40034.90	43688.93	109127.09	9.6024388	9.6403714
37	40061.56	43723.58	109140.97	9.6027278	9.6407156
38	40088.21	43758.23	109154.86	9.6030166	9.6410597
39	40114.86	43792.89	109168.76	9.6033052	9.6414036
40	40141.50	43827.56	109182.67	9.6035936	9.6417473
41	40168.14	43862.24	109195.59	9.6038817	9.6420908
42	40194.78	43896.93	109210.53	9.6041696	9.6424342
43	40221.41	43931.63	109224.48	9.6044573	9.6427773
44	40248.04	43996.34	109238.45	9.6047448	9.6431203
45	40274.67	44001.06	109252.43	9.6050320	9.6434631
46	40301.29	44035.78	109266.32	9.6053190	9.6438057
47	40327.91	44070.51	109280.42	9.6056057	9.6441481
48	40354.53	44105.25	109294.44	9.6058923	9.6444903
49	40381.14	44140.00	109308.47	9.6061786	9.6448324
50	40407.75	44174.76	109322.51	9.6064647	9.6451743
51	40434.36	44209.53	109336.56	9.6067506	9.6455160
52	40460.95	44244.31	109350.63	9.6070362	9.6458575
53	[illegible]	44279.10	109364.71	9.6073216	9.6461988
54	40514.14	44313.90	109378.80	9.6076068	9.6465400
55	[illegible]	44348.71	109392.91	9.6078918	9.6468810
56	40567.34	44383.53	109407.03	9.6081765	9.6472217
57	40593.93	44418.35	109421.16	9.6084611	9.6475624
58	[illegible]	44453.18	[illegible]	9.6087454	9.6479028
59	[illegible]	[illegible]	109449.46	9.6090294	9.6482431
60	[illegible]	44522.87	109463.63	[illegible]	9.6485831

66. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	92050.49	235585.24	255930.47	9.9640261	10.3721481
59	92039.12	235394.83	255755.21	9.9639724	10.3717969
58	92027.74	235204.69	255580.22	9.9639187	10.3714460
57	92016.35	235014.81	255405.48	9.9638650	10.3710952
56	92004.96	234825.19	255231.01	9.9638112	10.3707447
55	91993.56	234635.82	255056.80	9.9637574	10.3703943
54	91982.15	234446.72	254882.84	9.9637036	10.3700442
53	91970.73	234257.87	254709.15	9.9636496	10.3696942
52	91959.31	234069.28	254535.71	9.9635957	10.3693444
51	91947.88	233880.95	254362.53	9.9635417	10.3689948
50	91936.44	233692.87	254189.61	9.9634877	10.3686455
49	91924.99	233505.05	254016.94	9.9634336	10.3682963
48	91913.53	233317.45	253844.53	9.9633795	10.3679473
47	91902.07	233130.17	253672.38	9.9633253	10.3675985
46	91890.60	232943.11	253500.48	9.9632711	10.3672499
45	91879.12	232756.30	253328.8	9.9632168	10.3669015
44	91867.63	232569.75	253157.44	9.9631625	10.3665532
43	91856.14	232383.45	252986.3	9.9631082	10.3662052
42	91844.64	232197.4	252815.41	9.9630538	10.3658574
41	91833.13	232011.60	252644.78	9.9629994	10.3655097
40	91821.61	231826.06	252474.40	9.9629449	10.3651622
39	91810.08	231640.76	252304.26	9.9628904	10.3648150
38	91798.55	231455.71	252134.38	9.9628358	10.3644979
37	91787.01	231270.91	251964.75	9.9627812	10.3641210
36	91775.46	231086.36	251795.37	9.9627266	10.3637743
35	91763.90	230902.06	251626.24	9.9626719	10.3634278
34	91752.34	230718.01	251457.35	9.9626172	10.3630815
33	91740.77	230534.20	251288.71	9.9625624	10.3627354
32	91729.19	230350.64	251120.32	9.9625076	10.3623894
31	91717.60	230167.32	250952.18	9.9624527	10.3620437
30	91706.01	229984.25	250784.28	9.9623978	10.3616981
29	91694.41	229801.43	250616.63	9.9623428	10.3613527
28	91682.80	229618.85	250449.23	9.9622878	10.3610075
27	91671.18	229436.58	250282.07	9.9622328	10.3606625
26	91659.55	229254.42	250115.15	9.9621777	10.3603177
25	91647.91	229072.57	249948.47	9.9621226	10.3599731
24	91636.24	228890.96	249781.04	9.9620674	10.3596286
23	91624.62	228709.59	249615.86	9.9620122	10.3592844
22	91612.96	228528.46	249449.91	9.9619569	10.3589403
21	91601.30	228347.58	249284.21	9.9619016	10.3585964
20	91589.63	228166.93	249118.74	9.9618463	10.3582527
19	91577.95	227986.53	248953.52	9.9617909	10.3579092
18	91566.26	227806.36	248788.54	9.9617355	10.3575658
17	91554.56	227626.43	248623.80	9.9616800	10.3572227
16	91542.86	227446.74	248459.29	9.9616245	10.3568797
15	91531.15	227267.29	248295.03	9.9615689	10.3565369
14	91519.43	227088.07	248131.00	9.9615133	10.3561943
13	91507.70	226909.09	247967.21	9.9614576	10.3558519
12	91495.96	226730.35	247903.66	9.9614020	10.3555097
11	91484.22	226551.84	247640.34	9.9613463	10.3551676
10	91472.47	226373.57	247477.26	9.9612904	10.3548257
9	91460.71	226195.53	247314.42	9.9612346	10.3544840
8	91448.95	226017.73	247151.81	9.9611787	10.3541425
7	91437.18	225840.16	246989.43	9.9611228	10.3538012
6	91425.40	225662.83	246827.29	9.9610668	10.3534600
5	91413.61	225485.72	246665.38	9.9610108	10.3531100
4	91401.81	225308.85	246503.71	9.9609548	10.3527783
3	91390.00	225132.21	246342.27	9.9608987	10.3524376
2	91378.19	224955.80	246181.06	9.9608426	10.3520972
1	91366.37	224779.62	246020.08	9.9607864	10.3517569
0	91354.54	224603.68	245859.33	9.9607302	10.3514169

40673.67

Grad. 24.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	40673.66	44522.87	109463.63	9.6093133	9.6485831
1	40700.23	44557.73	109477.81	9.6095969	9.6489230
2	40726.80	44592.60	109492.01	9.6098803	9.6492618
3	40753.37	44627.48	109506.22	9.6101635	9.6496023
4	40779.93	44662.37	109520.44	9.6104465	9.6499417
5	40806.49	44697.27	109534.67	9.6107293	9.6502809
6	40833.05	44732.17	109548.92	9.6110118	9.6506199
7	40859.60	44767.08	109563.18	9.6112941	9.6509587
8	40886.15	44802.00	109577.46	9.6115762	9.6512974
9	40912.69	44836.93	109591.74	9.6118580	9.6516359
10	40939.23	44871.87	109606.04	9.6121397	9.6519742
11	40965.77	44906.82	109620.36	9.6124211	9.6523123
12	40992.30	44941.78	109634.68	9.6127023	9.6526503
13	41018.83	44976.75	109649.02	9.6129833	9.6529881
14	41045.36	45011.73	109663.37	9.6132641	9.6533257
15	41071.89	45046.72	109677.74	9.6135446	9.6536631
16	41098.41	45081.72	109692.12	9.6138250	9.6540004
17	41124.93	45116.73	109706.51	9.6141051	9.6543375
18	41151.44	45151.74	109720.91	9.6143850	9.6546744
19	41177.95	45186.76	109735.33	9.6146647	9.6550112
20	41204.46	45221.79	109749.76	9.6149441	9.6553477
21	41230.96	45256.83	109764.20	9.6152234	9.6556841
22	41257.46	45291.88	109758.66	9.6155024	9.6560204
23	41283.95	45326.94	109793.13	9.6157812	9.6563564
24	41310.44	45362.01	100807.61	9.6160598	9.6566923
25	41336.93	45397.09	109822.11	9.6163382	9.6570280
26	41363.42	45432.18	109836.62	9.6166164	9.6573630
27	41389.90	45467.28	109851.14	9.6168944	9.6576989
28	41416.38	45502.39	109865.68	9.6171721	9.6580351
29	41442.85	45537.51	109880.23	9.6174496	9.6583692
30	41469.32	45572.64	109694.79	9.6177270	9.6587041
31	41495.79	45607.77	109909.36	9.6180041	9.6590387
32	41522.26	45642.91	109923.95	9.6182809	9.6593733
33	41548.72	45678.06	109938.55	9.6185576	9.6597076
34	41575.18	45713.22	109953.17	9.6188341	9.6600418
35	41601.63	45748.39	109967.79	9.6191103	9.6603758
36	41628.08	45783.57	109982.43	9.6193864	9.6607097
37	41654.53	45818.76	109997.09	9.6196622	9.6610434
38	41680.97	45853.96	110011.76	9.6199378	9.6613769
39	41707.41	45889.17	110026.44	9.6202132	9.6617103
40	41733.85	45924.39	110041.13	9.6204884	9.6620434
41	41760.28	45959.62	110055.84	9.6207634	9.6623765
42	41786.71	45994.86	110070.56	9.6210382	9.6627093
43	41813.13	46030.11	110085.29	9.6213127	9.6630420
44	41839.55	46065.37	110100.04	9.6215871	9.6633745
45	41865.97	46100.64	110114.80	9.6218612	9.6637069
46	41892.39	46135.91	110129.57	9.6221351	9.6640391
47	41918.80	46171.19	110144.36	9.6224088	9.6643711
48	41945.21	46206.48	110159.16	9.6226824	9.6647030
49	41971.61	46241.78	110173.97	9.6229557	9.6650346
50	41998.01	46277.09	110188.79	9.6232287	9.6653662
51	42024.41	46312.42	110203.63	9.6235016	9.6656975
52	42050.80	46347.76	110218.49	9.6237743	9.6660288
53	42077.19	46383.11	110233.35	9.6240467	9.6663598
54	42103.58	46418.46	110248.23	9.6243190	9.6666907
55	42129.96	46453.82	110263.13	9.6245911	9.6670214
56	42156.34	46489.19	110278.03	9.6248629	9.6673519
57	42182.72	46524.57	110292.95	9.6251346	9.6676823
58	42209.09	46559.96	110307.89	9.6254060	9.6680126
59	42235.46	46595.36	110322.83	9.6256772	9.6683426
60	42261.83	46630.77	110337.79	9.6259483	9.6686725

65. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	91354.54	224603.68	245859.33	9.9607302	10.3514169
59	91342.71	224427.96	245698.82	9.9606739	10.3510770
58	91330.87	224252.47	245538.53	9.9606176	10.3507372
57	91319.02	224077.21	245378.48	9.9605612	10.3503977
56	91307.16	223902.18	245218.65	9.9605048	10.3500583
55	91295.29	223727.38	245059.05	9.9604484	10.3497191
54	91283.42	223552.80	244899.68	9.9603919	10.3493801
53	91271.54	223378.25	244740.54	9.9603354	10.3490413
52	91259.65	223204.33	244581.63	9.9602788	10.3487026
51	91247.75	223030.43	244422.94	9.9602222	10.3483641
50	91235.84	222856.76	244264.48	9.9601655	10.3480258
49	91223.93	222683.31	244106.24	9.9601088	10.3476877
48	91212.01	222510.09	243948.23	9.9600520	10.3473497
47	91200.08	222337.09	243790.45	9.9599952	10.3470119
46	91188.14	222164.32	243632.89	9.9599384	10.3466743
45	91176.20	221991.77	243475.55	9.9598815	10.3463369
44	91164.25	221819.44	243318.44	9.9598246	10.3459996
43	91152.29	221647.33	243161.55	9.9597676	10.3456625
42	91140.32	221475.45	243004.89	9.9597106	10.3453256
41	91128.35	221303.79	242848.44	9.9596535	10.3449888
40	91116.37	221132.34	242692.22	9.9595964	10.3446523
39	91104.38	220961.12	242536.22	9.9595393	10.3443159
38	91092.38	220790.12	242380.44	9.9594821	10.3439796
37	91080.38	220619.34	242224.88	9.9594248	10.3436436
36	91068.37	220448.78	242069.54	9.9593675	10.3433077
35	91056.35	220278.43	241914.32	9.9593101	10.3429720
34	91044.32	220108.31	241759.52	9.9592528	10.3426364
33	91032.28	219938.40	241604.84	9.9591954	10.3423011
32	91020.24	219768.71	241450.38	9.9591380	10.3419659
31	91008.19	219599.23	241296.13	9.9590805	10.3416308
30	90996.13	219429.97	241142.10	9.9590229	10.3412960
29	90984.06	219260.93	240988.29	9.9589653	10.3409613
28	90971.98	219092.10	240834.69	9.9589077	10.3406267
27	90959.90	218923.49	240681.32	9.9588500	10.3402924
26	90947.81	218755.10	240528.15	9.9587923	10.3399582
25	90935.71	218586.91	240375.20	9.9587345	10.3396242
24	90923.61	218418.94	240222.47	9.9586767	10.3392903
23	90911.50	218251.19	240069.95	9.9586188	10.3389566
22	90899.38	218083.64	239917.64	9.9585609	10.3386231
21	90887.25	217916.31	239765.55	9.9585030	10.3382897
20	90875.11	217749.20	239613.67	9.9584450	10.3379568
19	90862.97	217581.29	239462.01	9.9583869	10.3376235
18	90850.82	217415.59	239310.55	9.9583288	10.3372907
17	90838.66	217249.11	239159.31	9.9582707	10.3369580
16	90826.49	217082.83	239008.28	9.9582125	10.3366255
15	90814.32	216916.77	238857.46	9.9581543	10.3362931
14	90802.14	216750.91	238706.85	9.9580961	10.3359609
13	90789.95	216585.27	238556.45	9.9580378	10.3356289
12	90777.75	216419.83	238406.25	9.9579794	10.3352970
11	90765.54	216254.60	238256.27	9.9579210	10.3349654
10	90753.33	216089.58	238106.50	9.9578626	10.3346338
9	90741.11	215924.76	237956.93	9.9578041	10.3343025
8	90728.88	215760.15	237807.58	9.9577456	10.3339712
7	90716.64	215595.75	237658.43	9.9576870	10.3336402
6	90704.40	215431.56	237509.49	9.9576284	10.3333093
5	90692.15	215267.57	237360.75	9.9575697	10.3329786
4	90679.89	215103.78	237212.22	9.9575110	10.3326481
3	90667.62	214940.20	237063.90	9.9574522	10.3323177
2	90655.35	214776.83	236915.71	9.9573934	10.3319874
1	90643.07	214613.66	236767.87	9.9573346	10.3316574
0	90630.78	214450.69	236620.16	9.9572757	10.3313275

Grad. 25.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	42261.83	46630.77	110337.79	9.6259483	9.6686725
1	42288.19	46666.19	110352.77	9.6262191	9.6690023
2	42314.55	46701.62	110367.75	9.6264897	9.6693319
3	42340.90	46737.06	110382.75	9.6267601	9.6696613
4	42367.25	46772.51	110397.77	9.6270303	9.6699906
5	42393.60	46807.97	110412.79	9.6273003	9.6703197
6	42419.94	46843.43	110427.83	9.6275701	9.6706486
7	42446.28	46878.90	110442.89	9.6278397	9.6709774
8	42472.61	46914.38	110457.95	9.6281090	9.6713060
9	42498.95	46949.88	110473.03	9.6283782	9.6716345
10	42525.28	46985.39	110488.13	9.6286472	9.6719628
11	42551.61	47020.90	110503.24	9.6289160	9.6722910
12	42577.93	47056.43	110518.36	9.6291845	9.6726190
13	42604.25	47091.96	110533.49	9.6294529	9.6729468
14	42630.56	47127.51	110548.64	9.6297211	9.6732745
15	42656.87	47169.06	110563.80	9.6299890	9.6736020
16	42683.18	47198.63	110578.98	9.6302568	9.6739294
17	42709.49	47234.20	110594.17	9.6305243	9.6742566
18	42735.79	47269.78	110609.37	9.6307917	9.6745836
19	42762.09	47305.38	110624.58	9.6310589	9.6749105
20	42788.38	47340.98	110639.81	9.6313258	9.6752372
21	42814.67	47376.59	110655.06	9.6315926	9.6755638
22	42840.95	47412.22	110670.31	9.6318591	9.6758902
23	42867.23	47447.85	110685.58	9.6321255	9.6762165
24	42893.51	47485.49	110700.87	9.6323916	9.6765426
25	42919.79	47519.14	110716.16	9.6326576	9.6768686
26	42946.06	47554.81	110731.47	9.6329233	9.6771944
27	42972.33	47590.48	110746.80	9.6331889	9.6775201
28	42998.59	47626.16	110762.14	9.6334542	9.6778456
29	43024.85	47661.85	110777.49	9.6337194	9.6781709
30	43051.11	47697.55	110792.85	9.6339844	9.6784961
31	43077.36	47733.26	110808.23	9.6341491	9.6788211
32	43103.61	47768.99	110823.63	9.6345137	9.6791460
33	43129.86	47804.72	110839.03	9.6347780	9.6794708
34	43156.10	47840.46	110854.45	9.6350422	9.6797953
35	43182.34	47876.21	110869.89	9.6353062	9.6801198
36	43208.57	47911.97	110885.33	9.6355699	9.6804440
37	43234.80	47947.74	110900.79	9.6358335	9.6807682
38	43261.03	47983.52	110916.27	9.6360969	9.6810921
39	43287.26	48019.32	110931.76	9.6363601	9.6814160
40	43313.48	48055.12	110947.26	9.6366231	9.6817396
41	43339.70	48090.93	110962.77	9.6368859	9.6820632
42	43365.91	48126.75	110978.30	9.6371484	9.6823865
43	43392.12	48162.58	110993.85	9.6374108	9.6827098
44	43418.33	48198.42	111009.41	9.6376731	9.6830328
45	43444.53	48234.27	111024.98	9.6379351	9.6833557
46	43470.73	48270.14	111040.56	9.6381969	9.6836785
47	43496.92	48306.01	111056.16	9.6384585	9.6840011
48	43523.11	48341.89	111071.77	9.6387199	9.6843236
49	43549.30	48377.78	111087.40	9.6389812	9.6846459
50	43575.48	48413.68	111103.04	9.6392422	9.6849681
51	43601.66	48449.59	111108.69	9.6395030	9.6852901
52	43627.84	48485.52	111134.36	9.6397637	9.6856120
53	43654.01	48521.45	111150.04	9.6400241	9.6859338
54	43680.18	48557.39	111165.73	9.6402844	9.6862553
55	43706.34	48593.34	111181.44	9.6405445	9.6865768
56	43732.50	48629.31	111197.16	9.6408044	9.6868981
57	43758.66	48665.28	111212.90	9.6416640	9.6872192
58	43784.82	48701.26	111228.65	9.6413235	9.6875401
59	43810.97	48737.26	111244.42	9.6415828	9.6878611
60	43837.12	48773.29	111260.19	9.6418420	9.6881818

64. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	90630.78	214450.69	236620.16	9.9572757	10.3313275
59	90618.48	214287.93	236472.65	9.9572168	10.3309977
58	90606.17	214125.27	236325.35	9.9571568	10.3306681
57	90593.86	213963.01	236178.26	9.9570988	10.3303387
56	90581.54	213800.85	236031.36	9.9570397	10.3300094
55	90569.21	213638.89	235884.67	9.9569806	10.3296803
54	90556.88	213477.14	235738.18	9.9569219	10.3293514
53	90544.54	213315.59	235591.89	9.9568623	10.3290126
52	90532.19	213154.23	335445.81	9.9568030	10.3286940
51	90519.83	212993.08	235299.92	9.9567437	10.3283655
50	80507.46	212832.13	235154.24	9.9566844	10.3280372
49	90495.09	212671.37	235008.75	9.9566250	10.3277090
48	90482.71	212510.81	234863.47	9.9565656	10.3273810
47	90470.32	212350.46	234718.38	9.9565061	10.3270532
46	90457.92	212190.30	234573.49	9.9564466	10.3267255
45	90445.51	212030.34	234428.80	9.9563870	10.3263980
44	90433.10	211870.57	234284.31	9.9563274	10.3260706
43	90420.68	211711.01	234140.02	9.9562678	10.3257434
42	90408.25	211551.64	233995.93	9.9562081	10.3254164
41	90395.82	211392.46	233852.03	9.9561483	10.3250895
40	90383.38	211233.48	233708.33	9.9560886	10.3247628
39	90370.93	211074.70	233564.82	9.9560287	10.3244362
38	90358.47	210916.11	233421.52	9.9559689	10.3241097
37	90346.00	210757.71	233278.40	9.9559089	10.3237835
36	90333.53	210599.51	233155.48	9.9558490	10.3234574
35	90321.05	210441.50	232992.76	9.9557890	10.3231314
34	90308.56	210283.69	232850.23	9.9557289	10.3228056
33	90296.06	210126.07	232707.90	9.9556688	10.3224799
32	90283.56	209968.64	232565.75	9.9556087	10.3221544
31	90271.05	209811.40	232423.81	9.9555485	10.3218291
30	90258.53	209654.36	232282.05	9.9554882	10.3215039
29	90246.00	209497.51	232140.49	9.9554280	10.3211589
28	90233.47	209340.84	231999.11	9.9553679	10.3208540
27	90220.93	209184.37	231857.94	9.9553073	10.3205292
26	90208.38	209028.09	231716.95	9.9552469	10.3201047
25	90195.82	208872.00	231576.15	9.9551864	10.3198803
24	90183.25	208716.10	231435.54	9.9551259	10.3195560
23	90170.68	208560.39	231295.13	9.9550653	10.3192318
22	90158.10	208404.86	231154.90	9.9550047	10.3189079
21	90145.51	208249.53	231014.86	9.9549441	10.3185840
20	90132.91	208094.38	230875.01	9.9548834	10.3182604
19	90120.31	207939.42	230735.35	9.9548227	10.3179368
18	90107.70	207784.65	230595.88	9.9547619	10.3176135
17	90095.08	207630.07	230456.60	9.9547011	10.3171902
16	90082.45	207475.67	230317.53	9.9546402	10.3169672
15	90069.82	207321.46	230178.6[illegible]	9.9545793	10.3166443
14	90057.18	207167.43	230039.88	9.9545184	10.3163215
13	90044.53	207013.59	229901.34	9.9544574	10.3159989
12	90031.87	206859.93	229762.99	9.9543963	10.3156764
11	90019.21	206706.46	229624.83	9.9543352	10.3153541
10	90006.54	206553.18	[illegible]	9.9542742	10.3150319
9	89993.86	206400.08	229349.06	9.9542129	10.3147099
8	89981.17	206247.16	229211.45	9.9541517	10.3143880
7	89968.48	206094.42	229074.03	9.9540904	10.3140662
6	89955.78	205941.87	228936.79	9.9540291	10.3137447
5	89943.07	205789.50	228799.74	9.9539677	10.3134232
4	89930.35	205637.32	228662.86	9.9539063	10.3131019
3	89917.42	205485.31	228526.16	9.9538448	10.3127808
2	89904.89	205333.49	228389.87	9.9537833	10.3124598
1	89892.15	205181.84	228253.34	9.9537218	10.3121389
0	89879.40	205030.38	228117.20	9.9536602	10.3118182

43837.12

Grad. 26.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log.Sin.*	*Log.Tang.*
0	43837.12	48773.26	111260.19	9.6418420	9.6881818
1	43863.26	48809.27	111275.98	9.6421009	9.6885023
2	43889.40	48845.30	111291.79	9.6423596	9.6888227
3	43915.53	48881.33	111307.61	9.6426182	9.6891430
4	43941.66	48917.37	111323.45	9.6428765	9.6894631
5	43967.79	48953.42	111339.30	9.6431347	9.6897831
6	43993.92	48989 49	111355.16	9.6433926	9.6901030
7	44020.04	49025.57	111371.03	9.6436504	9.6904226
8	44046.16	49061.66	111386.91	9.6439080	9.6907422
9	44072.27	49097.75	111402.82	9.6441654	9.6910616
10	44098.38	49133.86	111418.74	9.6444226	9.6913809
11	44124 48	49169.97	111434.67	9.6446796	9.6917000
12	44150.58	49206.10	111450.62	9.6449365	9.6920189
13	44176.68	49242.24	111466.58	9.6451931	9.6923378
14	44202.78	49278.38	111482.55	9.6454496	9.6925565
15	44228.87	49314.54	111498.54	9.6457058	9.69.9750
16	44254.96	49350.71	111514.54	9.6459919	9.6932934
17	44281.04	49386.89	111530.56	9.6462178	9.6936117
18	44307.12	49423.08	111546.59	9.6464735	9.6939298
19	44333.20	49459.28	111562.63	9.6467290	9.6942478
20	44359.27	49495.49	111578.69	9.6469844	9.6945650
21	44385.34	49531.71	111594.76	9.6472395	9.6948833
22	44411.40	49567.94	111610.84	9.6474945	9.6952009
23	44437.46	49604.18	111626.94	9.6477492	9.6955183
24	44463.52	49640.43	111643.06	9.6480038	9.6958355
25	44489.57	49676.69	111659.19	9.6482582	9.6961527
26	44515.62	49712.97	111675.33	9.6485124	9.6964697
27	44541.67	49749.25	111691.49	9.6487665	9.6967865
28	44567.71	49785.54	111707.66	9.6490203	9.6971032
29	44593.35	49821.85	111723.84	9.6492740	9.6974198
30	44619.78	49858.16	111740.04	9.6495274	9.6977363
31	44645.81	49894.49	111756.25	9.6497807	9.6980526
32	44671.84	49930.82	111772.48	9.6500338	9.6983687
33	44697.86	49967.17	111788.72	9.6502868	9.6986847
34	44723.88	50003.52	111804.98	9.6505395	9.6990006
35	44749.90	50039.89	111821.25	9.6507920	9.6993164
36	44775.91	50076.27	111837.53	9.6510444	9.6996320
37	44801.92	50112.66	111853.83	9.6512966	9.6999474
38	44827.92	50149.06	111870.14	9.6515486	9.7002628
39	44853.92	50185.47	111886.47	9.6518004	9.7005780
40	44879.92	50221.89	111902.81	9.6520521	9.7008930
41	44905.91	50258.32	111919.16	9.6523035	9.7012080
42	44971.90	50294.76	111935.53	9.6525548	9.7015227
43	44957.89	50331.21	111951.91	9.6528059	9.7018374
44	44983.87	50367.67	111968.31	9.6530568	9.7021519
45	45009.85	50404.15	111984.72	9.6533075	9.7024663
46	45035.82	50440.63	112001.15	9.6535581	9.7027805
47	45061.79	50477.13	112017.59	9.6538084	9.7030946
48	45087.76	50513.63	112034.05	9.6540586	9.7034086
49	45113.72	50550.15	112050.52	9.6543086	9.7037225
50	45139.68	50586.68	112067 00	9.6545584	9.7040362
51	45165.63	50623.22	112083.50	9.6548081	9.7043497
52	45191.58	50659.77	112100.01	9.6550575	9.7046632
53	45217.53	50696.33	112116.53	9.6553068	9.7049765
54	45243.47	50732.90	112133.07	9.6555559	9.7052897
55	45269.41	50769 48	112149.63	9.6558048	9.7056027
56	45295.35	50806.07	112166.20	9.6560536	9.7059156
57	45321.48	50842.67	112182.78	9.6563021	9.7062284
58	45347.21	50879.28	112199.38	9.6565505	9.7065410
59	45373.13	50915.91	112216.00	9.6567987	9.7068535
60	45399.05	50952.54	112232.62	9.6570468	9.7071659

63. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log.Sin.*	*Log.Tang.*
60	89879.40	205030.38	228117.20	9.9536602	10.3118182
59	89866.65	204879.10	227981.24	9.9535985	10.3114977
58	89853.89	204728.00	227845.45	9.9535369	10.3111773
57	89841.12	204577.08	227709.86	9.9534751	10.3108570
56	89828.34	204426.34	227574.45	9.9534134	10.3105369
55	89815.55	204275.78	227439 21	9.9533515	10.3102169
54	89802.76	204125.46	227304.15	9.9532897	10.3098970
53	89789.96	203975.19	227169.27	9.9532278	10.3095774
52	89777.51	203825.17	227034.57	9.9531658	10.3092578
51	89764.33	203675.32	226900.05	9.9531098	10.3089384
50	89751.51	203525.65	226765.71	9.9530418	10.3086191
49	89738.68	203376.15	226631.55	9.9529797	10.3083000
48	89725.84	203226.83	226497.56	9.9529175	10.3079811
47	99712.99	203077.69	226363.75	9.9528553	10.3076622
46	89700.13	202928.73	226230.12	9.9527931	10.3073435
45	89687.27	202779.94	226096.67	9.9527308	10.3070250
44	89674.40	202631.33	225963.39	9.9526685	10.3067066
43	89661.52	202482.89	225830.29	9.9526061	10.3063883
42	89648.64	202334.62	225697.36	9.9525437	10.3060702
41	89635.75	202186.53	225564.61	9.9524813	10.3057522
40	89622.85	202038.62	225432.04	9.9524188	10.3054344
39	89609.94	201890.88	225299.64	9.9523562	10.3051167
38	89597.03	201743.31	225167.41	9.9522936	10.3047991
37	89584.11	201595.92	225035.37	9.9522310	10.3044817
36	89571.18	201448.69	224903.48	9.9521683	10.3041641
35	89558.24	201301.64	224771.78	9.9521055	10.3038473
34	89545.29	201154.77	224640 24	9.9520428	10.3035303
33	89532.34	201008.06	224508.89	9.9519799	10.3032135
32	89519.38	200861.53	224377.70	9.9519171	10.3028968
31	89506.41	200715.16	224246.69	9.9518541	10.3025802
30	89493.43	200568.97	224115.84	9.9517912	10.3022637
29	89480.45	200422.95	223985.17	9.9517282	10.3019474
28	89467.46	200277.10	223854.67	9.9516651	10.3016313
27	89454.46	200131.42	223724.35	9.9516020	10.3013153
26	89441 45	199985.50	223594.19	9.9515389	10.3009994
25	89428.44	199840.56	223464.20	9.9514757	10.3006836
24	89415.42	199695.39	223334.38	9.9514126	10.3003680
23	89402.39	199550.38	223204.74	9.9513492	10.3000526
22	89389.36	199405.54	223075.26	9.9512858	10.2997372
21	89376.32	199260.87	222945.95	9.9512224	10.2994220
20	89363.27	199116.37	222816.81	9.9511590	10.2591070
19	89350.21	198972.04	222687.83	9.9510956	10.2987929
18	89337.14	198827.87	222559.03	9.9510320	10.2984773
17	89324.06	198683.87	222430.39	9.9509685	10.2981626
16	89310.98	198540 03	222301.92	9.9509049	10.2978481
15	89297.89	198396.36	222173.62	9.9508412	10.2975337
14	89284 79	198252.86	222045.48	9.9507775	10.2972195
13	89271.69	198109.52	221917 51	9.9507138	10.2969054
12	89258.58	197966.35	221789.71	9.9506500	10.2965914
11	89245.46	197823.34	221662.07	9.9505861	10.2962775
10	89232.33	197680.50	221534.60	9.9505223	10.2959638
9	89219.20	197537.81	221407.30	9.9504583	10.2956503
8	89206.06	197395.31	221280.16	9.9503944	10.2953368
7	89192.91	197252.96	221153.18	9.9503303	10.2950235
6	89179.75	197110.77	221026.37	9.9502663	10.2947103
5	89166.59	196968.74	220899.72	9.9502022	10.2943973
4	89153.42	196826.88	220773.23	9.9501380	10.2940844
3	89140.24	196685.18	220646.91	9.9500738	10.2937716
2	89127.05	196543.64	220520.75	9.9500095	10.2934590
1	89113.85	196402.27	220394.76	9.9499452	10.2931465
0	89100.65	196261.05	220268.93	9.9498809	10.2928341

Grad. 27.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	45399.05	50952.54	112232.62	9.6570468	9.7071659
1	45424.97	50989.19	112249.26	9.6572946	9.7074781
2	45450.88	51025.85	112265.92	9.6575423	9.7077912
3	45476.79	51062.52	112282.59	9.6577898	9.7081022
4	45502.69	51099.19	112299.18	9.6580371	9.7084141
5	45528.19	51135.88	112315.98	9.6582842	9.7087258
6	45554.49	51172.59	112332.69	9.6585312	9.7090374
7	45580.38	51209.30	112349.42	9.6587780	9.7093488
8	45606.27	51245.02	112366.16	9.6590246	9.7096601
9	45632.16	51282.75	112382.92	9.6592710	9.7099713
10	45658.04	51319.50	112399.69	9.6595173	9.7102834
11	45683.92	51356.25	112416.48	9.6597634	9.7105933
12	45709.79	51373.02	112433.18	9.6600093	9.7109041
13	45735.66	51429.80	112450.10	9.6602550	9.7112148
14	44761.53	51466.58	112466.93	9.6605005	9.7115254
15	45787.39	51503.38	112483.77	9.6607459	9.7118358
16	45813.25	51540.19	112500.63	9.6609911	9.7121461
17	45839.10	51577.02	112517.50	9.6612361	9.7124562
18	45864.95	51613.85	112534.39	9.6614810	9.7127652
19	45890.80	51650.69	112551.29	9.6617257	9.7130761
20	45916.64	51687.55	112568.21	9.6619701	9.7133859
21	45942.48	51724.41	112585.14	9.6022145	9.7136956
22	45968.32	51761.29	112602.09	9.6624586	9.7140051
23	45994.15	51798.18	112619.05	9.6627026	9.7143145
24	46019.98	51835.08	112636.03	9.6629464	9.7146237
25	46045.80	51871.99	112653.02	9.6631900	9.7149329
26	46071.62	51908.91	112670.03	9.6634335	9.7152419
27	46097.44	51945.84	112687.05	9.6636768	9.7155508
28	46123.25	51982.78	112704.08	9.6639199	9.7158595
29	46149.06	52019.74	112721.13	9.6641628	9.7161682
30	46174.86	52056.70	112738.19	9.6644056	9.7164767
31	46200.65	52093.68	112755.27	9.6646482	9.7167851
32	46226.46	52130.67	112772.37	9.6648906	9.7170933
33	46252.25	52167.67	112789.48	9.6651329	9.7174014
34	46278.04	52204.68	112806.60	9.6653749	9.7177094
35	46303.82	52241.70	112823.74	9.6656168	9.7180173
36	46329.60	52278.74	112840.89	9.6658586	9.7183251
37	46355.38	52315.78	112858.06	9.6661001	9.7186327
38	46381.15	52352.84	112875.24	9.6663415	9.7189402
39	46406.92	52389.90	112892.44	9.6665828	9.7192476
40	46432.69	52426.98	112909.65	9.6668238	9.7195549
41	46458.45	52464.07	112926.88	9.6670647	9.7198620
42	46484.21	52501.17	112944.12	9.6673054	9.7201690
43	46509.96	52538.29	112961.37	9.6675459	9.7204759
44	46535.72	52575.41	112978.64	9.6677863	9.7207827
45	46561.46	52612.54	112995.93	9.6680265	9.7210803
46	46587.19	52649.69	113013.23	9.6682665	9.7213958
47	46612.93	52686.85	113030.55	9.6685064	9.7217022
48	46638.66	52724.02	113047.88	9.6687461	9.7220085
49	46664.59	52761.20	113065.22	9.6689856	9.7223147
50	46690.12	52798.19	113082.58	9.6692250	9.7226207
51	46715.84	52835.59	113099.96	9.6694642	9.7229266
52	46741.56	52872.81	113117.35	8.6697032	9.7232324
53	46767.27	52910.04	113434.75	9.6699420	9.7235381
54	46792.98	52947.27	113152.17	9.6701807	9.7238436
55	46818.69	52984.52	113169.61	9.6704192	9.7241490
56	46844.39	53021.78	113187.06	9.6706576	9.7244543
57	46870.09	53059.06	1132[illegible]4.52	9.6708958	9.7247595
58	[illegible]	53096.34	113222.[illegible]	9.6711338	9.72[illegible]46
59	[illegible]	53133.64	1132[illegible].10	9.6713716	9.725[illegible]
60	[illegible]	531[illegible]	1132[illegible]	9.6716093	9.725[illegible]44

62. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	89100.65	196261.05	220268.93	9.9498809	10.2928341
59	89087.44	196120.00	220143.26	9.9498165	10.2925219
58	89074.22	195979.10	220017.75	9.9497521	10.2922098
57	89061.00	195838.37	219894.40	9.9496876	10.2918978
56	89047.77	195697.80	219767.21	9.9496230	10.2915859
55	89034.53	195557.39	219642.19	9.9495585	10.2912742
54	89021.28	195417.13	219517.33	9.9494938	10.2909626
53	89008.02	195277.04	219392.62	9.9494292	10.2906512
52	88994.76	195137.11	219268.08	9.9493645	10.2903399
51	88981.39	194997.33	219143.70	9.9492997	10.2900287
50	88968.21	194857.71	219019.47	9.9492349	10.2897176
49	88954.93	194718.26	218895.41	9.9491700	10.2894067
48	88941.64	194578.96	218771.50	9.9491051	10.2890959
47	88928.34	194439.81	218647.75	9.9490401	10.2887852
46	88915.03	194300.83	218524.17	9.9489752	10.2884746
45	88901.71	194162.00	218400.74	9.9489101	10.2881641
44	88888.39	194023.33	218277.46	9.9488450	10.2878539
43	88875.04	193884.81	218154.35	9.9487799	10.2875438
42	88861.72	193746.45	218031.39	9.9487147	10.2872338
41	88848.37	193608.25	217908.59	9.9486495	10.2869239
40	88835.02	193470.20	217785.94	9.9485842	10.2866141
39	88821.66	193332.31	217663.46	9.9485189	10.2863044
38	88808.29	193194.57	217541.12	9.9484535	10.2859949
37	88794.92	193056.98	217418.95	9.9483881	10.2856855
36	88781.54	192919.56	217296.93	9.9483227	10.2853763
35	88768.15	192782.28	217175.06	9.9482572	10.2850671
34	88754.75	192645.16	217053.35	9.9481916	10.2847581
33	88741.34	192508.19	216931.80	9.9481260	10.2844492
32	88727.93	192371.38	216810.40	9.9480604	10.2841405
31	88714.51	192234.72	216689.15	9.9479947	10.2838318
30	88701.08	192098.21	216568.06	9.9479289	10.2835233
29	88687.64	191961.86	216447.12	9.9478631	10.2832149
28	88674.20	191825.65	216326.33	9.9477973	20.2829067
27	88660.75	191689.60	216205.70	9.9477314	10.2825986
26	88647.29	191553.70	216085.22	9.9476655	10.2822906
25	88633.83	191417.95	215964.89	9.9475995	10.2819827
24	88620.36	191282.36	215844.71	9.9475335	10.2816749
23	88606.88	191146.92	215724.69	9.9474674	10.2813673
22	88593.39	191011.62	215604.82	9.9474013	10.2810598
21	88579.89	190876.47	215485.10	9.9473352	10.2807524
20	88565.39	190741.47	215365.53	9.9472689	10.2804451
19	88552.88	190606.63	215246.11	9.9472027	10.2801380
18	88539.36	190471.93	215126.84	9.9471364	10.2798318
17	88525.83	190337.38	215007.72	9.9470700	10.2795248
16	88512.30	190202.99	214888.75	9.9470036	10.2792173
15	88498.76	190068.74	214769.93	9.9469372	10.2789107
14	88485.21	189934.64	214651.27	9.9468707	10.2786042
13	88471.66	189800.68	214532.75	9.9468042	10.2782978
12	88458.10	189666.88	214414.37	9.9467376	10.2779915
11	88444.53	189533.22	214295.15	9.9466710	10.2776853
10	88430.95	189399.71	214178.08	9.9466043	10.2773795
9	88417.36	189266.34	214060.15	9.9465376	10.2770734
8	88403.77	189133.13	213942.38	9.9464708	10.2767676
7	88390.17	189000.06	213824.75	9.9464040	10.2764619
6	88376.56	188867.13	213707.26	9.9463371	10.2761564
5	88362.94	188734.36	213589.93	9.9462702	10.2758510
4	88349.32	188601.72	213472.74	9.9462032	10.2755457
3	88335.69	188469.24	213355.70	9.9461362	10.2752405
2	88322.05	188336.90	213238.8[illegible]	9.9450692	10.2749354
1	88308.41	188[illegible]8.70	219122.05	9.9460021	10.2746305
0	88294.7[illegible]	188[illegible]72.65	213005.45	9.9459349	10.2743256

4947.16

Grad. 28.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log Tang.
0	46947.16	53170.92	113257.01	9.6716093	9.7256744
1	46972.84	53208.26	113274.54	9.6718468	9.7259791
2	46998.52	53245.59	113292.07	9.6720841	9.7262837
3	47024.19	53282.93	113309.62	9.6723213	9.7265881
4	47049.86	53320.29	113327.19	9.6725583	9.7268925
5	47075.53	53357.65	113344.78	9.6727952	9.7271967
6	47101.19	53395.03	113362.38	9.6730319	9.7275008
7	47126.85	53432.42	113379.99	9.6732684	9.7278048
8	47152.50	53469.82	113397.62	9.6735047	9.7281087
9	47178.15	53507.23	113415.27	9.6737409	9.7284124
10	47203.80	53544.65	113432.93	9.6739769	9.7287161
11	47249.44	53582.08	113450.60	9.6742128	9.7290196
12	47255.08	53619.53	113468.29	9.6744485	9.7293230
13	47280.71	53656.90	113486.00	9.6746840	9.7296263
14	47306.34	53694.46	113503.72	9.6749194	9.7299295
15	47331.17	53731.94	113521.46	9.6751346	9.7302325
16	47357.59	53769.43	113539.21	9.6753896	9.7305354
17	47383.21	53806.94	113556.98	9.6756245	9.7308383
18	47409.81	53844.45	113574.76	9.6758592	9.7311410
19	47434.43	53881.98	113592.55	9.6760937	9.7314436
20	47460.04	53919.52	113610.36	9.6763281	9.7317460
21	47485.64	53957.07	113628.19	9.6765623	9.7320484
22	47511.24	53994.64	113646.03	9.6767963	9.7323506
23	47536.83	54032.21	113663.89	9.6770302	9.7326527
24	47562.42	54069.80	113681.76	9.6772640	9.7329547
25	47588.01	54107.40	113699.65	9.6774975	9.7332566
26	47613.59	54145.01	113717.55	9.6777309	9.7335584
27	47639.17	54182.63	113735.47	9.6779642	9.7338601
28	47664.74	54220.27	113753.45	9.6781972	9.7341616
29	47690.31	54257.91	113771.35	9.6784301	9.7344631
30	47715.88	54295.57	113789.32	9.6786629	9.7347644
31	47741.44	54333.24	113807.30	9.6788955	9.7350656
32	47767.00	54370.92	113825.29	9.6791279	9.7353667
33	47792.55	54408.62	113843.30	9.6793602	9.7356677
34	47818.10	54446.32	113861.33	9.6795923	9.7359685
35	47843.64	54484.04	113879.37	9.6798243	9.7062693
36	47869.18	54521.77	113897.43	9.6800560	9.7365699
37	47894.72	54559.51	113915.50	9.6802877	9.7368705
38	44920.26	54597.26	113933.59	9.6805191	9.7371790
39	44945.79	54635.03	113951.69	9.6807504	9.7374712
40	47971.31	54672.81	113969.81	9.6809816	9.7377714
41	47996.83	54710.60	113987.94	9.6812126	9.7380715
42	48022.35	54748.40	114006.09	9.6814434	9.7383714
43	48047.86	54786.21	114024.25	9.6816741	9.7386713
44	48073.37	54824.04	114042.43	9.6819046	9.7389710
45	48098.88	54861.88	114060.62	9.6821349	9.7392907
46	48124.38	54899.73	114078.83	9.6823651	9.7395701
47	48149.88	54937.59	114097.06	9.6825952	9.7398696
48	48175.37	54975.46	114115.30	9.6828250	9.7401689
49	48200.86	55013.35	114133.56	9.6830548	9.7404681
50	48226.34	55051.25	114151.83	9.6832843	9.7407672
51	48251.82	55089.16	114170.12	9.6835137	9.7410663
52	48277.30	55127.08	114188.42	9.6837430	9.7413650
53	48302.77	55165.02	114206.74	9.6839720	9.7416638
54	48328.24	55202.97	114225.07	9.6842010	9.7419624
55	48353.70	55240.93	114243.42	9.6844297	9.7422609
56	48379.16	55278.90	114261.79	9.6844585	9.7425594
57	48404.62	55316.88	114280.17	9.6848868	9.7428577
58	48430.07	55354.88	114298.57	9.6851151	9.7431559
59	48455.52	55392.88	114316.98	9.6853432	9.7434540
60	48480.96	55430.90	114330.47	9.6855712	9.7437520

61. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	88294.76	188072.65	213005.45	9.9459346	10.27432.56
59	88281.10	187940.74	212888.69	9.9458677	10.2740209
58	88267.43	187808.98	212772.67	9.9458005	10.2737163
57	88253.75	187677.36	212656.51	9.9457332	10.2734119
56	88240.09	187545.88	212540.48	9.9456659	10.2731075
55	88226.38	187414.55	212424.60	9.9455985	10.2728033
54	88212.68	187283.36	212308.87	8.9455310	10.2724992
53	88198.98	187152.31	212193.28	9.9454636	10.2721952
52	88185.27	187021.41	212077.83	9.9453960	10.2718913
51	88171.55	186890.64	211962.53	9.9453285	10.2715876
50	88157.82	186760.03	211847.37	9.945260	10.2712839
49	88144.09	186629.55	211732.35	9.945193	10.2709804
48	88130.35	186499.21	211617.48	9.9451255	10.2706770
47	88116.60	186369.02	211502.74	9.9450577	10.2703737
46	88102.84	186238.95	211388.1	9.9449899	10.2700705
45	88089.07	186109.05	211273.71	9.9449220	10.2697675
44	88075.30	185979.28	211159.40	9.9448541	10.2694646
43	88061.52	185849.65	211045.23	9.9447862	10.2691617
42	88047.73	185720.15	210931.21	9.9447182	10.2688590
41	88033.94	185590.80	210817.33	9.9446501	10.2685564
40	88020.14	185461.59	210703.59	9.9445821	10.2682540
39	88006.33	185332.52	210589.98	9.9445139	10.2679516
38	87992.51	185203.58	210476.52	9.9444457	10.2676494
37	87978.69	185074.79	210363.2	9.9443775	10.2673473
36	87964.86	184946.13	210250.02	9.9443092	10.2670453
35	87951.02	184817.61	210136.98	9.9442409	10.2667434
34	87937.17	184689.23	210024.08	9.9441725	10.2664416
33	87923.32	184560.99	209911.31	9.9441041	10.2661399
32	87909.46	184432.89	209798.69	9.9440356	10.2658384
31	87895.56	184304.91	209686.20	9.9439671	10.2655369
30	87881.71	184177.09	209573.85	9.9438985	10.2652356
29	87867.83	184049.39	209461.64	9.9438299	10.2649344
28	87853.94	183921.84	209349.57	9.9437612	10.2646333
27	87840.04	183794.42	209237.64	9.9436925	10.2643323
26	87826.13	183667.13	209125.84	9.9436238	10.2640315
25	87812.22	183539.99	209014.18	9.9435549	10.2637307
24	87798.30	183412.97	208902.65	9.9434861	10.2634301
23	87784.37	183286.10	208791.27	9.9434172	10.2631295
22	87770.43	183159.36	208680.02	9.9433482	10.2628291
21	87756.49	183032.75	208568.90	9.9432792	10.2625288
20	87742.54	182906.28	208457.92	9.9432102	10.2622286
19	87728.58	182779.94	208347.08	9.9431411	10.2619285
18	87714.61	182653.74	208236.37	9.9430720	10.2616286
17	87700.64	182527.67	208125.80	9.9430028	10.2613287
16	87686.66	182401.73	208015.36	9.9429335	10.2610296
15	87672.67	182275.93	207905.06	9.9428643	10.2607293
14	87658.68	182150.26	207794.89	9.9427949	10.2604298
13	87644.68	182024.73	207684.85	9.9427255	10.2601304
12	87630.67	181899.32	207574.96	9.9426561	10.2598311
11	87616.65	181774.05	207465.19	9.9425866	10.2595316
10	87602.62	181648.92	207355.56	9.9425171	10.2592328
9	87588.59	181523.91	207246.06	9.9424476	10.2589338
8	87574.55	181399.04	207136.70	9.9423779	10.2586350
7	87560.50	181274.30	207027.46	9.9423083	10.2583362
6	87546.45	181149.69	206918.36	9.9422386	10.2580376
5	87532.39	181025.21	206809.40	9.9421688	10.2577391
4	87518.32	180900.86	206700.56	9.9420990	10.2574406
3	87504.24	180776.64	206591.86	9.9420281	10.2571423
2	87490.16	180652.56	206483.28	9.9415192	10.2568441
1	87476.07	180528.60	206374.84	9.9418891	10.2565460
0	87461.97	180404.78	206266.53	9.9418.93	10.2562480

48480 96

Grad.29.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	48480 96	55430.90	114335.41	9.6855712	9.7437520
1	48506.40	55461.94	114353.85	9.6857991	9.7440499
2	48531.84	55506.98	114372.31	9.6860267	9.7443476
3	48557.27	55545.04	114390.78	9.6862542	9.7446453
4	48582.70	55583 11	114409.27	9.6864816	9.7449428
5	48608.12	55621.19	114427.78	9.6867088	9.7452403
6	48633.54	53659.29	114446.30	9.6869359	9.7455376
7	48658.95	55697.39	114464.84	9.6871628	9.7458349
8	48684.36	55735.51	114483.39	9.6873895	9.7461320
9	48709.77	55773.64	114501.96	9.6876161	9.7464290
10	48735.17	55811.79	114520.55	9.6878425	9.7467259
11	48760.57	55849.94	114539.15	9.6880688	9.7470227
12	48785.97	55888.11	114557.76	9.6882949	9.7473194
13	48811.36	55926.29	114576.39	9.6885209	9.7476160
14	48835.74	55964.48	114595 04	9.6887467	9.7479125
15	48862.12	56002.69	114613.70	9.6889723	9.7482089
16	48887.50	56040.91	114632.38	9.6891978	9.7485052
17	48912.87	56079.14	114651.08	9.6894232	9.7488015
18	48911.14	56117.38	114669.79	9.6896484	9.7490974
19	48963.61	56155.64	114688.52	9.6898734	9.7193934
20	48988.97	56193 91	114707.26	9.6900983	9.7496892
21	49014.33	56232.19	114726.02	9.6903231	9.7499850
22	49039 68	56270.48	114744.79	9.6905476	9.7502806
23	49065 03	56308.79	114763.58	9.6907721	9.7505762
24	49090.37	56347.10	114782.39	9.6909964	9.7508716
25	49115.71	56385.43	114801.21	9.6912205	9.7511669
26	49141.05	56423.78	114820.05	9.6914445	9.7514622
27	49166.38	56462.13	114838.90	9.6916683	9.7517573
28	49191.71	56500.50	114857.77	9.6918919	9.7520523
29	49217.04	56538.88	114876.65	9.6921155	9.7523472
30	49242.36	56577.28	114895.55	9.6923388	9.7526420
31	49267.67	56615.68	114914.47	9.6925620	9.7529368
32	49292.98	56654 10	114933 40	9.6927851	9.7532314
33	49318.29	56692.53	114952.35	9.6930080	9.7535259
34	49343.59	56730 98	114971.32	9.6932308	9.7538203
35	49368.89	56769.44	114990 30	9.6934534	9.7541146
36	49394.19	56807.91	115009.30	9.6936758	9.7544088
37	49419.48	56846 39	115028.31	9.6938981	9.7547029
38	49444.77	56884.88	115047.34	9.6941203	9.7549969
39	49470.05	56923.29	115066.38	9.6943423	9.7551908
40	49495.33	56961.91	115085.44	9.6945642	9.7555846
41	49520.60	57000.45	115104.52	9.6947859	9.7558783
42	49545.87	57038.99	115123 61	9.6950074	9.7561718
43	49571.13	57077.55	115142.72	9.6952288	9.7564653
44	49596.39	57116.12	115161.85	9.6954501	9.7567587
45	49621.65	57154.71	115180.99	9.6956712	9.7570520
46	49646.90	57193.31	115200.15	9.6958922	9.7573452
47	49672.15	57231.92	115219.32	9.6961130	9.7576383
48	49697.40	57270.54	115238.51	9.6963336	9.7579313
49	49622.64	57309.18	115257.72	9.6965541	9.7582241
50	49747.87	57347.83	115276.94	9.6967745	9.7585170
51	49773.10	57386.47	115296.18	9.6969947	9.7588096
52	49798.33	57423.16	115315.43	9.6972148	9.7591022
53	49823.55	57463.85	115334.70	9.6974347	9.7593947
54	49848.77	57502.55	115353.99	8.6976545	9.7596871
55	49873.99	57541.26	115373.29	9.6978741	9.7599794
56	49899.20	57579.99	115392.61	9.6980936	9.7602716
57	49924.41	57618.73	115411.95	9.6983129	9.7605637
58	49949.61	57657.47	115431.30	9.6985321	9.7608557
59	49974.81	57694.25	115450.67	9.6987511	9.7611476
60	[illegible]	57735.03	115470.05	9.6989700	9.7614394

60. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
60	87461.97	180404.78	205266.53	9.9418193	10.2561480
59	87447.86	180281.08	266158.36	9.9417491	10.2559501
58	87433.75	180157.51	206050.31	9.9416791	10.2556524
57	87419.63	180034.08	205942.39	9.9416090	10.2553547
56	87405.50	179910.77	205834.60	9.9415388	10.2550572
55	87391.36	179787.59	205726.95	9.9414685	10.2547597
54	87377.22	179664 54	205619.42	9.9413982	10.2544624
53	87363.07	179541.62	205512.03	9.9413279	10.2541651
52	87348.91	179418.83	205404.76	9.9412575	10.2538680
51	87334.75	179296.16	205297.62	9.9411871	10.2535710
50	87320.58	179173.61	205190.61	9.9411166	10.2532741
49	87306 40	179051.21	205083.73	9.9410461	10.2529773
48	87292.21	178928.93	204976.98	9.9409755	10.2526806
47	87278.01	178806.78	204870.36	9.9409048	10.2523840
45	87263.81	178684.75	204763.86	9.9408342	10.2520875
45	87249.60	178562.85	204657.50	9.9407634	10.2517911
44	87235.38	178441.07	204551.26	9.9406927	10.2514948
43	87221 16	178319 43	204445.15	9.9406219	10.2511987
42	87206.93	178197.90	204339.16	9.9405510	10.2509026
41	87192.69	178076.51	204233.30	9.9404801	10.2506066
40	87178.44	177955.24	204127.57	9.9404091	10.2503108
39	87164.19	177834.09	204021 97	9.9403381	10.2500150
38	87149 93	177713.07	203916.49	9.9402670	10.2497194
37	87135.66	177592.18	203811.14	9.9401959	10.2494238
36	87121.38	177471.41	203705.92	9.9401248	10.2491284
35	87107.14	177350.76	203600.82	9.9400545	10.2488331
34	87092.81	177240.24	203495.8[illegible]	9.9399823	10.2485378
33	87078.51	177109.85	203391.00	9.9399110	10.2482427
32	87064.20	176989.58	203186.27	9.9398396	10.2479477
31	87049.89	176869.43	203181.68	9.9397682	10.2476528
30	87035.57	176749.40	203077.2[illegible]	9.9396968	10.2473580
29	87021.24	176629.56	202972.86	9.9396253	10.2470632
28	87006.92	176509.72	202868.63	9.9395537	10.2467686
27	86991.56	176390.07	202764.53	9.9394821	10.2464741
26	86978.21	176270.53	202660.56	0.9394105	10.2461797
25	86963.85	176251.12	202556.70	9.9393388	10.2458854
24	86949.49	176031.85	202452.97	9.9392671	10.2455912
23	86935.12	175912.67	202349.37	9.9391953	10.2452971
22	86926.74	175793.62	202245.89	9.9391234	10.2450038
21	86906.35	175674.70	202142.53	9.9390515	10.2447092
20	86891.96	175555.90	202039.29	9.9389796	10.2444154
19	85877.56	175437.22	201936.17	9.9389076	10.2441217
18	86863.15	175318.66	201833.18	9.9388356	10.2438282
17	86848.73	175200.23	201730.31	9.9387635	10.2435347
16	86834.31	175081.91	201627.56	9.9386914	10.2439413
15	86819.88	174963.71	201524.94	9.9386192	10.2429480
14	86805.44	174845.64	201422.43	9.9385470	10.2426548
13	86791 00	174727.68	201320.05	9.9384747	10.2423617
12	86776.55	174609.84	201217.79	9.9384024	10.2420687
11	86761.09	174492.13	201115.64	9.9383300	10.2417758
10	86747.62	174374 53	201013.62	9.9382576	10.2414830
9	86733.14	174257.05	200911.72	9.9381851	10.2411904
8	86718.66	174139.69	200809.94	9.9381126	10.24089[illegible]8
7	86704.17	174022.45	200708.28	9.9380400	10.2406053
6	86689.67	173905.33	200606.74	9.9379674	10.2403129
5	86675.17	173788.33	200505.32	9.9378947	10.2400206
4	86660.66	173671.44	200404.02	9.9378220	10.2397284
3	86646.14	173554.68	200302.83	9.9377492	10.2394363
2	86631.61	173438.03	200101.77	0.9376764	10.2391443
1	86617.08	173321 44	200100.83	9.9376035	10.2388524
0	86602.54	173205.08	200000.00	9.9375306	10.2385606

50000.00

Grad. 30.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	50000.00	57735.03	115470.05	9.6989700	9.7614394
1	50025.19	57773.82	115489.45	9.6991887	9.7617311
2	50050.38	57812.62	115508.87	9.6994073	9.7620224
3	50075.56	57851.44	115528.30	9.6996258	9.7623142
4	50100.74	57890.27	115547.75	9.6998441	9.7626056
5	50125.91	57929.11	115567.22	9.7000622	9.7628969
6	50151.08	57967.97	115586.70	9.7002802	9.7631881
7	50176.24	58006.84	115606.20	9.7004981	9.7634792
8	50201.40	58045.73	115625.72	9.7007158	9.7637702
9	50226.55	58084.62	115645.25	9.7009334	9.7640612
10	50251.70	58123.53	115664.80	9.7011508	9.7643520
11	50276.85	58162.45	115684.36	9.7013681	9.7646427
12	50301.99	58201.39	115703.94	9.7015852	9.7649334
13	50327.13	58240.34	115723.54	9.7018022	9.7652239
14	50352.27	58279.30	115743.15	9.7020190	9.7655143
15	50377.40	58318.28	115762.78	9.7022357	9.7658047
16	50402.53	58357.27	115782.43	9.7024523	9.7660949
17	50427.65	58396.27	115802.09	9.7026687	9.7663851
18	50452.77	58435.28	115821.77	9.7028849	9.7666751
19	50477.88	58474.31	115841.47	9.7031011	9.7669651
20	50502.99	58513.35	115861.18	9.7033170	9.7672550
21	50528.09	58552.41	115880.91	9.7035329	9.7675448
22	50553.19	58591.48	115900.65	9.7037486	9.7678344
23	50578.28	58630.56	115920.41	9.7039641	9.7681240
24	50603.37	58669.65	115940.19	9.7041795	9.7684135
25	50628.46	58708.76	115959.99	9.7043947	9.7687029
26	50653.55	58747.88	115979.80	9.7046099	9.7689922
27	50678.63	58787.01	115999.63	9.7048248	9.7692814
28	50703.70	58826.17	116019.47	9.7050397	9.7695705
29	50728.77	58865.33	116039.33	9.7052544	9.7698596
30	50753.84	58904.50	116059.21	9.7054689	9.7701485
31	50778.90	58943.69	116079.11	9.7056833	9.7704373
32	50803.96	58982.89	116099.02	9.7058975	9.7707261
33	50829.01	59022.11	116118.95	9.7061116	9.7710147
34	50854.06	59061.34	116138.89	9.7063256	9.7713033
35	50879.10	59100.58	116158.85	9.7065394	9.7715917
36	50904.14	59139.83	116178.83	9.7067531	9.7718801
37	50929.18	59179.10	116198.82	9.7069667	9.7721684
38	50954.21	59218.39	116218.83	9.7071801	9.7724566
39	50979.24	59257.68	116238.86	9.7073933	9.7727447
40	51004.26	59296.99	116258.91	9.7076064	9.7730327
41	51029.28	59336.32	116278.97	9.7078194	9.7733206
42	51054.29	59375.66	116299.05	9.7080323	9.7736084
43	51079.30	59415.01	116319.14	9.7082450	9.7738961
44	51104.31	59454.37	116339.25	9.7084575	9.7741838
45	51129.31	59493.75	116359.38	9.7086699	9.7744713
46	51154.31	59533.14	116379.53	9.7088822	9.7747588
47	51179.30	59572.54	116399.69	9.7090943	9.7750462
48	51204.29	59611.96	116419.87	9.7093063	9.7753334
49	51229.27	59651.40	116440.07	9.7095182	9.7756206
50	51254.25	59690.84	116460.28	9.7097299	9.7759077
51	51279.22	59730.30	116480.51	9.7099415	9.7761947
52	51304.19	59769.78	116500.76	9.7101529	9.7764816
53	51329.16	59809.27	116521.02	9.7103642	9.7767685
54	51354.12	59848.77	116541.30	9.7105753	9.7770552
55	51379.08	59888.28	116561.60	9.7107863	9.7773418
56	51404.04	59927.81	116581.91	9.7109972	9.7776284
57	51428.99	59967.35	116602.24	9.7112080	9.7779149
58	51453.93	60006.91	116622.59	9.7114186	9.7782012
59	51478.87	60046.48	116642.96	9.7116290	9.7784875
60	51503.81	60086.06	116663.34	9.7118393	9.7787737

59. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	86602.54	173205.08	200000.00	9.9375306	10.2385606
59	86587.99	173088.78	199899.29	9.9374577	10.2382689
58	86573.43	172972.60	199798.70	9.9373847	10.2379773
57	86558.87	172856.54	199698.23	9.9373116	10.2376858
56	86544.30	172740.60	199597.88	9.9372385	10.2373944
55	86529.72	172624.77	199497.64	9.9371653	10.2371031
54	86515.14	172509.05	199397.53	9.9370921	10.2368119
53	86500.55	172393.45	199297.52	9.9370189	10.2365208
52	86485.95	172277.97	199197.64	9.9369456	10.2362298
51	86471.34	172162.61	199097.87	9.9368722	10.2359388
50	86456.73	172047.36	198998.22	9.9367988	10.2356480
49	86442.11	171932.22	198898.69	9.9367254	10.2353573
48	86427.48	171817.20	198799.27	9.9366519	10.2350666
47	86412.84	171702.30	198699.97	9.9365783	10.2347761
46	86398.20	171587.51	198600.80	9.9365027	10.2344857
45	86383.55	171472.83	198501.72	9.9364311	10.2341953
44	86368.89	171358.27	198402.76	9.9363574	10.2339051
43	86354.23	171243.82	198303.93	9.9362836	10.2336149
42	86339.56	171129.49	198205.20	9.9362098	10.2333249
41	86324.88	171015.27	198106.59	9.9361360	10.2330349
40	86310.19	170901.16	198008.10	9.9360621	10.2327450
39	86295.49	170787.17	197909.72	9.9359881	10.2324552
38	86280.75	170673.29	197811.46	9.9359141	10.2321656
37	86266.08	170559.53	197713.31	9.9358400	10.2318760
36	86251.36	170445.87	197615.27	9.9357660	10.2315865
35	86236.64	170332.33	197517.35	9.9356918	10.2312971
34	86221.91	170218.90	197419.54	9.9356177	10.2310078
33	86207.17	170105.59	197321.85	9.9355434	10.2307186
32	86192.43	169992.38	197224.26	9.9354691	10.2304295
31	86177.68	169879.29	197126.80	9.9353948	10.2301404
30	86162.92	169766.31	197029.44	9.9353204	10.2298515
29	86148.15	169653.44	196932.20	9.9352459	10.2295627
28	86133.37	169540.69	196835.07	9.9351715	10.2292739
27	86118.59	169428.04	196738.05	9.9350969	10.2289853
26	86103.80	169315.50	196641.14	9.9350223	10.2286967
25	86089.00	169203.08	196544.34	9.9349477	10.2284083
24	86074.20	169090.77	196447.67	9.9348730	10.2281199
23	86059.39	168978.56	196351.10	9.9347983	10.2278316
22	86044.57	168866.47	196254.64	9.9347235	10.2275434
21	86029.74	168754.49	196158.29	9.9346486	10.2272553
20	86014.91	168642.61	196062.06	9.9345738	10.2269673
19	86000.07	168530.85	195965.93	9.9344988	10.2266794
18	85985.22	168419.19	195869.92	9.9344238	10.2263916
17	85970.37	168307.65	195774.01	9.9343488	10.2261039
16	85955.51	168196.21	195678.22	9.9342737	10.2258162
15	85940.64	168084.89	195582.54	9.9341986	10.2255287
14	85925.76	167973.67	195486.97	9.9341234	10.2252412
13	85910.88	167862.56	195391.50	9.9340482	10.2249538
12	85895.99	167751.59	195296.15	9.9339729	10.2246666
11	85881.09	167640.67	195200.91	9.9338976	10.2243794
10	85866.18	167529.88	195105.77	9.9338222	10.2240923
9	85851.27	167419.21	195010.79	9.9337467	10.2238053
8	85836.35	167308.64	194915.83	9.9336713	10.2235184
7	85821.42	167198.18	194821.02	9.9335957	10.2232315
6	85806.49	167087.82	194726.32	9.9335201	10.2229448
5	85791.55	166977.58	194631.73	9.9334445	10.2226582
4	85776.60	166867.44	194537.25	9.9333688	10.2223716
3	85761.64	166757.41	194442.88	9.9332931	10.2220851
2	85746.68	166647.48	194348.61	9.9332173	10.2217988
1	85731.71	166537.66	194254.45	9.9331415	10.2215125
0	85716.73	166427.95	194160.40	9.9330656	10.2212263

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	51503.81	60086.06	116663.34	9.7118393	9.7787737	60	85716.73	166427.05	194160.40	9.9330656	10.2212263
1	51528.74	60125.66	116683.74	9.7120495	9.7790599	59	85701.74	166[illegible]	[illegible]6.46	9.9329897	10.2209401
2	51553.67	60165.27	116704.15	9.7122596	9.7793419	58	85686.75	166[illegible]8.84	193972.62	9.9329137	10.2206541
3	51578.59	60204.90	116724.59	9.7124795	9.7796318	57	85671.75	166099.45	193878.89	9.9328376	10.2203682
4	51603.51	60244.54	116745.04	9.7126792	9.7799177	56	85656.74	165990.16	193785.27	9.9327616	10.2200823
5	51628.42	60284.19	116765.51	9.7128889	9.7802034	55	85641.73	165880.97	193691.76	9.9326854	10.2197966
6	51653.33	60323.86	116785.99	9.7130983	9.7804891	54	85626.71	165771.89	193598.35	9.9326092	10.2195109
7	51678.24	60363.54	116806.49	9.7133077	9.7807747	53	85611.68	165662.92	193505.05	9.9325330	10.2192253
8	51703.14	60403.23	116827.01	9.7135169	9.7810602	52	85596.64	165554.05	193411.85	9.9324567	10.2189398
9	51728.04	60442.94	116847.55	9.7137269	9.7813456	51	85581.60	165445.29	193318.76	9.9323804	10.2186544
10	51752.93	60482.66	116868.10	9.7139349	9.7816309	50	85566.55	165336.63	193225.78	9.9323040	10.2183691
11	51777.82	60522.40	116888.67	9.7141437	9.7819162	49	85551.49	165228.03	193132.92	9.9322276	10.2180838
12	51802.70	60562.15	116909.26	9.7143524	9.7822015	48	85536.42	165119.63	193040.13	9.9321511	10.2177987
13	51827.58	60601.92	116929.86	9.7145609	9.7824864	47	85521.35	165011.28	192947.46	9.9320746	10.2175136
14	51852.46	60641.70	116950.48	9.7147693	9.7827713	46	85506.27	164903.04	192854.90	9.9319980	10.2172287
15	51877.33	60681.49	116971.12	9.7149776	9.7830561	45	85491.18	164794.9[illegible]	192762.44	9.9319213	10.2169438
16	51902.19	60721.30	116991.78	9.7151857	9.7833410	44	85476.09	164686.86	192670.09	9.9318447	10.2166590
17	51927.05	60761.12	117012.45	9.7153937	9.7836258	43	85460.99	164578.93	192577.84	9.9317679	10.2163742
18	51951.91	60800.95	117033.14	9.7156015	9.7839104	42	85445.88	164471.11	192485.70	9.9316911	10.2160895
19	51976.76	608[illegible]	117053.85	9.7158092	9.7841949	41	85430.76	164363.38	192393.66	9.9316143	10.2158051
20	52001.61	[illegible]	117074.57	9.7160168	9.7844794	40	85415.64	164255.76	192301.72	9.9315374	10.2155206
21	52026.40	[illegible]	117095.31	9.7162243	9.7847638	39	85400.51	164148.24	1922[illegible]9.9[illegible]	9.9314605	10.2152362
22	52051.3[illegible]	[illegible]960.43	117116.27	9.7164316	9.7850481	38	85385.37	164040.82	192118.17	9.9313835	10.2149519
23	52076.1[illegible]	610[illegible]	117136.8[illegible]	9.7166387	9.7853323	37	85370.23	163931.51	192026.55	9.9313065	10.2146677
24	52100.06	61040.2[illegible]	117157.64	9.7168458	9.7856164	36	85355.08	163826.30	191935.03	9.9312254	10.2143836
25	52125.79	61080.19	117178.45	9.7170526	9.7859004	35	85339.92	163719.19	191843.62	9.9311522	10.2140996
26	52150.61	61120.14	117199.28	9.7172594	9.7861844	34	85324.75	163612.18	191752.30	9.9310750	10.2138156
27	52175.43	61162.11	117225.13	9.7174660	9.7864682	33	85309.58	163505.28	191661.09	9.9309978	10.2135318
28	52200.24	612[illegible]08	117240.99	9.7176725	9.7867520	32	85294.40	163398.47	191569.99	9.9309205	10.2132480
29	52225.03	61240.07	117261.8[illegible]	9.7178789	9.7870357	31	85279.21	163291.77	191478.99	9.9308432	10.2129643
30	52249.86	61280.08	117282.77	9.7180851	9.7873193	30	85264.02	163185.17	191388.09	9.9307658	10.2126807
31	52274.66	61320.10	117303.69	9.7182912	9.7876028	29	85248.81	163078.67	191297.29	9.9306883	10.2123972
32	52299.45	61360.13	117324.62	9.7184971	9.7878863	28	85233.60	162972.27	191206.59	9.9306109	10.2121137
33	52324.24	61400.18	117345.57	9.7187030	9.7881696	27	85218.38	162865.97	191116.00	9.9305333	10.2118304
34	52349.03	61440.24	117366.54	9.7189086	9.7884529	26	85203.16	162759.77	191025.51	9.9304557	10.2115471
35	52373.81	61480.32	117387.52	9.7191142	9.7887361	25	85187.93	162653.68	190935.12	9.9303781	10.2112639
36	52398.59	61520.41	117408.52	9.7193196	9.7890192	24	85172.69	162547.68	190844.83	9.9303004	10.2109808
37	52423.36	61560.52	117429.54	9.7195249	9.7893023	23	85157.44	162441.78	190754.64	9.9302226	10.2106977
38	52448.13	61600.64	117450.58	9.7197300	9.7895852	22	85142.19	162335.99	190664.56	9.9301448	10.2104148
39	52472.90	61640.77	117471.64	9.7199350	9.7898681	21	85126.93	162230.29	190574.55	9.9300670	10.2101319
40	52497.66	61680.92	117492.71	9.7201399	9.7901508	20	85111.66	162124.69	190484.69	9.9299891	10.2098492
41	52522.41	61721.08	117513.80	9.7203447	9.7904335	19	85096.39	162019.20	190394.91	9.9299112	10.2095665
42	52547.16	61761.26	117534.91	9.7205493	9.7907161	18	85081.11	161913.80	190305.22	9.9298332	10.2092839
43	52571.91	61801.45	117556.03	9.7207538	9.7909987	17	85025.82	162808.50	190215.64	9.9297551	10.2090013
44	52596.65	61841.65	117577.13	9.7209581	9.7912811	16	85050.52	161703.30	190126.16	9.9296770	10.2087189
45	52621.39	61881.88	117598.33	9.7211623	9.7915635	15	85035.22	161598.20	190036.78	9.9295989	10.2084365
46	52646.12	61922.11	117619.51	9.7213664	9.7918458	14	85019.91	161493.20	189947.50	9.9295207	10.2081542
47	52670.85	61962.36	117640.70	9.7215704	9.7921280	13	85004.59	161388.29	189858.32	9.9294424	10.2078720
48	52695.58	62003.63	117661.41	9.7217742	9.7926101	12	84989.27	161283.49	189769.24	9.9293641	10.2075899
49	52720.30	62042.91	117683.24	9.7219779	9.7926521	11	84973.94	161178.78	189680.16	9.9292857	10.2073079
50	52745.02	62083.20	117704.59	9.7221814	9.7929741	10	84958.60	161074.17	189591.38	9.9292073	10.2070259
51	52769.73	62123.51	117725.66	9.7223848	9.7932560	9	84943.25	160969.36	189502.59	9.9291289	10.2067440
52	52794.42	62163.83	117746.94	9.7225881	9.7935378	8	84927.90	1608[illegible]	189413.91	9.9290504	10.2064622
53	52819.14	62204.17	117768.24	9.7227913	9.7938195	7	84912.54	160760.94	189325.32	9.9289718	10.2061805
54	52843.84	62244.52	117789.56	9.7229943	9.7941011	6	84897.17	160656.72	189236.84	9.9288932	10.2058989
55	52868.53	62284.88	117810.90	9.7231972	9.7943827	5	84881.79	160552.6[illegible]	189148.45	9.9288145	10.2056173
56	52893.21	62325.26	117832.25	9.7234000	9.7946641	4	84866.41	160448.[illegible]	189060.16	9.9287358	10.2053359
57	52917.90	6236[illegible]	117853.62	9.7236026	9.7949455	3	84851.02	1603[illegible]	188971.97	9.9286571	10.2050545
58	5294[illegible]	[illegible]	117875.01	9.7238051	9.7952268	2	84835.62	160240.82	188843.88	9.9285783	10.2047732
59	5296[illegible]	[illegible]	117896.42	9.7240075	9.795508[illegible]	1	84820.22	16013[illegible]	188795.89	9.9284994	10.2044919
60	52991.9[illegible]	624[illegible].44	117917.84	9.7242097	9.7957892	0	84804.81	160933.45	188707.99	9.9284205	10.2042108

52991.93

Grad. 32.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	52991.93	62486.94	117917.84	9.7242097	9.7957892
1	53016.59	62527.39	117939.26	9.7244118	9.7960703
2	53041.25	62567.86	117960.74	9.7246138	9.7963513
3	53065.91	62608.34	117982.22	9.7248156	9.7966322
4	53090.56	62648.84	118003.72	9.7250174	9.7969130
5	53115.21	62689.35	118025.23	9.7252189	9.7971938
6	53139.86	62729.88	118046.76	9.7254204	9.7974745
7	53164.50	62770.42	118068.31	9.7256217	9.7977551
8	53189.13	62810.98	118089.88	9.7258229	9.7980356
9	53213.76	62851.56	118111.47	9.7260240	9.7983160
10	53238.39	62892.15	118133.07	9.7262249	9.7985964
11	53263.01	62952.75	118154.69	9.7264257	9.7988767
12	53287.63	62973.36	118176.33	9.7266264	9.7991569
13	53312.24	63013.99	118197.99	9.7268269	9.7994370
14	53336.85	63034.64	118219.66	9.7270273	9.7997170
15	53361.45	63095.50	118241.35	9.7272276	9.7999970
16	53386.05	63135.98	118263.06	9.7274278	9.8002769
17	53410.64	63176.67	118284.79	9.7276278	9.8005567
18	53435.23	63217.38	118306.54	9.7278277	9.8008365
19	53459.82	63258.10	118328.30	9.7280275	9.8011161
20	53484.40	63298.83	118350.08	9.7282271	9.8013957
21	53508.98	63339.58	118371.88	9.7284267	9.8016752
22	53533.55	63380.35	118393.70	9.728626	9.8019546
23	53558.12	63421.13	118415.54	9.7288253	9.8022340
24	53582.68	63461.93	118437.40	9.7290244	9.8025133
25	53607.24	63502.74	118459.27	9.7292234	9.8027925
26	53631.79	63543.57	118481.16	9.7294223	9.8030716
27	53656.34	63584.41	118503.07	9.7296211	9.8033506
28	53680.88	63625.27	118525.00	9.7298197	9.8036296
29	53705.42	63666.14	118546.94	9.7300182	9.8039085
30	53729.96	63707.03	118568.91	9.7302165	9.8041873
31	53754.49	63747.93	118590.89	9.7304148	9.8044661
32	53775.01	63788.85	118612.89	9.7306129	9.8047447
33	53803.54	63829.74	118634.91	9.7308109	9.8050233
34	53828.06	63870.73	118656.95	9.7310087	9.8053019
35	53852.57	63911.69	118679.00	9.7312064	9.8055803
36	53877.08	63952.67	118701.07	9.7314040	9.8058587
37	53901.58	63993.66	118723.16	9.7316015	9.8061370
38	53926.08	64034.67	118745.27	9.7317989	9.8064152
39	53950.58	64075.69	118767.40	9.7319961	9.8066933
40	53975.07	64116.73	118789.55	9.7321932	9.8069714
41	53999.55	64157.79	118811.71	9.7323902	9.8072494
42	54024.03	64198.86	118833.89	9.7325870	9.8075273
43	54048.51	64239.95	118856.09	9.7327837	9.8078052
44	54072.98	64281.05	118878.31	9.7329803	9.8080829
45	54097.45	64322.16	118900.55	9.7331768	9.8083606
46	54121.91	64363.29	118922.81	9.7333731	9.8086383
47	54146.37	64404.44	118945.08	9.7335693	9.8089158
48	54170.82	64445.60	118967.37	9.7337654	9.8091933
49	54195.27	64486.78	118989.68	9.7339614	9.8094707
50	54219.71	64527.97	119012.01	9.7341572	9.8097480
51	54244.15	64569.18	119034.36	9.7343529	9.8100253
52	54268.59	64610.41	119056.73	9.7345485	9.8103025
53	54293.02	64651.65	119079.12	9.7347440	9.8105796
54	54317.44	64692.90	119101.52	9.7349393	9.8108566
55	54341.86	64734.17	119123.94	9.7351345	9.8111336
56	54366.28	64775.46	119146.38	9.7353296	9.8114105
57	54390.69	64816.76	119168.84	9.7355246	9.8116873
58	54415.10	64858.08	119191.32	9.7357195	9.8119641
59	54439.50	64899.47	119213.81	9.7359142	9.8122408
60	54463.90	64940.76	119236.33	9.7361088	9.8125174

57. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	84804.81	160033.45	188707.99	9.9284205	10.2041108
59	84789.39	159929.91	188610.19	9.9283415	10.2039297
58	84773.95	159826.47	188513.49	9.9282625	10.2036483
57	84758.53	159723.12	188444.89	9.9281834	10.2033673
56	84743.09	159619.87	188357.38	9.9281043	10.2030870
55	84727.64	159516.72	188209.97	9.9280251	10.2028062
54	84712.19	159413.66	188182.66	9.9279459	10.2025255
53	84696.73	159310.70	188029.43	9.9278666	10.2022449
52	84681.26	159207.83	188003.33	9.9277873	10.2019643
51	84665.78	159105.05	187921.31	9.9277079	10.2016840
50	84650.30	159002.38	187834.38	9.9276285	10.2014036
49	84634.81	158899.79	187747.53	9.9275490	10.2011233
48	84619.31	158797.30	187660.82	9.9274695	10.2008431
47	84603.81	158694.91	187574.18	9.9273899	10.2005630
46	84588.30	158592.61	187487.64	9.9273103	10.2002830
45	84572.78	158490.41	187401.20	9.9272306	10.2000030
44	84557.25	158383.30	187314.85	9.9271509	10.1997231
43	84541.72	158286.28	187228.59	9.9270711	10.1994433
42	84526.18	158184.36	187142.43	9.9269913	10.1991635
41	84510.63	158082.53	187056.37	9.9269114	10.1988839
40	84495.08	157980.79	186970.40	9.9268314	10.1986043
39	84479.52	157879.15	186884.53	9.9267514	10.1983248
38	84463.95	157777.60	186798.75	9.9266714	10.1980454
37	84448.37	157676.15	186713.06	9.9265913	10.1977660
36	84432.79	157574.79	186627.47	9.9265112	10.1974867
35	84417.20	157473.52	186541.97	9.9264310	10.1972075
34	84401.60	157372.34	186456.57	9.9263507	10.1969284
33	84386.00	157271.26	186371.26	9.9261704	10.1966494
32	84370.39	157170.26	186286.05	9.9261901	10.1963704
31	84354.77	157069.36	186200.93	9.9261096	10.1960915
30	84339.14	156968.56	186115.90	9.9260292	10.1958127
29	84323.51	156867.84	186030.96	9.9259487	10.1955339
28	84307.87	156767.22	185946.12	9.9258681	10.1952553
27	84292.22	156666.69	185861.38	9.9257875	10.1949767
26	84276.57	156566.25	185776.72	9.9257069	10.1946981
25	84260.91	156465.90	185692.16	9.9256261	10.1944197
24	84245.24	156365.64	185607.69	9.9255454	10.1941413
23	84229.56	156265.48	185523.31	9.9254646	10.1938630
22	84213.88	156165.40	185439.03	9.9253837	10.1935848
21	84198.19	156065.42	185354.83	9.9253028	10.1933067
20	84182.49	155965.52	185270.73	9.9252218	10.1930286
19	84166.79	155865.72	185186.72	9.9251408	10.1927506
18	84151.08	155766.01	185102.81	9.9250597	10.1924727
17	84135.36	155666.39	185018.98	9.9249786	10.1921948
16	84119.63	155566.85	184935.25	9.9248974	10.1919171
15	84103.90	155467.41	184851.61	9.9248161	10.1916394
14	84088.16	155368.06	184768.05	9.9247349	10.1913617
13	84072.41	155268.80	184684.59	9.9246535	10.1910842
12	84056.66	155169.63	184601.23	9.9245728	10.1908067
11	84040.90	155070.54	184517.95	9.9244907	10.1905293
10	84025.13	154971.55	184434.77	9.9244092	10.1902520
9	84009.35	154872.64	184351.66	9.9243277	10.1899747
8	83993.57	154773.83	184268.64	9.9242461	10.1896975
7	83977.78	154675.10	184185.71	9.9241644	10.1894204
6	83961.98	154576.46	184102.91	9.9240827	10.1891434
5	83946.18	154477.92	184020.18	9.9240010	10.1888664
4	83930.37	154379.46	183937.53	9.9239191	10.1885895
3	83914.55	154281.09	183854.97	9.9238373	10.1883127
2	83898.73	154182.80	183772.51	9.9237554	10.1880359
1	83882.90	154084.60	183690.13	9.9236734	10.1877592
0	83867.06	153986.50	183607.84	9.9235914	10.1874826

Grad. 33.

Minuta	Sinus	Tang.	Secant.	*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
0	54463.90	64940.76	119236.33	9.7361088	9.8125174
1	54488.30	64982.12	119258.86	9.7363032	9.8127939
2	54512.69	65023.50	119281.41	9.7364976	9.8130704
3	54537.07	65064.90	119303.98	9.7366918	9.8133468
4	54561.45	65106.31	119326.57	9.7368859	9.8136231
5	54585.83	65147.74	119349.18	9.7370799	9.8138993
6	54610.20	65189.18	119371.81	9.7372737	9.8141755
7	54634.56	65230.64	119394.46	9.7374675	9.8144516
8	54658.92	65272.11	119417.12	9.7376611	9.8147277
9	54683.28	65313.60	119439.80	9.7378546	9.8150036
10	54707.63	65355.11	119462.50	9.7380479	9.8152795
11	54731.98	65396.63	119485.22	9.7382412	9.8155554
12	54756.32	65438.17	119507.96	9.7384343	9.8158311
13	54780.66	65479.72	119530.72	9.7386273	9.8161068
14	54804.99	65521.29	119553.50	9.7388201	9.8163824
15	54329.32	65562.87	119576.30	9.7390129	9.8166580
16	54853.65	65604.47	119599.11	9.7392055	9.8169335
17	54877.97	65646.09	119621.94	9.7393980	9.8172089
18	54902.28	65687.72	119644.79	9.7395904	9.8174842
19	54926.59	65729.37	119667.66	9.7397827	9.8177595
20	54950.90	65771.03	119690.55	9.7399748	9.8180347
21	54975.20	65812.71	119713.46	9.7401668	9.8183098
22	54999.50	65854.41	119736.39	9.7403587	9.8185849
23	55023.79	65896.12	119759.34	9.7405505	9.8188599
24	55048.08	65937.85	119782.31	9.7407421	9.8191348
25	55072.36	65979.59	119805.29	9.7409337	9.8194096
26	55096.64	66021.35	119828.29	9.7411251	9.8196844
27	55120.91	66063.13	119851.31	9.7413164	9.8199592
28	55145.18	66104.92	119874.35	9.7415075	9.8202338
29	55169.44	66146.73	119897.41	9.7416986	9.8205084
30	55193.70	66188.56	119990.49	9.7418895	9.8207829
31	55217.95	66230.40	119943.59	9.7420803	9.8210574
32	55242.20	66272.26	119966.71	9.7422710	9.8213317
33	55266.45	66314.13	119989.85	9.7424616	9.8216060
34	55290.69	66356.02	120013.01	9.7426520	9.8218803
35	55314.92	66397.92	120036.19	9.7428423	9.8221545
36	55339.15	66439.84	120059.38	9.7430325	9.8224286
37	55363.38	66481.78	120082.59	9.7432226	9.8227026
38	55387.60	66523.73	120105.82	9.7434126	9.8229766
39	55411.82	66565.70	120129.07	9.7436024	9.8232505
40	55436.03	66607.69	120152.34	9.7437921	9.8235244
41	55460.24	66649.69	120175.63	9.7439817	9.8237981
42	55484.44	66691.71	120198.94	9.7441712	9.8240719
43	55508.64	66733.75	120222.27	9.7443606	9.8243455
44	55532.83	66775.80	120245.62	9.7445498	9.8246191
45	55557.02	66817.87	120268.99	9.7447390	9.8248926
46	55581.21	66859.95	120292.37	9.7449280	9.8251660
47	55605.39	66902.05	120315.77	9.7451169	9.8254394
48	55629.56	66944.17	120339.18	9.7453056	9.8257127
49	55653.73	66986.30	120362.64	9.7454943	9.8259860
50	55677.90	67028.45	120386.10	9.7456828	9.8262592
51	55702.06	67070.62	120409.58	9.7458712	9.8265323
52	55726.21	67112.80	120433.08	9.7460595	9.8268053
53	55750.36	67155.00	120456.60	9.7462477	9.8270783
54	55774.51	67197.21	120480.14	9.7464358	9.8273513
55	55798.65	67239.44	120503.80	9.7466237	9.8276241
56	55822.79	67281.69	120527.28	9.7468115	9.8278969
57	55846.92	67323.96	120550.88	9.7469992	9.8281696
58	55871.05	67366.24	120574.50	9.7471868	9.8284423
59	55895.17	67408.54	120598.14	9.7473743	9.8287149
60	55919.29	67450.85	120621.80	9.7475617	9.8289874

56. Grad.

Minuta	Sinus	Tang.	Secant.	*Log. Sin.*	*Log. Tang.*
60	83867.06	154986.50	183607.84	9.9235914	10.1874826
59	83851.21	153888.48	183525.64	9.9235093	10.1872061
58	83835.36	153790.55	183443.53	9.9234272	10.1869296
57	83819.50	153692.70	183361.51	9.9233450	10.1866538
56	83803.63	153594.94	183279.58	9.9232628	10.1863769
55	83787.75	153497.27	183197.74	9.9231805	10.1861007
54	83771.87	153399.69	183115.99	9.9230982	10.1858245
53	83755.98	153301.20	183034.32	9.9230158	10.1855484
52	83740.08	153204.79	182952.74	9.9229334	10.1852723
51	83724.18	153107.47	182871.25	9.9228509	10.1849964
50	83708.27	153010.23	182789.85	9.9227684	10.1847205
49	83692.35	152913.08	182708.54	9.9226858	10.1844446
48	83676.43	152816.02	182627.31	9.9226032	10.1841689
47	83660.50	152719.04	182546.17	9.9225205	10.1838932
46	83644.56	152622.15	182465.12	9.9224377	10.1890176
45	83628.61	152525.35	182384.16	9.9223549	10.1832420
44	83612.66	152428.63	182303.28	9.9222721	10.1830665
43	83596.70	152332.00	182222.49	9.9221891	10.1827911
42	83580.73	152235.45	182141.79	9.9221062	10.1825158
41	83564.76	152138.99	182061.18	9.9220232	10.1822405
40	83548.78	152042.61	181980.65	9.9219401	10.1819653
39	83532.79	151946.32	181900.21	9.9218570	10.1816902
38	83516.80	151850.12	181819.85	9.9217738	10.1814151
37	83500.80	151754.00	181739.58	9.9216906	10.1811401
36	83484.79	151657.96	181659.40	9.9216073	10.1808652
35	83468.77	151562.01	181579.30	9.9215240	10.1805904
34	83452.75	151466.14	181499.29	9.9214406	10.1803156
33	83436.72	151370.36	181419.37	9.9213572	10.1800408
32	83420.68	151274.66	181339.53	9.9212737	10.1797661
31	83404.63	151179.05	181259.77	9.9211901	10.1794916
30	83388.58	151083.52	181180.10	9.9211066	10.1792171
29	83372.52	150988.07	181100.52	9.9210229	10.1789426
28	83356.45	150892.71	181021.02	9.9209393	10.1786683
27	83340.38	150797.43	180941.61	9.9208555	10.1783940
26	83324.30	150702.24	180862.28	9.9207717	10.1781197
25	83308.21	150607.13	180783.04	9.9206878	10.1778455
24	83292.12	150512.10	180703.88	9.9206039	10.1775714
23	83276.02	150417.16	180624.81	9.9205200	10.1772974
22	83259.91	150322.30	180545.82	9.9204360	10.1770234
21	83243.80	150227.52	180466.91	9.9203519	10.1767495
20	83227.68	150132.82	180388.09	9.9202678	10.1764756
19	83211.55	150038.20	180309.35	9.9201836	10.1762019
18	83195.41	149943.67	180230.70	9.9200994	10.1759281
17	83179.27	149849.22	180152.13	9.9200151	10.1756545
16	83163.12	149754.86	180073.65	9.9199308	10.1753809
15	83146.96	149660.58	179995.25	9.9198464	10.1751074
14	83130.79	149566.38	179916.93	9.9197619	10.1748340
13	83114.62	149472.26	179838.69	9.9196775	10.1745606
12	83098.44	149378.22	179760.54	9.9195929	10.1742873
11	83082.26	149284.26	179682.47	9.9195083	10.1740140
10	83066.07	149190.38	179604.48	9.9194237	10.1737408
9	83049.87	149096.59	179526.58	9.9193390	10.1734677
8	83033.66	149002.88	179448.76	9.9192542	10.1731947
7	83017.45	148909.25	179271.02	9.9191694	10.1729217
6	83001.23	148815.70	179293.37	9.9190845	10.1726487
5	82985.00	148722.23	179215.80	9.9189996	10.1723759
4	82968.76	148628.84	179138.31	9.9189146	10.1721031
3	82952.52	148535.53	179060.90	9.9188296	10.1718304
2	82936.27	148442.30	178983.58	9.9187445	10.1715577
1	82920.02	148349.16	178906.33	9.9186594	10.1712851
0	82903.76	148256.10	178829.16	9.9185742	10.1710126

55919.29

Grad. 34.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	55919.29	67450.85	120621.80	9.7475617	9.8289874
1	55943.40	67493.18	120645.48	9.7477489	9.8292599
2	55967.51	67535.53	120669.18	9.7479360	9.8295323
3	55991.61	67577.90	120692.89	9.7481230	9.8298047
4	56015.71	67620.28	120716.62	9.7483099	9.8300769
5	56039.81	67662.68	120740.37	9.7484967	9.8303492
6	56063.90	67705.09	120764.14	9.7486833	9.8306213
7	56087.98	67747.52	120787.93	9.7488698	9.8308934
8	56112.06	67789.97	120811.75	9.7490562	9.8311654
9	56136.14	67832.44	120835.59	9.7492425	9.8314374
10	56160.21	67874.92	120859.44	9.7494287	9.8317093
11	56184.28	67917.42	120883.31	9.7496148	9.8319811
12	56208.34	67959.93	120907.20	9.7498007	9.8322529
13	56232.39	68002.46	120931.12	9.7499866	9.8325246
14	56256.44	68045.01	120955.05	9.7501723	9.8327963
15	56280.49	68087.58	120976.00	9.7503579	9.8330679
16	56304.53	68130.16	121001.97	9.7505434	9.8333394
17	56328.57	68172.76	121026.96	9.7507287	9.8336109
18	56352.60	68215.38	121050.97	9.7509140	9.8338823
19	56376.63	68258.01	121075.00	9.7510991	9.8341536
20	56400.65	68300.66	121099.05	9.7512842	9.8344249
21	56424.67	68343.33	121123.12	9.7514691	9.8346961
22	56448.69	68386.01	121147.21	9.7516538	9.8349673
23	56472.70	68428.71	121171.32	9.7518385	9.8352384
24	56496.70	68471.43	121195.45	9.7520231	9.8355094
25	56520.70	68514.17	121219.60	9.7522075	9.8357804
26	56544.69	68556.92	121243.77	9.7523919	9.8360513
27	56568.68	68599.69	121267.96	9.7525761	9.8363221
28	56592.67	68642.47	121292.17	9.7527601	9.8365929
29	56616.65	68685.27	121316.40	9.7529441	9.8368636
30	56640.62	68728.10	121340.64	9.7531280	9.8371343
31	56664.59	68770.94	121364.91	9.7533118	9.8374049
32	56688.56	68813.79	121389.20	9.7534954	9.8376755
33	56712.52	68856.66	121413.51	9.7536790	9.8379460
34	56736.48	68899.55	121437.83	9.7538624	9.8382164
35	56760.43	68942.46	121462.18	9.7540457	9.8384867
36	56784.37	68985.38	121486.55	9.7542288	9.8387571
37	56808.31	69028.32	121510.94	9.7544119	9.8390273
38	56832.25	69071.28	121535.35	9.7545949	9.8392975
39	56856.18	69114.25	121559.78	9.7547777	9.8395676
40	56880.11	69157.24	121584.23	9.7549604	9.8398377
41	56904.03	69200.25	121708.70	9.7551431	9.8401077
42	56927.95	69243.28	121633.19	9.7553256	9.8403776
43	56951.86	69286.33	121657.70	9.7555080	9.8406475
44	56975.77	69329.39	121682.23	9.7556902	9.8409174
45	56999.68	69372.47	121706.78	9.7558724	9.8411871
46	57023.58	69415.57	121731.35	9.7560544	9.8414569
47	57047.47	69458.68	121755.94	9.7562364	9.8417265
48	57071.36	69501.81	121780.55	9.7564182	9.8419961
49	57095.24	69544.96	121805.18	9.7565999	9.8422657
50	57119.12	69588.13	121829.83	9.7567815	9.8425351
51	57142.99	69631.31	121854.50	9.7569630	9.8428046
52	57166.86	69674.51	121879.19	9.7571444	9.8430739
53	57190.73	69717.73	121903.90	9.7573256	9.8433432
54	57214.59	69760.97	121928.64	9.7575068	9.8436125
55	57238.44	69804.22	121953.39	9.7576878	9.8438817
56	57262.29	69847.49	121978.16	9.7578687	9.8441508
57	57286.14	69890.78	122002.96	9.7580495	9.8444199
58	57309.98	69934.09	122027.77	9.7582302	9.8446889
59	57333.81	69977.47	122052.60	9.7584108	9.8449579
60	57357.64	60020.75	122077.46	9.7585913	9.8452268

55. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	82903.76	148256.10	178829.16	9.9185742	10.1710126
59	82887.49	148163.11	178752.08	9.9184890	10.1707401
58	82871.21	148070.21	178675.08	9.9184037	10.1704677
57	82854.93	147977.38	178598.17	9.9183183	10.1701953
56	82838.64	147884.63	178521.33	9.9182329	10.1699231
55	82822.34	147791.97	178444.57	9.9181475	10.1696508
54	82806.05	147699.38	178367.90	9.9180520	10.1693787
53	82789.72	147606.88	178291.31	9.9179764	10.1691066
52	82773.40	147514.45	178214.79	9.9178908	10.16[illegible]346
51	82757.07	147422.10	178138.36	9.9176051	10.1685626
50	82740.74	147329.83	178062.01	9.9177194	10.1682907
49	82724.40	147237.64	177985.74	9.9176336	10.1680189
48	82708.05	147145.53	177909.55	9.9175478	10.1677471
47	82691.70	147053.50	177833.[illegible]	9.9174519	10.1674754
46	82675.34	146961.55	177757.40	9.9173700	10.1672037
45	82658.97	146869.67	177681.45	9.9172900	10.1669321
44	82642.60	146777.87	177605.58	9.9172040	10.166[illegible]5
43	82626.22	146686.16	177529.79	9.9171[illegible]	10.1663891
42	82609.83	146594.52	177414.08	9.9170317	10.1661177
41	82593.43	146501.96	177378.45	9.9169[illegible]	10.1658464
40	82577.03	146411.47	177301.90	9.9[illegible]573	10.1655751
39	82560.62	146320.07	177227.4[illegible]	9.9167730	10.1653039
38	82544.20	146228.74	177152.04	9.9166[illegible]	10.1650327
37	82527.78	146137.49	177076.73	9.9166002	10.1647616
36	82511.35	146046.32	177001.49	9.9165137	10.1644906
35	82494.91	145955.22	176926.33	9.9164271	10.1642196
34	82478.47	145864.20	176851.25	9.9163406	10.1639487
33	82462.02	145773.26	176776.25	9.9162539	10.1636779
32	82445.56	145682.40	176701.33	9.9161673	10.1634071
31	82429.09	145591.61	176626.49	9.9160805	10.1631364
30	82412.61	145500.90	176551.73	9.9159937	10.1628657
29	82396.14	145410.27	176477.04	9.9159069	10.1625951
28	82379.65	145319.71	176402.43	9.9158200	10.1623245
27	82363.16	145229.23	176327.91	9.9157330	10.1620540
26	82346.66	145138.83	176253.45	9.9156460	10.1617836
25	82330.15	145048.50	176179.08	9.9155589	10.1615133
24	82313.64	144958.25	176104.78	9.9154718	10.1612429
23	82297.12	144868.08	176030.56	9.9153846	10.1609727
22	82280.59	144777.98	175956.42	9.9152974	10.160[illegible]025
21	82264.05	144687.96	175822.36	9.9152101	10.1604324
20	82247.51	144598.01	175808.37	9.9151228	10.1601623
19	82230.96	144508.14	175734.46	9.9150354	10.1598923
18	82214.40	144418.34	175660.63	9.9149479	10.1596224
17	82197.84	144328.62	175586.87	9.9148604	10.1593525
16	82181.27	144238.97	175513.19	9.9147729	10.1590826
15	82164.69	144149.40	175439.59	9.9146852	10.1588129
14	82148.11	144059.91	175366.07	9.9145976	10.1585431
13	82131.52	143970.49	175292.62	9.9145099	10.1582735
12	82114.92	143881.14	175219.24	9.9144221	10.1580039
11	82098.31	143791.87	175145.94	9.9143342	10.1577343
10	82081.70	143702.68	175072.73	9.9142464	10.1574649
9	82065.08	143613.56	174999.58	9.9141584	10.1571954
8	82048.40	143524.51	174926.51	9.9140704	10.1569261
7	82031.83	143435.54	174853.52	9.9139824	10.1566568
6	82015.19	143346.64	174780.60	9.9138943	10.1563875
5	81998.54	143257.81	174707.76	9.9138061	10.1561183
4	81981.89	143169.06	174634.99	9.9137179	10.1558492
3	81965.23	143080.39	174562.30	9.9136296	10.1555801
2	81948.56	142991.78	174489.61	9.9135413	10.1553111
1	81931.89	142903.16	174417.15	9.9134530	10.1550421
0	81915.21	142814.80	174244.68	9.9133645	10.1547732

Grad. 35.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	57357.64	70020.75	122077.46	9.7585913	9.8452268
1	57381.47	70064.11	122102.33	9.7587717	9.8454956
2	57405.29	70107.49	122127.23	9.7589519	9.8457644
3	57429.11	70150.89	122152.15	9.7591321	9.8460332
4	57452.91	70194.30	122177.08	9.7593121	9.8463018
5	57476.72	70237.73	122202.04	9.7594920	9.8465705
6	57500.52	70281.18	122227.02	9.7596718	9.8468390
7	57524.32	70324.65	122252.02	9.7598515	9.8471075
8	57548.11	70368.13	122277.03	9.7600311	9.8473760
9	57571.90	70411.63	122302.07	9.7602106	9.8476444
10	57595.68	70455.15	122327.13	9.7603899	9.8479127
11	57619.46	70498.69	122352.21	9.7605692	9.8481810
12	57643.23	70542.24	122377.32	9.7607483	9.8484492
13	57667.00	70585.81	122402.44	9.7609274	9.8487174
14	57690.76	70629.40	122427.58	9.7611063	9.8489855
15	57714.52	70673.01	122452.74	9.7612851	9.8492536
16	57738.27	70716.64	122477.93	9.7614638	9.8495216
17	57762.01	70760.29	122503.13	9.7616424	9.8497896
18	57785.76	70803.95	122528.36	9.7618208	9.8500575
19	57809.50	70847.63	122553.61	9.7619992	9.8503253
20	57833.24	70891.33	122578.87	9.7621775	9.8505931
21	57856.96	70935.05	122604.16	9.7623556	9.8508608
22	57880.68	70978.78	122629.47	9.7625337	9.8511285
23	57904.40	70022.53	122654.80	9.7627116	9.8513961
24	57928.12	71066.30	122680.15	9.7628894	9.8516637
25	57951.83	71110.09	122705.52	9.7630671	9.8519312
26	57975.53	71153.90	122730.91	9.7632447	9.8521987
27	57999.23	71197.73	122756.33	9.7634222	9.8524661
28	58022.92	71241.57	122781.76	9.7635996	9.8527335
29	58046.61	71285.43	122807.21	9.7637769	9.8530008
30	58070.30	71329.31	122832.69	9.7639540	9.8532680
31	58093.98	71373.21	122858.19	9.7641311	9.8535352
32	58117.65	71417.13	122883.71	9.7643080	9.8538023
33	58141.32	71461.06	122909.25	9.7644849	9.8540694
34	58164.98	71505.01	122934.81	9.7646616	9.8542365
35	58188.64	71548.98	122960.39	9.7648382	9.8546034
36	58212.30	71592.97	122985.99	9.7650147	9.8548704
37	58235.95	71636.98	123011.61	9.7651911	9.8551372
38	58259.59	71681.01	123057.25	9.7653674	9.8554041
39	58283.23	71725.05	120361.92	9.7655436	9.8556708
40	58306.87	71769.11	123088.61	9.7657197	9.8559376
41	58330.50	71813.19	123114.32	9.7658957	9.8562042
42	58354.12	71857.29	123140.05	9.7660715	9.8564708
43	58377.74	71901.41	123165.80	9.7662473	9.8567374
44	58401.36	71945.55	123191.57	9.7664229	9.8570039
45	58424.97	71989.70	123217.36	9.7665985	9.8572704
46	58448.57	72033.87	123243.17	9.7667739	9.8575368
47	58472.17	72078.06	123269.00	9.7669492	9.8578031
48	58495.77	72122.27	123294.86	9.7671244	9.8580694
49	58519.36	72166.50	123320.74	9.7672996	9.8583357
50	58542.94	72210.75	123346.64	9.7674746	9.8586019
51	58566.52	72255.02	123372.56	9.7676194	9.8588680
52	58590.10	72299.31	123398.50	9.7678242	9.8591341
53	58613.67	72343.61	123424.46	9.7679989	9.8594002
54	58637.24	72387.93	123450.44	9.7681735	9.8596661
55	58660.80	72432.27	123476.45	9.7683480	9.8599321
56	58684.35	72476.63	123502.48	9.7685223	9.8501980
57	58707.90	72521.63	123528.52	9.7686966	9.8604638
58	58731.45	72565.41	123554.59	9.7688707	9.8607296
59	58754.99	72609.83	123580.68	9.7690448	9.8609954
60	58778.53	72654.26	123606.80	9.7692187	9.8612610

54. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	81915.21	142814.80	174344.68	9.9133645	10.1547732
59	81898.52	142726.42	174252.29	9.9132760	10.1545044
58	81881.82	142638.11	174199.97	9.9131875	10.1542356
57	81865.12	142549.87	174127.73	9.9130989	10.1539668
56	81848.41	142461.71	174055.56	9.9130102	10.1536982
55	81831.69	142373.62	173983.47	9.9129215	10.1534295
54	81814.97	142285.61	173911.45	9.9128328	10.1531610
53	81798.24	142197.66	173839.51	9.9127440	10.1528925
52	81781.50	142109.79	173767.64	9.9126551	10.1526240
51	81764.76	142022.00	173695.85	9.9125661	10.1523556
50	81748.01	141934.26	173624.13	9.9124771	10.1520873
49	81731.25	141846.62	173552.47	9.9123882	10.1518190
48	81714.49	141759.04	173480.90	9.9122991	10.1515508
47	81697.72	141671.95	173409.41	9.9122009	10.1512826
46	81680.94	141584.09	173337.98	9.9121107	10.1510145
45	81664.15	141496.73	173266.63	9.9120315	10.1507474
44	81647.36	141409.43	173195.35	9.9119422	10.1504784
43	81630.56	141322.21	173124.14	9.9118528	10.1502104
42	81613.76	141235.06	173053.01	9.9117634	10.1499425
41	81596.95	141147.99	172981.95	9.9116739	10.1496747
40	81580.13	141060.98	172910.96	9.9115844	10.1494069
39	81563.3[illegible]	140974.05	172840.05	9.9114948	10.1491392
38	81546.47	140887.18	172769.21	9.9114051	10.1488715
37	81529.63	140800.39	172698.44	9.9113155	10.1486039
36	81512.78	140713.67	172627.74	9.9112257	10.1483363
35	81495.93	140627.02	172557.12	9.9111359	10.148068
34	81479.06	140540.44	172486.57	9.9110460	10.1478013
35	81462.19	140453.93	172416.09	9.9109561	10.1475339
32	81445.32	140367.49	172345.65	9.9108661	10.1472665
31	81418.44	140281.13	172275.31	9.9107761	10.1469992
30	81411.55	140194.83	172205.08	9.9106860	10.1467320
29	81394.65	140108.60	172134.89	9.9105959	10.1464648
28	81377.75	140022.45	172064.77	9.9105057	10.1461977
27	81360.84	139936.36	171994.72	9.9104155	10.1459306
26	81343.93	139850.34	171923.75	9.9103251	10.1456635
25	81327.01	139764.40	171854.84	9.9102348	10.1453966
24	81310.08	139678.52	171785.01	9.9101444	10.1451296
23	81293.14	139592.72	171715.25	9.9100539	10.1448628
22	81276.20	139506.98	171645.56	9.9099634	10.1445959
21	81259.25	139421.31	171575.94	9.9098728	10.1443292
20	81241.29	139335.71	171506.39	9.9097821	10.1440624
19	81225.32	139250.18	171436.91	9.9096915	10.1437958
18	81208.35	139169.73	171367.50	9.9096007	10.1435292
17	81191.37	139079.34	171298.17	9.9095099	10.1432626
16	81174.39	138994.01	171228.90	9.9094191	10.1429961
15	81157.40	138308.76	171159.70	9.9093281	10.1427295
14	81140.40	138823.58	171090.58	9.9092371	10.1424632
13	81123.39	138738.46	171021.52	9.9091461	10.1421968
12	81106.38	138653.41	170952.54	9.9090550	10.1419306
11	81089.36	138568.44	170883.62	9.9089636	10.1416643
10	81072.33	138483.53	170814.78	9.9088727	10.1413981
9	81055.30	138398.69	170745.00	9.9087814	10.1411320
8	81038.26	138313.92	170677.30	9.9086501	10.1408659
7	81021.21	138229.22	170608.66	9.9085988	10.1405999
6	81004.16	138144.58	170540.10	9.9085073	10.1403339
5	80987.10	138060.01	170471.60	9.9084159	10.1400679
4	80970.03	137975.51	170403.18	9.9083243	10.1398020
3	80952.96	137891.08	170334.82	9.9082327	10.1395362
2	80935.88	137806.82	170266.53	9.9081411	10.1392704
1	80918.79	137722.42	170198.31	9.9080494	10.1390046
0	80901.70	137638.19	170130.16	9.9079576	10.1387390

58961.53

Grad. 36.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	58778.53	72654.26	123606.80	9.7692187	9.8612610
1	58802.06	72698.71	123632.94	9.7693925	9.8615267
2	58825.58	72743.18	123659.09	9.7695662	9.8617923
3	58849.10	72787.67	123685.26	9.7697398	9.8620578
4	58872.62	72832.18	123711.48	9.7699134	9.8623233
5	58896.13	72876.71	123737.68	9.7700865	9.8625887
6	58919.64	72921.26	123763.93	9.7702601	9.8628541
7	58943.14	72965.82	123790.19	9.7704332	9.8631195
8	58966.63	73010.40	123816.47	9.7706063	9.8633848
9	58990.12	73055.01	123842.78	9.7707793	9.8636500
10	59013.61	73099.63	123869.11	9.7709522	9.8639152
11	59037.09	73144.27	123895.46	9.7711249	9.8641803
12	59060.57	73188.94	123921.83	9.7712976	9.8644454
13	59084.04	73233.62	123948.22	9.7714702	9.8647105
14	59107.50	73278.31	123974.64	9.7716426	9.8649755
15	59130.96	73323.03	124001.08	9.7718150	9.8652404
16	59154.42	73367.77	124027.54	9.7719872	9.8655053
17	59177.87	73412.53	124054.02	9.7721593	9.8657702
18	59201.32	73457.30	124080.52	9.7723314	9.8660350
19	59224.76	73502.10	124107.04	9.7725033	9.8662997
20	59248.19	73546.91	124133.59	9.7726751	9.8665644
21	59271.62	73591.74	124160.16	9.7728468	9.8668291
22	59295.05	73636.60	124186.75	9.7730185	9.8670937
23	59318.47	73681.47	124213.36	9.7731900	9.8673583
24	59341.89	73726.36	124239.99	9.7733614	9.8676228
25	59365.30	73771.27	124266.65	9.7735327	9.8678873
26	59388.71	73816.20	124293.33	9.7737039	9.8681517
27	59412.11	73861.15	124320.03	9.7738749	9.8684160
28	59435.50	73906.11	124346.75	9.7740459	9.8686804
29	59458.89	73951.10	124373.49	9.7742161	9.8689446
30	59482.28	73946.11	124400.26	9.7743876	9.8692089
31	59505.66	74041.14	124427.05	9.7745581	9.8694731
32	59529.03	74086.18	124453.86	9.7747288	9.8697372
33	59352.40	74131.24	124480.69	9.7748993	9.8700013
34	59575.77	74176.33	124507.54	9.7750697	9.8702653
35	59599.13	74221.43	124534.42	9.7752399	9.8705293
36	59622.49	74266.55	124561.31	9.7754101	9.8707933
37	59605.84	74311.70	124588.23	9.7755801	9.8710572
38	59669.18	74356.86	124615.18	9.7757501	9.8713210
39	59692.52	74402.04	124652.14	9.7759199	9.8715848
40	59715.86	74447.24	124669.13	9.7760897	9.8718486
41	59739.19	74492.46	124696.14	9.7762593	9.8721123
42	59762.51	74537.70	124723.17	9.7764289	9.8723760
43	59785.83	74582.96	124750.22	9.7765983	9.8726395
44	59809.15	74628.24	124777.30	9.7767676	9.8729032
45	59832.46	74673.54	124804.40	9.7769369	9.8731668
46	59855.76	74718.86	124831.52	9.7771060	9.8734302
47	59879.06	74764.20	124858.66	9.7772750	9.8736937
48	59901.36	74809.56	124885.83	9.7774439	9.8739571
49	59925.65	74854.94	124913.02	9.7776128	9.8742204
50	59948.93	74900.33	124940.23	9.7777815	9.8744838
51	59972.21	74945.75	124967.76	9.7779501	9.8747470
52	59995.49	74991.19	124994.71	9.7781186	9.8750102
53	60018.76	75036.65	125021.99	9.7782870	9.8752734
54	60042.02	75082.12	125049.29	9.7784553	9.8755365
55	60065.28	75127.62	125076.61	9.7786235	9.8757995
56	60088.53	75173.14	125103.96	9.7787916	9.8760626
57	60111.78	75218.67	125131.33	9.7789596	9.8763257
58	60135.03	75264.23	125158.72	9.7791275	9.8765886
59	60158.27	75309.81	125186.13	9.7792953	9.8768515
60	60181.50	75355.40	125213.57	9.7794630	9.8771144

53. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
60	80901.70	137638.19	170130.16	9.9079576	10.1387390
59	80884.60	137554.03	170062.08	9.9078658	10.1384733
58	80867.49	137469.94	169994.07	9.9077740	10.1382077
57	80850.37	137385.91	169926.12	9.9076820	10.1379421
56	80833.25	137301.95	169858.25	9.9075901	10.1376767
55	80816.12	137218.05	169790.44	9.9074980	10.1374113
54	80798.99	137134.23	169722.71	9.9074059	10.1371459
53	80781.85	137050.47	169655.04	9.9073138	10.1368805
52	80764.70	136966.78	169587.43	9.9072216	10.1366152
51	80747.54	136883.15	169519.90	9.9071293	10.1363500
50	80730.38	136799.59	169452.44	9.9070370	10.1360848
49	80713.21	136716.10	169385.04	9.9069446	10.1358197
48	80696.03	136632.67	169317.71	9.9068522	10.1355546
47	80678.85	136549.31	169250.45	9.9067597	10.1352895
46	80661.65	136466.22	169183.26	9.9066671	10.1350245
45	80644.45	136382.79	169116.13	9.9065745	10.1347596
44	80627.26	136299.63	169049.07	9.9064819	10.1344947
43	80610.05	136216.53	168982.08	9.9063892	10.1342298
42	80592.83	136133.50	168915.16	9.9062964	10.1339650
41	80575.60	136050.54	168848.30	9.9062036	10.1337003
40	80558.37	135967.64	168781.51	9.9061107	10.1334356
39	80541.13	135884.81	168714.79	9.9060177	10.1331709
38	80523.89	135802.04	168648.14	9.9059247	10.1329063
37	80506.64	135719.34	168581.55	9.9058317	10.1326417
36	80489.30	135636.70	168515.03	9.9057386	10.1323772
35	80472.11	135554.13	168448.57	9.9056454	10.1321127
34	80454.84	135471.61	168382.18	9.9055522	10.1318483
33	80437.56	135389.18	168315.86	9.9054589	10.1315840
32	80420.28	135306.80	168249.61	9.9053656	10.1313196
31	80402.99	135224.49	168183.42	9.9052722	10.1310554
30	80385.69	135142.24	168117.30	9.9051787	10.1307911
29	80368.38	135060.06	168051.24	9.9050852	10.1305269
28	80351.07	134977.94	167985.25	9.9049916	10.1302628
27	80333.75	134895.89	167919.33	9.9048980	10.1299987
26	80316.42	134813.90	167853.47	9.9048043	10.1297347
25	80299.09	134731.97	167787.68	9.9047106	10.1294707
24	80281.75	134650.11	167722.95	9.9046168	10.1292067
23	80264.40	134568.32	167656.29	9.9045230	10.1289428
22	80247.05	134486.58	167590.70	9.9044291	10.1286790
21	80229.69	134404.92	167525.17	9.9043351	10.1284152
20	80212.32	134323.31	167459.70	9.9042411	10.1281514
19	80194.94	134241.77	167394.30	9.9041470	10.1278877
18	80177.56	134160.29	167328.97	9.9040529	10.1276240
17	80160.11	134078.88	167263.70	9.9039587	10.1273604
16	80142.78	133997.53	167198.50	9.9038644	10.1270968
15	80125.38	133916.24	167133.36	9.9037701	10.1268332
14	80107.97	133835.02	167068.28	9.9036757	10.1265698
13	80090.50	133753.86	167003.28	9.9035813	10.1263063
12	80073.14	133672.76	166938.33	9.9034868	10.1260429
11	80055.71	133591.72	166873.45	9.9033923	10.1257796
10	80038.27	133510.75	166808.64	9.9032977	10.1255161
9	80020.83	133429.84	166743.89	9.9032031	10.1252530
8	80003.38	133349.00	166679.20	9.9031084	10.1249898
7	79985.93	133268.22	166614.58	9.9030136	10.1247266
6	79968.47	133187.49	166550.02	9.9029188	10.1244635
5	79951.00	133106.84	166485.52	9.9028239	10.1242004
4	79933.52	133026.24	166421.09	9.9027289	10.1239373
3	79916.04	132945.71	166356.73	9.9026339	10.1236743
2	79898.55	132865.24	166292.43	9.9025389	10.1234114
1	79881.05	132784.83	166228.19	9.9024438	10.1231484
0	79863.55	132704.48	166164.01	9.9023486	10.1228856

59482.8

Grad. 37. — 52. Grad.

Minut	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Minut	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	60181.50	75355.40	125213.57	9.7794630	9.8771144	60	79863.55	132704.48	166164.01	9.9023486	10.1228856
1	60204.73	75401.02	125241.02	9.7796306	9.8773772	59	79846.04	132624.20	166099.90	9.9022534	10.1226228
2	60227.95	75446.66	125268.50	9.7797981	9.8776400	58	79828.52	132543.97	166035.85	9.9021581	10.1223600
3	60251.17	75492.32	125296.01	9.7799655	9.8779027	57	79811.00	132463.81	165971.87	9.9020628	10.1220973
4	60274.39	75537.99	125323.53	9.7801328	9.8781654	56	79793.47	132383.71	165907.95	9.9019674	10.1218346
5	60297.60	75583.69	125351.08	9.7803000	9.8784281	55	79775.93	132308.68	165844.09	9.9018719	10.1215719
6	60320.80	75629.41	125378.65	9.7804671	9.8786907	54	79758.39	132223.70	165780.30	9.9017764	10.1213093
7	60344.00	75675.14	125406.25	9.7806341	9.8789533	53	79740.84	132143.79	165716.57	9.9016808	10.1210467
8	60367.19	75720.90	125433.87	9.7808010	9.8792158	52	79723.28	132063.93	165652.90	9.9015852	10.1207842
9	60390.38	75765.68	125461.51	9.7809677	9.8794782	51	79705.72	131984.14	165589.29	9.9014895	10.1205218
10	60483.56	75812.48	125489.17	9.7811344	9.8797407	50	79688.15	131904.41	165525.75	9.9013938	10.1202593
11	60436.74	75858.29	125516.85	9.7813010	9.8800031	49	79670.57	131824.74	165462.27	9.9012980	10.1199969
12	60459.91	75904.13	125544.56	9.7814675	9.8802654	48	79652.99	131745.13	165398.85	9.9012021	10.1197346
13	60483.08	75949.99	125572.29	9.7816339	9.8805277	47	79635.40	131665.59	165335.90	9.9011062	10.1194723
14	60506.24	75995.87	125600.05	9.7818002	9.8807900	46	79617.80	131586.10	165272.21	9.9010102	10.1192100
15	60529.40	76041.77	125627.82	9.7819664	9.8810522	45	79600.20	131506.68	165208.98	9.9009142	10.1189478
16	60552.55	76087.69	125655.62	9.7821324	9.8813144	44	79582.59	131427.31	165145.81	9.9008181	10.1186856
17	60575.70	76133.63	125683.45	9.7822984	9.8815765	43	79564.97	131348.01	165082.70	9.9007219	10.1184235
18	60598.84	76179.59	125711.29	9.7824643	9.8818386	42	79547.35	131268.76	165019.66	9.9006257	10.1181614
19	60621.98	76215.57	125739.16	9.7826301	9.8821007	41	79529.72	131189.58	164956.66	9.9005294	10.1178993
20	60645.11	76271.57	125767.05	9.7827958	9.8823627	40	79512.08	131110.46	164893.76	9.9004331	10.1176373
21	60668.23	76317.59	125794.97	9.7829614	9.8826246	39	79494.43	131031.46	164830.90	9.9003367	10.1173754
22	60691.35	76363.63	125822.91	9.7831268	9.8828866	38	79476.78	130952.39	164768.11	9.9002403	10.1171134
23	60714.47	76409.69	125850.87	9.7832922	9.8831484	37	79459.22	130873.41	164705.37	9.9001438	10.1168516
24	60737.58	76455.77	125878.85	9.7834575	9.8834103	36	79441.46	130794.57	164642.70	9.9000472	10.1165897
25	60760.69	76501.88	125906.86	9.7836227	9.8836721	35	79423.79	130715.70	164580.09	9.8999506	10.1163279
26	60783.79	76548.00	125934.89	9.7837878	9.8839338	34	79406.11	130636.99	164517.54	9.8998539	10.1160662
27	60806.89	76594.14	125962.94	9.7839528	9.8841956	33	79388.43	130558.28	164455.06	9.8997572	10.1158044
28	60829.98	76640.31	125991.02	9.7841177	9.8844572	32	79370.74	130479.64	164392.63	9.8996604	10.1155428
29	60853.06	76686.49	126519.12	9.7842824	9.8847189	31	79353.04	130401.06	164330.27	9.8995636	10.1152811
30	60876.14	76732.70	126047.24	9.7844471	9.8849805	30	79335.33	130322.54	164267.96	9.8994667	10.1150195
31	60899.22	76778.93	126075.39	9.7846117	9.8852420	29	79317.62	130244.07	164205.72	9.8993697	10.1147580
32	60922.29	76825.17	126103.56	9.7847762	9.8855035	28	79299.90	130165.67	164143.54	9.8992727	10.1144965
33	60945.35	76871.44	126131.75	9.7849406	9.8857650	27	79282.18	130087.32	164081.42	9.8991756	10.1142350
34	60968.41	76917.73	126159.97	9.7851049	9.8860264	26	79264.45	130009.04	164019.36	9.8990784	10.1139736
35	60991.47	76964.04	126188.20	9.7852691	9.8862878	25	79246.71	129930.81	163957.36	9.8989812	10.1137122
36	61014.52	77010.37	126216.46	9.7854332	9.8865492	24	79228.96	129852.65	163895.42	9.8988840	10.1134508
37	61037.56	77056.72	126244.75	9.7855972	9.8868105	23	79211.21	129774.54	163833.55	9.8987867	10.1131895
38	61060.60	77103.09	126273.06	9.7857611	9.8870718	22	79193.45	129696.49	163771.73	9.8986893	10.1129282
39	61083.63	77149.48	126301.40	9.7859249	9.8873330	21	79175.69	129618.50	163709.97	9.8985919	10.1126670
40	61106.66	77195.89	126329.75	9.7860886	9.8875942	20	79157.92	129540.57	163648.28	9.8984944	10.1124058
41	61129.68	77242.33	126358.13	9.7862522	9.8878554	19	79140.14	129462.69	163586.64	9.8983968	10.1121446
42	61162.70	77288.79	126386.53	9.7864057	9.8881165	18	79122.35	129384.88	163525.07	9.8982992	10.1118831
43	61175.72	77335.26	126414.96	9.7865791	9.8883775	17	79104.56	129307.12	163463.55	9.8982015	10.1116225
44	61198.73	77381.75	126443.41	9.7867424	9.8886386	16	79086.76	129229.43	163402.10	9.8981038	10.1113614
45	61221.73	77428.27	126471.88	9.7869056	9.8888996	15	79068.96	129151.79	163340.70	9.8980060	10.1111004
46	61244.73	77474.81	126500.38	9.7870687	9.8891605	14	79051.15	129074.21	163279.37	9.8979082	10.1108395
47	61267.72	77521.37	126528.90	9.7872317	9.8894214	13	79033.33	128996.69	163218.09	9.8978103	10.1105786
48	61290.71	77567.95	126557.45	9.7873946	9.8896823	12	79015.50	128919.22	163156.88	9.8977123	10.1103177
49	61313.69	77614.55	126586.01	9.7875574	9.8899432	11	78997.67	128841.82	163095.72	9.8976143	10.1100568
50	61336.66	77661.17	126614.60	9.7877202	9.8902040	10	78979.83	128764.47	163034.62	9.8975162	10.1097960
51	61359.63	77707.82	126643.24	9.7878828	9.8904647	9	78961.98	128687.18	162973.59	9.8974181	10.1095353
52	61382.60	77754.48	126671.86	9.7880453	9.8907254	8	78944.13	128609.95	162912.61	9.8973199	10.1092746
53	61405.56	77801.17	126700.52	9.7882077	9.8909861	7	78926.27	128532.77	162851.69	9.8972216	10.1090139
54	61428.52	77847.88	126729.21	9.7883701	9.8912468	6	78908.41	128455.66	162790.83	9.8971233	10.1087532
55	61451.47	77894.60	126757.92	9.7885323	9.8915074	5	78890.54	128378.60	162730.03	9.8970249	10.1084926
56	61474.42	77941.35	126786.65	9.7886944	9.8917679	4	78872.66	128301.60	162669.29	9.8969265	10.1082321
57	61497.36	77988.12	126815.41	9.7888565	9.8920285	3	78854.72	128224.66	162608.61	9.8968280	10.1079715
58	61520.29	78034.92	126844.29	9.7890184	9.8922890	2	78836.88	128147.76	162547.99	9.8967294	10.1077110
59	61543.22	78081.73	126872.99	9.7891802	9.8925494	1	78818.98	128070.93	162487.43	9.8966308	10.1074506
60	61566.15	78128.56	126901.82	9.7893420	9.8928098	0	78801.07	127994.16	162426.92	9.8965321	10.1071992

61566.15

38. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	61566.15	78128 56	126901.81	9.7893410	9.8928098
1	61589.07	78175.42	126930.67	9.7895036	9.8930702
2	61611.98	78222.19	126959.55	9.7896652	9.8933306
3	91634.89	78269.19	126988.45	9.7898266	9.8935909
4	61657.79	78316.11	127017.37	9.7899880	9.8938511
5	61680.69	78363.05	127046.32	9.7901493	9.8941114
6	61703.59	78410.02	127075.29	9.7903104	9.8943715
7	61726.48	78457.00	127104.29	9.7904715	9.8946317
8	61749.36	78504.00	127133.31	9.7906325	9.8948918
9	61772.24	78551.03	127162.35	9.7907933	9.8951519
10	61795.11	78598 08	127191.42	9.7909541	9.8954119
11	61817.98	78645 15	127220.51	9.7911148	9.8956719
12	61840.84	78692.24	127249.63	9.7912754	9.8959319
13	61863.70	78739.05	127278 77	9.7914359	9.8961918
14	61886.55	78786.49	127307.94	9.7915963	9.8964517
15	61909.40	78833.64	127337.12	9.7917566	9.8967116
16	61932.24	78880.82	127366.34	9.7919168	9.8969714
17	61955.07	78928.01	127395.57	9.7920769	9.8972312
18	61977.90	78975.24	127424.84	9.7922369	9.8974910
19	62000.73	79022.48	127454.12	9.7923968	9.8977507
20	62023.55	79069.75	127483.43	9.7925566	9.8980104
21	62046.36	79117.03	127512.76	9.7927163	9.8982700
22	62069.17	79164.34	127542.12	9.7928760	9.8985296
23	62091.98	79211.67	127571.5[illegible]	9.793035[illegible]	9.8987892
24	62114.76	79259.02	127600.91	9.7931949	9.8990487
25	62137.57	79306.40	127630.34	9.7933543	9.8993082
26	62160.36	79353 79	127659.8[illegible]	9.7935131	9.8995677
27	62183.14	79405.21	127689.28	9.7936727	9.8998271
28	62205.92	79448 55	127718.78	9.793831[illegible]	9.9000865
29	62228.69	79496.11	127748.31	9.793990[illegible]	9.9003459
30	62251.46	79543 59	127777.8[illegible]	9.7941496	9.9006052
31	62274.22	79591.10	127807.45	9.794308[illegible]	9.9008645
32	62296.98	79638 62	127837.0[illegible]	9.79446[illegible]	9.9011237
33	62[illegible]	79686.17	127866.6[illegible]	9.7946250	9.9013830
34	62342.48	79733.74	127896.32	9.7947841	9.9016422
35	62365.22	79781 34	127926.00	9.7949425	9.9019013
36	62387.96	79828 95	127955.70	9.7951008	9.9021604
37	62410 69	79876.59	127985.43	9.7952590	9.9024195
38	62433.42	79924.25	128015.18	9.7954171	9.9026786
39	62456.14	79971 93	128044.95	9.7955751	9.9029376
40	62478.85	80019.63	128074.75	9.7957330	9.9031966
41	62501.56	80067.36	128104.57	9.7958909	9.9034555
42	62524.26	80115.11	128134.42	9.7960488	9.9037144
43	62546.96	80162.88	128164.30	9.7962062	9.9039733
44	62569.56	80210 67	128194.20	9.7963638	9.9042321
45	62592.35	80258.48	128224.12	9.7965212	9.9044910
46	62615.03	80306 32	128254.07	9.7966786	9.9047497
47	62637.71	80354 18	128284.04	9.7968359	9.9050085
48	62660.38	80402.06	128314.04	9.7969930	9.9052672
49	62683.05	80441.97	128344.06	9.7971501	9.9055259
50	62705.71	80497.90	128374.11	9.7973071	9.9057845
51	62728.37	80545 85	128404.18	9.7974640	9.9060431
52	62751.02	80593 82	128434.28	9.7976208	9.9063017
53	62773.66	80641.81	128464.40	9.7977775	9.9065603
54	62796.30	80689.83	128494.55	9.7979341	9.9068188
55	62718.94	80737 87	128524.72	9.7980906	9.9070773
56	62841.57	80785 93	128554.92	9.7982470	9.9073357
57	62864.20	80834.01	128585.14	9.7984034	9.9075941
58	62886.82	80882.12	128615.39	9.7985596	9.9078525
59	62909.43	80930.21	128645.66	9.7987158	9.9081109
60	62932.04	80978 40	128675.96	9.7988718	9.9083692

51. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
60	78801 07	127994.16	162426.[illegible]2	9.8965321	10.1071902
59	78783.16	127917.45	162366.48	9.8964314	10.1069298
58	78765.24	127840.79	162306.09	9.8963346	10.1066696
57	78747.32	127764.19	162245.76	9.8962358	10.1064091
56	78729.39	127687.64	162185.49	9.8961369	10.1061489
55	78711.45	127611.16	162125.28	9.8960379	10.1058886
54	78693.50	127534.73	162065.13	9.8959389	10.1056285
53	78675.55	127458.36	162005.04	9.8958398	10.1053683
52	78657.59	127382.04	161945.00	9.8957406	10.1051082
51	78639.62	127305.78	161885.02	9.8956414	10.1048481
50	78621.65	127229.57	161825 10	9.8955422	10.1045881
49	78603.67	127153.42	161765.24	9.8954429	10.1043281
48	78585.69	127077.33	161705.44	9.8953435	10.1040681
47	78567.70	127001.30	161645.69	9.8952440	10.1038081
46	78549.70	126925.32	161586.[illegible]	9.8951445	10.1035483
45	78531.69	126849.39	161526.37	9.8950450	10.1032884
44	78513 8[illegible]	126773.53	161466.80	9.8949453	10.1030286
43	78495.66	126697.72	161407.2[illegible]	9.894845[illegible]	10.1027688
42	78477.64	126621 96	161347.83	9.8947459	10.1025090
41	78459.61	126546.26	161288.43	9.8946461	10.1022493
40	78441.57	126470.62	161229.08	9.8945463	10.1019896
39	78423.52	126395.03	161169.8[illegible]	9.8944463	10.1017300
38	78405.47	126319.50	161110 57	9.8943464	10.1014704
37	78387.41	126244.02	161051.40	9.8942463	10.1012108
36	78369.35	126168 60	160992.25	9.8941462	10.1009513
35	78351.28	126093.23	160933.23	9.8940461	10.1006918
34	78333 20	126017.92	160874.23	9.8939458	10.1004323
33	78315.11	125942.67	160815.28	9.8938456	10.1001729
32	78297.02	125867.47	160756.40	9.8937452	10.0999135
31	78278.92	125792.32	160697.57	9.8936448	10.0996541
30	78260.82	125717.23	160638.79	9.8935444	10.0993948
29	78242.71	125642.19	160580.08	9.9934439	10.0991355
28	78224.59	125567.21	160521.42	9.8933433	10.0988763
27	78206.4[illegible]	125492.29	160462.81	9.8932426	10.0986170
26	78188 33	125417.42	160404.26	9.89314[illegible]9	10.0983578
25	78170.19	125342.60	160345.77	9.8930412	10.0980987
24	78152.03	125267.84	160287.34	9.8929404	10.0978396
23	78133 9[illegible]	125193.13	160228.96	9.8928395	10.0975805
22	78115.74	125118.48	16170. 64	9.892738[illegible]	10.0973214
21	78097.57	125043.88	160112 37	9.8926375	10.0970624
20	78079.40	124969.33	160054.16	9.8925365	10.0968034
19	78061.22	124894.24	159996.00	9.8924354	10.0965445
18	78043.04	124820.40	159937.90	9.8923341	10.0962856
17	78024.85	124746.02	159879 86	9.8922329	10.0960267
16	78006.65	124571.69	159821.87	9.8921316	10.0957679
15	77988.45	124597.42	159793.94	9.8920303	10.0955090
14	77970.24	124523.10	159706 06	9.8919289	10.0957503
13	77952.02	124449 03	159648.24	9.8918274	10.0949915
12	77933.80	124374.92	159590.47	9.8917258	10.0947328
11	77915.57	124300.86	159532.76	9.8916242	10.0944741
10	77897.33	124226.85	159475.11	9.8915226	10.0942155
9	77879 08	124152.90	159417.51	9.8914208	10.0939569
8	77860.83	124079.01	159359.96	9.8913191	10.0936983
7	77842.57	124005.15	159302.47	9.8912172	10.0934397
6	77824 31	123931. 36	159245.04	9.8911153	10.0931812
5	77806.04	123857.62	159187.66	9.8910133	10.0929227
4	77787.77	123783.93	159130.33	9.8909113	10.0926643
3	77769.49	123710.30	159073.06	9.8908092	10.0924059
2	77751.20	123636 72	159015.85	9.8907071	10.0921475
1	77732.90	123563.19	158958.68	9.8906049	10.0918891
0	77714 60	123489 72	158901.57	9.8905026	10.0916308

39. Grad.

Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	62932.04	80978.40	128675.96	9.7988718	9.9083692
1	62954.64	81026.58	128706.28	9.7990278	9.9086275
2	62977.24	81074.78	128736.63	9.7991836	9.9088858
3	62999.83	81123.00	128767.00	9.7993394	9.9091440
4	63022.42	81171.24	128797.40	9.7994951	9.9094022
5	63045.00	81219.51	128827.82	9.7996507	9.9096603
6	63067.58	81267.80	128858.27	9.7998062	9.9099185
7	63090.15	81316.11	128888.75	9.7999616	9.9101726
8	63112.72	81364.44	228919.25	9.8001169	9.9104347
9	63135.28	81412.80	128949.77	9.8002721	9.9106927
10	63157.84	81461.18	128980.32	9.8004272	9.9109507
11	63180.39	81509.58	129010.90	9.8005823	9.9112087
12	63202.93	81558.01	129041.50	9.8007372	9.9114666
13	63225.47	81606.46	129072.13	9.8008921	9 9117245
14	63248.00	81654.93	129102.78	9.8010468	9.9119824
15	63270.53	81703.43	129133.46	9.8012015	9 9122403
16	63293.05	81751.95	129164.16	9.8013561	9.9124981
17	63315.57	81800.49	129194.89	9.8015106	9.9227559
18	63338.08	81849.05	129225.64	9.8016649	9.9130137
19	63360 59	81897.64	129256.42	9.8018192	9.9132714
20	63383.09	81946.25	129287.23	9.8019735	9.9135291
21	63340.59	81994.88	129318.06	9.8021276	9.9137868
22	63428.08	82043.54	129348.92	9.8022816	9.9140444
23	63450.57	82092.22	129379.80	9.8024355	9.9143020
24	63473.05	82140.93	129410.71	9.8025894	9.9145596
25	63495.53	82189.65	129441.64	9.8027431	9.9148171
26	63518.00	82238.40	129472.60	9.8028968	9.9150747
27	63540.46	82287.18	129503.59	9.8030504	9.9152322
28	63562.92	82335.97	129534.60	9.8032038	9.9155896
29	63585.37	82384.79	129565.64	9.8033572	9.9158471
30	63607.82	82433.64	129596.70	9.8035105	9.9161045
31	63630.26	82482.51	129627.79	9.8036637	9.9163618
32	63652.70	82531.40	129658.90	9.8038168	9.9166192
33	63675.13	82580.31	129690.04	9.8039699	9 9168765
34	63697.56	82629.25	129721.21	9.8041228	9.9171338
35	63719.98	82678.21	129752.40	9.8042757	9.9173911
36	63742.40	82727.19	129783.62	9.8044284	9.9176483
37	63764 81	82776.20	129814.87	9.8045811	9.9179055
38	63787.21	82825.23	129846.14	9.8047336	9. 9181627
39	63809.61	82874.29	129877.44	9.8048861	9.9184198
40	63832.01	82923.37	129908.76	9.8050385	9.9186769
41	63854.40	82972.47	129940.11	9.8051908	9.9189340
42	63876.78	83021.60	129971.48	9.8053430	9.9191911
43	63899.16	83070.75	130002.88	9.8054951	9.9194481
44	63921.53	83119.92	130034.31	9.8056472	9. 9197051
45	63943.90	83169.12	130065 76	9.8057991	9.9199621
46	63966.26	83218.34	130097.24	9.8059510	9.9202191
47	63988.62	83267.59	130128.75	9.8061027	9.9204760
48	64010.97	83 316.86	130160.28	9 8062544	9.9207329
49	64033.32	83366.15	130191.84	9.8064060	9.9209898
50	64055.66	83415.47	130223.43	9.8065575	9.9212466
51	64077.99	83464.81	130255.04	9.8067089	9.9215034
52	64100 32	83514.18	130286.68	9.8068602	9.9217602
53	64122.64	83563.57	130318.34	9.8070114	9.9220170
54	64144.96	83612.98	130350.03	9.8071626	9.9222737
55	64167.27	83662.42	130381.75	9.8073136	9.9225304
56	64189.58	83711.88	130413.49	9.8074646	9.9227871
57	64211.88	83761.36	130445.26	9.8076154	9 9230437
58	64234.18	83810.87	130477.06	9.8077662	9.9233004
59	64256.47	83860.40	130508.88	9.8079169	9.9235570
60	64278.76	83909.96	130540.73	9.8080675	9.9238135

50. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log. Tang
60	77714.60	123489.72	158901.57	9.8905026	10.0916308
59	77696.29	123416.29	158844.52	9.8904003	10.0913725
58	77677.97	123342.92	158787.52	9.8902979	10.0911142
57	77659.65	123269.61	158730.58	9.8901954	10.0908560
56	77641.32	123196 34	158673.69	9.8900929	10.0905978
55	77622.98	123123.13	158616.85	9 8899903	10.0903397
54	77604.64	123049.97	158560.07	9.8898877	10.0900815
53	77586.39	122976.87	158503.34	9.8897850	10. 0898234
52	77567.94	122903 81	158446.67	9 8896822	10.0895653
51	77549.58	122830.81	158390.05	9.8895794	10.0893073
50	77531.21	122757.86	158333.48	9.8894765	10.0890493
49	77512.83	122684.96	158276.97	9.8893736	10.0887913
48	77494.45	122612.11	158220.51	9.8892706	10.0885334
47	77476.06	122539.32	158164.11	9. 8891675	10.0882755
46	77457.67	122466.58	158107.76	9 8890644	10.0880176
45	77439.27	122393.89	158051.46	9. 8889612	10.0877597
44	77420 86	122321.25	157995.21	9.8888580	10.0875019
43	77402 44	122248.66	157939.02	9 8887547	10.0872441
42	77384.02	122176.13	157882.89	9.8886513	10.0869863
41	77365.59	122103.64	157826.80	9.8885479	10.0867286
40	77347.16	122031.21	157770.77	9.8884444	10. 0864709
39	77328.72	121958.83	157714.79	9.8883408	10.0863132
38	77310 27	121886.50	157658.87	9.8882372	10. 0859556
37	77291.82	121414.22	157603.00	9. 8881335	10.0856980
36	77273.36	121741.99	157547.18	9.8880298	10.0854404
35	77254.89	121669.82	157491.41	9.8879260	10. 0851829
34	77236.42	121597.69	157435.70	9.8878221	10 0849253
33	77217.94	121525.62	157380.04	9.8877182	10. 0846678
32	77199.45	121453.59	157324.43	9. 8876142	10.0844104
31	77180.96	125381.62	157268.87	9.8875102	10.0841529
30	77162.46	121309. 70	157213.37	9.8874061	10.0838955
29	77143.95	121237.83	157157.92	9.8873019	10.0836382
28	77125.44	121166.01	157102.52	9.8871977	10.0833808
27	77106.92	121094.24	157047.17	9.8870934	10.0831235
26	77088.49	121022.52	156991.88	9.8869890	10.0828662
25	77069.86	120950.85	156936.64	9.8868846	10.0826089
24	77051.32	120879.23	156881.45	9.8867801	10.0823517
23	77032.78	120807.67	156826.31	9.8866756	10.0820945
22	77014.23	120736.15	156771.23	9.8865710	10.0818373
21	76995.67	120664.68	156716.19	9.8864663	10. 0815802
20	76977.10	120593.27	156661.21	9.8863616	10. 0813231
19	76958.53	120521.90	156606.28	9.8862568	10.0810660
18	76939.95	120450.58	156551. 41	9.8861519	10.0808089
17	76921. 37	120379.31	156496. 58	9.8860470	10.0805519
16	76902.78	120308. 10	156441 81	9.8859420	10.0802949
15	76884.18	120236.93	156387.08	9.8858370	10.0800379
14	76865.58	120165.81	156332. 41	9.8857319	10.0797809
13	76846 97	120094.75	156277.79	9.8856267	10.0795240
12	76828.35	120023.73	156223.22	9.8855215	10 0792671
11	76809.73	119952.76	156168.70	9 8854162	10.0790102
10	76791.10	119881.84	156114. 24	9.8853109	10.0787534
9	76772.46	11 9810.97	156059.82	9.8852055	10.0784966
8	76753. 82	119740. 15	156005.46	9.8851000	10. 0782398
7	76735. 17	119669.38	155951. 15	9.8849945	10.0779830
6	76716. 51	119598.66	155896.89	9.8848889	10.0777263
5	76697.85	119527.99	145842.67	9.8847832	10. 0774696
4	76679.18	119457.36	155788. 51	9.8846775	10.0772129
3	76660.51	119386.79	155734. 41	9.8845717	10.0769563
2	76641.83	119316.26	155680.35	9.8844659	10.0766996
1	76623 14	119245.79	155626 34	9.8843599	10.0764430
0	76604.44	119175.36	155572.38	9.8842540	10.0761865

64278.76

40. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
0	64278.76	83909.96	130540.73	9.8080675	9.9238135
1	64301.04	83959.54	130572.61	9.8082180	9.9240701
2	64323.32	84009.15	130604.51	9.8083684	9.9243266
3	64345.59	84058.78	130636.44	9.8085188	9.9245831
4	64337.85	84108.44	130668.39	9.8086690	9.9248396
5	64390.11	84158.12	130700.37	9.8088192	9.9250960
6	64412.36	84207.82	130732.38	9.8089692	9.9253524
7	64434.61	84257.55	130764.42	9.8091192	9.9256088
8	64456.85	84307.30	130796.49	9.8092691	9.9258652
9	64479.09	84357.08	130828.58	9.8094189	9.9261215
10	64501.32	84406.88	130860.70	9.8095686	9.9263778
11	64523.55	84456.70	130892.84	9.8097182	9.9266341
12	64545.77	84506.55	130925.01	9.8098678	9.9268904
13	64567.98	84556.43	130957.21	9.8100172	9.9271466
14	64590.19	84606.33	130989.43	9.8101666	9.9274028
15	64612.40	84656.25	131021.68	9.8103159	9.9276590
16	64634.60	84706.20	131053.96	9.8104650	9.9279152
17	64656.79	84756.17	131086.26	9.8106141	9.9281713
18	64678.98	84806.17	131118.59	9.8107631	9.9284274
19	64701.16	84856.19	131150.95	9.8109121	9.9286835
20	64723.34	84906.24	131183.34	9.8110609	9.9289396
21	64745.51	84956.31	131215.75	9.8112096	9.9291956
22	64767.67	85006.40	131248.19	9.81135[illegible]	9.9294516
23	64789.83	85056.52	131280.66	9.8115065	9.9297076
24	64811.99	85106.67	131313.16	9.8116554	9.9299636
25	64834.14	85156.84	131345.68	9.8118038	9.9302195
26	64856.28	85207.04	131378.23	9.8119521	9.9304755
27	64878.42	85257.26	131410.81	9.8121003	9.9307314
28	64900.55	85307.50	131443.41	9.8122484	9.9309872
29	64922.68	85357.77	131476.04	9.8123965	9.9312431
30	64944.80	85408.07	131508.70	9.8125444	9.9314989
31	64966.92	85458.39	131541.39	9.8126922	9.9317547
32	64989.03	85508.73	131574.10	9.8128401	9.9320105
33	65011.14	85559.10	131606.84	9.8129878	9.9322662
34	65033.24	85609.50	131639.61	9.8131354	9.9325220
35	65055.33	85659.92	131672.41	9.8132829	9.9327777
36	65077.42	85710.37	131705.23	9.8134303	9.9330334
37	65099.50	85760.84	131738.08	9.8135777	9.9332890
38	65121.58	85811.33	131770.96	9.8137250	9.9335446
39	65143.66	85861.85	131803.86	9.8138721	9.9338003
40	65165.72	85912.40	131836.79	9.8140192	9.9340559
41	65187.78	85962.97	131869.75	9.8141662	9.9343114
42	65209.84	86013.57	131902.74	9.8143131	9.9345670
43	65231.89	86064.19	131935.76	9.8144600	9.9348225
44	65253.94	86114.84	131968.81	9.8146067	9.9350780
45	65275.98	86165.51	132001.88	9.8147534	9.9353335
46	65298.01	86216.21	132034.98	9.8148999	9.9355889
47	65320.04	86266.93	132068.11	9.8150464	9.9358444
48	65342.06	86317.68	132101.26	9.8151928	9.9360998
49	65364.08	86368.46	132134.44	9.8153391	9.9363552
50	65386.09	86419.26	132167.65	9.8154854	9.9366105
51	65408.10	86470.09	132200.89	9.8156315	9.9368659
52	65430.10	86520.94	132234.16	9.8157776	9.9371212
53	65452.09	86571.81	132267.45	9.8159235	9.9373765
54	64474.08	86622.71	132300.77	9.8160694	9.9376318
55	65496.06	86673.64	132334.32	9.8162152	9.9378871
56	65518.04	86724.60	132367.50	9.8163609	9.9381423
57	65540.01	86775.58	132400.91	9.8165066	9.9383975
58	65561.98	86826.59	132434.35	9.8166521	9.9386527
59	65583.94	86877.62	132467.81	9.8167975	9.9389079
60	65605.90	86928.68	132501.30	9.8163429	9.9391631

49. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	Log.Sin.	Log.Tang.
60	76604.44	119175.36	155572.38	9.8842540	10.0761865
59	76585.74	119104.98	155518.48	9.8841479	10.0759299
58	76567.03	119034.65	155464.62	9.8840418	10.0756734
57	76548.32	118964.37	155410.81	9.8839357	10.0754169
56	76529.60	118894.14	155357.07	9.8838294	10.0751604
55	76510.87	118823.95	155303.35	9.8837232	10.0749040
54	76492.14	118753.82	155249.70	9.8836168	10.0746476
53	76473.40	118683.73	155196.09	9.8835104	10.0743912
52	76454.65	118613.69	155142.54	9.8834039	10.0741348
51	76435.90	118543.70	155089.04	9.8832974	10.0738785
50	76417.14	118473.76	155035.58	9.8831908	10.0736222
49	76398.47	118403.87	154982.18	9.8830841	10.0733659
48	76379.60	118334.02	154928.82	9.8829774	10.0731096
47	76360.82	118264.22	154875.52	9.8828706	10.0728534
46	76342.04	118194.47	154822.26	9.8827638	10.0725972
45	76323.25	118124.77	154769.06	9.8826568	10.0723410
44	76304.45	118055.12	154715.90	9.8825499	10.0720848
43	76285.64	117985.51	154662.80	9.8824428	10.0718287
42	76266.83	117915.95	154609.74	9.8823357	10.0715726
41	76248.01	117846.44	154556.73	9.8822285	10.0713165
40	76229.19	117776.98	154503.78	9.8821213	10.0710604
39	76210.36	117707.56	154450.87	9.8820140	10.0708044
38	76191.52	117638.20	154398.01	9.8819067	10.0705484
37	76172.68	117568.88	154345.10	9.8817992	10.0702924
36	76153.83	117499.60	154292.44	9.8816918	10.0700364
35	76134.97	117430.38	154239.73	9.8815842	10.0697805
34	76116.11	117361.20	154187.06	9.8814766	10.0695245
33	76097.24	117292.07	154134.45	9.8813689	10.0691686
32	76078.37	117222.98	154081.89	9.8812612	10.0690128
31	76059.49	117153.95	154029.37	9.8811534	10.0687569
30	76040.60	117084.96	153576.90	9.8810455	10.0685011
29	76021.70	117016.01	153924.49	9.8809376	10.0682453
28	76002.80	116947.12	153872.12	9.8808296	10.0679895
27	75983.89	116878.27	153819.80	9.8807215	10.0677338
26	75964.98	116809.47	153767.52	9.8806134	10.0674780
25	75946.06	116740.71	153715.30	9.8805052	10.0672223
24	75927.13	116672.00	153663.12	9.8803970	10.0669666
23	75908.20	116603.34	153611.00	9.8802887	10.0667110
22	75889.26	116534.72	153558.92	9.8801803	10.0664554
21	75870.31	116466.15	153506.89	9.8800719	10.0661997
20	75851.36	116397.63	153454.91	9.8799634	10.0659441
19	75832.40	116329.16	153402.97	9.8798548	10.0656886
18	75813.43	116260.73	153351.09	9.8797462	10.0654330
17	75794.46	116192.34	153299.25	9.8796375	10.0651775
16	75775.48	116124.00	153247.46	9.8795287	10.0649220
15	75756.50	116055.71	153195.72	9.8794199	10.0646665
14	75737.51	115987.47	153144.03	9.8793110	10.0644111
13	75718.51	115919.27	153092.38	9.8792021	10.0641556
12	75699.50	115851.11	153040.78	9.8790930	10.0639002
11	75680.49	115783.01	152989.23	9.8789840	10.0636448
10	75661.47	115714.95	152937.73	9.8788748	10.0633895
9	75642.45	115646.93	152886.27	9.8787656	10.0631341
8	75623.42	115578.96	152834.87	9.8786563	10.0628788
7	75604.39	115511.04	152783.51	9.8785470	10.0626235
6	75585.35	115443.16	152732.19	9.8784376	10.0623682
5	75566.30	115375.32	152680.93	9.8783281	10.0621129
4	75547.24	115307.54	152629.71	9.8782186	10.0618577
3	75528.18	115239.79	152578.54	9.8781090	10.0616025
2	75509.11	115172.10	152527.41	9.8779994	10.0613473
1	75490.04	115104.45	152476.32	9.8778896	10.0610921
0	75470.96	115036.84	152425.31	9.8777799	10.0608369

Grad. 41. | 48. Grad.

Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.	Min.	Sinus	Tang.	Secant.	Log. Sin.	Log. Tang.
0	65605.90	86928.68	132301.30	9.8169429	9.9391631	60	75470.96	115036.96	152425.31	9.8777799	10.0608369
1	65627.85	86979.76	132534.82	9.8170882	9.9394182	59	75451.87	114969.28	152374.33	9.8776700	10.0605818
2	65649.80	87030.87	132568.37	9.8172334	9.9396733	58	75432.78	114901.76	152323.39	9.8775601	10.0603267
3	65671.74	87082.00	132601.94	9.8173785	9.9399284	57	75413.68	114834.29	152272.50	9.8774501	10.0600716
4	65693.67	87133.16	132635.54	9.8175235	9.9401835	56	75394.57	114766.87	152221.66	9.8773401	10.0598165
5	65715.60	87184.35	132669.18	9.8176685	9.9404385	55	75375.46	114699.49	152170.87	9.8772300	10.0595615
6	65737.52	87235.56	132702.84	9.8178133	9.9406936	54	75356.34	114632.15	152120.12	9.8771198	10.0593064
7	65759.44	87286.80	132736.53	9.8179581	9.9409486	53	75337.21	114564.86	152069.42	9.8770096	10.0590514
8	65781.35	87338.05	132770.25	9.8181028	9.9412036	52	75318.08	114497.62	152018.76	9.8768993	10.0587964
9	65803.26	87387.35	132803.99	9.8182474	9.9414585	51	75298.94	114430.41	151968.15	9.8767889	10.0585415
10	65825.16	87440.67	132837.76	9.8183919	9.9417135	50	75279.80	114363.26	151917.59	9.8766785	10.0582865
11	65847.06	87492.01	132871.56	9.8185364	9.9419684	49	75260.65	114296.15	151867.08	9.8765680	10.0580316
12	65868.95	87543.38	132905.39	9.8186807	9.9422233	48	75241.49	114229.08	151816.61	9.8764574	10.0577767
13	65890.83	87594.78	132939.25	9.8188250	9.9424782	47	75222.33	114162.06	151766.19	9.8763468	10.0575218
14	65912.71	87646.20	132973.14	9.8189692	9.9427331	46	75203.16	114095.08	151715.81	9.8762361	10.0572669
15	65934.58	87697.65	133007.06	9.8191133	9.9429879	45	75183.98	114028.15	151665.48	9.8761253	10.0570121
16	65956.45	87749.12	133041.00	9.8192573	9.9432428	44	75164.80	113961.26	151615.20	9.8760145	10.0567572
17	65978.31	87800.62	133074.97	9.8194012	9.9434976	43	75145.61	113894.41	151564.96	9.8759035	10.0565024
18	66000.17	87852.15	133108.97	9.8195450	9.9437524	42	75126.41	113827.61	151514.77	9.8757927	10.0562476
19	66022.02	87903.70	133143.00	9.8196888	9.9440072	41	75107.21	113760.85	151464.62	9.8756816	10.0559928
20	66043.86	87955.28	133177.06	9.8198322	9.9442619	40	75088.00	113694.14	151414.52	9.8755706	10.0557381
21	66065.70	88006.89	133211.15	9.8199761	9.9445166	39	75068.79	113627.47	151364.47	9.8754594	10.0554834
22	66087.53	88058.52	133245.27	9.8201196	9.9447714	38	75049.57	113560.85	151314.46	9.8753482	10.0552286
23	66109.36	88110.18	133279.42	9.8202630	9.9450261	37	75030.34	113494.27	151264.50	9.8752369	10.0549739
24	66131.18	88161.86	133313.59	9.8204063	9.9452807	36	75011.11	113427.73	151214.59	9.8751256	10.0537193
25	66153.00	88213.57	133347.79	9.8205496	9.9455354	35	74991.87	113361.24	151164.72	9.8750142	10.0544646
26	66174.81	88265.31	133382.02	9.8206927	9.9457900	34	74972.62	113294.79	151114.89	9.8749027	10.0542100
27	66196.62	88317.07	133416.28	9.8208358	9.9460447	33	74953.37	113228.39	151065.11	9.8747912	10.0539593
28	66218.42	88368.86	133450.57	9.8209788	9.9462993	32	74934.11	113162.03	151015.38	9.8746795	10.0537007
29	66240.22	88420.68	133484.89	9.8211217	9.9465539	31	74914.84	113095.71	150965.6[illegible]	9.8745679	10.0534461
30	66261.01	88472.53	133519.24	9.8212646	9.9468084	30	74895.57	113029.44	150916.05	9.8744561	10.0531916
31	66283.79	88524.40	133553.62	9.8214073	9.9470630	29	74876.29	112963.21	150866.45	9.8743443	10.0529370
32	66305.57	88576.30	133588.03	9.8215500	9.9473175	28	74857.01	112897.02	150816.90	9.8742325	10.0526825
33	66327.34	88628.22	133622.46	9.8216926	9.9475720	27	74837.72	112830.88	150767.39	9.8741205	10.0524280
34	66349.11	88680.17	133656.92	9.8218351	9.9478265	26	74818.42	112764.78	150717.93	9.8740085	10.0521735
35	66370.87	88732.15	133691.41	9.8219775	9.9480810	25	74799.12	112698.72	150668.52	9.8738965	10.0519190
36	66392.62	88784.16	133725.94	9.8221198	9.9483355	24	74779.81	112632.71	150619.15	9.8737844	10.0516645
37	66414.37	88836.20	133760.49	9.8222621	9.9485899	23	74760.49	112566.74	150569.82	9.8736721	10.0514101
38	66436.11	88888.26	133795.07	9.8224042	9.9388443	22	74741.17	112500.81	150520.54	9.8735599	10.0511557
39	66457.85	88940.34	133829.68	9.8225463	9.9490987	21	74721.84	112434.93	150471.31	9.8734476	10.0509013
40	66479.59	88992.45	133864.32	9.8226883	9.9493531	20	74702.51	112369.09	150422.11	9.8733352	10.0506469
41	66501.32	89044.59	133898.99	9.8228301	9.9496075	19	74683.17	112303.29	150372.98	9.8732227	10.0503925
42	66523.04	89096.75	133933.69	9.8229721	9.9498619	18	74663.82	112237.54	150323.87	9.8731102	10.0501381
43	66544.75	89148.94	133968.42	9.8231138	9.9501162	17	74644.46	112171.83	150274.81	9.8729976	10.0498838
44	66566.46	89201.16	134003.17	9.8232555	9.9503705	16	74625.10	112106.16	150225.80	9.8728849	10.0496295
45	66588.17	89253.41	134037.95	9.8233971	9.9506248	15	74605.74	112040.53	150176.83	9.8727722	10.0493752
46	66609.87	89305.69	134072.76	9.8235386	9.9508791	14	74586.37	111974.95	150127.91	9.8726594	10.0491299
47	66631.56	89357.99	134107.61	9.8236800	9.9511334	13	74566.99	111909.41	150079.03	9.8725466	10.0488666
48	66653.25	89410.32	134142.48	9.8238213	9.9513876	12	74547.60	111843.91	150030.20	9.8724337	10.0486124
49	66674.93	89462.68	134177.18	9.8239626	9.9516419	11	74528.21	111778.46	149981.41	9.8723207	10.0483581
50	66696.61	89515.06	134212.32	9.8241037	9.9518961	10	74508.81	111713.05	149932.67	9.8722076	10.0481039
51	66718.28	89567.47	134247.28	9.8242448	9.9521503	9	74489.40	111647.68	149883.97	9.8720945	10.0478497
52	66739.94	89619.91	134282.27	9.8243858	9.9524045	8	74469.99	111582.35	149835.31	9.8719813	10.0475955
53	66761.60	89672.38	134317.29	9.8245267	9.9526587	7	74450.57	111517.06	149786.70	9.8718681	10.0473413
54	66783.26	89724.87	134352.34	9.8246676	9.9529128	6	74431.15	111451.82	149738.13	9.8717543	10.0470872
55	66804.95	89777.39	134387.42	9.8248083	9.9531670	5	74411.72	111386.62	149689.61	9.8716414	10.0468330
56	66826.55	89829.94	134422.53	9.8249499	9.9534211	4	74392.29	111321.46	149641.13	9.8715279	10.0465789
57	[illegible]	89882.52	134457.67	9.8250890	9.9536752	3	74372.85	111215.35	149592.70	9.8714144	10.0463248
58	[illegible]	[illegible]	134492.84	9.8252301	9.9539292	2	74353.40	111191.27	149544.30	9.8713008	10.0460707
59	[illegible]	[illegible]	[illegible]	9.8253725	9.9541834	1	74333.94	111126.24	149495.96	9.8711872	10.0458166
60	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	9.9544374	0	74314.48	111061.25	149474.65	9.8710735	10.0455626

66913.06

42. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log.Sin.*	*Log.Tang.*
0	66913.26	90040.42	134563.27	9.8255109	9.9544374
1	66934.67	90093.09	134598.53	9.8256512	9.9546915
2	66956.28	90145.80	134633.82	9.8257913	9.9549455
3	66977.88	90198.54	134669.14	9.8259314	9.9551995
4	66999.48	90251.31	134704.49	9.8260715	9.9575535
5	67021.07	90304.11	134739.87	9.8262114	9.9557075
6	67042.66	90356.94	134775.28	9.8263512	9.9559615
7	67064.24	90409.79	134810.72	9.8264910	9.9562154
8	67085.82	90462.67	134846.19	9.8266307	9.9564692
9	67107.39	90515.58	134881.69	9.8267703	9.9567233
10	67128.95	90568.51	134917.21	9.8269098	9.9569772
11	67150.51	90621.47	134952.77	9.8270493	9.9572311
12	67172.06	90674.46	134988.36	9.8271887	9.9574850
13	67193.61	90727.48	135023.98	9.8273279	9.9577389
14	67215.51	90780.53	135059.63	9.8274671	9.9579928
15	67236.68	90833.60	135095.31	9.8276063	9.9582465
16	67258.21	90886.71	135131.02	9.8277453	9.9585004
17	67279.73	90939.84	135166.76	9.8278843	9.9587542
18	67301.25	90993.00	135202.54	9.8270231	9.9590080
19	67322.76	91046.19	135238.34	9.8281619	9.9592618
20	67344.27	91099.41	135274.17	9.8283006	9.9595155
21	67365.77	91152.65	135310.03	9.8284393	9.9597693
22	67387.27	91205.92	135345.93	9.8285778	9.9600230
23	67408.76	91259.22	135381.86	9.8287163	9.9602767
24	67430.24	91312.55	135417.81	9.828854	9.9605305
25	67451.72	91365.91	135453.79	9.8289930	9.9607842
26	67473.19	91419.29	135489.81	9.8291312	9.9610378
27	67494.66	91472.70	135525.85	9.8292694	9.9612915
28	67516.12	91526.15	135561.93	9.8294075	9.9615452
29	67537.57	91579.62	135598.04	9.8295454	9.9617988
30	67559.02	91633.12	135634.17	9.8296833	9.9620555
31	67580.46	91686.65	135670.34	9.8298211	9.9623061
32	67601.90	91740.20	135706.54	9.8299589	9.9625597
33	67623.33	91793.79	135742.77	9.8300966	9.9628133
34	67644.76	91847.40	135779.03	9.8302342	9.9630669
35	67666.18	91901.04	135815.32	9.8303717	9.9633204
36	67687.60	91954.71	135851.54	9.8305091	9.9635740
37	67709.01	92008.41	135888.00	9.8306464	9.9638275
38	67730.41	92062.14	135924.38	9.8307837	9.9640811
39	67751.81	92115.90	135960.80	9.8309209	9.9643346
40	67773.20	92169.68	135997.25	9.8310580	9.9645881
41	67794.59	92223.50	136033.72	9.8311950	9.9648416
42	67815.97	92277.34	136070.23	9.8313320	9.9650951
43	67837.34	92331.22	136106.77	9.8314688	9.9653486
44	67858.71	92385.12	136143.34	9.8316056	9.9656020
45	67880.07	92439.05	136179.95	9.8317423	9.9658555
46	67901.43	92493.01	136216.58	9.8318789	9.9661089
47	67922.78	92547.00	136253.24	9.8320155	9.9663623
48	67944.13	92601.01	136289.94	9.8321919	9.9666157
49	67965.47	92655.06	136326.67	9.8322883	9.9668692
50	67986.81	92709.14	136363.43	9.8324246	9.9671225
51	68008.14	92763.24	136400.22	9.8325609	9.9673759
52	68029.46	92817.38	136437.04	9.8326970	9.9676293
53	68050.78	92871.54	136473.89	9.8328331	9.9678827
54	68072.09	92925.73	136510.78	9.8329691	9.9681360
55	68093.39	92979.96	136547.70	9.8331050	9.9683893
56	68114.69	93034.21	136584.64	9.8332408	9.9686427
57	68135.99	93088.49	136621.62	9.8333766	9.9688960
58	68157.28	93142.80	136658.63	9.8335122	9.9691493
59	68178.56	93197.14	136695.67	9.8336476	9.9694026
60	68199.84	93251.51	136732.75	9.8337833	9.9696559

47. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log.Sin.*	*Log.Tang.*
60	74314.48	111061.25	149447.65	9.8710735	10.0455626
59	74295.01	110996.30	149399.40	9.8709597	10.0453085
58	74275.54	110931.40	149351.18	9.8708458	10.0450545
57	74256.06	110866.53	149303.01	9.8707319	10.0446005
56	74236.57	110801.71	149254.88	9.8706179	10.0445465
55	74217.08	110736.93	149206.80	9.8705039	10.0442925
54	74197.58	110672.19	149158.75	9.8703898	10.0440385
53	74178.08	110607.50	149110.76	9.8702756	10.0437846
52	74158.57	110542.84	149062.80	9.8701613	10.0435306
51	74139.05	110478.23	149014.89	9.8700470	10.0432767
50	74119.53	110413.65	148967.03	9.8699326	10.0430228
49	74100.00	110349.12	148919.20	9.8698182	10.0427689
48	74080.46	110284.63	148871.42	9.8697037	10.0425150
47	74060.92	110220.19	148823.69	9.8695891	10.0422611
46	74041.37	110155.78	148775.99	9.8694744	10.0420073
45	74021.81	110091.41	148728.34	9.8693597	10.0417535
44	74002.25	110027.09	148680.73	9.8692449	10.0414996
43	73982.68	109962.81	148633.17	9.8691301	10.0412458
42	73963.11	109898.56	148585.65	9.8690152	10.0409920
41	73943.53	109834.36	148538.17	9.8689002	10.0407382
40	73923.94	109770.20	148490.73	9.8687851	10.0404845
39	73904.35	109706.08	148443.34	9.8686700	10.0401307
38	73884.75	109642.01	148395.99	9.8685548	10.0399770
37	73865.15	109577.97	148348.68	9.8684396	10.0397233
36	73845.54	109513.97	148301.42	9.8683241	10.0394695
35	73825.92	109450.02	148254.20	9.8682088	10.0392158
34	73806.29	109386.10	148207.02	9.8680934	10.0389622
33	73786.66	109322.23	148159.88	9.8679779	10.0387085
32	73767.02	109258.40	148112.78	9.8678623	10.0384548
31	73747.38	109194.60	148065.73	9.8677406	10.0382012
30	73727.73	109130.85	148018.72	9.8676309	10.0379475
29	73708.08	109067.14	147971.76	9.8675151	10.0376939
28	73688.42	109003.47	147924.83	9.8673992	10.0374403
27	73668.75	108939.83	147877.95	9.8672833	10.0371867
26	73649.07	108876.24	147831.11	9.8671673	10.0369331
25	73629.39	108812.69	147784.31	9.8670512	10.0366796
24	73609.71	108749.18	147737.55	9.8669351	10.0364260
23	73590.02	108685.71	147690.84	9.8668189	10.0361725
22	73570.32	108622.28	147644.17	9.8667026	10.0359189
21	73550.61	108558.89	147597.54	9.8665863	10.0356654
20	73530.90	108495.54	147550.95	9.8664699	10.0354119
19	73511.18	108432.23	147504.40	9.8663534	10.0351584
18	73491.46	108368.96	147457.90	9.8662369	10.0349049
17	73471.73	108305.73	147411.44	9.8661203	10.0346514
16	73451.99	108242.54	147365.01	9.8660036	10.0343980
15	73432.25	108179.39	147318.64	9.8658868	10.0341445
14	73412.50	108116.28	147272.30	9.8657700	10.0338911
13	73392.75	108053.21	147226.00	9.8656531	10.0336377
12	73372.99	107990.18	147179.75	9.8655362	10.0333843
11	73353.22	107927.18	147133.53	9.8654192	10.0331308
10	73333.45	107864.23	147087.36	9.8653021	10.0328775
9	73313.67	107801.32	147041.23	9.8651849	10.0326241
8	73293.88	107738.44	146995.14	9.8650677	10.0323707
7	73274.09	107675.61	146949.10	9.8649504	10.0321173
6	73254.29	107612.82	146903.09	9.8648331	10.0318640
5	73234.48	107550.06	146857.13	9.8647156	10.0316107
4	73214.67	107487.34	146811.20	9.8645981	10.0313573
3	73194.85	107424.67	146765.32	9.8644806	10.0311040
2	73175.03	107361.03	146719.48	9.8643629	10.0308507
1	73155.20	107299.43	146673.68	9.8642452	10.0305974
0	73135.37	107236.87	146627.91	9.8641275	10.0303441

43. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log.Sin.*	*Log.Tang.*
0	68199.84	93251.51	136731.75	9.8337833	9.9696559
1	68221.11	93305.91	136769.85	9.8339188	9.9699091
2	68242.37	93360.34	136806.99	9.8340541	9.9701224
3	68263.63	93414.79	136844.16	9.8341894	9.9704157
4	68284.88	93469.28	136881.36	9.8343246	9.9706689
5	68306.13	93523.80	136918.59	9.8344597	9.9709221
6	68327.37	93578.34	136955.86	9.8345948	9.9711754
7	68348.61	93632.92	136993.15	9.8347297	9.9714286
8	68369.84	93687.53	137030.48	9.8348646	9.9716818
9	68391.07	93742.16	137067.84	9.8349994	9.9719350
10	68412.29	93796.83	137105.23	9.8351341	9.9721882
11	68433.50	93851.52	137142.66	9.8352688	9.9724413
12	68454.71	53906.25	137180.11	9.8354033	9.9726945
13	68475.91	93961.01	137217.60	9.8355378	9.9729477
14	68497.11	94015.79	137255.12	9.8356722	9.9732008
15	68518.30	94070.61	137292.68	9.8358066	9.9734539
16	68539.48	94125.45	137330.26	9.8359408	9.9737071
17	68560.66	94180.33	137367.88	9.8360750	9.9739602
18	68581.83	94235.33	137405.53	9.8362091	9.9742133
19	68603.00	94290.17	137443.21	9.8363431	9.9744664
20	68624.16	94345.13	137480.92	9.8364771	9.9747195
21	68645.32	94400.13	137518 67	9.8366109	9.9749726
22	68666.47	94455.16	137556.45	9.8367447	9 9752257
23	68687.61	94510.21	137594.26	9.8368784	9.9754787
24	68705.75	94565.30	137632.10	9.8370121	9 9757318
25	63729.88	94620.42	137669.98	9.8371456	9.9759849
26	68751.01	94675.56	137707.89	9.8372791	9.9762372
27	68772.13	94730.74	137745.83	9.8374125	9.9764909
28	68793.24	94785.95	137783.30	9.8375458	9.9767440
29	68814.35	94841.19	137821.81	9.8376790	9.9769970
30	68835.45	94896.46	137859.85	9.8378122	9.9772500
31	68856.55	94951.76	137807.92	9.8379453	9.9775030
32	68877.64	95007.09	137936.02	9.8380783	9.9777560
33	68898.73	9,062.45	137974.16	9.8382112	9.9780090
34	68919.81	95117.84	138012.33	9 8383441	9.9782620
35	68940.89	95173.26	138050.53	9.8384769	9.9785149
36	68961.96	95228.72	138088.77	9.8386096	9.9787679
37	68983.02	95284.20	138127.04	9.8387422	9.9790209
38	69004.07	95339.71	138165.34	9.8368747	9.9792738
39	69025.12	95395.26	138203.67	9.8390072	9.9795268
40	69046.17	95450.83	138242.04	9 8391396	9.9797797
41	69067.21	95506.44	138280.44	9.8392719	9.9800326
42	69088.24	95562.08	138318.87	9.8394041	9.9802856
43	69109.27	95617.74	138357 34	9.8395363	9 9805385
44	69130.29	95673 44	138395.84	9.8396684	9 9807914
45	69151.31	95729.17	138434 77	9.8398004	9.9810443
46	69172.32	95784 94	138472.94	9.8399323	9.9812972
47	69193.32	95840.73	138511.54	9.8400642	9.9815501
48	69214.32	95896.55	138550.17	9.8401959	9.3818030
49	69235.31	95952.41	138588.83	9.8403276	9.9810559
50	69256.30	96008.29	138087 53	9.8404593	9 9813087
51	69277.28	96064.21	138666.26	9.8405908	9.9825616
52	69298.25	96120.16	138705.03	9 8407223	9.9828145
53	69319.22	96176.14	138743.83	9.8408537	9.9830673
54	69342.18	96232.15	138,82.66	9.8409850	9.9835202
55	69361.24	96288.19	138821.53	9 8411162	9.9835730
56	69382.09	96344.27	1,8 6.42	9.8412474	9.9838259
57	69403 0.4	96400.37	138899.36	9 8413785	9 9840787
58	69423.92	96456.51	138938.32	9.8415095	9.9843315
59	69444.9	96511.63	138977.32	9.8416404	9.9843844
60	69465.84	96568.88	139016.36	9.8417710	9.9048372

46. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log.Sin.*	*Log. Tang.*
60	77135.37	107236.87	146527.92	9.8641275	10.0303441
59	73115.53	107174.35	146582.20	9.8640096	10.0300909
58	73095 68	307111.87	146536.52	9.8638917	10.0298376
57	73075.83	107049.43	146490.88	9.8637737	10.0293843
56	73051.97	106987.02	146445.29	9.8636557	10.0293311
55	73036.10	106924.66	146399.73	9.8635376	10.0290779
54	73016.23	106862.33	146354.22	9.8634194	10.0288246
53	72996.35	106800.04	146308.75	9.8613011	10.0285714
52	72976.46	106737.79	146263.31	9 8631828	10.0283182
51	72956.57	106675.58	146217.92	9.8630644	10.0300650
50	72936 67	106613.41	146112.57	9.8629460	10.0278118
49	72916.77	106551.28	146127.26	9.8628274	10.0275587
48	72896.86	106489.12	146081.98	9.8627088	10.0273055
47	72876.94	106427.13	146036.75	9.8625902	10.0270523
46	72857 01	106365.11	45991.56	9.8624714	10.0267992
45	72837.09	106303.13	145946.41	9.8625526	10.0265461
44	72817.16	106241.19	145901.30	9.8622338	10.0261929
43	72797.22	106179.29	145856 23	9 8621148	10.0260398
42	72777.27	106117.42	145811.20	9.8619958	10.0257867
41	72757.32	106055 60	145766.21	9.8618767	10 0255335
40	72737.32	105993.81	145721.27	9 8617576	10.0252805
39	72717 40	105932.06	145676.36	9.8616383	10.0250274
38	72697.43	105870.34	145631.49	9.8615190	10.0247743
37	72677.45	105808.67	145586.66	9.8613997	10.0245213
36	72657.47	105747.03	145541.87	9.8612803	10.0242682
35	72637.48	105685.44	145597.12	9.8611608	10.0240151
34	72617.48	105623.88	145452.41	9 8510412	11.0237621
33	72597.48	105562 35	145407.74	9.8609215	10.0235091
32	72577.47	105500.87	145363.11	9.8508018	10.0232560
31	72557.46	105439.42	145318.52	9.8606821	10.0230030
30	72537.44	105378 01	145273.97	9 8605922	10.0227500
29	72517.41	105316.64	145229.46	9 8604423	10.0224970
28	72497.38	105255.31	145184.98	9.8603223	10.0222440
27	72477.34	105194.01	145140.55	9.8602022	10.0219910
26	72457.29	105132.75	145096.16	9.8600821	10.0217380
25	72437.24	105071.53	145051.81	9.8599619	10.0214851
24	72417.18	105010.34	145007.49	9.8598416	10.0212321
23	72397.12	104949.20	144963.22	9.8597213	10.0209791
22	72377.05	104888.09	144918.98	9.8596009	10.0207261
21	72356.98	104827.02	144884 78	9.8594804	10.0194732
20	72346.90	104765.98	144830.63	9.8593599	10.0202203
19	72316 81	104704.98	144786.51	9.8592393	10.0199674
18	72296.71	104644.02	144742.43	9.8591186	10.0197144
17	72276.61	104583.10	144698.39	9.8589978	10.0194615
16	72256.51	104522.21	144654.36	9.8588770	10.0192086
15	72236.40	104461.36	144610.43	9.8587561	10.0189557
14	72216.28	104400.55	144566.58	9.8586351	10.0187028
13	72196.15	104339.77	144522.62	9.8585148	10.0184499
12	72176.02	104279.04	144478.78	9.8583929	10.0181970
11	72155.88	104218.33	144434.97	9.8582718	10.0179441
10	72135.74	104157.67	144391.20	9.8581505	10.0176913
9	72115.59	104097.04	144347.48	9.8580292	10.0174384
8	72095.44	104036.45	144303.79	9.8579078	10.0171855
7	72075.28	103975.89	144260.13	9.8577863	10.0169327
6	72055.11	103915.37	144216.52	9.8576648	10.0166798
5	72034.94	103854.89	144172.95	9.8575432	10.0164270
4	72014.76	103794.45	144129.41	9.8574215	10.0161741
3	71994.57	103734.04	144085.91	9.8572998	10.0159213
2	71974.38	103673.67	144042.46	9.8571779	10.0156685
1	71954.18	103613 33	143999.04	9.8570561	10.0154156
0	71933.98	103553.03	143955.61	9.8569341	10.0151628

66455.84

44. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log.Sin.*	*Log.Tang.*
0	69465.84	96568.88	139016.36	9.8417713	9.9848372
1	69486.76	96625.11	139055.49	9.8419021	9.9850900
2	69505.67	96681.57	139094.53	9.8420328	9.9853428
3	69528.58	96737.67	139133.66	9.8421634	9.9855956
4	69549.49	96794.00	139172.83	9.8422939	9.9858484
5	69570.39	96850.35	139212.03	9.8424244	9.9861012
6	69591.28	96906.74	139251.27	9.8425548	9.9863540
7	69612.17	96963.16	139290.54	9.8426851	9.9866068
8	69633.05	97019.62	139329.85	9.8428154	9.9868596
9	69653.92	97076.10	139369.18	9.8429456	9.9871123
10	69674.75	97132.62	139408.56	9.8430757	9.9873651
11	69695.65	97189.17	139447.95	9.8432057	9.9876179
12	69716.51	97245.75	139487.40	9.8433356	9.9878706
13	69737.36	97302.36	139526.88	9.8434655	9.9881234
14	69758.21	97359.01	139566.39	9.8435953	9.9883761
15	69779.05	97415.69	139605.93	9.8437250	9.9886289
16	69799.88	97472.40	139645.51	9.8438547	9.9888816
17	69820.71	97529.14	139685.12	9.8439842	9.9891344
18	69841.53	97585.91	139724.77	9.8441137	9.9893871
19	69862.34	97642.72	139764.45	9.8442432	9.9896399
20	69883.15	97699.56	139804.16	9.8443725	9.9898926
21	69903.96	97756.43	139843.91	9.8445018	9.9901453
22	69924.76	97813.33	139883.69	9.8446310	9.9903981
23	69945.55	97870.27	139923.51	9.8447601	9.9906508
24	69966.33	97927.24	139963.36	9.8448891	9.9909035
25	69987.11	97984.24	140003.25	9.8450181	9.9911562
26	70007.89	98041.27	140043.17	9.8451470	9.9914089
27	70028.66	98098.33	140083.13	9.8452758	9.9916616
28	70049.42	98155.43	140123.12	9.8454045	9.9919143
29	70070.12	98212.56	140163.15	9.8455332	9.9921670
30	70090.93	98269.73	140203.21	9.8456618	9.9924197
31	70111.67	98326.92	140243.30	9.8457903	9.9926724
32	70132.41	98384.15	140283.43	9.8459188	9.9929251
33	70153.14	98441.41	140323.60	9.8460471	9.9931778
34	70173.87	98498.71	140363.80	9.8461754	9.9934305
35	70194.59	98498.03	140404.03	9.8463036	9.9936832
36	70215.30	98613.39	140444.30	9.8464318	9.9939359
37	70236.01	98670.79	140484.60	9.8465599	9.9941886
38	70256.71	98728.21	140524.94	9.8466879	9.9944413
39	70277.41	98785.67	140565.32	9.8468158	9.9946940
40	70298.10	98843.16	140605.73	9.8469436	9.9949466
41	70318.79	98900.69	140646.17	9.8470714	9.9951993
42	70339.47	98958.25	140686.65	9.8471991	9.9954520
43	70360.14	99015.84	140727.17	9.8473267	9.9957047
44	70380.81	99073.46	140767.72	9.8474543	9.9959573
45	70401.47	99131.11	140808.31	9.8475817	9.9962100
46	70422.13	99188.81	140848.93	9.8477091	9.9964627
47	70442.78	99246.54	140889.58	9.8478365	9.9967154
48	70463.42	99304.29	140930.28	9.8479637	9.9969680
49	70484.60	99362.08	140971.00	9.8480909	9.9972207
50	70504.69	99419.91	141011.77	9.848218.	9.9974734
51	70525.32	99477.77	141052.56	9.8483450	9.9977260
52	70545.94	99535.66	141093.40	9.8484720	9.9979787
53	70566.55	99593.28	141134.27	9.8485989	9.9982314
54	70587.16	99651.54	141175.17	9.8487257	9.9984840
55	70607.76	99709.53	141216.11	9.8488524	9.9987367
56	70628.35	99767.56	141257.09	9.8489791	9.9989893
57	70648.94	99825.62	141298.10	9.8491057	9.9992420
58	70669.53	99883.71	141339.15	9.8492322	9.9994947
59	70690.11	99941.84	141380.24	9.8493586	9.9997473
60	70710.68	100000.00	141421.36	9.8494850	10.000000

45. Grad.

Minut.	Sinus	Tang.	Secant.	*Log.Sin.*	*Log. Tang.*
60	71933.98	103553.03	143955.65	9.8569341	10.0151628
59	71913.77	103492.77	143912.31	9.8568121	10.0149100
58	71893.55	103432.54	143869.00	9.8566900	10.0146572
57	72873.33	103372.35	143825.74	9.8565678	10.0144044
56	71853.10	103312.20	143782.51	9.8564455	10.0141516
55	71832.87	103252.08	143739.32	9.8563232	10.0138988
54	71812.63	163191.99	143696.16	9.8562008	10.0136460
53	71792.38	103131.95	143653.05	9.8560784	10.0133932
52	71772.13	103071.94	143609.97	9.8559558	10.0131404
51	71751.87	103011.96	143566.93	9.8558332	10.0128877
50	71731.61	102952.03	143523.93	9.8557106	10.0126349
49	71711.34	102892.12	143480.97	9.8555878	10.0123821
48	71691.06	102832.26	143438.05	9.8554650	10.0121294
47	71670.78	102772.43	143395.16	9.8553421	10.0118766
46	71650.49	102712.63	143352.31	9.8552192	10.0116239
45	71630.19	102652.87	143309.50	9.8550961	10.0113711
44	71609.89	102593.15	143266.72	9.8549730	10.0111184
43	71589.58	102533.46	143223.99	9.8548499	10.0108656
42	71569.27	102473.81	143181.29	9.8547265	10.0106129
41	71548.95	102414.19	143138.63	9.8546033	10.0103601
40	71528.63	102854.61	143096.00	9.8544799	10.0101014
39	72508.30	102295.06	143053.42	9.8543645	10.0098547
38	71487.96	102235.55	143010.87	9.8542329	10.0096019
37	71467.62	102176.08	142968.36	9.8541093	10.0093492
36	71447.27	102116.64	142925.88	9.8539856	10.0090965
35	71426.91	102057.23	142883.48	9.8538619	10.0088438
34	71406.55	101997.86	142841.04	9.8537381	10.0085911
33	71386.18	101938.53	142798.68	9.8536142	10.0083384
32	71365.81	101879.23	142756.26	9.8534902	10.0080857
31	71345.43	101819.97	142714.07	9.8533662	10.0078330
30	71325.05	101760.74	142671.81	9.8532421	10.0075803
29	71304.66	101701.55	142629.61	9.8531179	10.0073276
28	71284.26	101642.37	142587.43	9.8529936	10.0070749
27	71263.85	101583.26	142545.29	9.8528693	10.0068222
26	71243.44	101524.17	142503.19	9.8527449	10.0065695
25	71223.02	101405.12	142461.12	9.8526204	10.0063168
24	71201.60	101406.10	142419.09	9.8524959	10.0060641
23	71182.17	101347.12	142377.10	9.8523713	10.0058114
22	71161.74	101288.17	142335.14	9.8522466	10.0055587
21	71141.30	101229.25	142293.23	9.8521218	10.0053060
20	71120.86	101170.37	142251.34	9.8519970	10.0050534
19	71100.41	101111.53	142209.50	9.8518721	10.0048007
18	71079.95	101052.72	142167.69	9.8517471	10.0045480
17	71059.48	100993.94	142125.92	9.8516220	10.0042953
16	71039.01	100935.20	142084.18	9.8514969	10.0040427
15	71018.54	100876.49	142042.48	9.8513717	10.0037900
14	70998.06	100817.82	142000.82	9.8512465	10.0035373
13	70977.57	100759.18	141959.19	9.8511211	10.0032846
12	70957.07	100700.58	141917.61	9.8509957	10.0030320
11	70936.57	100642.01	141876.05	9.8508781	10.0027793
10	70916.07	100583.47	141834.54	9.8507446	10.0025266
9	70895.56	100524.97	141793.05	9.8506190	10.0022740
8	70875.04	100465.51	141751.61	9.8504933	10.0020213
7	70854.51	100408.07	141710.20	9.8503675	10.0017686
6	70833.98	100349.68	141668.83	9.8502417	10.0015160
5	70813.45	100291.31	141627.49	9.8501157	10.0012633
4	70792.91	100232.98	141586.19	9.8499897	10.0010107
3	70772.36	100174.69	141544.93	9.8498637	10.0007580
2	70751.80	100116.42	141503.70	9.8497375	10.0005053
1	70731.24	100058.19	141462.51	9.8496113	10.0002527
0	70710.68	100000.00	141421.36	9.8494850	10.0000100

Tabula Logarithmorum

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
		64	1.8061800	128	2.1072100	191	2.2833012	256	2.4082400	320	2.5051500
1	0.0000000	65	1.8129133	129	2.1105897	193	2.2855573	257	2.4099331	321	2.5065050
2	0.3010300	66	1.8195439	130	2.1139433	194	2.2878017	258	2.4116197	322	2.5078519
3	0.4771212	67	1.8260748	131	2.1172713	195	2.2900346	259	2.4132998	323	2.5092025
4	0.6020600	68	1.8325089	132	2.1205739	196	2.2922561	260	2.4149733	324	2.5105456
5	0.6989700	69	1.8388491	133	2.1238516	197	2.2944662	261	2.4166405	325	2.5118834
6	0.7781512	70	1.8450980	134	2.1271048	198	2.2966652	262	2.4183013	326	2.5132176
7	0.8450980	71	1.8512583	135	2.1303338	199	2.2988531	263	2.4199557	327	2.5145477
8	0.9030900	72	1.8573325	136	2.1335389	200	2.3010300	264	2.4216039	328	2.5158738
9	0.9542425	73	1.8633229	137	2.1367206	201	2.3031961	265	2.4232459	329	2.5171959
10	1.0000000	74	1.8692317	138	2.1398791	202	2.3053514	266	2.4248816	330	2.5185139
11	1.0413927	75	1.8750613	139	2.1430148	203	2.3074960	267	2.4265113	331	2.5198280
12	1.0791812	76	1.8808136	140	2.1461280	204	2.3096302	268	2.4281348	332	2.5211381
13	1.1139433	77	1.8864907	141	2.1492291	205	2.3117539	269	2.4297523	333	2.5224442
14	1.1461280	78	1.8920946	142	2.1522803	206	2.3138672	270	2.4313638	334	2.5237465
15	1.1760913	79	1.8976271	143	2.1553360	207	2.3159703	271	2.4329693	335	2.5250448
16	1.2041200	80	1.9030900	144	2.1583625	208	2.3180633	272	2.4345689	336	2.5263393
17	1.2304489	81	1.9084850	145	2.1613680	209	2.3201463	273	2.4361626	337	2.5276299
18	1.2552725	82	1.9138138	146	2.1643528	210	2.3222193	274	2.4377506	338	2.5289167
19	1.2787536	83	1.9190781	147	2.1673173	211	2.3242824	275	2.4393327	339	2.5301997
20	1.3010300	84	1.9242793	148	2.1702617	212	2.3263359	276	2.4409091	340	2.5314789
21	1.3222193	85	1.9294189	149	2.1731863	213	2.3283796	277	2.4424798	341	2.5327544
22	1.3424227	86	1.9344984	150	2.1760913	214	2.3304138	278	2.4440448	342	2.5340261
23	1.3617278	87	1.9395192	151	2.1789769	215	2.3324385	279	2.4456042	343	2.5351941
24	1.3802112	88	1.9444827	152	2.1818436	216	2.3344537	280	2.4471580	344	2.5365584
25	1.3979400	89	1.9493900	153	2.1846914	217	2.3364597	281	2.4487063	345	2.5378191
26	1.4149733	90	1.9542425	154	2.1875207	218	2.3384565	282	2.4502491	346	2.5390761
27	1.4313638	91	1.9290414	155	2.1903317	219	2.3404441	283	2.4517864	347	2.5403295
28	1.4471580	92	1.9637878	156	2.1931246	220	2.3424227	284	2.4533183	348	2.5415792
29	1.4623980	93	1.9684829	157	2.1958996	221	2.3443923	285	2.4548449	349	2.5428254
30	1.4771212	94	1.9731278	158	2.1986571	222	2.3463530	286	2.4563660	350	2.5440680
31	1.4913617	95	1.9777236	159	2.2013971	223	2.3483049	287	2.4578819	351	2.5453071
32	1.5051500	96	1.9822712	160	2.2041200	224	2.3502480	288	2.4593925	352	2.5465427
33	1.5185139	97	1.9867717	161	2.2068259	225	2.3521825	289	2.4608978	353	2.5477747
34	1.5314789	98	1.9912261	162	2.2095150	226	2.3541084	290	2.4623980	354	2.5490033
35	1.5440680	99	1.9956352	163	2.2121876	227	2.3560259	291	2.4638930	355	2.5502283
36	1.5563025	100	2.0000000	164	2.2148438	228	2.3579348	292	2.4653828	356	2.5514500
37	1.5682017	101	2.0043214	165	2.2174839	229	2.3598355	293	2.4668676	357	2.5526682
38	1.5797836	102	2.0086002	166	2.2201081	230	2.3617278	294	2.4683473	358	2.5538830
39	1.5910646	103	2.0128372	167	2.2227165	231	2.3636120	295	2.4698220	359	2.5550944
40	1.6020600	104	2.0170333	168	2.2253093	232	2.3654880	296	2.4712917	360	2.5563025
41	1.6127839	105	2.0211893	169	2.2278867	233	2.3673559	297	2.4727564	361	2.5575072
42	1.6132493	106	2.0253059	170	2.2304489	234	2.3692159	298	2.4742163	362	2.5587086
43	1.6334685	107	2.0293838	171	2.2329961	235	2.3710679	299	2.4756712	363	2.5599066
44	1.6434527	108	2.0334238	172	2.2355284	236	2.3719120	300	2.4771212	364	2.5611014
45	1.6532125	109	2.0374265	173	2.2280461	237	2.3747483	301	2.4785665	365	2.5622929
46	1.6627578	110	2.0413927	174	2.2405492	238	2.3765769	302	2.4800069	366	2.5634811
47	1.6720979	111	2.0453230	175	2.2430380	239	2.3783979	303	2.4814426	367	2.5646661
48	1.6812412	112	2.0492180	176	2.2455127	240	2.3803112	304	2.4828736	368	2.5658478
49	1.6901961	113	2.0530784	177	2.2479733	241	2.3820170	305	2.4842998	369	2.5670264
50	1.6989700	114	2.0569049	178	2.2504200	242	2.3838154	306	2.4857214	370	2.5682017
51	1.7075702	115	2.0606978	179	2.2528530	243	2.3856063	307	2.4871384	371	2.5693739
52	1.7160033	116	2.0644580	180	2.2552725	244	2.3873898	308	2.4885507	372	2.5705429
53	1.7242759	117	2.0681859	181	2.2576786	245	2.3891661	309	2.4899585	373	2.5717088
54	1.7313938	118	2.0718820	182	2.2600714	246	2.3909351	310	2.4913617	374	2.5728716
55	1.7403627	119	2.0755470	183	2.2624511	247	2.3926969	311	2.4927604	375	2.5740313
56	1.7481880	120	2.0791812	184	2.2648178	248	2.3944517	312	2.4941546	376	2.5751878
57	1.7558748	121	2.0827854	185	2.2671717	249	2.3961993	313	2.4955443	377	2.5763413
58	1.7634280	122	2.0863598	186	2.2695129	250	2.3979400	314	2.4969296	378	2.5774918
59	1.7708520	123	2.0899051	187	2.2710416	251	2.3996737	315	2.4983105	379	2.5786392
60	1.7781512	124	2.0934217	188	2.2741578	252	2.4014005	316	2.4996871	380	2.5797836
61	1.7853298	125	2.0969100	189	2.2764618	253	2.4031205	317	2.5010593	381	2.5809250
62	1.7923917	126	2.1003705	190	2.2787536	254	2.4048337	318	2.5024271	382	2.5820634
63	1.7993405	127	2.1038037	191	2.2810334	255	2.4065401	319	2.5037907	383	2.5831988
64	1.8061800	128	2.1072100	192	2.2833012	256	2.4082400	320	2.5051500	384	2.5843312

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Lgarost.
385	2.5854607	449	2.6522463	513	2.7101174
386	2.5865873	450	2.6532125	514	2.7109631
387	2.5877110	451	2.6541765	515	2.7118072
388	2.5888317	452	2.6551384	516	2.7126497
389	2.5899496	453	2.6560982	517	2.7134905
390	2.5910646	454	2.6570558	518	2.7143298
391	2.5921768	455	2.6580114	519	2.7151674
392	2.5932861	456	2.6589648	520	2.7160033
393	2.5939925	457	2.6599162	521	2.7168377
394	2.5954962	458	2.6608655	522	2.7176705
395	3.5965971	459	2.6618127	523	2.7185017
396	2.5976952	460	2.6627578	524	2.7193313
397	2.5987905	461	2.6637009	525	2.7201593
398	2.5998831	462	2.6646420	526	2.7209857
399	2.6009729	463	2.6655810	527	2.7218106
400	2.6020600	464	2.6665180	528	2.7226339
401	2.6031444	465	2.6674529	529	2.7234557
402	2.6042260	466	2.6683859	530	2.7242759
403	2.6053010	467	2.6693169	531	2.7250945
404	2.6063814	468	3.6702458	532	2.7259116
405	2.6074550	469	2.6711728	533	2.7267272
406	2.6085260	470	2.6720979	534	2.7275413
407	2.6095944	471	2.6730209	535	2.7283538
408	2.6106602	472	2.6739420	536	2.7291648
409	2.6117233	473	2.6748611	537	2.7299743
410	2.6127839	474	2.6757783	538	2.7307823
411	2.6138418	475	2.6766936	539	2.7315888
412	2.6148972	476	2.6776069	540	2.7323938
413	2.6159500	477	2.6785184	541	2.7331973
414	2.6170003	478	2.6794279	542	2.7339993
415	2.6180481	479	2.6803355	543	2.7347998
416	2.6190933	480	2.6812412	544	2.7355989
417	2.6201360	481	2.6821451	545	2.7363965
418	2.6211763	482	2.6830470	546	2.7371916
419	2.6222140	483	2.6839471	547	2.7379873
420	2.6232493	484	2.6848454	548	2.7387806
421	2.6242821	485	2.6857417	549	2.7395723
421	2.6253124	486	2.6866363	550	2.7403627
423	2.6263404	487	2.6875290	551	2.7411516
424	2.6273659	488	2.6884198	552	2.7419391
425	2.6283889	489	2.6893089	553	2.7427251
426	2.6294096	490	2.6901961	554	2.7435098
427	2.6304279	491	2.6910815	555	2.7442930
428	2.6314438	492	2.6919651	556	2.7450748
429	2.6324573	493	2.6928469	557	2.7458552
430	2.6334685	494	2.6937269	558	2.7466342
431	2.6344773	495	2.6945052	559	2.7474118
432	2.6354837	496	2.6954817	560	2.7481880
433	2.6364879	497	2.6963564	561	2.7489629
434	2.6374897	498	2.6972293	562	2.7497363
435	2.6384893	499	2.6981005	563	2.7505084
436	2.6394865	500	2.6989700	564	2.7512791
437	2.6404814	501	2.6998377	565	2.7520484
438	2.6414741	502	2.7007037	566	2.7528164
439	2.6424645	503	2.7015680	567	2.7535831
440	2.6434527	504	2.7024375	568	2.7543483
441	2.6444386	505	2.7032914	569	2.7551123
442	2.6454223	506	2.7041505	570	2.7558748
443	2.6464037	597	2.7050080	571	2.7566361
444	2.6473830	508	2.7058637	572	2.7573960
445	2.6483600	509	2.7067178	573	2.7581546
446	2.6493349	510	2.7075702	574	2.7589119
447	2.6503075	511	2.7084209	575	2.7596678
448	2.6512780	512	2.7092700	576	2.7604225
449	2.6522463	513	2.7101174	577	2.7611758

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
577	2.7611758	641	2.8068580	705	2.8481891
578	2.7619278	642	2.8075350	706	2.8488047
579	2.7626786	643	2.8082110	707	2.8494194
580	2.7634280	644	2.8088859	708	2.8500338
581	2.7641761	645	2.8095597	709	2.8506462
582	2.7649230	646	2.8102325	710	2.8512583
583	2.7656685	647	2.8109043	711	2.8518696
584	3.7664128	648	2.8115750	712	2.8524800
585	2.7671559	649	2.8122447	713	2.8530895
586	2.7678976	650	2.8129134	714	2.8536982
587	2.7686381	651	2.8135810	715	2.8543060
588	2.7693793	652	2.8142476	716	2.8548130
589	2.7701153	653	2.8149132	717	2.8555191
590	2.7708520	654	2.8155777	718	2.8561244
591	2.7715875	655	2.8162413	719	2.8567289
592	2.7723217	656	2.8169038	720	2.8573325
593	2.7730547	637	2.8175654	721	2.8579353
594	2.7737864	658	2.8182259	722	2.8585372
595	2.7745170	659	2.8188854	723	2.8591388
596	2.7752463	660	2.8195439	724	2.8597386
597	2.7759743	661	2.8202015	725	2.8603380
598	2.7767012	662	2.8208580	726	2.8609366
599	2.7774268	663	2.8215135	727	2.8615344
600	2.7781512	664	2.8221681	728	2.8621314
601	2.7788745	665	2.8228216	729	2.8627275
601	2.7795965	665	2.8234742	730	2.8633229
603	2.7803173	667	2.8241258	731	2.8639174
604	2.7810369	668	2.8247765	732	2.8645111
605	2.7817554	669	2.8254261	733	2.8651040
606	2.7824726	670	2.8260748	734	2.8656961
607	2.7831887	671	2.8267225	735	2.8662873
608	2.7839036	672	2.8273693	736	2.8668778
609	2.7846173	673	2.8280151	737	2.8674675
610	2.7853298	674	2.8286599	738	2.8680564
611	2.7860412	675	2.8293038	739	3.8086444
612	2.7867514	676	2.8299467	740	2.8692317
613	2.7874605	677	2.8305887	741	2.8698182
614	2.7881684	678	2.8312297	742	2.8704039
615	2.7888751	679	2.8318698	743	2.8709888
616	2.7895807	680	2.8325089	744	2.8715729
617	2.7902852	681	2.8331471	745	2.8721563
618	2.7909885	682	2.8337844	746	2.8727388
619	2.7916906	683	2.8344207	747	2.8733206
620	2.7923917	684	2.8350561	748	2.8739016
621	2.7930916	685	2.8356906	749	2.8744818
622	2.7937904	686	2.8363241	750	2.8750613
623	2.7944850	687	2.8369567	751	2.8756399
624	2.7951846	688	2.8375884	752	2.8762178
625	2.7958800	689	2.8382192	753	2.8767950
626	2.7965744	690	2.8388491	754	2.8773713
627	2.7972675	691	2.8394780	755	2.8779469
628	2.7979596	692	2.8401061	756	2.8785218
629	2.7986506	693	2.8407332	757	2.8790959
630	2.7993405	694	2.8413595	758	2.8796692
631	2.8000294	695	2.8419848	759	2.8802418
632	2.8007171	696	2.8426092	760	2.8808136
633	2.8014037	697	2.8432328	761	2.8813847
634	2.8020893	698	2.8438554	762	2.8819550
635	2.8027737	699	2.8444772	763	2.8825245
636	2.8034571	700	2.8450980	764	2.8830934
637	2.8041394	701	2.8457180	765	2.8836614
638	2.8048207	702	2.8463371	766	2.8842288
639	2.8055009	703	2.8469553	767	2.8847954
640	2.8061800	704	2.8475727	768	2.8853612
641	2.8068580	705	2.8481891	769	2.8859263

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
768	2.8753612	832	2.9201233	896	2.9523080	960	2.9822712	1024	3.0102999	1088	3.0366289
769	2.8859263	833	2.9206450	897	2.9527924	961	2.9827234	1025	3.0107239	1089	3.0370279
770	2.8864907	834	2.9211660	898	2.9532763	962	2.9831751	1026	3.0111474	1090	3.0374265
771	2.8870544	835	2.9216865	899	2.9537597	963	2.9836263	1027	3.0115704	1091	3.0378247
772	2.8876173	836	2.9222063	900	2.9542425	964	2.9840770	1028	3.0119931	1092	3.0382226
773	2.8881795	837	2.9227254	901	2.9547248	965	2.9845273	1029	3.0124154	1093	3.0386101
774	2.8887410	838	2.9232440	902	2.9552065	966	2.9849771	1030	3.0128372	1094	3.0390173
775	2.8893017	839	2.9237620	903	2.9556877	967	2.9854265	1031	3.0132587	1095	3.0394141
776	2.8898617	840	2.9242793	904	2.9561684	968	2.9858754	1032	3.0136797	1096	3.0398105
777	2.8904210	841	2.9247960	905	2.9566486	969	2.9863238	1033	3.0141003	1097	3.0402066
778	2.8909796	842	2.9253121	906	2.9571282	970	2.9867717	1034	3.0145205	1098	3.0406023
779	2.8915375	843	2.9258276	907	2.9576073	971	2.9872192	1035	3.0149403	1099	3.0409977
780	2.8920946	844	2.9263424	908	2.9580858	972	2.9876663	1036	3.0153597	1100	3.0413927
781	2.8926510	845	2.9268567	909	2.9585639	973	2.9881128	1037	3.0157987	1101	3.0417873
782	2.8932067	846	2.9273704	910	2.9590414	974	2.9885589	1038	3.0161973	1102	3.0421816
783	2.8937618	847	2.9278834	911	2.9595184	975	2.9890046	1039	3.0166155	1103	3.0425755
784	2.8943161	848	2.9283958	912	2.9599948	976	2.9894498	1040	3.0170333	1104	3.0429691
785	2.8948696	849	2.9289077	913	2.9604708	977	2.9898946	1041	3.0174507	1105	3.0433622
786	2.8954225	850	2.9294189	914	2.9609462	978	2.9903348	1042	3.0178677	1106	3.0437551
787	2.8959747	851	2.9299296	915	2.9614211	979	2.9907827	1043	3.018284	1107	3.0441476
788	2.8965262	852	2.9304396	916	2.9618955	980	2.9912261	1044	3.018700	1108	3.0445398
789	2.8970770	853	2.9309490	917	2.9623693	981	2.9916690	1045	3.019116	1109	3.0449315
790	2.8976271	854	2.9314579	918	2.9628427	982	2.9921115	1046	3.019531	1110	3.0453230
791	2.8981765	855	2.9319661	919	2.9633155	983	2.9925535	1047	3.019946	1111	3.0457140
792	2.8987252	856	2.9324738	920	2.9637878	984	2.9929951	1048	.0203613	1112	3.0461048
793	2.8992732	857	2.9329808	921	2.9642596	985	2.9934362	1049	3.0207755	1113	3.0464952
794	2.8998205	858	2.9334873	922	2.9647309	986	2.9938769	1050	3.0211893	1114	3.0468852
795	2.9003671	859	2.9339932	923	2.9652017	987	2.9943171	1051	3.0216027	1115	3.0472749
796	2.9009131	860	2.9344984	924	2.9656720	988	2.9947569	1052	3.0220157	1116	3.0476642
797	2.9014583	861	2.9350031	925	2.9661417	989	2.9951963	1053	3.0224284	1117	3.0480532
798	2.9020029	862	2.9355073	926	2.9666110	990	2.9956352	1054	3.0228406	1118	3.0484418
799	2.9025468	863	2.9360108	927	2.9670797	991	2.9960736	1055	3.0232524	1119	3.0488301
800	2.9030900	864	2.9365137	928	2.9675480	992	2.9965117	1056	3.0236639	1120	3.0492180
801	2.9036325	865	2.9370261	929	2.9680157	993	2.9969492	1057	3.0240750	1121	3.0496056
802	2.9041744	866	2.9375179	930	2.9684829	994	2.9973864	1058	3.0244857	1122	3.0499926
803	2.9047155	867	2.9380191	931	2.9689497	995	2.9978231	1059	3.0248960	1123	3.0503797
804	2.9052520	868	2.9385197	932	2.9694159	996	2.9982593	1060	3.0253059	1124	3.0507663
805	2.9057959	869	2.9390198	933	2.9698816	997	2.9986951	1061	3.0257154	1125	3.0511525
806	2.9063350	870	2.9395192	934	2.9703469	998	2.9991305	1062	3.0261245	1126	3.0515384
807	2.9068735	871	2.9400181	935	2.9708116	999	2.9995655	1063	3.0265333	1127	3.0519239
808	2.9074114	872	2.9405165	936	2.9712758	1000	3.0000000	1064	.0269416	1128	3.0523091
809	2.9079485	873	2.9410142	937	2.9717396	1001	3.0004341	1065	3.0273496	1129	3.0526939
810	2.9084850	874	2.9415114	938	2.9722028	1002	3.0008677	1066	3.0277572	1130	3.0530784
811	2.9090208	875	2.9420080	939	2.9726656	1003	3.0013009	1067	3.0281644	1131	3.0534626
812	2.9095560	876	2.9425041	940	2.9731278	1004	3.0017337	1068	3.0285712	1132	3.0538464
813	2.9100905	877	2.9429996	941	2.9735892	1005	3.0021661	1069	3.0289777	1133	3.0542299
814	2.9106244	878	2.9434945	942	2.9740509	1006	3.0025980	1070	3.0293838	1134	3.0546130
815	2.9111576	879	2.9439889	943	2.9745117	1007	3.0030295	1071	3.0297895	1135	3.0549958
816	2.9116901	880	2.9444827	944	2.9749720	1008	3.0034605	1072	3.0301948	1136	3.0553783
817	2.9122220	881	2.9449759	945	2.9754318	1009	3.0038912	1073	3.0305997	1137	3.0557604
818	2.9127533	882	2.9454686	946	2.9758911	1010	3.0043214	1074	3.0310043	1138	3.0561423
819	2.9132839	883	2.9459607	947	2.9763500	1011	3.0047511	1075	3.0314085	1139	3.0565237
820	2.9138138	884	2.9464523	948	2.9768083	1012	3.0051805	1076	3.0318123	1140	3.0569048
821	2.9143431	885	2.9469433	949	2.9772662	1013	3.0056094	1077	3.0322157	1141	3.0572856
822	2.9148718	886	2.9474337	950	2.9777236	1014	3.0060379	1078	3.0326188	1142	3.0576661
823	2.9153998	887	2.9479236	951	2.9781805	1015	3.0064660	1079	3.0330214	1143	3.0580462
824	2.9159272	888	2.9484130	952	2.9786369	1016	3.0068937	1080	3.0334237	1144	3.0584260
825	2.9164539	889	2.9489018	953	2.9790929	1017	3.0073209	1081	3.0338257	1145	3.0588055
826	2.9169800	890	2.9493900	954	2.9795484	1018	3.0077478	1082	3.0342273	1146	3.0591846
827	2.9175055	891	2.9498777	955	2.9800034	1019	3.0081742	1083	3.0346284	1147	3.0595634
828	2.9180303	892	2.9503648	956	2.9804579	1020	3.0086002	1084	3.0350293	1148	3.0599419
829	2.9185545	893	2.9508514	957	2.9809119	1021	3.0090257	1085	3.0354297	1149	3.0603200
830	2.9190781	894	2.9513375	958	2.9813655	1022	3.0094509	1086	3.0358298	1150	3.0606978
831	2.9196010	895	2.9518230	959	2.9818186	1023	3.0098756	1087	3.0362295	1151	3.0610753
832	2.9201233	896	2.9523080	960	2.9822712	1024	3.0102999	1088	3.0366289	1152	3.0614525

1152

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
1152	3.0614525	1216	3.0849336	1280	3.1072100
1153	3.0618293	1217	3.0852906	1281	3.1075491
1154	3.0622058	1218	3.0856473	1282	3.1078880
1155	3.0625820	1219	3.0860037	1283	3.1082266
1156	3.0629578	1220	3.0863598	1284	3.1085650
1157	3.0633334	1821	3.0867156	1285	3.1089031
1158	3.0637085	1222	3.0870712	1286	3.1092410
1159	3.0640834	1223	3.0874264	1287	3.1095785
1160	3.0644580	1224	3.0877814	1288	3.1099159
1161	3.0648322	1225	3.0881361	1289	3.1102529
1162	3.0652061	1226	3.0884905	1290	3.1105897
1163	3.0655797	1227	3.0888446	1291	3.1109262
1164	3.0659530	1228	3.0891984	1292	3.1112625
1165	3.0663259	1229	3.0895519	1293	3.1115985
1166	3.0666985	1230	3.0899051	1294	3.1119343
1167	3.0670708	1231	3.0902580	1295	3.1122698
1168	3.0674428	1232	3.0906107	1296	3.1126050
1169	3.0678145	1233	3.0909631	1297	3.1129400
1170	3.0681859	1234	3.0913151	1298	3.1132747
1171	3.0685569	1235	3.0916669	1299	3.1136091
1172	3.0689276	1236	3.0920185	1300	3.1139433
1173	3.0692980	1237	3.0923697	1301	3.1142773
1174	3.0696681	1238	3.0927206	1302	3.1146110
1175	3.0700379	1239	3.0930713	1303	3.1149444
1176	3.0704073	1240	3.0924217	1304	3.1152776
1177	3.0707765	1241	3.0937718	1305	3.1156105
1178	3.0711453	1242	3.0941216	1306	3.1159432
1179	3.0715138	1243	3.0944711	1307	3.1162756
1180	3.0718820	1244	3.0948204	1308	3.1166077
1181	3.0782499	1245	3.0951694	1309	3.1169396
1182	3.0726175	1246	3.0955180	1310	3.1172713
1183	3.0729847	1247	3.0958664	1311	3.1176027
1184	3.0733517	1245	3.0962146	1312	3.1179338
1185	3.0737183	1249	3.0965624	1313	3.1182647
1186	3.0740847	1250	3.0969100	1314	3.1185954
1187	9.0744507	1251	3.0972573	1315	3.1189957
1188	3.0748164	1252	3.0976043	1316	3.1192559
1189	3.0751818	1253	3.0979511	1317	3.1195858
1190	3.0755470	1254	3.0982975	1318	3.1199154
1191	3.0759118	1255	3.0986437	1319	3.1202448
1192	3.0762762	1256	3.0989896	1320	3.1205739
1193	3.0766404	1257	3.0993353	1221	3.1209028
1194	3.0770043	1258	3.0996806	1322	3.1212314
1195	3.0773879	1259	3.1000257	1323	3.1215598
1196	3.0777312	1260	3.1003705	1324	3.1218880
1197	3.0780941	1261	3.1007151	1325	3.1222159
1198	3.0784568	1262	3.1010593	1326	3.1225435
1199	3.0788192	1263	2.1014033	1327	3.1228709
1200	3.0791812	1264	3.1017471	1328	3.1231981
1201	3.0795432	1265	3.1020905	1329	3.1235250
1202	3.0799045	1266	3.1024137	1330	3.1238516
1203	3.0802656	1267	3.1027766	1331	3.1241780
1204	3.0806265	1268	3.1031192	1332	3.1245042
1205	3.0809870	1269	3.1034616	1333	3.1248301
1206	3.0813473	1270	3.1038037	1334	3.1251558
1207	3.0817073	1271	3.1041455	1335	3.1254813
1208	3.0820669	1272	3.1044871	1336	3.1258064
1209	3.0824263	1273	3.1048284	1337	3.1261314
4210	3.0827854	1274	3.1051694	1338	3.1264561
1211	3.0831441	1275	3.1055102	1339	3.1267806
1212	3.0815026	1276	3.1058507	1340	3.1271048
1213	3.0838608	1277	3.1061909	1341	3.1274288
1214	3.0842187	1278	3.1065308	1342	3.1277525
121	3.0845763	1279	3.1068705	1343	3.1280760
1216	3.0849336	1280	3.1072100	1344	3.1283993

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
1344	3.1283993	1408	3.1486026	1472	3.1679078
1345	3.1287223	1409	3.1489110	1473	3.1682027
1346	3.1290450	1410	3.1492191	1474	3.1684975
1347	3.1293676	1411	3.1495270	1475	3.1687920
1348	3.1296899	1412	3.1498347	1476	3.1690863
1349	3.1300119	1413	3.1501422	1477	3.1693805
1350	3.1303328	1414	3.1504494	1478	3.1696744
1351	3.1306553	1415	3.1507564	1479	3.1699682
1352	3.1309767	1416	3.1510632	1480	3.1702617
1353	3.1312978	1417	3.1513698	1481	3.1705550
1354	3.1316187	1418	3.1516762	1482	3.1708482
1355	3.1319393	1419	3.1519824	1483	3.1711411
1356	3.1322597	1420	3.1522883	1484	3.1714339
1357	3.1325798	1421	3.1525941	1485	3.1717264
1358	3.1328998	1422	3.1528996	1486	3.1720188
1359	3.1332195	1423	3.1532049	1487	3.1723110
1360	3.1335389	1424	3.1535100	1488	3.1726029
1361	3.1338581	1425	3.1538149	1489	3.1728947
1362	3.1341771	1426	3.1541995	1490	3.1731863
1363	3.1344958	1427	3.1544240	1491	3.1734776
1364	3.1348144	1428	3.1547282	1492	3.1737688
1365	3.1351326	1429	3.1550322	1493	3.1740598
1366	3.1354507	1430	3.1553360	1494	3.1743506
1367	3.1357685	1431	3.1556395	1495	3.1746412
1368	3.1360861	1432	3.1559430	1496	3.1749316
1369	3.1364034	1433	3.1562462	1497	3.1752218
1370	3.1367206	1434	3.1565491	1498	3.1755118
1371	3.1370374	1435	3.1568519	1499	3.1758016
1372	3.1373541	1436	3.1571544	1500	3.1760913
1373	3.1376705	1437	3.1574568	1501	3.1763807
1374	3.1379867	1438	3.1577589	1502	3.1766699
1375	3.1383027	1439	3.1580608	1503	3.1769590
1376	3.1386184	1440	3.1583625	1504	3.1772478
1377	3.1389339	1441	3.1586640	1505	3.1775365
1378	3.1392492	1442	3.1589653	1506	3.1778250
1379	3.1395643	1443	3.1592663	1507	3.1781132
1380	3.1398791	1444	3.1595672	1508	3.1784013
1381	3.1401937	1445	3.1598678	1509	3.1786892
1382	3.1405080	1446	3.1601683	1510	3.1789769
1383	3.1408222	1447	3.1604685	1511	3.1792645
1384	3.1411361	1448	3.1607686	1512	3.1795518
1385	3.1414498	1449	3.1610684	1513	3.1798389
1386	3.1417632	1450	3.1613680	1514	3.1801259
1387	3.1420765	1451	3.1616674	1515	3.1804126
1388	3.1423895	1452	3.1619666	1516	3.1806992
1389	3.1427022	1453	3.1622656	1517	3.1809856
1390	3.1430148	1454	2.1625644	1518	3.1812718
1391	3.1433271	1455	3.1628630	1519	3.1815578
1392	3.1436392	1456	3.1631614	1520	3.1818437
1393	3.1439511	1457	3.1634595	1521	3.1821292
1394	3.1442628	1458	3.1637575	1522	3.1824146
1395	3.1445742	1459	3.1640553	1523	3.1826999
1396	3.1448854	1460	3.1643528	1524	3.1829850
1397	3.1451964	1461	3.1646502	1525	3.1832698
1398	3.1455072	1462	3.1649474	1526	3.1835545
1399	3.1458177	1463	3.1652443	1527	3.1838590
1400	3.1461280	1464	3.1655411	1528	3.1841233
1401	3.1464381	1465	3.1658376	1529	3.1844075
1402	3.1467480	1466	3.1661340	1530	3.1846914
1403	3.1470577	1467	4.1664301	1531	3.1849752
1404	3.1473671	1468	3.1667260	1532	3.1852588
1405	3.1476763	1469	3.1670218	1533	3.1855421
1406	3.1479853	1470	3.1673173	1535	3.1858253
1407	3.1482941	1471	3.1676127	1535	3.1861084
1408	3.1486026	1472	3.1679078	1536	3.1863912

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
1536	3.1863912	1600	3.2041200	1663	3.2208922	1727	3.2372923	1791	3.2530956	1855	3.2683439
1537	3.1869758	1601	3.2043913	1664	3.2211533	1728	3.2375437	1792	3.2533380	1856	3.2685780
1538	3.1869563	1602	3.2046625	1665	3.2214142	1729	3.2377950	1793	.2535803	1857	.2688119
1539	3.1872386	1603	3.2049335	1666	3.2216750	1730	3.2380461	1794	3.25 8224	1858	3.2690457
1540	3.1875207	1604	3.2052044	1667	3.2219356	1731	3.2382971	1795	.2540645	1859	3.2692794
1541	3.1878026	1605	3.2054750	1668	3.2221960	1732	3.2385479	1796	3.2543063	1860	3.2655129
1542	3.1880844	1606	3.2057455	1669	3.2224563	1733	3.2387986	1797	3.2545481	1861	3.2697464
1543	3.1883659	1607	3.2060159	1670	3.2227165	1734	3.2390491	1798	3.2547897	1862	3.2699797
1544	3.1888473	1608	3.2061060	1671	3.2229764	1735	3.2392995	1799	3.2550312	1863	3.2702128
1545	3.1889285	1609	3.2065560	1672	3.2232363	1736	3.2395497	1800	3.2552725	1864	3.2704459
1546	3.1892095	1610	3.2068259	1673	3.2234959	1737	3.2397998	1801	3.2555137	1865	.2706788
1547	3.1894903	1611	3.2070955	1674	3.2237555	1738	3.2400498	1802	3.2557548	1866	3.2709116
1548	3.1897709	1612	3.2073650	1675	3.2240148	1739	3.2402996	1803	3.2559957	1867	3.2711443
1549	3.1901514	1613	3.2076244	1676	3.2242740	1740	3.2405492	1804	3.2562365	1848	3.2713769
1550	3.1903317	1614	3.2079035	1677	3.2245331	1741	3.2407988	1805	3.2564772	1869	3.2716093
1551	3.1906118	1615	3.2081725	1678	3.2247920	1742	3.2410481	1806	3.2567177	1870	3.2718416
1552	3.1908917	1616	3.2084414	1679	3.2250507	1743	3.2412974	1807	3.2569582	1871	3.2720758
1553	3.1911714	1617	3.2087100	1680	3.2253093	1744	3.2415465	1808	1.2571984	1872	3.2728057
1554	3.1914510	1618	3.2089785	1681	3.2255677	1745	3.2417954	1809	3.2574386	1873	3.2725378
1555	3.1917304	1619	3.2092468	1682	3.2258260	1746	3.2420442	1810	3.2576786	1874	3.2727696
1556	3.1920096	1620	3.2095150	1683	3.2260841	1747	3.2422929	1811	3.2579184	1875	3.27 0013
1557	3.1922886	1621	3.2097830	1684	3.2263421	1748	3.2425414	1812	3.2581582	1876	3.27 2328
1558	3.1925674	1622	3.2100508	1685	3.2265999	1749	3.2427898	1813	3.2583978	1877	3.2734643
1559	3.1928461	1623	3.2103185	1686	3.2268576	1750	3.2430380	1814	1.2586373	1878	3.2736956
1560	3.1931246	1624	3.2105860	1687	3.2271151	1751	3.2432861	1815	3.2588766	1879	3.2739268
1561	3.1934019	1625	3.2108534	1688	3.2273724	1752	3.2435341	1816	3.2591158	1880	3.2741578
1562	3.1936810	1626	3.2111205	1689	3.2276296	1753	3.2437819	1817	3.2593549	1881	3.2743888
1563	3.1939590	1627	3.2113876	1690	3.2278867	1754	3.2440296	1818	3.2595939	1882	3.2746116
1564	3.1942367	1628	3.2116544	1691	3.2281436	1755	3.2442771	1819	3.2598327	1883	3.2748503
1565	3.1945143	1629	3.2119211	1692	3.2284004	1756	3.2445245	1810	3.2600714	1884	3.2750809
1566	3.1947917	1630	3.2121876	1693	3.2286570	1757	3.2447718	1821	3.2603099	1885	3.2753113
1567	3.1950690	1630	3.2121876	1694	3.2289134	1758	3.2450189	1822	3.2605484	1886	3.2755417
1568	3.1953460	1631	3.2124540	1695	3.2231697	1759	3.2452658	1823	3.2607857	1887	3.2757719
1569	3.1956229	1632	3.2127201	1696	3.2294258	1760	3.2455127	1824	3.2610248	1888	3.2760020
1570	3.1958996	1633	3.2129862	1697	3.2296818	1761	3.2457594	1825	3.2612629	1889	3.2762320
1571	3.1961762	1634	3.2132521	1698	3.2299377	1762	3.2460059	1826	3.2615008	1890	3.2764618
1572	3.1964525	1635	3.2135178	1699	3.2301934	1763	3.2462523	1827	3.2617385	1891	3.2766915
1573	3.1967287	1636	3.2137833	1700	3.2304489	1764	3.2464986	1828	3.2619762	1892	3.2769211
1574	3.1970047	1637	3.2140487	1701	1.2307043	1765	3.2467447	1829	3.2622137	1893	3.2771506
1575	3.1972806	1638	3.2143139	1701	3.2309596	1766	3.2469907	1830	.2624511	1894	3.2773800
1576	3.1975562	1639	3.2145789	1703	4.2312146	1767	3.2472365	1831	.2626883	1895	.2776092
1577	3.1978317	1640	3.2148438	1704	3.2314696	1768	3.2474823	1832	1.2629255	1896	3.2778383
1578	3.1981070	1641	3.2151986	1705	3.2317244	1769	3.2477278	1833	3.26 1625	1897	3.2780673
1579	3.1983821	1642	3.2153732	1706	3.2319790	1770	3.2479733	1834	3.2633993	1898	3.2782962
1580	3.1986571	1643	3.2156376	1707	3.2322335	1771	3.2482186	1835	3.2636361	1899	3.2785250
1581	3.1989319	1644	9.2159018	1708	3.2324879	1772	3.2484637	1836	3.2638727	1900	3.2787536
1582	3.1992065	1645	3.2161659	1709	3.3327421	1773	3.2487087	1837	3.2641092	1901	3.2789821
1583	3.1994809	1646	3.2164298	1710	3.2329961	1774	3.2489536	1838	3.2643455	1902	3.2792105
1584	3.1997552	1647	3.2166936	1711	3.2332500	1775	3.2491984	1839	3.2645817	1903	3.2794388
1585	3.2000293	1548	3.2169572	1712	3.2335038	1776	3.2494430	1840	3.2648178	1904	3.2796669
1586	3.2003031	1649	3.2172106	1713	3.2337574	1777	3.2496874	1841	3.2650538	1905	3.2798950
1587	3.2005769	1650	3.2174839	1714	3.2340108	1778	3.2499318	1842	3.2652896	1906	3.2801229
1588	3.2008505	1651	3.2177471	1715	3.2342641	1779	3.2501759	1843	3.2655253	1907	3.2803507
1589	3.2011239	1652	3.2180100	1716	3.2345173	1780	3.2504200	1844	3.2657609	1908	3.2805784
1590	3.2013971	1653	3.2182728	1717	3.2347703	1781	3.2506639	1845	3.2659964	1909	3.2808059
1591	3.2016702	1654	3.2185355	1718	3.2350232	1782	3.2509077	1846	3.2662317	1910	3.2810334
1592	3.2019431	1655	3.2187980	1719	3.2352759	1783	3.2511513	1847	3.2664669	1911	3.2812607
1593	3.2022158	1656	3.2190603	1720	3.2355284	1784	3.2513948	1848	3.2667020	1912	3.2814879
1594	3.2024883	1657	3.2193225	1721	3.2357809	1785	3.2516382	1849	3.2669369	1913	3.2817150
1595	3.2027607	1658	3.2195845	1722	3.2360331	1786	3.2518815	1850	3.2671717	1914	3.2819419
1596	3.2030329	1659	3.2198464	1723	3.2362853	1787	3.2521246	1851	3.2674064	1915	3.2821688
1597	3.2033049	1660	3.2201081	1724	3.2365373	1788	3.2523675	1852	3.2676410	1916	3.2823955
1598	3.2035768	1661	3.2203696	725	3.2367891	1789	3.2526103	1853	3.2678754	1917	3.2826221
1599	3.2038485	1662	3.2206310	1726	3.2370408	1790	3.2528530	1854	3.2681097	1918	3.2828486
1600	3.2041200	1663	3.2208922	1727	2.2372923	1791	3.2530956	1855	3.2683439	1919	3.2830750

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
1919	3.2830750	1983	3.2973227	2047	3.3111178
1920	3.2833012	1984	3.2975417	2048	3.3113299
1921	3.2835274	1985	3.2977605	2049	3.3115420
1922	3.2837534	1986	3.2979792	2050	3.3117539
1923	3.2839793	1987	3.2981979	2051	3.3119657
1924	3.2842051	1988	3.2984164	2052	3.3121774
1925	3.2844307	1989	3.2986348	2053	3.3123889
1926	3.2846563	1990	3.2988531	2054	3.3126004
1927	3.2848817	1991	3.2990713	2055	3.3128118
1928	3.2851070	1992	3.2992893	2056	3.3130231
1929	3.2853322	1993	3.2995073	2057	3.3132343
1930	3.2855573	1994	3.2997251	2058	3.3134454
1931	3.2857823	1995	3.2999429	2059	3.3136563
1932	3.2860071	1996	3.3001605	2060	3.3138672
1933	3.2862318	1997	3.3003781	2061	3.3140780
1934	3.2864565	1998	3.3005955	2062	3.3142887
1935	3.2866810	1999	3.3008128	2063	3.3144992
1936	3.2869054	2000	3.3010300	2064	3.3147097
1937	3.2871296	2001	3.3012471	2065	3.3149200
1938	3.2873538	2002	3.3014641	2066	3.3151303
1939	3.2875778	2003	3.3016809	2067	3.3153405
1940	3.2878017	2004	3.3018977	2068	3.3155505
1941	3.2880255	2005	3.3021144	2069	3.3157605
1942	3.2882492	2006	3.3023309	2070	3.3153703
1943	3.2884728	2007	3.3025474	2071	3.3161801
1944	3.2886963	2008	3.3027637	2072	3.3163897
1945	3.2889196	2009	3.3029799	2073	3.3165993
1946	3.2891428	2010	3.3031961	2074	3.3168087
1947	3.2893659	2011	3.3034121	2075	3.3170181
1948	3.2895889	2012	3.3036280	2076	3.3172273
1949	3.2898118	2013	3.3038438	2077	3.3174365
1950	3.2900346	2014	3.3040595	2078	3.3176455
1951	3.2902573	2015	3.3042751	2079	3.3178545
1952	3.2904798	2016	3.3044905	2080	3.3180633
1953	3.2907022	2017	3.3047059	2081	3.3182721
1954	3.2909246	2018	3.3049212	2082	3.3184807
1955	3.2911468	2019	3.3051363	2083	3.3186893
1956	3.2913688	2020	3.3053514	2084	3.3188977
1957	3.2915908	2021	3.3055663	2085	3.3191061
1958	3.2918127	2022	3.3057812	2086	3.3193143
1959	3.2920344	2023	3.3059959	2087	3.3195224
1960	3.2922561	2024	3.3062105	2088	3.3197305
1961	3.2924776	2025	3.3064250	2089	3.3199384
1962	3.2926990	2016	3.3066394	2090	3.3201463
1963	3.2929203	2027	3.3068537	2091	3.3203540
1964	3.2931415	2018	3.3070679	2092	3.3205617
1965	3.2933626	2029	3.3072820	2093	3.3207692
1966	3.2935835	2030	3.3074960	2094	3.3209767
1967	3.2938044	2031	3.3077099	2095	3.3211840
1968	3.2940251	2032	3.3079237	2096	3.3213913
1969	3.2942457	2033	3.3081374	2097	3.3215984
1970	3.2944662	2034	3.3083509	2098	3.3218055
1971	3.2946866	2035	3.3085644	2099	3.3220124
1972	3.2949069	2036	3.3087778	2100	3.3222193
1973	3.2951271	2037	3.3089910	2101	3.3224260
1974	3.2953471	2038	3.3092042	2102	3.3226327
1975	3.2955671	2039	3.3094172	2103	3.3228393
1976	3.2957869	2040	3.3096302	2104	3.3230457
1977	3.2960067	2041	3.3098430	2105	3.3232521
1978	3.2962263	2042	3.3100557	2106	3.3234584
1979	3.2964458	2043	3.3102684	2107	3.3236645
1980	3.2966652	2044	3.3104809	2108	3.3238705
1981	3.2968845	2045	3.3106933	2109	3.3240766
1982	3.2971036	2046	3.3109056	2110	3.3242825
1983	3.2973227	2047	3.3111178	2111	3.3244882

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
2111	3.3244882	2175	3.3374593	2239	3.3500541
2112	3.3246939	2176	3.3376589	2240	3.3502480
2113	3.3248995	2177	3.3378584	2241	3.3504419
2114	3.3251050	2178	3.3380579	2242	3.3506356
2115	3.3253104	2179	3.3382572	2243	3.3508293
2116	3.3255157	2180	3.3384565	2244	3.3510228
2117	3.3257209	2181	3.3386557	2245	3.3512163
2118	3.3259260	2182	3.3388547	2246	3.3514098
2119	3.3261310	2183	3.3390537	2247	3.3516031
2120	3.3263359	2184	3.3392526	2248	3.3517963
2121	3.3265407	2185	3.3394514	2249	3.3519895
2122	3.3267454	2186	3.3396501	2250	3.3521825
2123	3.3269500	2187	3.3398488	2251	3.3523755
2124	3.3271545	2188	3.3800473	2252	3.3525684
2125	3.3273589	2189	3.3402458	2253	3.3527612
2126	3.3275633	2190	3.3404441	2254	3.3529539
2127	3.3277675	2191	3.3406424	2255	3.3531465
2128	3.3279716	2192	3.3408405	2256	3.3533391
2129	3.3281757	2193	3.3410386	2257	3.3535316
2130	3.3283796	2194	3.3412366	2258	3.3537239
2131	3.3285834	2195	3.3414345	2259	3.3539162
2132	3.3287872	2196	3.3416323	2260	3.3541084
2133	3.3289909	2197	3.3418301	2261	3.3543006
2134	3.3291944	2198	3.3420277	2262	3.3544926
2135	3.3293979	2199	3.3422252	2263	3.3546846
2136	3.3296012	2200	3.3424227	2264	3.3548764
2137	3.3298045	2201	3.3426200	2265	3.3550682
2138	3.3300077	2202	3.3428173	2266	3.3552599
2139	3.3302108	2203	3.3430145	2267	3.3554515
2140	3.3304138	2204	3.3432116	2268	3.3556430
2141	3.3306167	2205	3.3434086	2260	3.3558345
2142	3.3308195	2206	3.3436055	2270	3.3560259
2143	3.3310222	2207	3.3438023	2271	3.3562171
2144	3.3312248	2208	3.3439991	2272	3.3564083
2145	3.3314273	2209	3.3441957	2273	3.3565994
2146	3.3316297	2210	3.3443923	2274	3.3567905
2147	3.3318320	2211	3.3445887	2275	3.3569814
2148	3.3320343	2212	3.3447851	2276	3.3571723
2149	3.3322364	2213	3.3449814	2277	3.3573630
2150	3.3324385	2214	3.3451776	2278	3.3575537
2151	3.3326404	2215	3.3453737	2279	3.3577443
2152	3.3328423	2216	3.3455698	2280	3.3579348
2153	3.3330440	2217	3.3457657	2281	3.3581253
2154	3.3332457	2218	3.3459615	2282	3.3583156
2155	3.3334473	2219	3.3461573	2283	3.3585059
2156	3.3336488	2220	3.3463530	2284	3.3586961
2157	3.3338501	2221	3.3465486	2285	3.3588862
2158	3.3340514	2222	3.3467441	2286	3.3590762
2159	3.3342526	2223	3.3469395	2287	3.3592662
2160	3.3344537	2224	3.3471348	2288	3.3594560
2161	3.3346548	2225	3.3473300	2289	3.3596458
2162	3.3348557	2226	3.3475252	2290	3.3598355
2163	3.3350565	2227	3.3477202	2291	3.3600251
2164	3.3353572	2228	3.3479152	2291	3.3602146
2165	3.3354679	2229	3.3481101	2293	3.3604041
2166	3.3356585	2230	3.3483049	2294	3.3605934
2167	3.3358589	2231	3.3484996	2295	3.3607827
2168	3.3360593	2232	3.3486942	2296	3.3609719
2169	3.3362596	2233	3.3488887	2297	3.3611610
2170	3.3364597	2234	3.3490832	2298	3.3613500
2171	3.3366598	2235	3.3492775	2299	3.3615390
2172	3.3368598	2236	3.3494718	2300	3.3617278
2173	3.3370597	2237	3.3496660	2301	3.3619166
2174	3.3372595	2238	3.3498601	2302	3.3621053
2175	3.3374593	2239	3.3500541	2303	3.362293

N.	Lcgarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
2204	3.3432116	2268	3.3556430	2332	3.3677285
2205	3.3434086	2269	3.3558345	2333	3.3679147
2206	3.3436055	2270	3.3560259	2334	3.3681008
2207	3.3438023	2271	3.3562171	2335	3.3682869
2208	3.3439991	2272	3.3564083	2336	3.3684728
2209	3.3441957	2273	3.3565994	2337	3.3686587
2210	3.3443923	2274	3.3567905	2338	3.3688445
2211	3.3445887	2275	3.3569814	2339	3.3690302
2212	3.3447851	2276	3.3571323	2340	3.3692159
2213	3.3449814	2277	3.3573630	2341	3.3694014
2214	3.3451776	2278	3.3575537	2342	3.3695869
2215	3.3453737	2279	3.3577443	2343	3.3697723
2216	3.3455698	2280	3.3579348	2344	3.3699576
2217	3.3457657	2281	3.3581253	2345	3.3701428
2218	3.3459615	2282	3.3583156	2346	3.3703280
2219	3.3461573	2283	3.3585059	2347	3.3705231
2220	3.3463530	2284	3.3586961	2348	3.3706981
2221	3.3465486	2285	3.3588862	2349	3.3708830
2222	3.3467441	2286	3.3590762	2350	3.3710679
2223	3.3469395	2287	3.3592662	2351	3.3712526
2224	3.3471348	2288	3.3594560	2352	3.3714373
2225	3.3473300	2289	3.3596458	2353	3.3716219
2226	3.3475252	2290	3.3598355	2354	3.3718065
2227	3.3477202	2291	3.3600251	2355	3.3719909
2228	3.3479152	2292	3.3602146	2356	3.3721753
2229	3.3481101	2293	3.3604041	2357	3.3723596
2230	3.3483049	2294	3.3605934	2358	3.3725438
2231	3.3484996	2295	3.3607827	2359	3.3727279
2232	3.3486942	2296	3.3609719	2360	3.3729120
2233	3.3488887	2297	3.3611610	2361	3.3730960
2234	3.3490832	2298	3.3613500	2362	3.3732799
2235	3.3492775	2299	3.3615390	2363	3.3734637
2236	3.3494718	2300	3.3617278	2364	3.3736475
2237	3.3496660	2301	3.3619166	2365	3.3738311
2238	3.3498801	2302	3.3621053	2366	3.3740147
2239	3.3500541	2303	3.3622639	2367	3.3741983
2240	3.3502480	2304	3.3624825	2368	3.3743817
2241	3.3504419	2305	3.3626709	2369	3.3745651
2242	3.3506356	2306	3.3628593	2370	3.3747483
2243	3.3508293	2307	3.3630476	2371	3.3749316
2244	3.3510228	2308	3.3632358	2372	3.3751147
2245	3.3512163	2309	3.3634239	2373	3.3752977
2246	3.3514098	2310	3.3636120	2374	3.3754807
2247	3.3516031	2311	3.3637999	2375	3.3756636
2248	3.3517963	2312	3.3639878	2376	3.3758465
2249	3.3519895	2313	3.3641756	2377	3.3760292
2250	3.3521825	2314	3.3643633	2378	3.3762118
2251	3.3523755	2315	3.3645510	2379	3.3763944
2252	3.3525684	2316	3.3647386	2380	3.3765769
2253	3.3527612	2317	3.3649260	2381	3.3767594
2254	3.3529539	2318	3.3651134	2382	3.3769418
2255	3.3531465	2319	3.3653007	2383	3.3771240
2256	3.3533391	2320	3.3654880	2384	3.3773062
2257	3.3535316	2321	3.3656751	2385	3.3774884
2258	3.3537239	2322	3.3658622	2386	3.3776704
2259	3.3539162	2323	3.3660492	2387	3.3778524
2260	3.3541084	2324	3.3662361	2388	3.3780343
2261	3.3543006	2325	3.3664230	2389	3.3782161
2262	3.3544926	2326	3.3666097	2390	3.3783979
2263	3.3546846	2327	3.3667964	2391	3.3785796
2264	3.3548764	2328	3.3669830	2392	3.3787612
2265	3.3550682	2329	3.3671695	2393	3.3789427
2266	3.3552559	2330	3.3673559	2394	3.3791241
2267	3.3554515	2331	3.3675423	2395	3.3793055
2268	3.3556430	2332	3.3657285	2396	3.3794868

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
2588	3.4129643	2652	3.4235735	2715	3.4337698
2589	3.4131320	2653	3.4237372	2716	3.4339298
2590	3.4132998	2654	3.4239009	2717	3.4340896
2591	3.4134673	2655	3.4240645	2718	3.4342494
2592	3.4136350	2656	3.4242281	2719	3.4344092
2593	3.4138025	2657	3.4243916	2720	3.4345689
2594	3.4139700	2658	3.4245550	2721	3.4347285
2595	3.4141374	2659	3.4247183	2722	3.4348881
2596	3.4143047	2660	3.4248816	2723	3.4350476
2597	3.4144719	2661	3.4250449	2724	3.4352071
2598	3.4146391	2662	3.4252080	2725	3.4353665
2599	3.4148063	2663	3.4253712	2726	3.4355258
2600	3.4149733	2664	3.4255342	2727	3.4356851
2601	3.4151404	2665	3.4256972	2728	3.4358444
1602	3.4153073	2666	3.4258601	2729	3.4360035
2603	3.4154742	2667	3.4260230	2730	3.4361626
2604	3.4156410	2668	3.4261858	2731	3.4363217
2605	3.4158077	2569	3.4263486	2732	3.4364807
2606	3.4159744	2570	3.4265113	2743	3.4366396
2607	3.4161410	2671	3.4266739	2734	3.4367985
2608	3.4163075	2672	3.4268365	2735	3.4369573
2609	3.4164741	2673	3.4269990	2736	3.4371161
2610	3.4166405	2074	3.4271614	2737	3.4372748
2611	3.4168069	2675	3.4273238	2738	3.4374334
2612	2.4169732	2676	3.4274861	2739	3.4375920
2613	3.4171394	2677	3.4276484	2740	3.4377506
2614	3.4173056	2678	3.4278106	2741	3.4379090
2615	3.4174717	2679	3.4279726	2742	3.4380674
2616	3.4176377	2680	3.4281348	2743	3.4382258
2617	3.4178037	2681	3.4282968	2744	3.4383841
2618	3.4179696	2682	3.4284588	2745	3.4385423
2619	3.4181355	2683	3.4286207	2746	3.4387005
2620	3.4183013	2684	3.4287825	2747	3.4388587
2621	3.4184670	2685	3.4289443	2748	3.4390167
2622	3.4186327	2686	3.4291060	2749	3.4391747
2623	3.4187983	2687	3.4292677	2750	3.4393327
2624	3.4189638	2688	3.4294293	2751	3.4394906
2625	3.4191293	2689	3.4295908	2752	3.4396484
2626	3.4192947	2690	3.4297523	2753	3.4398062
2627	3.4194601	2691	3.4299137	2754	3.4399639
2628	9.4196254	2692	3.4300751	2755	3.4401216
2629	3.4197906	2693	3.4302364	2756	3.4402792
2630	3.4199557	2694	3.4303976	2757	3.4404368
2631	3.4201208	2695	3.4305588	1758	3.4405943
2632	3.4202859	2696	3.4307199	2759	3.4407517
2633	3.4204509	2697	3.4308809	2760	3.4409091
2634	3.4206158	2698	3.4310419	2761	3.4410664
2635	3.4207806	2699	3.4312029	2762	3.4412237
2636	3.4209454	2700	3.4313638	2763	3.4413809
2637	3.4211101	2701	3.4315246	2764	3.4415380
2638	3.4212748	2702	3.4316853	2765	3.4416951
2639	3.4214394	2703	3.4318460	2766	3.4418522
2640	3.4216039	2704	3.4320067	2767	3.4420092
2641	3.4217684	2705	3.4321673	2768	3.4421661
2642	3.4219328	2706	3.4323278	2769	3.4423229
2643	3.4220972	2707	3.4324882	2770	3.4424798
2644	3.4222614	2708	3.4326487	2771	3.4426365
2645	3.4224257	2709	3.4328090	2772	3.4427932
2646	3.4225898	2710	3.4329693	2773	3.4429499
2647	3.4227539	2711	3.4331295	2774	3.4431065
2648	3.4229180	2712	3.4332897	2775	3.4432630
2649	3.4230820	2712	3.4332897	2776	3.4434195
2650	3.4232459	2713	3.4334498	2777	3.4435759
2651	3.4234097	2714	3.4336098	2778	3.4437322
2652	3.4235735	2715	3.4337698	2779	3.4438885

N.	Logaris.	N.	Logaris.	N.	Logaris.
2779	3.4438885	2843	3.4537769	2907	3.4634450
2780	3.4440448	2844	3.4539296	2908	3.4635944
2781	3.4442010	2845	3.4540823	2909	3.4637437
2782	3.4443571	2846	3.4542349	2910	3.4638930
2783	3.4445132	2847	3.4543875	2911	3.4640422
2784	3.4446692	2848	3.4545400	2912	3.4641914
2785	3.4448252	2849	3.4546924	2913	3.4643405
2786	3.4449811	2850	3.4548449	2914	3.4644895
2787	3.4451370	2851	3.4549972	2915	3.4646386
2788	3.4452928	2852	3.4551495	2916	3.4647875
2789	3.4454485	2853	3.4553018	2917	3.4649364
2790	3.4456042	2854	3.4554540	2918	3.4650853
2791	3.4457598	2855	3.4556061	2919	3.4652341
2792	3.4459154	2856	3.4557582	2920	3.4653828
2793	3.4460709	2857	3.4559102	2921	3.4655316
2794	3.4462264	2858	3.4560622	2922	3.4656802
2795	3.4463818	2859	3.4562142	2923	3.4658288
2796	3.4465372	2860	3.4563660	2924	3.4659774
2797	3.4466925	2861	3.4565179	2925	3.4661259
2898	3.4468477	2862	3.4566696	2926	3.4662743
2899	3.4470029	2863	3.4568213	2927	3.4664227
2800	3.4477580	2864	3.4569730	2928	3.4665711
2801	3.4473131	2865	3.4571246	2929	3.4667194
2802	3.4474681	2866	3.4572702	2930	3.4668676
2803	3.4476231	2867	3.4574277	2931	3.4670158
2804	3.4477780	2868	3.4575791	2932	3.4671640
2805	3.4479329	2869	3.4577305	2933	3.4673121
2806	3.4480877	2870	3.4578819	2934	3.4674601
2807	3.4482424	2871	3.4580332	2935	3.4676081
2808	3.4483971	2872	3.4581844	2936	3.4677560
2809	3.4485517	2873	3.4583356	2937	3.4679039
2810	3.4487063	2874	3.4584867	2938	3.4680518
2811	3.4488608	2875	3.4586378	2939	3.4681996
2812	3.4490153	2876	3.4587889	2940	3.4683473
2813	3.4491697	2877	3.4589399	2941	3.4684950
2814	3.4493241	2878	3.4590908	2942	3.4686427
2815	3.4494784	2879	3.4592417	2943	3.4687903
2816	3.4496326	2880	3.4593925	2944	3.4689378
2817	3.4497868	2881	3.4595433	2945	3.4690854
2818	3.4499410	2882	3.4596940	2946	3.4692327
2819	3.4500951	2883	3.4598446	2947	3.4693801
2820	3.4502491	2884	3.4599953	2948	3.4695275
2821	3.4504031	2885	3.4601458	2949	3.4696748
2822	3.4505570	2886	3.4602963	2950	3.4698220
2823	3.4507109	2887	3.4604468	2951	3.4699692
2824	3.4508647	2888	3.4605972	2952	3.4701163
2825	3.4510184	2889	3.4607475	2953	3.4702634
2826	3.4511721	2890	3.4608978	2914	3.4704105
2827	3.4513258	2891	3.4610481	2955	3.4705575
2828	3.4514794	2892	3.4611983	2956	3.4707044
2829	3.4516329	2893	3.4613484	2957	3.4708513
2830	3.4517864	2894	3.4614985	2958	3.4709982
2031	3.4519399	2895	3.4616486	2959	3.4711450
2832	3.4520932	2896	3.4617986	2960	3.4712917
2833	3.4522466	2897	3.4619485	2961	3.4714384
2834	3.4523998	2898	3.4620984	2962	3.4715851
2835	3.4525531	2899	3.4622482	2963	3.4717317
2836	3.4527062	2900	3.4623980	2964	3.4718782
2837	3.4528593	2901	3.4625477	2965	3.4720247
2838	3.4530124	2902	3.4626974	2966	3.4721711
2839	3.4531654	2903	3.4628470	2967	3.4723175
2840	3.4533183	2904	3.4629966	2968	3.4724639
2841	3.4534712	2905	3.4631461	2969	3.4726102
2842	3.4536241	2906	3.4632956	2970	3.4727564
2843	3.4537769	2907	3.4634450	2971	3.4729027

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
2970	3.4727564	3034	3.4820156	3098	3.4910814
2971	3.4729017	3035	3.4821587	3099	3.4912216
2972	3.4730418	3036	3.4823018	3100	3.4913617
2973	3.4731949	3037	3.4824448	3101	3.4915018
2974	3.4733410	3038	3.4825878	3102	3.4916418
2975	3.4734870	3039	3.4827307	3103	3.4917818
2976	3.4736329	3040	3.4828736	3104	3.4919217
2977	3.4737788	3041	3.4830164	3105	3.4920616
2978	3.4739247	3042	3.4831592	3106	3.4922014
2979	3.4740705	3043	3.4833019	3107	3.4923413
2980	3.4742163	3044	3.4834446	3108	3.4924810
2981	3.4743620	3045	3.4835873	3109	3.4926207
2982	3.4745076	3046	3.4837299	3110	3.4927604
2983	3.4746533	3047	3.4838725	3111	3.4929000
2984	3.4747988	3048	3.4840150	3112	3.4930396
2985	3.4749443	3049	3.4841574	3113	3.4931791
2986	3.4750898	3050	3.4842998	3114	3.4833186
2987	3.4752352	3051	3.4844422	3115	3.4934580
2988	3.4753806	3052	3.4845845	3116	3.4935974
2989	3.4755259	3053	3.4847268	3117	3.4937368
2990	3.4756712	3054	3.4848690	3118	3.4938761
2991	3.4758164	3055	3.4850112	3119	3.4940154
2992	3.4759616	3056	3.4851533	3120	3.4941546
2993	3.4761067	3057	3.4852954	3121	3.4942938
2994	3.4762518	3058	3.4854375	3122	3.4944329
2995	3.4763968	3059	3.4855795	3123	3.4945720
2996	3.4765418	3060	3.4857214	3124	3.4947110
2997	3.4766867	3061	3.4858633	3125	3.4948500
2998	3.4768316	3062	3.4860052	3126	3.4949890
2999	3.4769765	3063	3.4861470	3127	3.4951279
3000	3.4771212	3064	3.4862888	3128	3.4952667
3001	3.4772660	3065	3.4864305	3129	3.4954056
3002	3.4774107	3066	3.4865721	3130	3.4955443
3003	3.4775553	3067	3.4867138	3131	3.4956831
3004	3.4776999	3068	3.4868554	3132	3.4958218
3005	3.4778445	3069	3.4869969	3133	3.4959604
3006	3.4779890	3070	3.4871384	3134	3.4960990
3007	3.4781334	3071	3.4872798	3135	3.4962375
3008	3.4782778	3072	3.4874212	3136	3.4963761
3009	3.4784222	3073	3.4875626	3137	3.4965145
3010	3.4785665	3074	3.4877039	3138	3.4966529
3011	3.4787108	3075	3.4878451	3139	3.4967913
3012	3.4788550	3076	3.4879863	3140	3.4969296
3013	3.4789991	3077	3.4881275	3141	3.4970679
3014	3.4791432	3078	3.4882686	3142	3.4972062
3015	3.4792873	3079	3.4884097	3143	3.4973444
3016	3.4794313	3080	3.4885507	3144	3.4974825
3017	3.4795753	3081	3.4886917	3145	3.4976206
3018	3.4797192	3082	3.4888326	3146	3.4977587
3019	3.4798631	3083	3.4889735	3147	3.4978967
3020	3.4800069	3084	3.4891144	3148	3.4980347
3021	3.4801507	3085	3.4892552	3149	3.4981727
3022	3.4802945	3086	3.4893959	3150	3.4983106
3023	3.4804381	3087	3.4795366	3151	3.4984484
3024	3.4805818	3088	3.4896773	3152	3.4985862
3025	3.4807254	3089	3.4898179	3153	3.4987240
3026	3.4808689	3090	3.4899585	3154	3.4988617
3027	3.4810124	3091	3.4900990	3155	3.4989994
3028	3.4811559	3092	3.4902395	3156	3.4991370
3029	3.4812993	3093	3.4903799	3157	3.4992746
3030	3.4814426	3094	3.4905203	3158	3.4994121
3031	3.4815859	3095	3.4906607	3159	3.4995496
3032	3.4817292	3096	3.4908009	3160	3.4996871
3033	3.4818724	3097	3.4909412	3161	3.4998245
3034	3.4820156	3098	3.4910814	3162	3.4999619

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
3162	3.4999619	3226	3.5086644	3291	3.5173279
3163	3.5000992	3227	3.5087990	3292	3.5174598
3164	3.5002365	3228	3.5089335	3293	3.5175917
3165	3.5003737	3229	3.5090680	3294	3.5177236
3166	3.5005109	3230	3.5092025	3295	3.5178554
3167	3.5006481	3231	3.5093370	3296	3.5179872
3168	3.5007852	3232	3.5094713	3297	3.5181189
3169	3.5009222	3233	3.5096057	3298	3.5182506
3170	3.5010593	3234	3.5097400	3299	3.5183823
3171	3.5011962	3235	3.5098743	3300	3.5185139
3172	3.5013332	3236	3.5100085	3301	3.5186455
3173	3.5014701	3237	3.5101427	3302	3.5187771
3174	3.5016069	3238	3.5102768	3303	3.5189086
3175	3.5017437	3239	3.5104109	3304	3.5190400
3176	3.5018805	3240	3.5105450	3305	3.5191715
3177	3.5020172	3241	3.5106790	3306	3.5193029
3178	3.5021539	3242	3.5108130	3307	3.5194342
3179	3.5022905	3243	3.5109469	3308	3.5195655
3180	3.5024271	3244	3.5110808	3309	3.5196968
3181	3.5025637	3245	3.5112147	3310	3.5198280
3182	3.5027002	3246	3.5113485	3311	3.5199592
3183	3.5028366	3247	3.5114823	3312	3.5200903
3184	3.5029731	3248	3.5116160	3313	3.5202214
3185	3.5031094	3249	3.5117497	3314	3.5203525
3186	3.5032458	3250	3.5118834	3315	3.5204835
3187	3.5033821	3251	3.5120170	3316	3.5206145
3188	3.5035183	3252	3.5121505	3317	3.5207455
3189	3.5036545	3253	3.5122841	3318	3.5208764
3190	3.5037907	3254	3.5124175	3319	3.5210073
3191	3.5039268	3255	3.5125510	3320	3.5211381
3192	3.5040629	3256	3.5126844	3321	3.5212689
3193	3.5041989	3257	3.5128178	3322	3.5213996
3194	3.5043349	3258	3.5129511	3323	3.5215303
3195	3.5044709	3259	3.5130844	3324	3.5216610
3196	3.5046068	3260	3.5132176	3325	3.5217916
3197	3.5047426	3261	3.5133508	3326	3.5219222
3198	3.5048785	3262	3.5134840	3327	3.5220528
3199	3.5050142	3263	3.5136171	3328	3.5221833
3200	3.5051500	3264	3.5137501	3329	3.5223138
3201	3.5052857	3265	3.5138832	3330	3.5224442
3202	3.5054213	3266	3.5140162	3331	3.5225746
3203	3.5055569	3267	3.5141491	3332	3.5227050
3204	3.5056925	3268	3.5142820	3333	3.5228353
3205	3.5058280	3269	3.5144149	3334	3.5229656
3206	3.5059635	3270	3.5145477	3335	3.5230958
3207	3.5060990	3271	3.5146805	3336	3.5232260
3208	3.5062344	3272	3.5148133	3337	3.5233562
3209	3.5063697	3273	3.5149460	3338	3.5234863
3210	3.5065050	3274	3.5150787	3339	3.5236164
3211	3.5066403	3275	3.5152113	3340	3.5237465
3212	3.5067755	3276	3.5153439	3341	3.5238765
3213	3.5069107	3277	3.5154764	3342	3.5240064
3214	3.5070459	3278	3.5156089	3343	3.5241364
3215	3.5071810	3279	3.5157414	3344	3.5242663
3216	3.5073160	3280	3.5158738	3345	3.5243961
3217	3.5074511	3281	3.5160062	3346	3.5245259
3218	3.5075860	3282	3.5161386	3347	3.5246557
3219	3.5077210	3283	3.5162709	3348	3.5247854
3220	3.5078559	3284	3.5164031	3349	3.5249151
3221	3.5079907	3285	3.5165354	3350	3.5250448
3222	3.5081255	3286	3.5166676	3351	3.5251744
3223	3.5082603	3287	3.5167997	3352	3.5253040
3224	3.5083950	3288	3.5169318	3353	3.5254335
3225	3.5085297	3289	3.5170639	3354	3.5255630
3226	3.5086644	3290	3.5171959	3355	3.5256925

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
3355	3.5256925	3419	3.5338991	3483	3.5419535	3547	3.5498612	3611	3.5576275	3675	3.5652573
3356	3.5258219	3420	3.5340261	3484	3.5420781	3548	3.5499836	3612	3.5577477	3676	3.5653755
3357	3.5259513	3421	3.5341531	3485	3.5422028	3549	3.5501060	3613	3.5578680	3677	3.5654936
3358	3.5260807	3422	3.5342800	3486	3.5423274	3550	3.5502283	3614	3.5579881	3678	3.5656117
3359	3.5262100	3423	3.5344069	3487	3.5424519	3551	3.5503507	3615	3.5581083	3679	3.5657298
3360	3.5263393	3424	3.5345338	3488	3.5425765	3552	3.5504730	3616	3.5582284	3680	3.5658478
3361	3.5264685	3425	3.5346606	3489	3.5427010	3553	3.5505952	3617	3.5583485	3681	3.5659658
3362	3.5265977	3426	3.5347874	3490	3.5428254	3554	3.5507174	3618	3.5584686	3682	3.5660838
3363	3.5267269	3427	3.5349141	3491	3.5429498	3555	3.5508396	3619	3.5585886	3683	3.5662017
3364	3.5268560	3428	3.5350408	3492	3.5430742	3556	3.5509618	3620	3.5586086	3684	3.5663196
3365	3.5269851	3429	3.5351675	3493	3.5431986	3557	3.5510839	3621	3.5588285	3685	3.5664375
3366	3.5271141	3430	3.5352941	3494	3.5433229	3558	3.5512059	3622	3.5589484	3686	3.5665553
3367	3.5272431	3431	3.5354207	3495	3.5434472	3559	3.5513280	3623	3.5590683	3687	3.5666731
3368	3.5273721	3432	3.5355473	3496	3.5435714	3560	3.5514500	3624	3.5591882	3688	3.5667909
3369	3.5275010	3433	3.5356738	3497	3.5436956	3561	3.5515720	3625	3.5593080	3689	3.5669087
3370	3.5276299	3434	3.5358003	3498	3.5438198	3562	3.5516939	3626	3.5594278	3690	3.5670264
3371	3.5277588	3435	3.5359267	3499	3.5436439	3563	3.5518158	3627	3.5595476	3691	3.5671440
3372	3.5278876	3436	3.5360532	3500	3.5440680	3564	3.5519377	3628	3.5596673	3692	3.5672617
3373	3.5280163	3437	3.5361795	3501	3.5441921	3565	3.5520595	3629	3.5597870	3693	3.5673793
3374	3.5281451	3438	3.5363059	3502	3.5443161	3566	3.5521813	3630	3.5599066	3694	3.5674969
3375	3.5282738	3439	3.5364322	3503	3.5444401	3567	3.5523031	3631	3.5600262	3695	3.5676144
3376	3.5284024	3440	3.5365584	3504	3.5445641	3568	3.5524248	3632	3.5601458	3696	3.5677320
3377	3.5285311	3441	3.5366847	3505	3.5446880	3569	3.5525465	3633	3.5602654	3697	3.5078494
3378	3.5286596	3442	3.5368109	3506	3.5448119	3570	3.5526682	3634	3.5603849	3698	3.5679669
3379	3.5287882	3443	3.5369370	3507	3.5449358	3571	3.5527898	3635	3.5605044	3699	3.5680843
3380	3.5289167	3444	3.5370631	3508	3.5450596	3572	3.5529114	3636	3.5606239	3700	3.5682017
3381	3.5290452	3445	3.5371892	3509	3.5451834	3573	3.5530330	3637	3.5607433	3701	3.5683191
3382	3.5291736	3446	3.5373153	3510	3.5453071	3574	3.5531545	3638	3.5608627	3702	3.5684264
3383	3.5293020	3447	3.5374413	3511	3.5454308	3575	3.5533760	3639	3.5609820	3703	3.5685137
3384	3.5294303	3448	3.5375672	3512	3.5455545	3576	3.5533975	3640	3.5611014	3704	3.5686710
3385	3.5295587	3449	3.5376932	3513	3.5456781	3577	3.5535189	3641	3.5612207	3705	3.5687882
3386	3.5296869	3450	3.5378191	3514	3.5458018	3578	3.5536403	3642	3.5613399	3706	3.5689054
3387	3.5298152	3451	3.5379450	3515	3.5459253	3579	3.5537617	3643	3.5614592	3707	3.5690226
3388	3.5299434	3452	3.5380708	3516	3.5460489	3580	3.5538830	3644	3.5615784	3708	3.5691357
3389	3.5300716	3453	3.5381966	3517	3.5461724	3581	3.5540043	3645	3.5616975	3709	3.5692568
3390	3.5301997	3454	3.5383223	3518	3.5462958	3582	3.5541256	3646	3.5618167	3710	3.5693739
3391	3.5303278	3455	3.5384481	3519	3.5464193	3583	3.5542468	3647	3.5619358	3711	3.5694910
3392	3.5304558	3456	3.5385737	3520	3.5465427	3584	3.5543680	3648	3.5620548	3712	3.5696080
3393	3.5305839	3457	3.5386994	3521	3.5466660	3585	3.5544892	3649	3.5621739	3713	3.5697249
3394	3.5307118	3458	3.5388250	3522	3.5467894	3586	3.5546103	3650	3.5622929	3714	3.5698419
3395	3.5308398	3459	3.5389506	3523	3.5469126	3587	3.5547314	3651	3.5624118	3715	3.5699588
3396	3.5309677	3460	3.5390761	3524	3.5470359	3588	3.5548524	3652	3.5625308	3716	3.5700757
3397	3.5310955	3461	3.5392016	3535	3.5471591	3589	3.5549735	3653	3.5626497	3717	3.5701926
3398	3.5312234	3462	3.5393271	3526	3.5472823	3590	3.5550944	3654	3.5627685	3718	3.5703094
3399	3.5313512	3463	3.5394525	3527	3.5474055	3591	3.5552154	3655	3.5628874	3719	3.5704262
3400	3.5314789	3464	3.5395779	3528	3.5475286	3592	3.5553363	3656	3.5630061	3720	3.5705429
3401	3.5316066	3465	3.5397032	3529	3.5476517	3593	3.5554572	3657	3.5631250	3721	3.5706597
3402	3.5317343	3466	3.5398286	3530	3.5477747	3594	3.5555781	3658	3.5632437	3722	3.5707764
3403	3.5318619	3467	3.5399538	3531	3.5478977	3595	3.5556989	3659	3.5633624	3723	3.5708930
3404	3.5319895	3468	3.5400791	3532	3.5480207	3596	3.5558197	3660	3.5634811	3724	3.5710097
3405	3.5321171	3469	3.5402043	3533	3.5481436	3597	3.5559404	3661	3.5635997	3725	3.5711263
3406	3.5322446	3470	3.5403295	3534	3.5482665	3598	3.5560612	3662	3.5637183	3726	3.5712428
3407	3.5323721	3471	3.5404546	3535	3.5483894	3599	3.5561818	3663	3.5638369	3727	3.5713594
3408	3.5324996	3472	3.5405797	3536	3.5485123	3600	3.5563025	3664	3.5639555	3728	3.5714759
3409	3.5326270	3473	3.5407048	3537	3.5486351	3601	3.5564231	3665	3.5640740	3729	3.5715924
3410	3.5327544	3474	3.5408289	3538	3.5487578	3602	3.5565437	3666	3.5641925	3730	3.5717088
3411	3.5328817	3475	3.5409548	3539	3.5488806	3603	3.5566643	3667	3.5643109	3731	3.5718252
3412	3.5330090	3476	3.5410798	3540	3.5490033	3604	3.5567848	3668	3.5644293	3732	3.5719416
3413	3.5331363	3477	3.5412047	3541	3.5491259	3605	3.5569053	3669	3.5645477	3733	3.5720580
3414	3.5332635	3478	3.5413296	3542	3.5492486	3606	3.5570257	3670	3.5646661	3734	3.5721743
3415	3.5333907	3479	3.5414544	3543	3.5493712	3607	3.5571461	3671	3.5647844	3735	3.5722906
3416	3.5335179	3480	3.5415792	3544	3.5494937	3608	3.5572665	3672	3.5649027	3736	3.5724069
3417	3.5336450	3481	3.5417040	3545	3.5496162	3609	3.5573869	3673	3.5650209	3737	3.5725231
3418	3.5337721	3482	3.5418288	3546	3.5497387	3610	3.5575072	3674	3.5651392	3738	3.5726393
3419	3.5338991	3483	3.5419535	3547	3.5498612	3611	3.5576275	3675	3.5652573	3739	3.5727555

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
3739	3.5727555	3803	3.5801263	3867	3 5873742
3740	3.5728716	3804	3.5802405	3868	3.5874865
3741	3.5729877	3805	3.5803547	3869	3.5875987
3742	3.5731038	3806	3.5804688	3870	3.5877110
3743	3.5732198	3807	3.5805829	3871	3.5878232
3744	3 5733358	3808	3.5806969	3872	3.5879353
3745	3.5734518	3809	3.5808110	3873	3.5880475
3746	3.5735678	3810	3.5809250	3874	3.5881596
3747	3.5736837	3811	3.5810389	3875	3.5882717
3748	3.5737996	3812	3.5811529	3876	3.5883838
3749	3.5739154	3813	3.5812668	3877	3.5884958
3750	3 5740313	3814	3.5813807	3878	3.5886078
3751	3.5741471	3815	3.5814945	3879	3.5887198
3752	3.5742628	3816	3.5816084	3886	3.5888317
3753	3.5743786	3817	3.5817222	3881	3.5889436
3754	3.5744943	3818	3.5818459	3882	3.5890555
3755	3.5746099	3819	3.5819497	3883	3.5891674
3756	3.5747256	3820	3.5820634	3884	3.5892792
3757	3.5748412	3821	3.5821770	3885	3.5893910
3758	3.5749568	3822	3.5822907	3886	3.5895028
3759	3.5750723	3823	3.5824043	3887	3.5896145
3760	3.5751878	3824	3.5825179	3888	3.5897262
3761	3.5753033	3825	3.5826314	3889	3.5898379
3762	3.5754188	3826	3.5827450	3890	3.5899496
3763	3.5755342	3827	3.5828585	3891	3.5900612
3764	3.5756496	3828	3.5829719	3892	3.5901728
3765	3.5757650	3829	3.5830854	3893	3.5902844
3766	3.5758803	3830	3.5831988	3894	3.5903959
3767	3.5759956	3831	3.5833122	3895	3.5905075
3768	3 5751109	3832	3.5834255	3895	3 5906189
3769	3.5762261	3833	3.5835388	3897	3.5907304
3770	3.5763413	3834	3.5836521	3898	3. 5908418
3771	3.5764565	3835	3.5837654	3899	3.5909532
3772	3.5765717	3836	3.5838786	3900	3.5910646
3773	3.5766868	3837	3.5839918	3901	3. 5911759
3774	3.5768019	3838	3.5841050	3902	3.5912873
3775	3.5769169	3839	3.5842181	3903	3.5913985
3776	3.5770320	3840	3.5843312	3904	3. 5915098
3777	3.5771470	3841	3.5844443	3905	3.5916210
3778	3.5771620	3842	3.5845574	3906	3.5917322
3779	3.5773769	3843	3.5846704	3907	3.5918434
3780	3.5774918	3844	3.5847834	3908	3.5919546
3781	3.5776067	3845	3.5848263	3909	3.5920657
3782	3.5777215	3846	3.5850093	3910	3.5921768
3783	3.5778363	3847	3.5851222	3911	3.5922878
3784	3.5779511	3848	3.5852351	3912	3.5923988
3785	3.5780659	3849	3.5853479	3913	3.5925098
3786	3.5781806	3850	3.5854607	3914	3 5926208
3787	3.5782953	3851	3.5855735	3915	3.5927318
3788	3.5784100	3852	3.5856863	3916	3.5928427
3789	3.5785246	3853	3.5857990	3917	3.5929536
3790	3.5786392	3854	3.5859117	3918	3.5930344
3791	3.5787538	3855	3.5860244	3919	3.5931753
3792	3.5788683	3856	3.5861370	3920	3.5932861
3793	3.5789828	3857	3.5862496	3921	3.5933968
3794	3.5790973	3858	3.5863622	3922	3.5935076
3795	3.5792118	3859	3.5864748	3923	3 5936183
3796	3.5793262	3860	3.5865873	3924	3.5937290
3797	3.5794406	3861	3.5866998	3925	3.5938397
3798	3.5795550	3862	3.5868123	3926	3.5939503
3799	3.5796693	3863	3.5869247	3927	3.5940609
3800	3.5797836	3864	3.5870371	3928	3.5941715
3801	3.5798979	3865	3.5871495	3929	3.5942820
3802	3.5800121	3866	3.5872618	3930	3.5943925
3803	3.5801263	3867	3.5873742	3931	3.5955030

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
4124	3.6153187	4188	3.6220067	4252	3.6285933
4125	3.6154240	4189	3.6221104	4253	3.6285954
4126	3.6155292	4190	3.6222140	4254	3.6287975
4127	3.6156345	4191	3.6223177	4255	3.6288996
4128	3.6157397	4192	3.6224213	4256	3.6290016
4129	3.6158449	4193	3.6225249	4257	3.6291036
4130	3.6159501	4194	3.6226284	4258	3.6292057
4131	3.6160552	4195	3.6227320	4259	3.6293076
4132	3.6161603	4196	3.6228355	4260	3.6294096
4133	3.6162654	4197	3.6229390	4261	3.6295115
4134	3.6163705	4198	3.6230424	4262	3.6296134
4135	3.6164755	4199	3.6231459	4263	3.6297153
4136	3.6165805	4200	3.6232493	4264	3.6298172
4137	3.6166855	4201	3.6233527	4265	3.6299190
4138	3.6167905	4202	3.6234560	4266	3.6300208
4139	3.6168954	4203	3.6235594	4267	3.6301226
4140	3.6170003	4204	3.6236627	4268	3.6302244
4141	3.6171052	4205	3.6237660	4269	3.6303261
4142	3.6172101	4206	3.6238693	4270	3.6304279
4143	3.6173149	4207	3.6239725	4271	3.6305296
4144	3.6174197	4208	3.6240757	4272	3.6306312
4145	3.6175245	4209	3.6241789	4273	3.6307329
4146	3.6176293	4210	3.6242821	4274	3.6308345
4147	3.6177340	4211	3.6243852	4275	3.6309361
4148	3.6178387	4212	3.6244844	4276	3.6310377
4149	3.6179434	4213	3.6245915	4277	3.6311392
4150	3.6180481	4214	3.6246945	4278	3.6312408
4151	3.6181527	4215	3.6247976	4279	3.6313423
4152	3.6182573	4216	3.6249006	4280	3.6314438
4153	3.6183619	4217	3.6250036	4281	3.6315452
4154	3.6184665	4218	3.6251066	4282	3.6316467
4155	3.6185710	4219	3.6252095	4283	3.6317481
4256	3.6186755	4220	3.6253124	4284	3.6318495
4157	3.6187800	4221	3.6254153	4285	3.6319508
4158	3.6188845	4222	3.6255182	4286	3.6320522
4159	3.6189889	4223	3.6256211	4287	3.6321535
4160	3.6190933	4224	3.6257239	4288	3.6322548
4161	3.6191977	4225	3.6258267	4289	3.6323560
4162	3.6193021	4226	3.6259295	4290	3.6324573
4163	3.6194064	4227	3.6260322	4291	3.6325585
4164	3.6195107	4228	3.6261350	4292	3.6326597
4165	3.6196250	4229	3.6262377	4293	3.6327609
4166	3.6197193	4230	3.6263404	4294	3.6328620
4167	3.6198235	4231	3.6264430	4295	3.6329632
4168	3.6199277	4232	3.6265457	4296	3.6330643
4169	3.6200319	4233	3.6266483	4297	3.6331653
4170	3.6201360	4234	3.6267509	4298	3.6332664
4171	3.6202402	4235	3.6268534	4299	3.6333674
4172	3.6203443	4236	3.6269559	4300	3.6334685
4173	3.6204484	4237	3.6270585	4301	3.6335694
4174	3.6205524	4238	3.6271610	4302	3.6336704
4175	3.6206565	4239	3.6272634	4303	3.6337713
4176	3.6207605	4240	3.6273659	4304	3.6338723
4177	3.6208645	4241	3.6274683	4305	3.6339732
4178	3.6209684	4242	3.6275707	4306	3.6340740
4179	3.6210724	4243	3.6276730	4307	3.6341749
4180	3.6211763	4244	3.6277754	4308	3.6342757
4181	3.6212802	4245	3.6278777	4309	3.6343765
4182	3.6213840	4246	3.6279800	4310	3.6344773
4183	3.6214879	4247	3.6280823	4311	3.6345780
4184	3.6215917	4248	3.6281845	4312	3.6346788
4185	3.6216955	4249	3.6282867	4313	3.6347795
4186	3.6217992	4250	3.6283889	4314	3.6348801
4187	3.6219030	4251	3.6284911	4315	3.6349808
4188	3.6220067	4252	3.6285933	4316	3.6350814

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
4316	3.6350814	4380	3.6424741	4444	3.6477740
4317	3.6351820	4381	3.6415713	4445	3.6478718
4318	3.6352826	4382	3.6416724	4446	3.6479695
4319	3.6353832	4383	3.6417715	4447	3.6484671
4320	3.6354837	4384	3.6418705	4448	3.6481648
4321	3.6355843	4385	3.6419696	4449	3.6482624
4322	3.6356848	4326	3.6420686	4450	3.6483600
4323	3.6357852	4387	3.6421676	4451	3.6484576
4324	3.6358857	4388	3.6422666	4452	3.6485552
4325	3.6359861	4389	3.6423656	4453	3.6486527
4326	3.6360865	4390	3.6424645	4454	3.6487502
4327	3.6361869	4391	3.6425634	4455	3.6488477
4328	3.6362872	4392	3.6426623	4456	3.6489452
4329	3.6363876	4393	3.6427612	4457	3.6490426
4330	3.6364879	4394	3.6428601	4458	3.6491401
4331	3.6365882	4395	3.6429589	4459	3.6492375
4332	3.6366884	4396	3.6430577	4460	3.6493349
4333	3.6367887	4397	3.6431565	4461	3.6494322
4334	3.6368889	4398	3.6432552	4462	3.6495296
4335	3.6369891	4399	3.6433540	4463	3.6496269
4336	3.6370893	4400	3.6434527	4464	3.6497242
4337	3.6371894	4401	3.6435514	4465	3.6498215
4338	3.6372895	4402	3.6436500	4466	3.6499187
4339	3.6373896	4403	3.6437487	4467	3.6500160
4340	3.6374897	4404	3.6438473	4468	3.6501132
4341	3.6375898	4405	3.6439459	4469	3.6502104
4342	3.6377898	4406	3.6440445	4470	3.6503075
4343	3.6377898	4407	3.6441430	4471	3.6504047
4344	3.6378898	4408	3.6442416	4472	3.6505018
4345	3.6379898	4409	3.6443401	4473	3.6505989
4346	3.6380897	4410	3.6444386	4474	3.6506960
4347	3.6381896	4411	3.6445371	4475	3.6507930
4348	3.6382895	4412	3.6446355	4476	3.6508901
4349	3.6383834	4413	3.6447339	4477	3.6509871
4350	3.6384893	4414	3.6448323	4478	3.6510841
4351	3.6385891	4415	3.6449307	4479	3.6511811
4352	3.6386889	4416	3.6450291	4480	3.6512780
4353	3.6387887	4417	3.6451274	4481	3.6513749
4354	3.6388884	4418	3.6452257	4482	3.6514719
4355	3.6389882	4419	3.6453240	4483	3.6515687
4356	3.6390879	4420	3.6454223	4484	3.6516656
4357	3.6391876	4421	3.6455205	4485	3.6517624
4358	3.6392872	4422	3.6456187	4486	3.6518593
4359	3.6393869	4423	3.6457169	4487	3.6519561
4360	3.6394865	4424	3.6458151	4488	3.6520528
4361	3.6395861	4425	3.6459133	4489	3.6521496
4362	3.6396857	4426	3.6460114	4490	3.6522463
4363	3.6397852	4427	3.6461095	4491	3.6523430
4364	3.6398847	4428	3.6462076	4492	3.6524397
4365	3.6399842	4429	3.6463057	4493	3.6525364
4366	3.6400837	4430	3.6464037	4494	3.6526331
4367	3.6401832	4431	3.6465017	4495	3.6527297
4368	3.6402826	4432	3.6465997	4496	3.6528263
4369	3.6403820	4433	3.6466977	4497	3.6529229
4370	3.6404814	4434	3.6467957	4498	3.6530195
4371	3.6405808	4435	3.6468936	4499	3.6531160
4372	3.6406802	4436	3.6469915	4500	3.6532125
4373	3.6407795	4437	3.6470894	4501	3.6533090
4374	3.6408788	4438	3.6471873	4502	3.6534055
4375	3.6409781	4439	3.6472851	4503	3.6535019
4376	3.6410773	4440	3.6473830	4504	3.6536984
4377	3.6411765	4441	3.6474808	4505	3.6536948
4378	3.6412758	4442	3.6475785	4506	3.6537912
4379	3.6413749	4443	3.6476763	4507	3.6538876
4380	3.6414741	4444	3.6477740	4508	3.6539839

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
4508	3.6539830	4572	3.6601062	4636	3.6661434
4509	3.6540802	4573	3.6602012	4637	3.6662371
4510	3.6541764	4574	3.6602962	4638	3.6663307
4511	3.6542728	4575	3.6603911	4639	3.6664244
4512	3.6543691	4576	3.6604860	4640	3.6665180
4513	3.6544655	4577	3.6605809	4641	3.6666116
4514	3.6545616	4578	3.6606758	4642	3.6667051
4515	3.6546571	4579	3.6607706	4643	3.6667987
4516	3.6547533	4580	3.6608655	4644	3.6668922
4517	3.6548501	4581	3.6609604	4645	3.6669857
4518	3.6549466	4582	3.6610551	4646	3.6670792
4519	3.6550431	4583	3.6611499	4647	3.6671727
4520	3.6551384	4584	3.6612444	4648	3.6672661
4521	3.6552341	4585	3.6613393	4649	3.6673595
4522	3.6553306	4586	3.6614340	4650	3.6674530
4523	3.6554266	4587	3.6615287	4651	3.6675463
4524	3.6555226	4588	3.6616234	4652	3.6676497
4525	3.6556186	4589	3.6617181	4653	3.6677331
4526	3.6557145	4590	3.6618127	4654	3.6678264
4527	3.6558105	4591	3.6619073	4655	3.6679197
4528	3.6559064	4592	3.6620019	4656	3.6680130
4529	3.6560023	4593	3.6620964	4657	3.6681062
4530	3.6560982	4594	3.66219	4658	3.6681995
4531	3.6561941	4595	3.6622855	4659	3.6682927
4532	3.6562899	4596	3.6623800	4660	3.6683859
4533	3.6563857	4597	3.6624745	4661	3.6684791
4534	3.6564815	4598	3.6625690	4662	3.6685723
4535	3.6565773	4599	3.6626634	4663	3.6686654
4536	3.6566730	4600	3.6627578	4664	3.6687585
4537	3.6567688	4601	3.6628522	4665	3.6688516
4538	3.6568645	4602	3.6629466	4666	3.6689447
4539	3.6569602	4603	3.6630410	4667	3.6690378
4540	3.6570559	4604	3.6631353	4668	3.6691308
4541	3.6571515	4605	3.6632296	4669	3.6692239
4542	3.6572471	4606	3.6633239	4670	3.6693169
4543	3.6573427	4607	3.6634182	4671	3.6694099
4544	3.6574383	4608	3.6635125	4672	3.6695028
4545	3.6575339	4609	3.6636067	4673	3.6695958
4546	3.6576294	4610	3.6637009	4674	3.6696887
4547	3.6577250	4611	3.6637951	4675	3.6697816
4548	3.6578205	4612	3.6638893	4676	3.6698745
4549	3.6579159	4613	3.6639835	4677	3.6699674
4550	3.6580114	4614	3.6640776	4678	3.6700602
4551	3.6581068	4615	3.6641717	4679	3.6701530
4552	3.6582023	4616	3.6642658	4680	3.6702459
4553	3.6582976	4617	3.6643599	4681	3.6703386
4554	3.6583930	4618	3.6644539	4682	3.6704314
4555	3.6584884	4619	3.6645480	4683	3.6705242
4556	3.6585837	4620	3.6646420	4684	3.6706169
4557	3.6586790	4621	3.6647360	4685	3.6707096
4558	3.6587743	4622	3.6648299	4686	3.6708023
4559	3.6588696	4623	3.6649239	4687	3.6708950
4560	3.6589648	4624	3.6650178	4688	3.6709876
4561	3.6590601	4625	3.6651117	4689	3.6710802
4562	3.6591553	4626	3.6652056	4690	3.6711728
4563	3.6592504	4627	3.6652995	4691	3.6712654
4564	3.6593456	4628	3.6653933	4692	3.6713580
4565	3.6594407	4629	3.6654872	4693	3.6714506
4566	3.6595359	4630	3.6655810	4694	3.6715431
4567	3.6596310	4631	3.6656748	4695	3.6716356
4568	3.6597261	4632	3.6657685	4696	3.6717281
4569	3.6598212	4633	3.6658623	4697	3.6718206
4570	3.6599162	4634	3.6659560	4698	3.6719130
4571	3.6600112	4635	3.6660497	4699	3.6720054
4572	3.6601062	4636	3.6661434	4700	3.6720979

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
4700	3.6720979	4764	3.6779718	4828	3.6837673
4701	3.6721903	4765	3.6780619	4829	3.6838572
4702	3.6722826	4766	3.6781530	4830	3.6839471
4703	3.6723750	4767	3.6782442	4831	3.6840370
4704	3.6724673	4768	3.6783352	4832	3.6841269
4705	3.6725596	4769	3.6784263	4833	3.6842168
4706	3.6726519	4770	3.6785184	4834	3.6843066
4707	3.6727441	4771	3.6786094	4835	3.6843965
4708	3.6728363	4772	3.6787004	4836	3.6844863
4709	3.6729287	4773	3.6787914	4837	3.6845761
4710	3.6730209	4774	3.6788824	4838	3.6846659
4711	3.6731131	4775	3.6789734	4839	3.6847556
4712	3.6732053	4776	3.6790643	4840	3.6848454
4713	3.6732974	4777	3.6791553	4841	3.6849351
4714	3.6733896	4778	3.6792461	4842	3.6850248
4715	3.6734817	4779	3.6793370	4843	3.6851145
4716	3.6735738	4780	3.6794279	4844	3.6852042
4717	3.6736659	4781	3.6795187	4845	3.6852938
4718	3.6737579	4782	3.6796096	4846	3.6853834
4719	3.6738500	4783	3.6797004	4847	3.6854730
4720	3.6739420	4784	3.6797911	4848	3.6855626
4721	3.6740340	4785	3.6798819	4849	3.6856522
4722	3.6741260	4786	3.6799727	4850	3.6857417
4723	3.6742179	4787	3.6800634	4851	3.6858313
4724	3.6743099	4788	3.6801541	4852	3.6859208
4725	3.6744018	4789	3.6802448	4853	3.6860103
4726	3.6744937	4790	3.6803355	4854	3.6860998
4727	3.6745856	4791	3.6804261	4855	3.6861892
4728	3.6746775	4792	3.6805168	4856	3.6862787
4729	3.6747693	4793	3.6806074	4857	3.6863681
4730	3.6748611	4794	3.6806980	4858	3.6864575
4731	3.6749530	4795	3.6807886	4859	3.6865469
4732	3.6750447	4796	3.6808791	4860	3.6866363
4733	3.6751365	4797	3.6809697	4861	3.6867256
4734	3.6752283	4798	3.6810602	4862	3.6868149
4735	3.6753200	4799	3.6811507	4863	3.6869043
4736	3.6754117	4800	3.6812412	4864	3.6869936
4737	3.6755034	4801	3.6813317	4865	3.6870828
4738	3.6755951	4802	3.6814221	4866	3.6871721
4739	3.6756867	4803	3.6815126	4867	3.6872613
4740	3.6757783	4804	9.6816030	4868	3.6873506
4741	3.6758700	4805	3.6816934	4869	3.6874398
4742	3.6759615	4806	3.6817838	4870	3.6875290
4743	3.6760531	4807	3.6818741	4871	3.6876181
4744	3.6761447	4808	3.6819645	4872	3.6877073
4745	3.6762362	4809	3.6820548	4873	3.6877964
4746	3.6763277	4810	3.6821451	4874	3.6878855
4747	3.6764192	4811	3.6822354	4875	3.6879746
4748	3.6765107	4812	3.6823255	4876	3.6880637
4749	3.6766021	4813	3.6824159	4877	3.6881528
4750	3.6766936	4814	3.6825061	4878	3.6882418
4751	3.6767850	4815	3.6825963	4879	3.6883308
4752	3.6768764	4816	3.6826865	4880	3.6884198
4753	3.6769678	4817	3.6827766	4881	3.6885088
4754	3.6770592	4818	3.6828668	4882	3.6885978
4755	3.6771505	4819	3.6829569	4883	3.6886867
4756	3.6772418	4820	3.6830470	4884	3.6887756
4757	3.6773332	4821	3.6831371	4885	3.6888646
4758	3.6774244	4822	3.6832272	4886	3.6889535
4759	3.6775157	4823	3.6833173	4887	3.6890423
4760	3.6776069	4824	3.6834073	4888	3.6891312
4761	3.6776982	4825	3.6834973	4889	3.6892200
4762	3.6777894	4826	3.6835873	4890	3.6893089
4763	3.6778806	4827	3.6836773	4891	3.6893977
4764	3.6779718	4828	3.6837673	4892	3.6894864

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
4892	3.6894864	4956	3.6951313	5020	3.7007037	5084	3.7062055	5148	3.7116385	5212	3.7170044
4893	3.6895752	4957	3.6952189	5021	3.7007902	5085	3.7062910	5149	3.7117229	5213	3.7170877
4894	3.6896640	4958	3.6953065	5022	3.7008767	5086	3.7063764	5150	3.7118072	5214	3.7171710
4895	3.6897527	4959	3.6953941	5023	3.7009632	5087	3.7064617	5151	3.7118915	5215	3.7172543
4896	3.6898414	4960	3.6954817	5024	3.7010496	5088	3.7065471	5152	3.7119759	5216	3.7173376
4897	3.6899301	4961	3.6955692	5025	3.7011361	5089	3.7066324	5153	3.7120601	5217	3.7174208
4898	3.6900188	4962	3.6956568	5026	3.7012225	5090	3.7067178	5154	3.7121444	5218	3.7175041
4899	3.6901074	4963	3.6957443	5027	3.7013089	5091	3.7068031	5155	3.7122287	5219	3.7175873
4900	3.6901961	4964	3.6958318	5028	3.7013953	5092	3.7068884	5156	3.7123129	5220	3.7176705
4901	3.6902847	4965	3.6959193	5029	3.7014816	5093	3.7069737	5157	3.7123971	5221	3.7177537
4902	3.6903733	4966	3.6960067	5030	3.7015680	5094	3.7070589	5158	3.7124813	5222	3.7178369
4903	3.6904619	4967	3.6960942	5031	3.7016543	5095	3.7071442	5159	3.7125655	5223	3.7179200
4904	3.6905505	4968	3.6961816	5032	3.7017406	5096	3.7072294	5160	3.7126497	5224	3.7180031
4905	3.6906390	4969	3.6962690	5033	3.7018269	5097	3.7073146	5161	3.7127339	5225	3.7180863
4906	3.6907275	4970	3.6963564	5034	3.7019132	5098	3.7073998	5162	3.7128180	5226	3.7181694
4907	3.6908161	4971	3.6964438	5035	3.7019995	5099	3.7074850	5163	3.7129021	5227	3.7182525
4908	3.6909046	4972	3.6965311	5036	3.7020857	5100	3.7075702	5164	3.7129862	5228	3.7183356
4909	3.6909930	4973	3.6966185	5037	3.7021719	5101	3.7076553	5165	3.7130703	5229	3.7184186
4910	3.6910815	4974	3.6967058	5038	3.7022582	5102	3.7077405	5166	3.7131544	5230	3.7185017
4911	3.6911699	4975	3.6967931	5039	3.7023444	5103	3.7078256	5167	3.7132385	5231	3.7185847
4912	3.6912584	4976	3.6968804	5040	3.7024305	5104	3.7079107	5168	3.7133225	5232	3.7186677
4913	3.6913468	4977	3.6969676	5041	3.7025167	5105	3.7079957	5169	3.7134065	5233	3.7187507
4914	3.6914352	4978	3.6970549	5042	3.7026028	5106	3.7080808	5170	3.7134905	5234	3.7188337
4915	3.6915235	4979	3.6971421	5043	3.7026890	5107	3.7081659	5171	3.7135745	5235	3.7189167
4916	3.6916119	4980	3.6972293	5044	3.7027751	5108	3.7082509	5172	3.7136585	5236	3.7189996
4917	3.6917002	4981	3.6973165	5045	3.7028612	5109	3.7083359	5173	3.7137425	5237	3.7190826
4918	3.6917885	4982	3.6974037	5046	3.7029472	5110	3.7084209	5174	3.7138264	5238	3.7191655
4919	3.6918768	4983	3.6974909	5047	3.7030333	5111	3.7085059	5175	3.7139104	5239	3.7192484
4920	3.6919651	4984	3.6975780	5048	3.7031193	5112	3.7085908	5176	3.7139943	5240	3.7193313
4921	3.6920534	4985	3.6976652	5049	3.7032054	5113	3.7086758	5177	3.7140782	5241	3.7194142
4922	3.6921416	4986	3.6977523	5050	3.7032914	5114	3.7087607	5178	3.7141620	5242	3.7194970
4923	3.6922298	4987	3.6978394	5051	3.7033774	5115	3.7088456	5179	3.7142459	5243	3.7195799
4924	3.6923180	4988	3.6979264	5052	3.7034633	5116	3.7089305	5180	3.7143298	5244	3.7196627
4925	3.6924062	4989	3.6980135	5053	3.7035493	5117	3.7090154	5181	3.7144136	5245	3.7197455
4926	3.6924944	4990	3.6981005	5054	3.7036352	5118	3.7091003	5182	3.7144974	5246	3.7198283
4927	3.6925826	4991	3.6981876	5055	3.7037212	5119	3.7091851	5183	3.7145812	5247	3.7199111
4928	3.6926707	4992	3.6982746	5056	3.7038071	5120	3.7092700	5184	3.7146650	5248	3.7199938
4929	3.6927588	4993	3.6983616	5057	3.7038929	5121	3.7093548	5185	3.7147488	5249	3.7200766
4930	3.6928469	4994	3.6984485	5058	3.7039788	5122	3.7094396	5186	3.7149325	5250	3.7201593
4931	3.6929350	4995	3.6985355	5059	3.7040647	5123	3.7095244	5187	3.7149162	5251	3.7202420
4932	3.6930231	4996	3.6986224	5060	3.7041505	5124	3.7096091	5188	3.7150000	5252	3.7203247
4933	3.6931111	4997	3.6987093	5061	3.7042363	5125	3.7096939	5189	3.7150837	5253	3.7204074
4934	3.6931991	4998	3.6987963	5062	3.7043221	5126	3.7097786	5190	3.7151674	5254	3.7204901
4935	3.6932872	4999	3.6988831	5063	3.7044079	5127	3.7098633	5191	3.7152510	5255	3.7205727
4936	3.6933752	5000	3.6989700	5064	3.7044937	5128	3.7099480	5192	3.7153347	5256	3.7206554
4937	3.6934631	5001	3.6990569	5065	3.7045794	5129	3.7100327	5193	3.7154183	5257	3.7207380
4938	3.6935511	5002	3.6991437	5066	3.7046652	5130	3.7101174	5194	3.7155019	5258	3.7208206
4939	3.6936390	5003	3.6992305	5067	3.7047509	5131	3.7102020	5195	3.7155856	5259	3.7209032
4940	3.6937269	5004	3.6993173	5068	3.7048366	5132	3.7102866	5196	3.7156691	5260	3.7209857
4941	3.6938148	5005	3.6994041	5069	3.7049223	5133	3.7103713	5197	3.7157527	5261	3.7210683
4942	3.6939027	5006	3.6994908	5070	3.7050080	5134	3.7104559	5198	3.7158363	5262	3.7211508
4943	3.6939906	5007	3.6995776	5071	3.7050936	5135	3.7105404	5199	3.7159198	5263	3.7212334
4944	3.6940785	5008	3.6996643	5072	3.7051792	5136	3.7106250	5200	3.7160033	5264	3.7213159
4945	3.6941663	5009	3.6997510	5073	3.7052649	5137	3.7107096	5201	3.7160829	5265	3.7213984
4946	3.6942541	5010	3.6998377	5074	3.7053505	5138	3.7107941	5202	3.7161703	5266	3.7214809
4947	3.6943419	5011	3.6999244	5075	3.7054360	5139	3.7108786	5203	3.7162538	5267	3.7215633
4948	3.6944297	5012	3.7000111	5076	3.7055216	5140	3.7109631	5204	3.7163373	5268	3.7216458
4949	3.6945174	5013	3.7000977	5077	3.7056072	5141	3.7110476	5205	3.7164207	5269	3.7217282
4950	3.6946052	5014	3.7001843	5078	3.7056927	5142	3.7111321	5206	3.7165042	5270	3.7218106
4951	3.6946929	5015	3.7002709	5079	3.7057782	5143	3.7112165	5207	3.7165876	5271	3.7218930
4952	3.6947806	5016	3.7003575	5080	3.7058637	5144	3.7113010	5208	3.7166710	5272	3.7219754
4953	3.6948683	5017	3.7004441	5081	3.7059492	5145	3.7113854	5209	3.7167544	5273	3.7220578
4954	3.6949560	5018	3.7005307	5082	3.7060347	5146	3.7114698	5210	3.7168377	5274	3.7221401
4955	3.6950437	5019	3.7006172	5083	3.7061201	5147	3.7115542	5211	3.7169211	5275	3.7222225
4956	3.6951313	5020	3.7007037	5084	3.7062055	5148	3.7116385	5212	3.7170044	5276	3.7223048

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
5276	3.7223048	5340	3.7275413	5404	3.7327153	5468	3.7378285	5532	3.7428822	5596	3.7478777
5277	3.7223871	5341	3.7276226	5405	3.7327957	5469	3.7379079	5533	3.7429607	5597	3.7479553
5278	3.7224694	5342	3.7277039	5406	3.7328760	5470	3.7379873	5534	3.7430392	5598	3.7480329
5279	3.7225517	5343	3.7277852	5407	3.7329564	5471	3.7380667	5535	3.7431176	5599	3.7481105
5280	3.7226339	5344	3.7278664	5408	3.7330367	5472	3.7381461	5536	3.7431961	5600	3.7481880
5281	3.7227162	5345	3.7279477	5409	3.7331170	5473	3.7382254	5537	3.7432745	5601	3.7482656
5282	3.7227984	5346	3.7280290	5410	3.7331973	5474	3.7383048	5538	3.7433530	5602	3.7483431
5283	3.7228806	5347	3.7281102	5411	3.7332775	5475	3.7383841	5539	3.7434314	5603	3.7484206
5284	3.7229628	5348	3.7281914	5412	3.7333578	5476	3.7384634	5540	3.7435098	5604	3.7484981
5285	3.7230450	5349	3.7282726	5413	3.7334380	5477	3.7385427	5541	3.7435881	5605	3.7485756
5286	3.7231272	5350	3.7283538	5414	3.7335182	5478	3.7386220	5542	3.7436665	5606	3.7486531
5287	3.7232093	5351	3.7284349	5415	3.7335985	5479	3.7387013	5543	3.7437449	5607	3.7487306
5288	3.7232914	5352	3.7285161	5416	3.7336787	5480	3.7387806	5544	3.7438232	5608	3.7488080
5289	3.7233736	5353	3.7285972	5417	3.7337588	5481	3.7388598	5545	3.7439015	5609	3.7488854
5290	3.7234557	5354	3.7286784	5418	3.7338390	5482	3.7389390	5546	3.7439799	5610	3.7489629
5291	3.7235378	5355	3.7287595	5419	3.7339191	5483	3.7390182	5547	3.7440582	5611	3.7490403
5292	3.7236198	5356	3.7288406	5420	3.7339993	5484	3.7390974	5548	3.7441365	5612	3.7491177
5293	3.7237019	5357	3.7289216	5421	3.7340794	5485	3.7391766	5549	3.7442147	5613	3.7491950
5294	3.7237839	5358	3.7290027	5422	3.7341595	5486	3.7392558	5550	3.7442930	5614	3.7492724
5295	3.7238660	5359	3.7290838	5423	3.7342395	5487	3.7393350	5551	3.7443712	5615	3.7493498
5296	3.7239480	5360	3.7291648	5424	3.7343197	5488	3.7394141	5552	3.7444495	5616	3.7494271
5297	3.7240300	5361	3.7292458	5425	3.7343997	5489	3.7394932	5553	3.7545277	5617	3.7495044
5298	3.7241120	5362	3.7293268	5426	3.7344798	5490	3.7395721	5554	3.7446059	5618	3.7495817
5299	3.7241939	5363	3.7294078	5427	3.7347598	5491	3.7396514	5555	3.7446841	5619	3.7496590
5300	3.7242759	5364	3.7294888	5428	2.7346398	5492	3.7397305	5556	3.7447622	5620	3.7497363
5301	3.7243578	5365	3.7295697	5429	3.7347198	5493	3.7398096	5557	3.7448404	5621	3.7498136
5302	3.7244397	5366	3.7196507	5430	3.7347998	5494	3.7398886	5558	3.7449185	5622	3.7498908
5303	3.7245216	5367	3.7297316	5431	3.7348798	5495	3.7399677	5559	3.7449967	5623	3.7499681
5304	3.7246035	5368	3.7298125	5432	3.7349598	5496	3.7400467	5560	3.7450748	5624	3.7500453
5305	3.7246854	5369	3.7298934	5433	3.7350397	5497	3.7407257	5561	3.7451529	5625	3.7501225
5306	3.7247672	5370	3.7299743	5434	3.7351196	5498	3.7402047	5562	3.7452310	5626	3.7501997
5307	3.7248491	5371	3.7300551	5435	3.7351995	5499	3.7402837	5563	3.7453091	5627	3.7502369
5308	3.7249309	5372	3.7301360	5436	3.7352794	5500	3.7403627	5564	3.7453871	5628	3.7503541
5309	3.7250127	5373	3.7302168	5437	3.7353593	5501	3.7404416	5565	3.7454652	5629	3.7504312
5310	3.7250945	5374	3.7302977	5438	3.7354392	5502	3.7405206	5566	3.7455432	5630	3.7505084
5311	3.7251763	5375	3.7303785	5439	3.7355191	5503	3.7405995	5567	3.7456212	5631	3.7505855
5312	3.7252581	5376	3.7304593	5440	3.7355989	5504	3.7406784	5568	3.7456992	5632	3.7506626
5313	3.7253398	5377	3.7305400	5441	3.7356787	5505	3.7407573	5569	3.7457772	5633	3.7507398
5314	3.7254215	5378	3.7306208	5442	3.7357585	5506	3.7408361	5570	3.7458552	5634	3.7508168
5315	3.7255033	5379	3.7307015	5443	3.7358383	5507	3.7409151	5571	3.7459332	5635	3.7508939
5316	3.7255850	5380	3.7307823	5444	3.7359181	5508	3.7409919	5572	3.7460111	5636	3.7509710
5317	3.7256667	5381	3.7308630	5445	3.7359979	5509	3.7410728	5573	3.7460890	5637	3.7510480
5318	3.7257483	5382	3.7309437	5446	3.7360776	5510	3.7411516	5574	3.7461670	5638	3.7511251
5319	3.7258300	5383	3.7310244	5447	3.7361574	5511	3.7412304	5575	3.7462449	5639	3.7512021
5320	2.7259116	5384	3.7311051	5448	3.7362371	5512	3.7413092	5576	3.7463228	5640	3.7512791
5321	3.7259933	5385	3.7311857	5449	3.7363168	5513	3.7413880	5577	3.7464006	5641	3.7513561
5322	3.7260749	5386	3.7312663	5450	3.7363965	5514	3.7414668	5578	3.7464785	5642	3.7514331
5323	3.7261565	5387	3.7313470	5451	3.7364762	5515	3.7415455	5579	3.7465564	5643	3.7515100
5324	3.7262380	5388	3.7314276	5452	3.7365558	5516	3.7416243	5580	3.7466342	5644	3.7515870
5325	3.7263196	5389	3.7315082	5453	3.7366355	5517	3.7417030	5581	3.7467120	5645	3.7516639
5326	3.7264012	5390	3.7315888	5454	3.7367151	5518	3.7417817	5582	3.7467898	5646	3.7517409
5327	3.7264827	5391	3.7316693	5455	3.7367948	5519	3.7418604	5583	3.7468676	5647	3.7518178
5328	3.7265642	5392	3.7317499	5456	3.7368744	5520	3.7419391	5584	3.7469454	5648	3.7518947
5329	3.7266457	5393	3.7318304	5457	3.7369540	5521	3.7420177	5585	3.7470232	5649	3.7519716
5330	3.7267272	5394	3.7319109	5458	3.7370335	5522	3.7420964	5586	3.7471009	5650	3.7520484
5331	3.7268087	5395	3.7319914	5459	3.7371131	5523	3.7421750	5587	3.7471787	5651	3.7521253
5332	3.7268901	5396	3.7320719	5460	3.7371926	5524	3.7422537	5588	3.7472564	5652	3.7522022
5333	3.7269816	5397	3.7321524	5461	3.7372722	5525	3.7423323	5589	3.7473341	5653	3.7522790
5334	3.7270530	5398	3.7322329	5462	3.7373517	5526	3.7424109	5590	3.7474118	5654	3.7523518
5335	3.7271344	5399	3.7323133	5463	3.7374312	5527	3.7424895	5591	3.7474895	5655	3.7524326
5336	3.7272158	5400	3.7323938	5464	3.7375107	5528	3.7425680	5592	3.7475672	5656	3.7525094
5337	3.7272972	5401	3.7324742	5465	3.7375902	5529	3.7426466	5593	3.7476448	5657	3.7525862
5338	3.7273786	5402	3.7325546	5466	3.7376696	5530	3.7427251	5594	3.7477225	5658	3.7526629
5339	3.7274599	5403	3.7326350	5567	3.7377491	5531	3.7428037	5595	3.7478001	5659	3.7527397
5340	3.7275413	5404	3.7327153	5568	3.7378285	5532	3.7428822	5596	3.7478777	5660	3.7528164

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
5660	3.7528164	5724	3.7576996	5788	3.7625285
5661	3.7528932	5725	3.7577755	5789	3.7626035
5662	3.7529699	5726	3.7578513	5790	3.7626786
5663	3.7530466	5727	3.7579272	5791	3.7627536
5664	3.7531232	5728	3.7580030	5792	3.7628286
5665	3.7531999	5729	3.7580788	5793	3.7629035
5666	3.7532766	5730	3.7581546	5794	3.7629785
5667	3.7533532	5731	3.7582304	5795	3.7630534
5668	3.7534298	5732	3.7583062	5796	3.7631284
5669	3.7535065	5733	3.7583819	5797	3.7632033
5670	3.7535831	5734	3.7584577	5798	3.7632782
5671	3.7536596	5735	3.7585334	5799	3.7633531
5672	3.7537362	5736	3.7586091	5800	3.7634280
5673	3.7538128	5737	3.7586848	5801	3.7635029
5674	3.7538893	5738	3.7587605	5802	3.7635777
5675	3.7539659	5739	3.7588362	5803	3.7636526
5676	3.7540424	5740	3.7589119	5804	3.7637274
5677	3.7541189	5741	3.7589875	5805	3.7638022
5678	3.7541954	5742	3.7590632	5806	3.7638770
5679	3.7542719	5743	3.7591388	5807	3.7639518
5680	3.7543483	5744	3.7592144	5808	3.7640266
5681	3.7544248	5745	3.7592900	5809	3.7641014
5682	3.7545012	5746	3.7593656	5810	3.7641761
5683	3.7545777	5747	3.7594412	5811	3.7642509
5684	3.7546541	5748	3.7595168	5812	3.7643256
5685	3.7547305	5749	3.7595923	5813	3.7644003
5686	3.7548069	5750	3.7596678	5814	3.7644750
5687	3.7548832	5751	3.7597434	5815	3.7645497
5688	3.7549596	5752	3.7598189	5816	3.7646244
5689	3.7550359	5753	3.7598944	5817	3.7646991
5690	3.7551123	5754	3.7599699	5818	3.7647737
5691	3.7551886	5755	3.7600453	5819	3.7648484
5692	3.7552649	5756	3.7601208	5820	3.7649230
5693	3.7553412	5757	3.7601962	5821	3.7649976
5694	3.7554175	5758	3.7602717	5822	3.7650722
5695	3.7554937	5759	3.7603471	5823	3.7651468
5696	3.7555700	5760	3.7604225	5824	3.7652214
5697	3.7556462	5761	3.7604979	5825	3.7652959
5698	3.7557224	5762	3.7605733	5826	3.7653705
5699	3.7557987	5763	3.7606486	5827	3.7654450
5700	3.7558749	5764	3.7607240	5828	3.7655195
5701	3.7559510	5765	3.7607993	5829	3.7655941
5702	3.7560272	5766	3.7608746	5830	3.7656686
5703	3.7561034	5767	3.7609500	5831	3.7657430
5704	3.7561795	5768	3.7610253	5832	3.7658175
5705	3.7562556	5769	3.7611005	5833	3.7658920
5706	3.7563318	5770	3.7611758	5834	3.7659664
5707	3.7564079	5771	3.7612511	5835	3.7660409
5708	3.7564840	5772	3.7613263	5836	3.7661153
5709	3.7565600	5773	3.7614016	5837	3.7661897
5710	3.7566361	5774	3.7614768	5838	3.7662641
5711	3.7567122	5775	3.7615520	5839	3.7663385
5712	3.7567882	5776	3.7616272	5840	3.7664128
5713	3.7568642	5777	3.7617024	5841	3.7664872
5714	3.7569402	5778	3.7617775	5842	3.7665616
5715	3.7570162	5779	3.7618527	5843	3.7666359
5716	3.7570922	5780	3.7619278	5844	3.7667102
5717	3.7571682	5781	3.7620030	5845	3.7667845
5718	3.7572441	5782	3.7620781	5846	3.7668588
5719	3.7573201	5783	3.7621532	5847	3.7669331
5720	3.7573960	5784	3.7622283	5848	3.7670074
5721	3.7574719	5785	3.7623034	5849	3.7670816
5722	3.7575479	5786	3.7623784	5850	3.7671559
5723	3.7576237	5787	3.7624535	5851	3.7672301
5724	3.7576996	5788	3.7625285	5852	3.7673043

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
5852	3.7673043	5916	3.7720182	5980	3.7767012
5853	3.7673785	5917	3.7721016	5981	3.7767738
5854	3.7674527	5918	3.7721750	5982	3.7768464
5855	3.7675269	5919	3.7722483	5983	3.7769190
5856	3.7676011	5920	3.7723217	5984	3.7769916
5857	3.7676752	5921	3.7723951	5985	3.7770642
5858	3.7677494	5922	3.7724684	5986	3.7771367
5859	3.7678235	5923	3.7725417	5987	3.7772093
5860	3.7678976	5924	3.7726150	5988	3.7772818
5861	3.7679717	5925	3.7726884	5989	3.7773543
5862	3.7680458	5926	3.7727616	5990	3.7774268
5863	3.7681199	5927	3.7728349	5991	3.7774993
5864	3.7681940	5928	3.7729082	5992	3.7775718
5865	3.7682680	5929	3.7729814	5993	3.7776443
5866	3.7683421	5930	3.7730547	5994	3.7777167
5867	3.7684161	5931	3.7731279	5995	3.7777892
5868	3.7684901	5932	3.7732011	5996	3.7778616
5869	3.7685641	5933	3.7732743	5997	3.7779340
5870	3.7686381	5934	3.7733475	5998	3.7780065
5871	3.7687121	5935	3.7734207	5999	3.7780789
5872	3.7687860	5936	3.7734939	6000	3.7781512
5873	3.7688600	5937	3.7735670	6001	3.7782236
5874	3.7689339	5938	3.7736402	6002	3.7782960
5875	3.7690079	5939	3.7737133	6003	3.7783683
5876	3.7690818	5940	3.7737864	6004	3.7784407
5877	3.7691557	5941	3.7738596	6005	3.7785130
5878	3.7692296	5942	3.7739326	6006	3.7785853
5879	3.7693035	5943	3.7740057	6007	3.7786576
5880	3.7693773	5944	3.7740788	6008	3.7787299
5881	3.7694512	5945	3.7741519	6009	3.7788022
5882	3.7695250	5946	3.7742249	6010	3.7788745
5883	3.7695988	5947	3.7742979	6011	3.7789467
5884	3.7696727	5948	3.7743710	6012	3.7790190
5885	3.7697465	5949	3.7744440	6013	3.7790912
5886	3.7698203	5950	3.7745170	6014	3.7791634
5887	3.7698940	5951	3.7745899	6015	3.7792356
5888	3.7699678	5952	3.7746629	6016	3.7793078
5889	3.7700416	5953	3.7747359	6017	3.7793800
5890	3.7701153	5954	3.7748088	6018	3.7794522
5891	3.7701890	5955	3.7748818	6019	3.7795243
5892	3.7702627	5956	3.7749547	6020	3.7795965
5893	3.7703364	5957	3.7750276	6021	3.7796686
5894	3.7704101	5958	3.7751005	6022	3.7797408
5895	3.7704838	5959	3.7751734	6023	3.7798129
5896	3.7705575	5960	3.7752463	6024	3.7798850
5897	3.7706311	5961	3.7753191	6025	3.7799571
5898	3.7707048	5962	3.7753920	6026	3.7800291
5899	3.7707784	5963	3.7754648	6027	3.7801012
5900	3.7708520	5964	3.7755376	6028	3.7801732
5901	3.7709256	5965	3.7756104	6029	3.7802453
5902	3.7709992	5966	3.7756832	6030	3.7803173
5903	3.7710728	5967	3.7757560	6031	3.7803893
5904	3.7711463	5968	3.7758288	6032	3.7804613
5905	3.7712199	5969	3.7759016	6033	3.7805333
5906	3.7712934	5970	3.7759743	6034	3.7806053
5907	3.7713670	5971	3.7760471	6035	3.7806773
5908	3.7714405	5972	3.7761198	6036	3.7807492
5909	3.7715140	5973	3.7761925	6037	3.7808212
5910	3.7715875	5974	3.7762652	6038	3.7808931
5911	3.7716610	5975	3.7763379	6039	3.7809650
5912	3.7717344	5976	3.7764106	6040	3.7810369
5913	3.7718079	5977	3.7764833	6041	3.7811088
5914	3.7718813	5978	3.7765559	6042	3.7811807
5915	3.7719547	5979	3.7766286	6043	3.7812526
5916	3.7720182	5980	3.7767012	6044	3.7813245

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
6045	3.7813963	6111	3.7861123	6177	3.7907776	6243	3.7953913	6309	3.7999605	6375	3.8044802
6046	3.7814681	6112	3.7861833	6178	3.7908479	6244	3.7954609	6310	3.8000294	6376	3.8045483
6047	3.7815400	6113	3.7862544	6179	3.7909182	6245	3.7955314	6311	3.8000982	6377	3.8046164
6048	3.7816118	6114	3.7863254	6180	3.7909885	6246	3.7956020	6312	3.8001670	6378	3.8046845
6049	3.7816836	6115	3.7863965	6181	3.7910587	6247	3.7956715	6313	3.8002358	6379	3.8047526
6050	3.7817554	6116	3.7864675	6182	3.7911290	6248	3.7957410	6314	3.8001046	6380	3.8048207
6051	3.7818272	6117	3.7865385	6183	3.7911992	6249	3.7958105	6315	3.8003734	6381	3.8048887
6052	3.7818989	6118	3.7866095	6184	3.7912695	6250	3.7958800	6316	3.8004421	6382	3.8049568
6053	3.7819707	6119	3.7866805	6185	3.7913397	6251	3.7959495	6317	3.8005109	6383	3.8050248
6054	3.7820424	6120	3.7867514	6186	3.7914099	6152	3.7960190	6318	3.8005796	6384	3.8050929
6055	3.7821141	6121	3.7868224	6187	3.7914801	6253	3.7960884	6319	3.8006484	6385	3.8051609
6056	3.7821859	6122	3.7868933	6188	3.7915503	6254	3.7961579	6320	3.8007171	6386	3.8052289
6057	3.7822576	6123	3.7869643	6189	3.7916205	6255	3.7962273	6321	3.8007858	6387	3.8052969
6058	3.7823293	6124	3.7870352	6190	3.7916906	6256	3.7962967	6322	3.8008545	6388	3.8053649
6059	3.7824010	6125	3.7871061	6191	3.7917608	6257	3.7963662	6323	3.8009232	6389	3.8054329
6060	3.7824726	6126	3.7871770	6192	3.7918309	6258	3.7964356	6324	3.8009919	6390	3.8055009
6061	3.7825443	6127	3.7872479	6193	3.7919011	6259	3.7965050	6325	3.8010605	6391	3.8055688
6062	3.7826159	6128	3.7873188	6194	3.7919712	6260	3.7965743	6326	3.8011292	6392	3.8056368
6063	3.7826876	6129	3.7873896	6195	3.7920413	6261	3.7966437	6327	3.8011978	6393	3.8057047
6064	3.7827592	6130	3.7874605	6196	3.7921114	6262	3.7967131	6328	3.8012665	6394	3.8057726
6065	3.7828308	6131	3.7875313	6197	3.7921815	6263	3.7967824	6329	3.8013351	6395	3.8058405
6066	3.7829024	6132	3.7876021	6198	3.7922516	6264	3.7968517	6330	3.8014037	6396	3.8059085
6067	3.7829740	6133	3.7876730	6199	3.7923216	6265	3.7969211	6331	3.8014723	6397	3.8059763
6068	3.7830456	6134	3.7877438	6200	3.7923917	6266	3.7969904	6332	3.8015409	6398	3.8060442
6069	3.7831171	6135	3.7878146	6201	3.7924617	6267	3.7970597	6333	3.8016095	6399	3.8061121
6070	3.7831887	6136	3.7878853	6202	3.7925318	6268	3.7971290	6334	3.8016781	6400	3.8061800
6071	3.7832602	6137	3.7879561	6203	3.7926018	6269	3.7971973	6335	3.8017466	6401	3.8062478
6072	3.7833318	6138	3.7880269	6204	3.7926718	6270	3.7972675	6336	3.8018152	6402	3.8063157
6073	3.7834033	6139	3.7880976	6205	3.7927418	6271	3.7973368	6337	3.8018837	6403	3.8063835
6074	3.7834748	6140	.7881684	6206	3.7928118	6272	3.7974060	6338	3.8019522	6404	3.8064513
6075	3.7835463	6141	3.7882391	6207	3.7928817	6273	3.7974753	6339	3.8020208	6405	3.8065191
6076	3.7836178	6142	3.7883098	6208	3.7929517	6274	3.7975445	6340	3.8020893	6406	3.8065869
6077	3.7836892	6143	3.7883805	6209	3.7930217	6275	3.7976137	6341	3.8021578	6407	3.8066547
6078	3.7837607	6144	3.7884512	6210	3.7930916	6276	3.7976829	6342	3.8022262	6408	3.8067225
6079	3.7838321	6145	3.7885219	6211	3.7931615	6277	3.7977521	6343	3.8022947	6409	3.8067903
6080	3.7839036	6146	3.7885926	6212	3.7932314	6278	3.7978213	6344	3.8023632	6410	3.8068580
6081	3.7839750	6147	3.7886632	6213	3.7933014	6279	3.7978505	6345	3.8024316	6411	3.8069258
6082	3.7840464	6148	3.7887339	6214	3.7933712	6280	3.7979596	6346	3.8025001	6412	3.8069935
6083	3.7841178	6149	3.7888045	6215	3.7934411	6281	3.7980288	6347	3.8025685	6413	3.8070612
6084	3.7841892	6150	3.7888751	6216	3.7935110	6282	3.7980979	6348	3.8026369	6414	3.8071290
6085	3.7842606	6151	3.7889457	6217	3.7935809	6283	3.7981671	6349	3.8027053	6415	3.8071967
6086	3.7843319	6152	3.7890163	6218	3.7936507	6284	3.7982362	6350	3.8027737	6416	3.8072644
6087	3.7844033	6153	3.7890869	6219	3.7937206	6285	3.7983053	6351	3.8028421	6417	3.8073010
6088	3.7844746	6154	3.7891575	6220	3.7938904	6286	3.7983744	6352	3.8029105	6418	3.8073997
6089	3.7845460	6155	3.7892281	6221	3.7938602	6287	3.7984435	6353	3.8029789	6419	3.8074674
6090	3.7846173	6156	3.7892986	6222	3.7939300	6288	3.7985125	6354	3.8030472	6420	3.8075350
6091	3.7846886	6157	3.7893691	6223	3.7939998	6289	3.7985816	6355	3.8031156	6421	3.8076027
6092	3.7847599	6158	3.7894397	6224	3.7940696	6290	3.7986506	6356	3.8031839	6422	3.8076703
6093	3.7848312	6159	3.7895102	6225	3.7941394	6291	3.7987197	6357	3.8032522	6423	3.8077379
6094	3.7849024	6160	3.7895807	6226	3.7942091	6292	3.7987887	6358	3.8033205	6424	3.8078055
6095	3.7849737	6161	3.7896512	6227	3.7942789	6293	3.7988577	6359	3.8033888	6425	3.8078731
6096	3.7850450	6162	3.7897217	6226	.7943486	6294	3.7989267	6360	3.8034571	6426	3.8079407
6097	3.7851162	6163	3.7897922	6229	3.7944183	6295	3.7989957	6361	3.8035254	6427	3.8080083
6098	3.7851874	6164	3.7898626	6230	3.7944880	6296	3.7990647	6362	3.8035937	6428	3.8080759
6099	3.7852586	6165	3.7899331	6231	3.7945578	6297	3.7991337	6363	3.8036619	6429	3.8081434
6100	3.7853298	6166	3.7900035	6232	3.7946274	6298	3.7992027	6364	3.8037302	6430	3.8082110
6101	3.7854010	6167	3.7500739	6233	3.7946971	6299	3.7992716	6365	3.8037984	6431	3.8082785
6102	3.7854722	6168	3.7901444	6234	3.7947668	6300	3.7993405	6366	3.8038666	6432	3.8083460
6103	3.7855434	6169	3.7902148	6235	3.7948365	6301	3.7994095	6367	3.8039348	6433	3.8084136
6104	3.7856145	6170	3.7902852	6236	3.7949061	6302	3.7994784	6368	3.8040031	6434	3.8084811
6105	3.7856857	6171	3.7903555	6237	3.7949757	6303	3.7995473	6369	3.8040712	6435	3.8085485
6106	3.7857568	6172	3.7904259	6238	3.7950454	6304	3.7996162	6370	3.8041394	6436	3.8086160
6107	3.7858279	6173	3.7904963	6239	3.7951150	6305	3.7996851	6371	3.8042076	6437	3.8086835
6108	3.7858990	6174	3.7905666	6240	3.7951846	6306	3.7997540	6372	3.8042758	6438	3.8087510
6109	3.7859701	6175	3.7906370	6241	3.7952542	6307	3.7998228	6373	3.8043439	6439	3.8088184
6110	3.7860412	6176	3.7907073	6242	3.7953238	6308	3.7998917	6374	3.8044121	6440	3.8088859

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
6441	3.8089533	6507	3.8133808	6573	3.8177636
6442	3.8090207	6508	3.8134475	6574	3.8178297
6443	3.8090881	6509	3.8135143	6575	3.8178958
6444	3.8091555	6510	3.8135810	6576	3.8179618
6445	3.8092229	6511	3.8136477	6577	3.8180278
6446	3.8092903	6512	3.8137144	6578	3.8180939
6447	3.8093577	6513	3.8137811	6579	3.8181599
6448	3.8094250	6514	3.8138478	6580	3.8182259
6449	3.8094924	6515	3.8139144	6581	3.8182919
6450	3.8095597	6516	3.8139811	6582	3.8183579
6451	3.8096270	6517	3.8140477	6583	3.8184239
6452	3.8096944	6518	3.8141144	6584	3.8184898
6453	3.8097617	6519	3.8141810	6585	3.8185558
6454	3.8098290	6520	3.8142476	6586	3.8186217
6455	3.8098962	6521	3.8143142	6587	3.8186877
6456	3.8099635	6522	3.8143808	6588	3.8187536
6457	3.8100308	6523	3.8144474	6589	3.8188195
6458	3.8100980	6524	3.8145140	6590	3.8188854
6459	3.8101653	6525	3.8145805	6591	3.8189513
6460	3.8102325	6526	3.8146471	6592	3.8190172
6461	3.8102997	6527	3.8147136	6593	3.8190831
6462	3.8103670	6528	3.8147801	6594	3.8191489
6463	3.8104342	6529	3.8148467	6595	3.8192148
6464	3.8105013	6530	3.8149112	6596	3.8192806
6465	3.8105685	6531	3.8149797	6597	3.8 93465
6466	3.8106357	6532	3.8150462	6598	3.8194123
6467	3.8107019	6533	3.8151127	6599	3.8194781
6468	3.8107700	6534	3.8151791	6600	3.8195439
6469	3.8108371	6535	3.8152456	660·	3.8196097
6470	3.8109041	6536	3.8153120	6601	3.8196755
6471	3.8109714	6537	3.8153785	6603	3.8197413
6472	3.8110385	6538	3.8154449	6604	3.8198071
6473	3.8111056	6539	3.8155114	6605	3.8198728
6474	3.8111727	6540	3.8155777	6606	3.8199386
6475	3.8112398	6541	3.8156441	6607	3.8200043
6476	3.8113068	6542	3.8157105	6608	3.8200700
6477	3.8113739	6543	3.8157769	6609	3.8201358
6478	3.8114409	6544	3.8158433	6610	3.8202015
6479	3.8115080	6545	3.8159096	6611	3.8202672
6480	3.8115750	6546	3.8159760	6612	3.8203328
6481	3.8116420	6547	3.8160423	6613	3.8203985
6482	3.8117090	6548	3.8161087	6614	3.8204642
6483	3.8117760	6549	3.8161750	6615	3.8205298
6484	3.8118430	6550	3.8162413	6616	3.8205955
6485	3.8119100	6551	3.8163076	6617	3.8206611
6486	3.8119769	6552	3.8163739	6618	3.8207268
6487	3.8120439	6553	3.8164402	6619	3.8207924
6488	3.8121108	6554	3.8165064	6620	3.8208580
6489	3.8121778	6555	3.8165727	6621	3.8209236
6490	3.8122447	6556	3.8166389	6622	3.8209892
6491	3.8123116	6557	3.8167052	6623	3.8210548
6492	3.8123785	6558	3.8167714	6624	3.8211203
6493	3.8124454	6553	3.8168376	6625	3.8211859
6494	3.8125123	6560	3.8169038	6626	3.8212514
6495	3.8125792	6561	3.8169700	6627	3.8213170
6496	3.8126460	6562	3.8170362	6628	3.8213825
6497	3.8127129	6563	3.8171024	6629	3.8214480
6498	3.8127797	6564	3.8171686	6630	3.8215135
6499	3.8128465	6565	3.8172347	6631	3.8215790
6500	3.8129134	6566	3.8173009	6632	3.8216445
6501	3.8129802	6567	3.8173670	6633	3.8217100
6502	3.8130470	6568	3.8174331	6634	3.8217755
6503	3.8131138	6569	3.8174993	6635	3.8218409
6504	3.8131805	6570	3.8175654	6636	3.8219064
6505	3.8132473	6571	3.8176315	6637	3.8219718
6506	3.8133148	6572	3.8176976	6638	3.8220372

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
6639	3.8221027	6705	3.8263988	6771	3.8306528
6640	3.8221681	6706	3.8264635	6772	3.8307169
6641	3.8222335	6707	3.8265283	6773	3.8307811
6642	3.8222989	6708	3.8265931	6774	3.8308452
6643	3.8223643	6709	3.8266578	6775	3.8309093
6644	3.8224296	6710	3.8267225	6776	3.8309734
6645	3.8224950	6711	3.8267872	6777	3.8310375
6646	3.8225603	6712	2.8268519	6778	3.8311016
6647	3.8226257	6713	3.8269166	6779	3.8311656
6648	3.8226910	6714	3.8269813	6780	3.8312297
6649	3.8227563	6715	3.8270460	6781	3.8312937
6650	3.8228216	6716	3.8271107	6782	3.8313578
6651	3.8228869	6717	3.8271753	6783	3.8314218
6652	3.8229522	6718	3.8272400	6784	3.8314858
6653	3.8230175	6719	3.8273046	6785	3.8315499
6654	3.8230828	6720	3.8273693	6786	3.8316139
6655	3.8231481	6721	3.8274339	6787	3.8316778
6656	3.8232133	6722	3.8274925	[illegible]	3.8317418
6657	3.8232786	6723	3.8275631	6789	3.8318058
6658	3.8233438	6724	3.8276277	6790	3.8318698
6659	3.8234090	6725	3.8276921	6791	3.8319337
6660	3.8234742	6726	3.8277569	6792	3.8319977
6661	3.8235394	6727	3.8278214	6793	3.8320616
6662	3.8236046	6728	3.8278860	6794	3.8321255
6663	3.8236698	6729	3.8279505	6795	3.8321895
6664	3.8237350	6730	3.8280151	6796	3.8322534
6665	3.8238001	6731	3.8280796	6797	3.8323173
6666	3.8238653	6732	3.8281441	6798	3.8323816
6667	3.8239305	6733	3.8282086	6799	.8324450
6668	3.8239956	6734	3.8282731	6800	3.8325089
6669	3.8240607	6735	3.8283376	6801	3.8325728
6670	3.8241258	6736	3.8284021	6802	3.8326366
6671	3.8241909	6737	3.8284665	6803	3.8327005
6672	3.8242560	6738	3.8285310	6804	3.8327643
6673	3.8243211	6739	3.8285955	6805	3.8328281
6674	3.8243862	6740	3.8286599	6806	3.8328919
6675	3.8244513	6741	3.8287243	6807	3.8329558
6676	3.8245163	6742	3.8267887	6808	3.8330195
6677	3.8245814	6743	3.8288532	6809	3.8330833
6678	3.8246464	6744	3.8289176	6810	3.8331471
6679	3.8247114	6745	3.8289820	6811	3.8332109
6680	3.8247765	6746	3.8290463	6812	3.8332746
6681	3.8248415	6747	3.8291107	6813	3.8333384
6682	3.8249065	6748	3.8291751	6814	3.8334021
6683	3.8249715	6749	3.8292394	6805	3.8334659
6684	3.8250364	6750	3.8293038	6816	3.8335296
6685	3.8251014	6751	3.8291681	6817	3.8335933
6686	3.8251664	6752	3.8294324	6818	3.8336570
6687	3.8252313	6753	3.8294967	6819	3.8337207
6688	3.8252963	6754	3.8295611	6820	3.8337844
6689	3.8253612	6755	3.8296254	6821	3.8338480
6690	3.8254261	6756	3.8296896	6822	3.8339117
6691	3.8254910	6757	3.8297539	6823	3.8339754
6692	3.8255559	6758	3.8298182	6824	3.8340390
6693	3.8256208	6759	3.8298824	6825	3.8341027
6694	3.8256817	6760	3.8299467	6826	3.8341663
6695	3.8257506	6761	3.8300109	6827	3.8342299
6696	3.8258154	6762	3.8300752	6828	3.8342935
6597	3.8258803	6763	3.8301394	6829	3.8343571
6698	3.8259451	6764	3.8302036	6830	3.8344107
6699	3.8260100	6765	3.8302678	6831	3.8344843
6·00	3.8260748	6766	3.9303320	683.	3.8345479
6701	3.8261396	6767	3.8303962	6833	3.8346114
6702	3.8262044	6768	3.8304603	6834	3.8346750
6703	3.8262692	6769	3.8305245	6835	3.8347385
6704	3.8263340	6770	3.8305887	6836	3.8348022

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
6837	3.8348656	6903	3.8390379	6969	3.8431705	7035	3.8472641	7101	3.8513195	7167	3.8553374
6838	3.8349291	6904	3.8391008	6970	3.8432328	7036	3.8473258	7102	3.8513807	7168	3.8553980
6839	3.8349926	6905	3.8391637	6971	3.8432951	7037	3.8473876	7103	3.8514418	7169	3.8554589
6840	3.8350561	6906	3.8392266	6972	3.8433574	7038	3.8474493	7104	3.8515030	7170	3.8555192
6841	3.8351196	6907	3.8392895	6973	3.8434197	7039	3.8475110	7105	3.8515641	7171	3.8555797
6842	3.8351831	6908	3.9393523	6974	3.8434819	7040	3.8475727	7106	3.8516252	7172	3.8556403
6843	3.8352465	6909	3.8394152	6975	3.8435442	7041	3.8476343	7107	3.8516863	7173	3.8557008
6844	3.8353100	6910	3.8394780	6976	3.8436065	7042	3.8470900	7108	3.8517474	7174	3.8557614
6845	3.8353735	6911	3.8395409	6977	3.8436687	7043	3.8477577	7109	3.8518085	7175	3.8558219
6846	3.8354369	6912	3.8396037	6978	3.8457310	7044	3.8478193	7110	3.8518696	7176	3.8558824
6847	3.8355003	6913	3.8396666	6979	3.8437932	7045	3.8478810	7111	3.8519307	7177	3.8559429
6848	3.8355638	6914	3.8397294	6980	3.8438554	7046	3.8479426	7112	3.8519917	7178	3.8560035
6849	3.8356272	6915	3.8397922	6981	3.8439176	7047	3.8480043	7113	3.8520528	7179	3.8560640
6850	3.8356906	6916	3.8398550	6982	3.8439798	7048	3.8480659	7114	3.8521139	7180	3.8561244
6851	3.8357540	6917	3.8399178	6983	3.8440420	7049	3.8481275	7115	3.8521749	7181	3.8561849
6852	3.8358174	6918	3.8399806	6984	3.8441042	7050	3.8481891	7116	3.8522359	7182	3.8562454
6853	3.8358807	6919	3.8400433	6985	3.8441664	7051	3.8482507	7117	3.8522970	7183	3.8563059
6854	3.8359441	6920	3.8401061	6986	3.8442286	7052	3.8483123	7118	3.8523580	7184	3.8563663
6855	3.8360075	6921	3.8401688	6987	3.8442907	7053	3.8483739	7119	3.8524190	7185	3.8564268
6856	3.8360708	6922	3.8402316	6988	3.8443529	7054	3.8484355	7120	3.8524800	7186	3.8564872
6857	3.8361341	6923	3.8402943	6989	3.8444150	7055	3.8484970	7121	3.8535410	7187	3.8565476
6858	3.8361975	6924	3.8403571	6990	3.8444772	7056	3.8485586	7122	3.8526020	7188	3.8566081
6859	3.8362608	6925	3.8404198	6991	2.8445393	7057	3.8486201	7123	3.8526629	7189	3.8566685
6860	3.8363241	6926	3.8404825	6992	3.8446014	7058	3.8486817	7124	3.8527239	7190	3.8567289
6861	3.8363874	6927	3.8405452	6993	3.8446635	7059	3.8487432	7125	3.8527849	7191	3.8567893
6862	3.8364507	6928	3.8406079	6994	3.8447256	7060	3.8488047	7126	3.8528458	7192	3.8568497
6863	3.8365140	6929	3.8406706	6995	3.8474877	7061	3.8488662	7127	3.8529068	7193	3.8569101
6864	3.8365773	6930	3.8407332	6996	3.8448498	7062	3.8489277	7128	3.8529677	7194	3.8569704
6865	3.8366405	6931	3.8407959	6997	3.8449119	7063	3.8489892	7129	3.8530286	7195	3.8570308
6866	3.8367038	6932	3.8408586	6998	3.8449739	7064	3.8490507	7130	3.8530895	7196	3.8570912
6867	3.8367670	6933	3.8409212	6999	3.8450360	7065	3.8491122	7131	3.8531504	7197	3.8571515
6868	3.8368303	6934	3.8409838	7000	3.8450980	7066	3.8491736	7132	3.8532113	7198	3.8572118
6869	3.8368935	6935	3.8410465	7001	3.8451601	7067	3.8492351	7133	3.8532722	7199	5.8572722
6870	3.8369567	6936	3.8411091	7002	3.8452221	7068	3.8492965	7134	3.8533331	7200	3.8573325
6871	3.8370199	6937	3.5411717	7003	3.8452841	7069	3.8493580	7135	3.8533940	7201	3.8573928
6872	3.8370832	6938	3.8412343	7004	3.8453461	7070	3.8494194	7136	3.8534548	7202	3.8574531
6873	3.8371463	6939	3.8412969	7005	3.8454081	7071	3.8494808	7137	3.8535157	7203	3.8575134
6874	3.8372095	6940	3.8413595	7006	3.8454701	7072	3.8495421	7138	3.8535765	7204	3.8575737
6875	3.8372727	6941	3.8414220	7007	3.8455321	7073	3.8496037	7139	3.8536374	7205	3.8576340
6876	3.8373359	6942	3.8414846	7008	3.8455941	7074	3.8496651	7140	3.8536982	7206	3.8576945
6877	3.8373990	6943	3.8415472	7009	3.8456561	7075	3.8497264	7141	3.8537590	7207	3.8577545
6878	3.8374622	6944	3.8416097	7010	3.8457180	7076	3.8497878	7142	3.8538198	7208	3.8578148
6879	3.8375253	6945	3.8416722	7011	3.8457800	7077	3.8498492	7143	3.8538806	7209	3.8578750
6880	3.8375884	6946	3.8417348	7012	3.8458419	7078	3.8499106	7144	3.8539414	7210	3.8579353
6881	3.8376516	6947	3.8417973	7013	3.8459018	7079	3.8499719	7145	3.8540022	7211	3.8579955
6882	3.8377147	6948	3.8418598	7014	3.8459658	7080	3.8500333	7146	3.8540630	7212	3.8580557
6883	3.8377778	6949	3.8419223	7015	3.8460277	7081	3.8500946	7147	3.8541238	7213	3.8581159
6884	3.8378409	6950	3.8419848	7016	3.8460896	7082	3.8501559	7148	3.8541845	7214	3.8581761
6885	3.8379039	6951	3.8420473	7017	3.8461515	7083	3.8502172	7149	3.8542453	7215	3.8582363
6886	3.8379670	6952	3.8421098	7018	3.8462134	7084	3.8502786	7150	3.8543960	7216	3.8582965
6887	3.8380301	6953	3.8421722	7019	.8462752	7085	3.8503399	7151	3.8543668	7217	3.8583567
6888	3.8380931	6954	3.8422347	7020	3.8463371	7086	3.8504011	7152	3.8544275	7218	3.8584169
6889	3.8381562	6955	3.8422971	7021	3.8463990	7087	3.8504624	7153	3.8544882	7219	3.8584770
6890	3.8382192	6956	3.8423596	7022	3.8464608	7088	3.8505237	7154	3.8545489	7220	3.8585372
6891	3.8382822	6957	3.8424220	7023	3.8465227	7089	3.8505850	7155	3.8546096	7221	3.8585973
6892	3.8383453	6958	3.8424844	7024	3.8465845	7090	3.8506462	7156	3.8546703	7222	3.8586575
6893	3.8384083	6959	3.8425468	7025	3.8466463	7091	3.8507075	7157	3.8547310	7223	3.8587176
6894	3.8384713	6960	3.8426092	7026	3.8467081	7092	3.8507687	7158	3.8547917	7224	3.8587777
6895	3.8385343	6961	3.8426716	7027	3.8467700	7093	3.8508300	7159	2.8548524	7225	3.8588378
6896	3.8385973	6961	3.8427340	7028	3.8468318	7094	3.8508912	7160	3.8549130	7226	3.8588980
6897	3.8386602	6963	3.8427964	7029	3.8468935	7095	3.8509524	7161	3.8549737	7227	3.8589581
6898	3.8387232	6964	3.8428588	7030	3.8469553	7096	3.8510136	7162	3.8550343	7228	3.8590181
6899	3.8387861	6965	3.8429211	7031	3.8470171	7097	3.8510748	7163	3.8550949	7229	3.8590782
6900	3.8388491	6966	.8429835	7032	3.8470789	7098	3.8511360	7164	3.8551556	7230	3.8591383
6901	3.8389120	6967	.8430458	7033	3.8471406	7099	3.8511972	7165	3.8552162	7231	3.8591984
6902	3.8389750	6968	3.8431081	7034	3.8472024	7100	3.8512583	7166	3.8552768	7232	3.8592584

7234

N.	*Logarit.*	*N.*	*Logarit.*	*N.*	*Logarit.*
7234	3.8593785	7300	3.8633229	7366	3.8672317
7235	3.8594385	7301	3.8633823	7367	3.8672907
7236	3.8594986	7302	3.8634418	7368	3.8673496
7237	3.8595586	7303	3.8635013	7369	3.8674086
7238	3.8596186	7304	3.8635608	7370	3.8674675
7239	3.8596786	7305	3.8636202	7371	3.8675264
7240	3.8597386	7306	3.8636797	7372	3.8675853
7241	3.8597985	7307	3.8637391	7373	3.8676442
7242	3.8598585	7308	3.8637985	7374	3.8677031
7243	3.8599185	7309	3.8638580	7375	3.8677620
7244	3.8599784	7310	3.8639174	7376	3.8678209
7245	3.8600384	7311	3.8639768	7377	3.8678798
7246	3.8600983	7312	3.8640362	7378	3.8679386
7247	3.8601583	7313	3.8640956	7379	3.8679975
7248	3.8602182	7314	3.8641550	7380	3.8680564
7249	3.8602781	7315	3.8641143	7381	3.8681152
7250	3.8603380	7316	3.8642737	7382	3.8681740
7251	3.8603979	7317	3.8643331	7383	3.8682329
7252	3.8604578	7318	3.8643924	7384	3.8682917
7253	3.8605177	7319	3.8644517	7385	3.8683505
7254	3.8605776	7320	3.8645111	7386	3.8684093
7255	3.8606374	7321	3.8645704	7387	3.8684681
7256	3.8606973	7322	3.8646297	7388	3.8685269
7257	3.8607571	7323	3.8646890	7389	3.8685857
7258	3.8608170	7324	3.8647483	7390	3.8686444
7259	3.8608768	7325	3.8648076	7391	3.8687032
7260	3.8609366	7326	3.8648669	7392	3.8687620
7261	3.8609964	7327	3.8549262	7393	3.8688207
7262	3.8610562	7328	3.8649855	7394	3.8688794
7263	3.8611160	7329	3.8650447	7395	3.8689382
7264	3.8611758	7330	3.8651040	7396	3.8689969
7265	3.8612356	7331	3.8651632	7397	3.8690556
7266	3.8612954	7332	3.8652225	7398	3.8691143
7267	3.8613552	7333	3.8652817	7399	3.8691730
7268	3.8614149	7334	3.8653409	7400	3.8692317
7269	3.8614747	7335	3.8654001	7401	3.8692904
7270	3.8615344	7336	3.8654593	7402	3.8693491
7271	3.8615941	7337	3.8655185	7403	3.8694077
7272	3.8616539	7338	3.8655777	7404	3.8694664
7273	3.8617136	7339	3.8656369	7405	3.8695251
7274	3.8617733	7340	3.8656961	7406	3.8695837
7275	3.8618330	7341	3.8657552	7407	3.8696423
7276	3.8618927	7342	3.8658144	7408	3.8697010
7277	3.8619524	7343	3.8658735	7409	3.8697596
7278	3.8620120	7344	3.8659327	7410	3.8698182
7279	3.8620717	7345	3.8659918	7411	3.8698768
7280	3.8621314	7346	3.8660509	7412	3.8699354
7281	3.8621910	7347	3.8661100	7413	3.8699940
7282	3.8622507	7348	3.8661691	7414	3.8700526
7283	3.8623103	7349	3.8662282	7415	3.8701111
7284	3.8623699	7350	3.8662873	7416	3.8701697
7285	3.8624296	7351	3.8663464	7417	3.8702283
7286	3.8624892	7352	3.8664055	7418	3.8702868
7287	3.8625488	7353	3.8664646	7419	3.8703454
7288	3.8626084	7354	3.8665236	7420	3.8704039
7289	3.8626679	7355	3.8665827	7421	3.8704624
7290	3.8627275	7356	3.8666417	7422	3.8705209
7291	3.8627871	7357	3.8667008	7423	3.8705795
7292	3.8628467	7358	3.8667598	7424	3.8706380
7293	3.8629062	7359	3.8668188	7425	3.8706965
7294	3.8629658	7360	3.8668778	7426	3.8707549
7295	3.8630253	7361	3.8669368	7427	3.8708134
7296	3.8630842	7362	3.8669958	7428	3.8708719
7297	3.8631443	7363	3.8670548	7429	3.8709304
7298	3.8632039	7364	.8671138	7430	3.8709888
7299	3.8632634	7365	3.8671728	7431	3.8710473

N.	*Logarit.*	*N.*	*Logarit.*	*N.*	*Logarit.*
7432	3.8711057	7498	3.8749454	7564	3.8787515
7433	3.8711641	7499	3.8750034	7565	3.8788089
7434	3.8712226	7500	3.8750613	7566	3.8788663
7435	3.8712810	7501	3.8751192	7567	3.8789237
7436	3.8713394	7502	3.8751771	7568	3.8789811
7437	3.8713978	7503	3.8752349	7569	3.8790385
7438	3.8714562	7504	3.8752928	7570	3.8790959
7439	3.8715146	7505	3.8753507	7571	3.8791532
7440	3.8715729	7506	3.8754086	7572	3.8792106
7441	3.8716313	7507	3.8754664	7573	3.8792680
7442	3.8716897	7508	3.8755243	7574	3.8793253
7443	3.8717480	7509	3.8755821	7575	3.8793826
7444	3.8718064	7510	3.8756399	7576	3.8794400
7445	3.8718647	7511	3.8756978	7577	3.8794973
7446	3.8719230	7512	3.8757556	7578	3.8795546
7447	3.8719814	7513	3.8758134	7579	3.8796119
7448	3.8720397	7514	3.8758712	7580	3.8796692
7449	3.8720980	7515	3.8759290	7581	3.8797265
7450	3.8721563	7516	3.8759868	7582	3.8797838
7451	3.8722146	7517	3.8760445	7583	3.8798411
7452	3.8722728	7518	3.8761023	7584	3.8798983
7453	3.8723311	7519	3.8761601	7585	3.8799556
7454	3.8723894	7520	3.8762178	7586	3.8800128
7455	3.8724476	7521	3.8762756	7587	3.8800701
7456	3.8725059	7522	3.8763333	7588	3.8801273
7457	3.8725641	7523	3.8763911	7589	3.8801840
7458	3.8726224	7524	3.8764488	7590	3.8802418
7459	3.8726806	7525	3.8765065	7591	3.8802990
7460	3.8727388	7526	3.8765642	7592	3.8803562
7461	3.8727970	7527	3.8766219	7593	3.8804134
7462	3.8728552	7528	3.8766796	7594	3.8804706
7463	3.8729134	7529	3.8767373	7595	3.8805278
7464	3.8729716	7530	3.8767950	7596	3.8805850
7465	3.8730298	7531	3.8768520	7597	3.8806421
7466	3.8730880	7532	3.8769103	7598	3.8806993
7467	3.8731461	7533	3.8769680	7599	3.8807564
7468	3.8732043	7534	3.8770256	7600	3.8808136
7469	3.8732624	7535	3.8770833	7601	3.8808707
7470	3.8733206	7536	3.8771409	7602	3.8809279
7471	3.8733787	7537	3.8771985	7603	3.8809850
7472	3.8734369	7538	3.8772561	7604	3.8810421
7473	3.8734950	7539	3.8773137	7605	3.8810992
7474	3.8735531	7540	3.8773713	7606	3.8811563
7475	3.8736112	7541	3.8774289	7607	3.8812134
7476	3.8736693	7542	3.8774865	7608	3.8812705
7477	3.8737274	7543	3.8775441	7609	3.8813276
7478	3.8737855	7544	3.8776017	7610	3.8813847
7479	3.8738435	7545	3.8776592	7611	3.8814417
7480	3.8739016	7546	3.8777168	7612	3.8814988
7481	3.8739597	7547	3.8777743	7613	3.8815558
7482	3.8740177	7548	3.8778319	7614	3.8816129
7483	3.8740757	7549	3.8778894	7615	3.8816699
7484	3.8741338	7550	3.8779469	7616	3.8817269
7485	3.8741918	7551	3.8780045	7617	3.8817840
7486	3.8742498	7552	3.8780620	7618	3.8818410
7487	3.8743078	7553	3.8781195	7619	3.8818980
7488	3.8743658	7554	3.8781770	7620	3.8819550
7489	3.8744238	7555	3.8782345	7621	3.8820120
7490	3.8744818	7556	3.8782919	7622	3.8820689
7491	3.8745398	7557	3.8783494	7623	3.8821259
7492	3.8745978	7558	3.8784069	7624	3.8821829
7493	3.8746557	7559	3.8784643	7625	3.8822398
7494	3.8747137	7560	3.8785218	7626	3.8822968
7495	3.8747716	7561	3.8785792	7627	3.8823537
7496	3.8748296	7562	3.8786367	7628	3.8824107
7497	3.8748875	7563	3.8786941	7629	3.8824676

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
7630	3.8825245	7696	3.8862651	7762	3.8899736	7828	3.8936508	7894	3.8972971	7960	3.9009131
7631	3.8825815	7697	3.8863215	7763	3.8900296	7829	3.8937063	7895	3.8973521	7961	3.9009676
7632	3.8826384	7698	3.8863779	7764	3.8900855	7830	3.8937618	7896	3.8974071	7962	3.9010222
7633	3.8826953	7699	3.8864343	7765	3.8901415	7831	3.8938172	7897	3.8974621	7963	3.9010767
7634	3.8827522	7700	3.8864907	7766	3.8901974	7832	3.8938727	7898	3.8975171	7964	3.9011313
7635	3.8828090	7701	3.8865471	7767	3.8902533	7833	3.8939281	7899	3.8975721	7965	3.9011858
7636	3.8828659	7702	3.8866035	7768	3.8903092	7834	3.8939836	7900	3.8976271	7966	3.9012403
7637	3.8829228	7703	3.8866599	7769	3.8903651	7835	3.8940390	7901	3.8976821	7967	3.9012948
7638	3.8829797	7704	3.8867163	7770	3.8904210	7836	3.8940944	7902	3.8977370	7968	3.9013493
7639	3.8830365	7705	3.8867726	7771	3.8904769	7837	3.8941498	7903	3.8977920	7969	3.9014038
7640	3.8830934	7706	3.8868290	7772	3.8905328	7838	3.8942053	7904	3.8978469	7970	3.9014583
7641	3.8831502	7707	3.8868854	7773	3.8905887	7839	3.8942607	7905	3.8979019	7971	3.9015128
7642	3.8832070	7708	3.8869417	7774	3.8906445	7840	3.8943161	7906	3.8979568	7972	3.9015673
7643	3.8832639	7709	3.8869980	7775	3.8907004	7841	3.8943715	7907	3.8980117	7973	3.9016218
7644	3.8833207	7710	3.8870544	7776	3.8907562	7842	3.8944268	7908	3.8980667	7974	3.9016762
7645	3.8833775	7711	3.8871107	7777	3.8908121	7843	3.8944822	7909	3.8981216	7975	3.9017307
7646	3.8834343	7712	3.8871670	7778	3.8908679	7844	3.8945376	7910	3.8981765	7976	3.9017851
7647	3.8834911	7713	3.8872233	7779	3.8909238	7845	3.8945929	7911	3.8982314	7977	3.9018396
7648	3.8835479	7714	3.8872796	7780	3.8909796	7846	3.8946483	7912	3.8982863	7978	3.9018940
7649	3.8836047	7715	3.8873359	7781	3.8910354	7847	3.8947036	7913	3.8983412	7979	3.9019485
7650	3.8836614	7716	3.8873922	7782	3.8910912	7848	3.8947590	7914	3.8983960	7980	3.9020029
7651	3.8837182	7717	3.8874485	7783	3.8911470	7849	3.8948143	7915	3.8984509	7981	3.9020573
7652	3.8837750	7718	3.8875048	7784	3.8912028	7850	3.8948696	7916	3.8985058	7982	3.9021117
7653	3.8838317	7719	3.8875610	7785	3.8912586	7851	3.8949250	7917	3.8985606	7983	3.9021661
7654	3.8838885	7720	3.8876173	7786	3.8913144	7852	3.8949803	7918	3.8986155	7984	3.9022205
7655	3.8839452	7721	3.8876736	7787	3.8913702	7853	3.8950356	7919	3.8986703	7985	3.9022749
7656	3.8840019	7722	3.8877298	7788	3.8914259	7854	3.8950909	7920	3.8987252	7986	3.9023293
7657	3.8840586	7723	3.8877860	7789	3.8914817	7855	3.8951462	7921	3.8987800	7987	3.9023837
7658	3.8841154	7724	3.8878423	7790	3.8915375	7856	3.8952015	7922	3.8988348	7988	3.9024381
7659	3.8841721	7725	3.8878985	7791	3.8915932	7857	3.8952567	7923	3.8988896	7989	3.9024924
7660	3.8842288	7726	3.8879547	7792	3.8916489	7858	3.8953120	7924	3.8989444	7990	3.9025468
7661	3.8842855	7727	3.8880109	7793	3.8917047	7859	3.8953673	7925	3.8989992	7991	3.9026011
7662	3.8843421	7728	3.8880671	7794	3.8917604	7860	3.8954225	7926	3.8990540	7992	3.9026555
7663	3.8843988	7729	3.8881233	7795	3.8918161	7861	3.8954778	7927	3.8991088	7993	3.9027098
7664	3.8844555	7730	3.8881795	7796	3.8918718	7862	3.8955330	7928	3.8991654	7994	3.9027642
7665	3.8845122	7731	3.8882357	7797	3.8919275	7863	3.8955884	7929	3.8992184	7995	3.9028185
7666	3.8845688	7732	3.8882918	7798	3.8919832	7864	3.8956435	7930	3.8992731	7996	3.9028728
7667	3.8846255	7733	3.8883480	7799	3.8920389	7865	3.8956987	7931	3.8993279	7997	3.9029271
7668	3.8846821	7734	3.8884042	7800	3.8920946	7866	3.8957539	7932	3.8993826	7998	3.9029814
7669	3.8847387	7735	3.8884603	7801	3.8921503	7867	3.8958091	7933	3.8994374	7999	3.9030357
7670	3.8847954	7736	3.8885165	7802	3.8922059	7868	3.8958644	7934	3.8994921	8000	3.9030900
7671	3.8848520	7737	3.8885726	7803	3.8922616	7869	3.8959195	7935	3.8995469	8001	3.9031443
7672	3.8849086	7738	3.8886287	7804	3.8923173	7870	3.8959747	7936	3.8996016	8002	3.9031986
7673	3.8849652	7739	3.8886848	7805	3.8923729	7871	3.8960299	7937	3.8996563	8003	3.9032529
7674	3.8850218	7740	3.8887410	7806	3.8924285	7872	3.8960851	7938	3.8997110	8004	3.9033072
7675	3.8850784	7741	3.8887971	7807	3.8924842	7873	3.8961403	7939	3.8997658	8005	3.9033613
7676	3.8851350	7742	3.8888532	7808	3.8925398	7874	3.8961954	7940	3.8998205	8006	3.9034116
7677	3.8851915	7743	3.8889093	7809	3.8925954	7875	3.8962506	7941	3.8998751	8007	3.9034699
7678	3.8852481	7744	3.8889654	7810	3.8926510	7876	3.8963057	7942	3.8999298	8008	3.9035242
7679	3.8853047	7745	3.8890214	7811	3.8927066	7877	3.8963608	7943	3.8999845	8009	3.9035784
7680	3.8853612	7746	3.8890775	7812	3.8927622	7878	3.8964160	7944	3.9000392	8010	3.9036327
7681	3.8854178	7747	3.8891335	7813	3.8928178	7879	3.8964711	7945	3.9000939	8011	3.9036867
7682	3.8854743	7748	3.8891896	7814	3.8928734	7880	3.8965262	7946	3.9001486	8012	3.9037419
7683	3.8855308	7749	3.8892457	7815	3.8929290	7881	3.8965813	7947	3.9002032	8013	3.9037911
7684	3.8855874	7750	3.8893017	7816	3.8929845	7882	3.8966364	7948	3.9002579	8014	3.9038493
7685	3.8856439	7751	3.8893577	7817	3.8930401	7883	3.8966915	7949	3.9003125	8015	3.9039035
7686	3.8857004	7752	3.8894116	7818	3.8930957	7884	3.8967466	7950	3.9003671	8016	3.9039577
7687	3.8857569	7753	3.8894698	7819	3.8931512	7885	3.8968017	7951	3.9004218	8017	3.9040119
7688	3.8858134	7754	3.8895258	7820	3.8932067	7886	3.8968568	7952	3.9004764	8018	3.9040661
7689	3.8858699	7755	3.8895818	7821	3.8932623	7887	3.8969118	7953	3.9005310	8019	3.9041202
7690	3.8859263	7756	3.8896378	7822	3.8933178	7888	3.8969669	7954	3.9005856	8020	3.9041744
7691	3.8859828	7757	3.8896938	7823	3.8933733	7889	3.8970219	7955	3.9006402	8021	3.9042285
7692	3.8860393	7758	3.8897498	7824	3.8934288	7890	3.8970770	7956	3.9006948	8022	3.9042827
7693	3.8860957	7759	3.8898057	7825	3.8934843	7891	3.8971320	7957	3.9007494	8023	3.9043368
7694	3.8861522	7760	3.8898617	7826	3.8935398	7892	3.8971871	7958	3.9008040	8024	3.9043910
7695	3.8862086	7761	3.8899177	7827	3.8935953	7893	3.8972421	7959	3.9008585	8025	3.9044450

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
8026	3.9044992	8092	3.9080559	8158	3.9115837
8027	3.9045533	8093	3.9081095	8159	3.9116369
8028	3.9046074	8094	3.9081632	8160	3.9116902
8029	3.9046615	8095	3.9082169	8161	3.9117434
8030	3.9047155	8096	3.9082705	8162	3.9117966
8031	3.9047696	8097	3.9083241	8163	3.9118498
8032	3.9048237	8098	3.9083778	8164	3.9119030
8033	3.9048778	8099	3.9084314	8165	3.9119562
8034	3.9049318	8100	3.9084850	8166	3.9120094
8035	3.9049859	8101	3.9085386	8167	3.9120625
8036	3.9050399	8101	3.9085922	8168	3.9121157
8037	3.9050940	8103	3.9086458	8169	3.9121689
8038	3.9051480	8104	3.9086994	8170	3.9122220
8039	3.9052020	8105	3.9087530	8171	3.9122752
8040	3.9052560	8106	3.9088066	8172	3.9123283
8041	3.9053101	8107	3.9088601	8173	3.9123815
8042	3.9053641	8108	3.9089137	8174	3.9124346
8043	3.9054181	8109	3.9089673	8175	3.9124878
8044	3.9054721	8110	3.9090209	8176	3.9125409
8045	3.9055260	8111	3.9090744	8177	3.9125940
8046	3.9055800	8112	3.9091279	8178	3.9126471
8047	3.9056340	8113	3.9091815	8179	3.9127002
8048	3.9056880	8114	3.9092350	8180	3.9127533
8049	3.9057419	8115	3.9092885	8181	3.9128064
8050	3.9057959	8116	3.9093420	8182	3.9128595
8051	3.9058499	8117	3.9093955	8183	3.9129125
8052	3.9059038	8118	3.9094490	8184	3.9129656
8053	3.9059577	8119	3.9095025	8185	3.9130187
8054	3.9060116	8120	3.9095560	8186	3.9130717
8055	3.9060655	8121	.9096095	8187	3.9131248
8056	3.9061195	8122	.9096630	8188	3.9131778
8057	3.9061734	8123	3.9097164	8189	3.9132309
8058	3.9062273	8124	3.9097699	8190	3.9132839
8059	3.9062812	8125	3.9098234	8191	3.9133369
8060	3.9063350	8126	3.9098768	8192	3.9133899
8061	3.9063889	8127	3.9099302	8193	3.9134429
8062	3.9064428	8128	3.9099837	8194	3.9134959
8063	3.9064967	8129	3.9100371	8195	3.9135489
8064	3.9065505	8130	3.9100905	8196	3.9136019
8065	3.9066044	8131	3.9101440	8197	3.9136549
8066	3.9066582	8132	3.9101974	8198	3.9137079
8067	3.9067121	8133	3.9102508	8199	3.9137609
8068	3.9067659	8134	3.9103042	8200	3.9138139
8069	3.9068197	8135	3.9103575	8201	3.9138668
8070	3.9068735	8136	3.9104110	8202	3.9139198
8071	3.9069273	8137	3.9104643	8203	3.9139727
8072	3.9069811	8138	3.9105177	8204	3.9140256
8073	3.9070350	8139	3.9105710	8205	3.9140786
8074	3.9070887	8140	3.9106244	8206	3.9141315
8075	3.9071425	8141	3.9106777	8207	3.9141844
8076	3.9071963	8142	3.9107311	8208	3.9142373
8077	3.9072501	8143	3.9107844	8209	3.9142902
8078	3.9073038	8144	3.9108378	8210	3.9143432
8079	3.9073576	8145	3.9108911	8211	3.9143960
8080	3.9074114	8146	3.9109444	8212	3.9144489
8081	3.9074651	8147	3.9109977	8213	3.9145018
8082	3.9075188	8148	3.9110510	8214	3.9145547
8083	3.9075726	8149	3.9111043	8215	3.9146076
8084	3.9076263	8150	3.9111576	8216	3.9146604
8085	3.9076800	8151	3.9112109	8217	3.9147133
8086	3.9077337	8152	3.9112642	8218	3.9147661
8087	3.9077874	8153	3.9113174	8219	3.9148190
8088	3.9078411	8154	3.9113707	8220	3.9148718
8089	3.9078948	8155	3.9114240	8221	3.9149246
8090	3.9079485	8156	3.9114772	8222	3.9149775
8091	3.9080202	8157	3.9115305	8223	3.9150303

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
8224	3.9150831	8290	3.9185545	8356	3.9219984
8225	3.9151359	8291	3.9186069	8357	3.9220504
8226	3.9151887	8292	3.9186593	8358	3.9221024
8227	3.9152415	8293	3.9187117	8359	3.9221543
8228	3.9152943	8294	3.9187640	8360	3.9222063
8229	3.9153471	8295	3.9188164	8361	3.9222582
8230	3.9153998	8296	3.9188687	8362	3.9223102
8231	3.9154526	8297	3.9189211	8363	3.9223621
8232	3.9155054	8298	3.9189734	8364	3.9224140
8233	3.9155581	8299	3.9190258	8365	3.9224659
8234	3.9156109	8300	3.9190781	8366	3.9225179
8235	3.9156636	8301	3.9191304	8367	3.9225698
8236	3.9157163	8302	3.9191827	8368	3.9226217
8237	3.9157691	8303	3.9192350	8369	3.9226736
8238	3.9158218	8304	3.9192873	8370	3.9227255
8239	3.9158745	8305	3.9193396	8371	3.9227773
8240	3.9159272	8306	3.9193919	8372	3.9228292
8241	3.9159799	8307	3.9194442	8373	3.9228811
8242	3.9160326	8308	3.9194965	8374	3.9229330
8243	3.9160853	8309	3.9195488	8375	3.9229848
8244	3.9161380	8310	3.9196010	8376	3.9230367
8245	3.9161907	8311	3.9196533	8377	3.9230885
8246	3.9162433	8312	3.9197055	8378	3.9231404
8247	3.9162960	8313	3.9197578	8379	3.9231922
8248	3.9163487	8314	3.9198100	8380	3.9232440
8249	3.9164013	8315	3.9198623	8381	3.9232958
8250	3.9164539	8316	3.9199145	8382	3.9233477
8251	3.9165066	8317	3.9199667	8383	3.9233995
8252	3.9165592	8318	3.9200189	8384	3.9234513
8253	3.9166118	8319	3.9200711	8385	3.9235031
8254	3.9166645	8320	3.9201233	8386	3.9235549
8255	3.9167171	8321	3.9201755	8387	3.9236066
8256	3.9167697	8322	3.9202277	8388	3.9236584
8257	3.9168223	8323	3.9202799	8389	3.9237102
8258	3.9168749	8324	3.9203321	8390	3.9237620
8259	3.9169275	8325	3.9203842	8391	3.9238137
8260	3.9169800	8326	3.9204364	8392	3.9238655
8261	3.9170326	8327	3.9204886	8393	3.9239172
8262	3.9170852	8328	3.9205407	8394	3.9239690
8263	3.9171377	8329	3.9205929	8395	3.9240207
8264	3.9171903	8330	3.9206450	8396	3.9240724
8265	3.9172428	8331	3.9206971	8397	3.9241242
8266	3.9172954	8332	3.9207493	8398	3.9241759
8267	3.9173479	8333	3.9208014	8399	3.9242276
8268	3.9174005	8334	3.9208535	8400	3.9242793
8269	3.9174530	8335	3.9209056	8401	3.9243310
8270	3.9175055	8336	3.9209577	8402	3.9243827
8271	3.9175580	8337	3.9210098	8403	3.9244344
8272	3.9176105	8338	3.9210619	8404	3.9244860
8273	3.9176630	8339	3.9211140	8405	3.9245377
8274	3.9177155	8340	3.9211661	8406	3.9245894
8275	3.9177680	8341	3.9212181	8407	3.9246410
8276	3.9178205	8342	3.9212702	8408	3.9246927
8277	3.9178729	8343	3.9213222	8409	3.9247444
8278	3.9179254	8344	3.9213743	8410	3.9247960
8279	3.9179779	8345	3.9214263	8411	3.9248476
8280	3.9180303	8346	3.9214784	8412	3.9248993
8281	3.9180828	8347	3.9215304	8413	3.9249509
8282	3.9181352	8348	3.9215824	8414	3.9250025
8283	3.9181876	8349	3.9216345	8415	3.9250541
8284	3.9182401	8350	3.9216865	8416	3.9251057
8285	3.9182925	8351	3.9217385	8417	3.9251573
8286	3.9183449	8352	3.9217905	8418	3.9252089
8287	3.9183973	8353	3.9218425	8419	3.9252605
8288	3.9184497	8354	3.9218945	8420	3.9253121
8289	3.9185021	8355	3.9219465	8421	3.9253637

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
8422	3.9254152	8488	3.9288054	8554	3.9321692
8423	3.9254668	8489	3.9288565	8555	3.9322200
8424	3.9255184	8490	3.9289077	8556	3.9322708
8425	3.9255699	8491	3.9289288	8557	3.9323215
8426	3.9256215	8492	3.9290100	8558	3.9323723
8427	3.9256730	8493	3.9290611	8559	3.9324230
8428	3.9257245	8494	3.9291123	8560	3.9324738
8429	3.9257761	8495	3.9291634	8561	3.9325245
8430	3.9258276	8496	3.9292145	8562	3.9325752
8431	3.9258791	8497	3.9292656	8563	3.9326259
8432	3.9259306	8498	3.9293167	8564	3.9326766
8433	3.9259821	8499	3.9293678	8565	3.9327274
8434	3.9260336	8500	3.9294189	8566	3.9327781
8435	3.9260851	8501	3.9294700	8567	3.9328288
8436	3.9261366	8502	3.9295211	8568	3.9328794
8437	3.9261880	8503	3.9295722	8569	3.9329301
8438	3.9262395	8504	3.9296232	8570	3.9329808
8439	3.9262910	8505	3.9296743	8571	3.9330315
8440	3.9263424	8506	3.9297254	8572	3.9330822
8441	3.9263939	8507	3.9297764	8573	3.9331328
8442	3.9264453	8508	3.9298275	8574	3.9331835
8443	3.9264968	8509	3.9298785	8575	3.9332342
8444	3.9265482	8510	3.9299296	8576	3.9332848
8445	3.9265997	8511	3.9299806	8577	3.9333354
8446	3.9266511	8512	3.9300316	8578	3.9333860
8447	3.9267025	8513	3.9300826	8579	3.9334367
8448	3.9267539	8514	3.9301336	8580	3.9334873
8449	3.9268053	8515	3.9301846	8581	3.9335379
8450	3.9268567	8516	3.9302356	8582	3.9335885
8451	3.9269081	8517	3.9302866	8583	3.9336391
8452	3.9269595	8518	3.9303376	8584	3.9336897
8453	3.9270109	8519	3.9303886	8585	3.9337403
8454	3.9270622	8520	3.9304396	8586	3.9337909
8455	3.9271136	8521	3.9304906	8587	3.9338415
8456	3.9271650	8522	3.9305415	8588	3.9338920
8457	3.9272163	8523	3.9305925	8589	3.9339426
8458	3.9272677	8524	3.9306434	8590	3.9339932
8459	3.9273190	8525	3.9306944	8591	3.9340437
8460	3.9273704	8526	3.9307453	8592	3.9340943
8461	3.9274217	8527	3.9307963	8593	3.9341448
8462	3.9274730	8528	3.9308472	8594	3.9341953
8463	3.9275243	8529	3.9308981	8595	3.9342459
8464	3.9275757	8530	3.9309490	8596	3.9342964
8465	3.9276270	8531	3.9309999	8597	3.9343469
8466	3.9276783	8532	3.9310508	8598	3.9343974
8467	3.9277296	8533	3.9311017	8599	3.9344479
8468	3.9277808	8534	3.9311526	8600	3.9344984
8469	3.9278321	8535	3.9312035	8601	3.9345489
8470	3.9278834	8536	3.9312544	8602	3.9345994
8471	3.9279347	8537	3.9313053	8603	3.9346499
8472	3.9279859	8538	3.9313561	8604	3.9347004
8473	3.9280372	8539	3.9314070	8605	3.9347509
8474	3.9280885	8540	3.9314579	8606	3.9348013
8475	3.9281397	8541	3.9315087	8607	3.9348518
8476	3.9281909	8542	3.9315596	8608	3.9349022
8477	3.9282422	8543	3.9316104	8609	3.9349527
8478	3.9282934	8544	3.9316612	8610	3.9350031
8479	3.9283446	8545	3.9317121	8611	3.9350536
8480	3.9283959	8546	3.9317629	8612	3.9351040
8481	3.9284471	8547	3.9318137	8613	3.9351544
8482	3.9284983	8548	3.9318945	8614	3.9352049
8483	3.9285495	8549	3.9319153	8615	3.9352553
8484	3.9286007	8550	3.9319661	8616	3.9353057
8485	3.9286518	8551	3.9320169	8617	3.9353561
8486	3.9287030	8552	3.9320677	8618	3.9354065
8487	3.9287542	8553	3.9321185	8619	3.9354569

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
8818	3.9453701	8884	3.9486085	8950	3.9518230	9016	3.9550139	9082	3.9581815	9148	3.9613261
8819	3.9454193	8885	3.9486574	8951	3.9518716	9017	3.9550621	9083	3.9582293	9149	3.9613736
8820	3.9454686	8886	3.9487063	8952	3.9519201	9018	3.9551102	9084	3.9582771	9150	3.9614211
8821	3.9455178	8887	3.9487552	8953	3.9519686	9019	3.9551584	9085	3.9583249	9151	3.9614685
8822	3.9455670	8888	3.9488040	8954	3.9520171	9020	3.9552065	9086	3.9583727	9152	3.9515160
8823	3.9456163	8889	3.9488529	8955	3.9520656	9021	3.9552547	9087	3.9584205	9153	3.9615635
8824	3.9456655	8890	3.9489018	8956	3.9521141	9022	3.9553028	9088	3.9584683	9154	3.9616109
8825	3.9457147	8891	3.9489506	8957	3.9521626	9023	3.9553510	9089	3.9585161	9155	3.9616583
8826	3.9457639	8892	3.9489994	8958	3.9522111	9024	3.9553991	9090	3.9585639	9156	3.9617058
8827	3.9458131	8893	3.9490483	8959	3.9522595	9025	3.9554472	9091	3.9586117	9157	3.9617532
8828	3.9458623	8894	3.9490971	8960	3.9523080	9016	3.9554953	9092	3.9586594	9158	3.9618006
8829	3.9459115	8895	3.9491460	8961	3.9523565	9027	3.9555434	9093	3.9587072	9159	3.9618481
8830	3.9459607	8896	3.9491948	8962	3.9524049	9028	3.9555915	9094	3.9187549	9160	3.9618955
8831	3.9460099	8897	3.9492436	8963	3.9524534	9029	3.9556397	9095	3.9588027	9161	3.9619429
8832	3.9460591	8898	3.9492924	8964	3.9525018	9030	3.9556877	9096	3.9588505	9162	3.9619903
8833	3.9461082	8899	3.9493412	8965	3.9525503	9031	3.9557358	9097	3.9588982	9163	3.9620377
8834	3.9461574	8900	3.9493900	8966	3.9525987	9032	3.9557839	9098	3.9589459	9164	3.9620851
8835	3.9462065	8901	3.9494388	8967	3.9526472	9033	3.9558320	9099	3.9589937	9165	3.9621325
8836	3.9462557	8902	3.9494876	8968	3.9526956	9034	3.9558801	9100	3.9590414	9166	3.9621799
8837	3.9463048	8903	3.9495364	8969	3.9527440	9035	3.9559282	9101	3.9590891	9167	3.9622272
8838	3.9463540	8904	3.9495852	8970	3.9527924	9036	3.9559762	9102	3.9591368	9168	3.9622746
8839	3.9464031	8905	3.9496339	8971	3.9528409	9037	3.9560243	9103	3.9591845	9169	3.9623220
8840	3.9464513	8906	3.9496827	8972	3.9528893	9038	3.9560723	9104	3.9592322	9170	3.9623693
8841	3.9465014	8907	3.9497315	8973	3.9529377	9039	3.9561204	9105	3.9592799	9171	3.9624167
8842	3.9465505	8908	3.9497802	8974	3.9529861	9040	3.9561684	9106	3.9593276	9172	3.9624640
8843	3.9465996	8909	3.9498290	8975	3.9530345	9041	3.9562165	9107	3.9593753	9173	3.9625114
8844	3.9466487	8910	3.9498777	8976	3.9530828	9042	3.9562645	9108	3.9594230	9174	3.9625587
8845	3.9466978	8911	3.9499264	8977	3.9531312	9043	3.9563125	9109	3.9594707	9175	3.9626061
8846	3.9467469	8912	3.9499752	8978	3.9531796	9044	3.9563606	9110	3.9595184	9176	3.9626534
8847	3.946796	8913	3.9500239	8979	3.9532280	9045	3.9564086	9111	3.9595660	9177	3.9627007
8848	3.9468451	8914	3.9500726	8980	3.9532763	9046	3.9564566	9112	3.9596137	9178	2.9627480
8849	3.9468942	8915	3.9501213	8981	3.9533247	9047	3.9565046	9113	3.9596614	9179	3.9627954
8850	3.9469433	8916	3.9501701	8982	3.9533730	9048	3.9565526	9114	3.9597090	9180	3.9628427
8851	3.9469923	8917	3.9502188	8983	3.9534214	9049	3.9566006	9115	3.9597567	9181	3.9628900
8852	3.9470414	8918	3.9502675	8984	3.9534697	9050	3.9566486	9116	3.9598043	9182	3.9629373
8853	3.9470905	8919	3.9503162	8985	3.9535181	9051	3.9566966	9117	3.9598520	9183	3.9629846
8854	3.9471395	8920	3.9503649	8986	3.9535664	9052	3.9567445	9118	3.9598996	9184	3.9630319
8855	3.9471886	8921	3.9504135	8987	3.9536147	9053	3.9567925	9119	3.9599472	9185	3.9630792
8856	3.9472376	8922	3.9504622	8988	3.9536631	9054	3.9568405	9120	3.9599948	9186	3.9631264
8857	3.9472866	8923	3.9505109	8989	3.9537114	9055	3.9568885	9121	3.9600424	9187	3.9631737
8858	3.9473357	8924	3.9505596	8990	3.9537597	9056	3.9569364	9122	3.9600901	9188	3.9632210
8859	3.9473847	8925	3.9506082	8991	3.9538080	9057	3.9569844	9123	3.9601337	9189	3.9632683
8860	3.9474337	8926	3.9506569	8992	3.9538563	9058	3.9570323	9124	3.9601853	9190	3.9633155
8861	3.9474827	8927	3.9507055	8993	3.9539046	9059	3.9570803	9125	3.9602329	9191	3.9633628
8862	3.9475317	8928	3.9507542	8994	3.9539529	9060	3.9571282	9126	3.9602805	9192	3.9634100
8863	3.9475807	8929	3.9508028	8995	3.9540012	9061	3.9571761	9127	3.9603280	9193	3.9634572
8864	3.9476298	8930	3.9508515	8996	3.9540494	9062	3.9572241	9128	3.9603756	9194	3.9635045
8865	3.9476787	8931	3.9509001	8997	3.9540977	9063	3.9572720	9129	3.9604232	9195	3.9635517
8866	3.9477277	8932	3.9509487	8998	3.9541460	9064	3.9573199	9130	3.9604708	9196	3.9635990
8862	3.9477767	8933	3.9509973	8999	3.9541943	9065	3.9573678	9131	3.9605183	9197	3.9636462
8863	3.9478257	8934	3.9510459	9000	3.9542425	9066	3.9574157	9132	3.9605659	9198	3.9636934
8864	3.9478746	8935	3.9510946	9001	3.9542908	9067	3.9574636	9133	3.9606134	9199	3.9637406
8865	3.9479236	8936	3.9511432	9002	3.9543390	9068	3.9575115	9134	3.9606610	9200	3.9637878
8866	3.9479726	8937	3.9511918	9003	3.9543872	9069	3.9575594	9135	3.9607085	9201	3.9638350
8867	3.9480215	8938	3.9512404	9004	3.9544355	9070	3.9576073	9136	3.9607561	9202	3.9638822
8868	3.9480705	8939	3.9512889	9005	3.9544837	9071	3.9576552	9137	3.9608036	9203	3.9639294
8869	3.9481194	8940	3.9513375	9006	3.9545319	9072	3.9577030	9138	3.9608511	9204	3.9639766
8870	3.9481684	8941	3.9513861	9007	3.9545802	9073	3.9577509	9139	3.9608987	9205	3.9640238
8871	3.9482173	8942	3.9514347	9008	3.9546284	9074	3.9577988	9140	3.9609462	9206	3.9640710
8872	3.9482662	8943	3.9514832	9009	3.9546766	9075	3.9578465	9141	3.9609937	9207	3.9641181
8873	3.9483151	8944	3.9515318	9010	3.9547248	9076	3.9578945	9142	3.9610412	9208	3.9641653
8874	3.9483641	8945	3.9515803	9011	3.9547730	9077	3.9579423	9143	3.9510887	9209	3.9642125
8875	3.9484130	8946	3.9516289	9012	3.9548212	9078	3.9579902	9144	3.9611362	9210	3.9642596
8876	3.9484619	8947	3.9516774	9013	3.9548694	9079	3.9580380	9145	3.9611837	9211	3.9643068
8877	3.9485108	8948	3.9517260	9014	3.9549176	9080	3.9580858	9146	3.9612312	9212	3.9643539
8878	3.9485597	8949	3.9517745	9015	3.9549657	9081	3.9581337	9147	3.9612787	9213	3.9644011

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
9214	3.9644482	9280	3.9675480	9346	3.9706258	9412	3.9736819	9478	3.9767167	9544	3.9797304
9215	3.9644953	9281	3.9675948	9347	3.9706722	9413	3.9737281	9479	3.9767625	9545	3.9797759
9216	3.9645425	9282	3.9676416	9348	3.9707187	9414	3.9737742	9480	3.9768083	9546	3.9798214
9217	3.9645896	9283	3.9676883	9349	3.9707652	9415	3.9738203	9481	3.9768541	9547	3.9798669
9218	3.9646367	9284	3.9677351	9350	3.9708116	9416	3.9738664	9482	3.9769000	9548	3.9799124
9219	3.9646838	9285	3.9677819	9351	3.9708581	9417	3.9739126	9483	3.9769457	9549	3.9799579
9220	3.9647309	9286	3.9678287	9352	3.9709045	9418	3.9739587	9484	3.9769915	9550	3.9800034
9221	3.9647780	9287	3.9678754	9353	3.9709509	9419	3.9740048	9485	3.9770373	9551	3.9800488
9222	3.9648251	9288	3.9679222	9354	3.9709973	9420	3.9740509	9486	3.9770831	9552	3.9800943
9223	2.9648722	9289	3.9679690	9355	3.9710438	9421	3.9740970	9487	3.9771289	9553	3.9801398
9224	3.9649193	9290	3.9680157	9356	3.9710902	9422	3.9741431	9488	3.9771747	9554	3.9801852
9225	3.9649664	9291	3.9680625	9357	3.9711366	9423	3.9741892	9489	3.9772204	9555	3.9802307
9226	3.9650134	9292	3.9681092	9358	3.9711830	9424	3.9742353	9490	3.9772662	9556	3.9802761
9227	3.9650605	9293	3.9681559	9359	3.9712294	9425	3.9742814	9491	3.9773120	9557	2.9803216
9228	3.9651076	9294	3.9682027	9360	3.9712758	9426	3.9743274	9492	3.9773577	9558	3.9803670
9229	3.9651546	9295	3.9682494	9361	3.9713222	9427	3.9743735	9493	3.9774035	9559	3.9804125
9230	3.9652017	9296	3.9682961	9362	3.9713686	9428	3.9744196	9494	3.9774492	9560	3.9804579
9231	3.9652487	9297	3.9683428	9363	3.9714150	9429	3.9744656	9495	3.9774950	9561	3.9805033
9232	3.9652958	9298	3.9683895	9364	3.9714614	9430	3.9745117	9496	3.9775407	9562	3.9805487
9233	3.9653428	9299	3.9684362	9365	3.9715078	9431	3.9745577	9497	3.9775864	9563	3.9805941
9234	3.9653899	9300	3.9684809	9366	3.9715542	9432	3.9746038	9498	3.9776322	9564	3.9806396
9235	3.9654369	9301	3.9685296	9367	3.9716005	9433	3.9746498	9499	3.9776779	9565	3.9806850
9236	3.9654839	9301	3.9685763	9368	3.9716469	9434	3.9746959	9500	3.9777236	9566	3.9807304
9237	3.9655309	9303	3.9686230	9369	3.9716932	9435	3.9747419	9501	3.9777693	9567	3.9807758
9238	3.9655780	9304	3.9686697	9370	3.9717496	9436	3.9747879	9502	3.9778150	9568	3.9808211
9239	3.9656250	9305	3.9687164	9371	3.9717859	9437	3.9748340	9503	3.9778607	9569	3.9808665
9240	3.9656720	9306	3.9687630	9372	3.9718323	9438	3.9748800	9504	3.9779064	9570	3.9809119
9241	3.9657190	9307	3.9688097	9373	3.9718786	9439	3.9749260	9505	3.9779521	9571	3.9809573
9242	3.9657660	9308	3.9688564	9374	3.9719249	9440	3.9749720	9506	3.9779978	9572	3.9810027
9243	3.9658130	9309	3.9689030	9375	3.9719713	9441	3.9750180	9507	3.9780435	9573	3.9810480
9244	3.9658599	9310	3.9689497	9376	3.9720176	9442	3.9750640	9508	3.9780892	9574	3.9810934
9245	3.9659069	9311	3.9689963	9377	3.9720639	9443	3.9751100	9509	3.9781348	9575	3.9811388
9246	3.9659539	9312	3.9690430	9378	3.9721102	9444	3.9751560	9510	3.9781805	9576	3.9811841
9247	3.9660009	9313	3.9690896	9379	3.9721565	9445	3.9752020	9511	3.9782261	9577	3.9812295
9248	3.9660478	9314	3.9691362	9380	3.9722028	9446	3.9752479	9512	3.9782718	9578	3.9812748
9249	3.9660948	9315	3.9691829	9381	3.9722491	9447	3.9752939	9513	3.9783175	9579	3.9813202
9250	3.9661417	9316	3.9692295	9382	3.9722954	9448	3.9753399	9514	3.9783631	9580	3.9813655
9251	3.9661887	9317	3.9692761	9383	3.9723417	9449	3.9753858	9515	3.9784088	9581	3.9814108
9252	3.9662356	9318	3.9693227	9384	3.9723880	9450	3.9754318	9516	3.9784544	9582	3.9814562
9253	3.9662826	9319	3.9693693	9385	3.9724343	9451	3.9754778	9517	3.9785001	9583	3.9815015
9254	3.9663295	9320	3.9694159	9386	3.9724805	9452	3.9755237	9518	3.9785457	9584	3.9815468
9255	3.9663764	9321	3.9694625	9387	3.9725268	9453	3.9755697	9519	3.9785913	9585	3.9815921
9256	3.9664233	9322	3.9695091	9388	3.9725731	9454	3.9756156	9520	3.9786369	9586	3.9816374
9257	3.9664703	9323	3.9695557	9389	3.9726193	9455	3.9756615	9521	3.9786826	9587	3.9816827
9258	3.9665172	9324	3.9696023	9390	3.9726656	9456	3.9757075	9522	3.9287282	9588	3.9817280
9259	3.9665641	9325	3.9696488	9391	3.9727118	9457	3.9757534	9523	3.9787738	9589	3.9817733
9260	3.9666110	9326	3.9696954	9392	3.9727581	9458	3.9757993	9524	3.9788194	9590	3.9818186
9261	3.9666579	9327	3.9697420	9393	3.9728043	9459	3.9758452	9525	3.9788650	9591	3.9818639
9262	3.9667048	9328	3.9697885	9394	3.9728506	9460	3.9758911	9526	3.9789106	9592	3.9819092
9263	3.9657517	9329	3.9698351	9395	3.9728968	9461	3.9759370	9527	3.9789562	9593	3.9819544
9264	3.9667985	9330	3.9698816	9396	3.9729430	9462	3.9759829	9528	3.9790017	9594	3.9819997
9265	3.9668454	9331	3.9699282	9397	3.9729892	9463	3.9760288	9529	3.9790473	9595	3.9820450
9266	3.9668923	9332	3.9699747	9398	3.9730354	9464	3.9760747	9530	3.9790929	9596	3.9820902
9267	3.9669392	9333	3.9700213	9399	3.9730816	9465	3.9761206	9531	3.9791385	9597	3.9821355
9268	3.9669860	9334	3.9700678	9400	3.9731279	9466	3.9761665	9532	3.9791840	9598	3.9821807
9269	3.9670329	9335	3.9701143	9401	3.9731741	9467	3.9762124	9534	3.9792296	9599	3.9822260
9270	3.9670797	9336	3.9701608	9402	3.9732402	9468	3.9762582	9533	3.9792751	9600	3.9822712
9271	3.9671266	9337	3.9702074	9403	3.9732664	9469	3.9763041	9535	3.9793207	9601	3.9823165
9272	3.9671734	9338	3.9702539	9404	3.9733126	9470	3.9763500	9536	3.9793662	9602	3.9823617
9273	3.9672202	9339	3.9703004	9405	3.9733588	9471	3.9763958	9537	3.9794118	9603	3.9824069
9274	3.9672671	9340	3.9703469	9406	3.9734050	9472	3.9764417	9538	3.9794573	9604	3.9824521
9275	3.9673139	9341	3.9703934	9407	3.9734511	9473	3.9764875	9539	3.9795028	9605	3.9824974
9276	3.9673607	9342	3.9704399	9408	3.9734973	9474	3.9765334	9540	3.9795484	9606	3.9825426
9277	3.9674075	9343	3.9704863	9409	3.9735435	9475	3.9765792	9541	3.9795939	9607	3.9825878
9278	3.9674544	9344	[illegible]	9410	3.9735896	9476	3.9766251	9542	3.9796394	9608	3.9826330
9279	[illegible]	9345	[illegible]	9411	3.9736358	9477	3.9766709	9543	[illegible]	9609	[illegible]

9610

N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.	N.	Logarit.
9610	3.9827234	9676	3.9856958	9742	3.9886481	9808	3.9915805	9874	3.9944931	9940	3.9973864
9611	3.9827686	9677	3.9857407	9743	3.9886927	9809	3.9916247	9875	3.9945371	9941	3.9974301
9612	3.9828138	9678	3.9857856	9744	3.9887373	9810	3.9916690	9876	3.9945811	9942	3.9974737
9613	3.9828589	9679	3.9858305	9745	3.9887818	9811	3.9917133	9877	3.9946251	9943	3.9975174
9614	3.9829041	9680	3.9858754	9746	3.9888264	9812	3.9917575	9878	3.9946690	9944	3.9975611
9615	3.9829493	9681	3.9859202	9747	3.9888710	9813	3.9918018	9879	3.9947130	9945	3.9976048
9616	3.9829944	9682	3.9859651	9748	3.9889155	9814	3.9918461	9880	3.9947569	9946	3.9976484
9617	3.9830396	9683	3.9860099	9749	3.9889601	9815	3.9918903	9881	3.9948009	9947	3.9976921
9618	3.9830848	9684	3.9860548	9750	3.9890046	9816	3.9919345	9882	3.9948448	9948	3.9977358
9619	3.9831299	9685	3.9860996	9751	3.9890492	9817	3.9919788	9883	3.9948888	9949	3.9977794
9610	3.9831751	9686	3.9861445	9752	3.9890937	9818	3.9920230	9884	3.9949327	9950	3.9978231
9621	3.9832202	9687	3.9861893	9753	3.9891382	9819	3.9920673	9885	3.9949767	9951	3.9978667
9622	3.9832654	9688	3.9862341	9754	3.9891828	9820	3.9921115	9886	3.9950206	9952	3.9979104
9623	3.9833105	9689	3.9862790	9755	3.9892273	9821	3.9921557	9887	3.9950645	9953	3.9979540
9624	3.9833556	9590	3.9863238	9756	3.9892718	9822	3.9921999	9888	3.9951085	9954	3.9979976
9625	3.9834007	9691	3.9863686	9757	3.9893163	9823	3.9922441	9889	3.9951524	9955	3.9980413
9626	3.9834458	9692	3.9864134	9758	3.9893608	9824	3.9922884	9890	3.9951963	9956	3.9980849
9627	3.9834910	9693	3.9864582	9759	3.9894053	9825	3.9923326	9891	3.9952402	9957	3.9981285
9628	3.9835361	9694	3.9865030	9760	3.9894498	9826	3.9923768	9892	3.9952841	9958	3.9981721
9629	3.9835812	9695	3.9865478	9761	3.9894943	9227	3.9924210	9893	3.9953280	9959	3.9982157
9630	3.9836263	9696	3.9865926	9762	3.9895388	9828	3.9924651	9894	3.9953719	9960	3.9982593
9631	3.9836714	9697	3.9866374	9763	3.9895833	9829	3.9925093	9895	3.9954158	9961	3.9983029
9632	3.9837165	9698	3.9866822	9764	3.9896278	9830	3.9925535	9896	3.9954597	9962	3.9983465
9633	3.9837616	9699	3.9867270	9765	3.9896722	9831	3.9925977	9897	3.9955036	9963	3.9983901
9634	3.9838006	9200	3.9867717	9766	3.9897167	9832	3.9926419	9898	3.9955474	9964	3.9984337
9635	3.9838517	9701	3.9868165	9767	3.9897612	9833	3.9926860	9899	3.9955913	9965	3.9984773
9636	3.9838968	9702	3.9868613	9768	3.9898056	9834	3.9927302	9900	3.9956352	9966	3.9985209
9637	3.9839419	9703	3.9869060	9769	3.9898501	9835	3.9927744	9901	3.9956791	9967	3.9985644
9638	3.9839869	9704	3.9869508	9770	3.9898946	9836	3.9928185	9902	3.9957229	9968	3.9986080
9639	3.9840320	9705	3.9869955	9771	3.9899390	9837	3.9928627	9903	3.9957668	9969	3.9986516
9640	3.9840770	9706	3.9870403	9772	3.9899835	9838	3.9929068	9904	3.9958106	9970	3.9986952
9641	3.9841221	9707	3.9870850	9773	3.9900279	9839	3.9929510	9905	3.9958545	9971	3.9987387
9642	3.9841671	9708	3.9871298	9774	3.9900723	9840	3.9929951	9906	3.9958983	9972	3.9987823
9643	3.9842122	9709	3.9871745	9775	3.9901168	9841	3.9930392	9907	3.9959422	9973	3.9988258
9544	3.9842572	9710	3.9872192	9776	3.9901612	9842	3.9930834	9908	3.9959860	9974	3.9988694
9645	3.9843022	9711	3.9872640	9777	3.9902056	9843	3.9931275	9909	3.9960298	9975	3.9989129
9646	3.9843473	9712	3.9873087	9778	3.9902500	9844	3.9931716	9910	3.9960737	9976	3.9989564
9647	3.9843923	9713	3.9873534	9779	3.9902944	9845	3.9932157	9911	3.9961175	9977	3.9990000
9648	3.9844373	9714	3.9873981	9780	3.9903389	9846	3.9932598	9912	3.9961613	9978	3.9990435
9649	3.9844823	9715	3.9874428	9781	3.9903833	9847	3.9933039	9913	3.9962051	9979	3.9990870
9650	3.9845273	9716	3.9874875	9782	3.9904277	9848	3.9933480	9914	3.9962489	9980	3.9991305
9651	3.9845723	9717	3.9875322	9783	3.9904721	9849	3.9933921	9915	3.9962927	9981	3.9991741
9652	3.9846173	9718	3.9875769	6784	3.9905164	9850	3.9934361	9916	3.9963365	9982	3.9992176
9653	3.9846623	9719	4.9876216	9785	3.9905608	9851	3.9934802	9917	3.9963803	9983	3.9992611
9654	3.9847073	9720	3.9876663	9786	3.9906052	9852	3.9935244	9918	3.9964241	9984	3.9993046
9655	3.9847523	9721	3.9877109	9787	3.9906496	9853	3.9935685	9919	3.9964679	9985	3.9993481
9656	3.9847972	9722	3.9877556	9788	3.9986940	9854	3.9936126	9920	3.9965117	9986	3.9993916
9657	3.9848422	9723	3.9878003	9789	3.9907384	9855	3.9936566	9921	3.9965554	9987	3.9994350
9658	3.9848872	9724	3.9878449	9790	3.9907827	9856	3.9937007	9922	3.9965992	9988	3.9994785
9659	3.9849322	9725	3.9878896	9791	3.9908270	9857	3.9937448	9923	3.9966430	9989	3.9995220
9660	3.9849771	9726	3.9879343	9792	3.9908714	9858	3.9937888	9924	3.9966867	9990	3.9995655
9661	3.9850221	9727	3.9879789	9793	3.9909158	9859	3.9938329	9925	3.9967305	9991	3.9996090
9662	3.9850670	9728	3.9880236	9794	3.9909601	9860	3.9938769	9926	3.9967743	9992	3.9996524
9663	3.9851120	9729	3.9880682	9795	3.9910044	9861	3.9939210	9927	3.9968180	9993	3.9996959
9664	3.9851569	9730	3.9881128	9796	3.9910488	9862	3.9939650	9928	3.9968618	9994	3.9997393
9665	3.9852018	9731	3.9881575	9797	3.9910931	9863	3.9940090	9929	3.9969055	9995	3.9997828
9666	3.9852468	9732	3.9882021	9798	3.9911374	9864	3.9940531	9930	3.9969492	9996	3.9998262
9667	3.9852917	9733	3.9882467	9799	3.9911823	9865	3.9940971	9931	3.9969930	9997	3.9998697
9668	3.9853366	9734	3.9882913	9800	3.9912261	9866	3.9941411	9932	3.9970367	9998	3.9999131
9669	3.9853816	9735	3.9883360	9801	3.9912704	9867	3.9941851	9933	3.9970804	9999	3.9999566
9670	3.9854265	9736	3.9883806	9802	3.9913147	9868	3.9942291	9934	3.9971241	10000	4.0000000
9671	3.9854714	9737	3.9884252	9803	3.9913590	9869	3.9942731	9935	3.9971679		
9672	3.9854163	9738	3.9884698	9804	3.9914033	9870	3.9943172	9936	3.9972116		
9673	3.9855612	9739	3.9885144	9805	3.9914476	9871	3.9943612	9937	3.9972553		
9674	3.9856061	9740	3.9885590	9806	3.9914919	9872	3.9944051	9938	3.9972990		
9675	3.9856510	9741	3.9886035	9807	3.9915362	9873	3.9944491	9939	3.9973427		

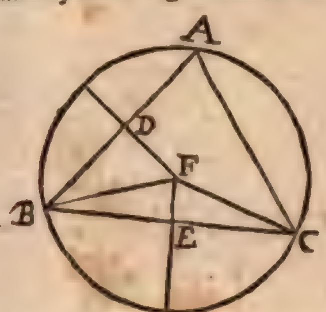
TRIGONOMETRIÆ LIBER TERTIUS.

Reſolutio triangulorum rectilineorum.

PROPOSITIO I.

Theorema.

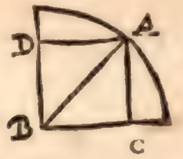
In triangulis rectilineis univerſis, latera ſunt proportionalia ſinubus angulorum oppoſitorum.



Sit rectilineum triangulum ABC, dico ita eſſe latus AB ad BC, ſicut ſinus anguli ACB ad ſinum anguli BAC.

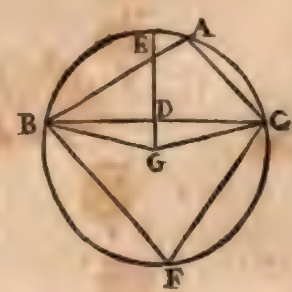
Triangulo ABC circulus circumſcribatur (*per* 5.4.*Eucl.*) diviſiſque bifariàm in D & E lateribus AB,BC, ducantur ex centro F, lineæ FD,FE, quæ (*per* 3.3.*Eucl.*) perpendiculares erunt ad AB, BC, & conſequenter BD, BE erunt ſinus angulorum BFE, BFD (*per defin. ſinûs.*)

Demonſtr. Angulus B F C duplus eſt anguli A (*per* 20.3.*Eucl.*)ſed etiam eſt duplus anguli BFE, propter triangulorum B F E, E F C æqualitatem (*per* 8.1.*Eucl.*) ergo anguli BFE,& A ſunt æquales, ſed BE eſt ſinus anguli BFE, ergo & anguli oppoſiti A. Eodem modo probabo BD eſſe ſinum anguli oppoſiti ACB, ſed BC ad AB eandem rationem habet, ac ſemiſſis BE ad ſemiſſem BD, ergo ita eſt BC ad AB, ſicut ſinus anguli oppoſiti A, ad ſinum anculi ACB, quod erat demonſtrandum.



Hæc quidem demonſtratio triangulis rectangulis convenit;datur tamen alia facilior. Sit igitur triangulum ABC rectangulum in C, deſcripto ex C ut centro, intervallo BA, circulo, hypothenuſa AB ſit ſinus totus ſeu ſinus anguli recti, A C ſit ſinus anguli oppoſiti ABC, BC, ſeu AD, ſit ſinus anguli A B D, qui alternus eſt, & æqualis angulo BAC, ergo conſtat propoſitio.

Poſſet fieri difficultas pro angulo obtuſangulo BAC, quomodo ejus medietas BD, poſſit eſſe ſinus anguli oppoſiti B A C. Circulo inſcribatur triangulum ABC, & ex centro G ducatur GDE,



eritque (*per* 3.3.*Eucl.*) perpendicularis ad BD, & ſinus anguli BGD.

Demonſtratio. Angulus BGC in centro duplus eſt tam anguli F, quam anguli BGD; ergo anguli BGD, & F æquales ſunt, ſed BD eſt ſinus anguli BGD, ergo eſt etiam ſinus anguli F; ſed angulus obtuſus A habet eundem ſinum ac angulus acutus, qui eſt complementum ejus ad duos rectos,& in quadrilatero ABFC (*per* 22.3.*Eucl.*) anguli A, & F æquales ſunt duobus rectis; ergo eundem ſinum habent BD.

COROLLARIUM I.

Datis in triangulo duobus lateribus, & angulo uni eorum oppoſito omnia innoteſcunt ut ſi dentur AB,BC & angulus A. Fiat enim ut BC ad AB, ita ſinus anguli A ex canone depromptus ad quartum habebitur angulus ACB, datis autem duobus angulis datur tertius ABC.Fiat rurſus ut ſinus anguli A ad ſinum anguli ABC, ita latus BC ad A quartum, & habebis latus AC.

COROLLARIUM II.

Datis duobus angulis quibuſcumque A & ABC, & uno latere AB,dantur omnia: nam primò datur tertius angulus, cum trianguli tres anguli æquales ſint duobus rectis; tum ſi fiat ut ſinus anguli ACB ad ſinum anguli A, ita latus AB ad quartum,habebitur latus BC: fiat item ut ſinus anguli ACB,ad ſinum anguli ABC, ita AB ad AC.

PROPOSITIO II.

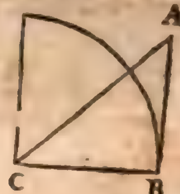
Theorema.

In triangulis rectangulis ita eſt unum latus ad aliud, ut ſinus totus ad tangentem anguli adjacentis. Item ita eſt unum latus ad hypothenuſam, ut ſinus totus ad ſecantem ejuſdem.

In triangulo rectangulo ABC, dico ita eſſe latus CB ad AB, ut ſinus totus ad tangentem anguli C Ex C ut centro,intervallo CB, deſcribatur circulus.

Demonſtr

Demonſtratio. Cum angulus ABC rectus ſit, linea BA (*per* 16. 3. *Eucl.*) circulum tanget, eritque tangens anguli C, & CB radius, ſeu ſinus totus, & hypothenuſa CA erit ſecans anguli C; & quia (*per* 1 *hujus*) in omni circulo eadem eſt ratio ſimilium linearum; eadem erit ratio lateris CB ad BA quæ eſt ſinus totius in tabula notati ad tangentem anguli C item in tabula notata; item ita eſt BC, ad hypothenuſam AC ut ſinus totus ad ſecantem anguli C.



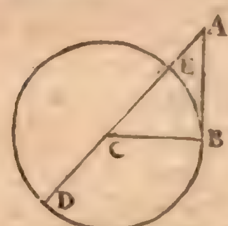
COROLLARIUM.

In triangulo rectangulo, præter angulum rectum C, ſi cognoſcatur alius angulus ut C, & unum latus, cognoſcuntur omnia. Detur latus CB, fiat ut ſinus totus, ad tangentem anguli C ita BC ad quartum, habebitur AB; fiat ut ſinus totus ad ſecantem anguli C, ita CB ad quartum habebitur AC. Si daretur AB, fieret ut tangens anguli C ad ſinum totum, ita AB ad quartum, haberetur BC, vel ut tangens anguli C ad ſecantem ejuſdem, ita AB ad AC. Si daretur hypothenuſa AC, initium fieret à ſecante.

PROPOSITIO III.

Theorema.

In triangulis rectangulis unum crus medium proportionale eſt inter aggregatum, & differentiam reliquorum laterum.



Sit triangulum ABC rectangulum in B, ex C ut centro intervallo CB deſcribatur circulus, & producatur AC in D; erit linea AD aggregatum reliquorum laterum, cum CB. CD ſint æquales; eritque EA differentia inter CA & CB. cum CB, CE ſint æquales. Dico crus AB eſſe medium proportionale inter AD, EA.

Demonſtratio (*per* 16. 3. *Eucl.*) AB tangit circulum; ergo (*per* 37. 3. *Eucl.*) quadratum AB æquale eſt rectangulo comprehenſo ſub AD, AE & conſequenter (*per* 17. 6. *Eucl.*) ita eſt AD ad AB ut AB ad AE; quod erat demonſtrandum.

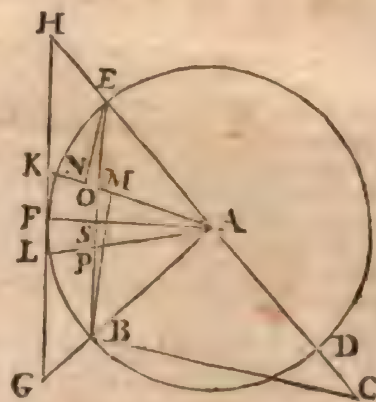
COROLLARIUM.

In triangulo rectangulo datis duobus lateribus datur tertium ut ſi dentur AC, BC, fiat aggregatum utriuſque & differentia, tum multiplicetur AD per AE, & fiet rectangulum comprehenſum ſub AD, AE, quod cùm ſit æquale quadrato AB, habebitur AB per extractionem radicis. Logarithmicè, logarithmi AE, AD addantur, habebitur logarithmus AB, qui diviſus bifariam dat lineam AB.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

In triangulis rectilineis ut ſumma duorum laterum ad differentiam eorum; ita tangens ſemiſummæ angulorum oppoſitorum ad tangentem ſemidifferentiæ eorum.



In triangulo ABC, in quo duo latera AB, AC; aſſumantur AB, AD æquales, eritque DC eorum differentia; ſint item AB, AE æquales, eritque EC eorum ſumma; & cum angulus EAB ſit æqualis duobus internis ABC, ACB (*per* 32. 1. *Eucl.*) erit angulus externus EAB ſumma angulorum oppoſitorum ABC, & ACD: deſcribatur ex A ut centro, intervallo AB, circulus, qui tranſibit per E & D, cùm AB, AE, AD ſint æquales; dividatur arcus EB bifariam in F; eritque angulus FAB ſemiſumma angulorum; per F ducta perpendiculari GH, erit FG tangens ſemiſummæ angulorum. Ducatur AK parallela BC, eritque angulus externus KAE æqualis interno C, & KAB æqualis alterno ABC Sit angulus LAG æqualis angulo KAH; eritque LAK differentia inter angulos KAG, LAG, ſeu inter angulos ABC; ACB; & FAL ſemidifferentia; FL, aut FK tangens ſemidifferentiæ; probandum eſt ita eſſe EC ad DC, ſicut FG ad FL; ducantur ex B & E ad AK, perpendiculares NE, BM; conjungaturque EB; eruntque EN, BM ſinus angulorum HAK, KAB, ſeu C, & ABC illis æqualium.

Demonſtratio. Triangula NEO, MBO ſunt æquiangula, cum præter angulos rectos M, & N, habeant angulos ad verticem in puncto O æquales; ergo ita eſt ſinus MB ad NE, ſicut OB ad OE; ſed ut ſinus, ita & latera iis oppoſita (*per primam hujus*) ergo ita eſt OB ad OE, ſicut latus AC ad AB; & componendo ita erit CE, ſumma AB, AC, ſeu EC ad DC differentiam; ſicut tota EB ad OP differentiam, qua major OB ſuperat minorem OE, aut ſicut dimidia EB, ſeu SB ad dimidiam OP, ſeu SP; ſed (*per cor.* 4. 6. *Eucl.*) ut SB ad SP, ita FG ad FL; ergo ita EC ad DC, ſicut FG ad FL, ſeu ita eſt ſumma duorum laterum ad differentiam eorum, ut tangens ſemiſummæ angulorum ad baſin ad tangentem ſemidifferentiæ eorum.

COROLLARIUM I.

Facilè probarem ita eſſe ſummam laterum ad eorum differentiam, ſicut ſumma ſinuum angu-

Digitized by

lorum ad eorum differentiam; ergo ita eſt ſumma ſinuum ad eorum differentiam, ſicut tangens ſemiſummæ angulorum ad tangentem ſemidifferentiæ eorum.

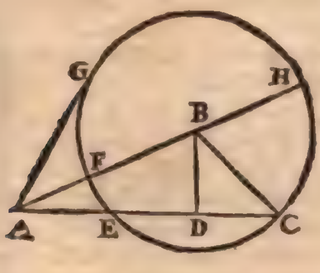
COROLLARIUM II.

Hac propoſitione ſolvimus triangulum in quo dantur duo latera AB, AC & angulus BAC ab ipſis comprehenſus. Fit enim ſumma laterum; tum minus à majori ſubtrahitur, ut habeatur differentia DC; tum ſubtrahitur angulus BAC, à duobus rectis, ſeu à 180 gradibus, habeturque ſumma angulorum ad baſin, fitque ſemiſumma. Exinde fit regula proportionum, ut ſumma laterum, ad differentiam eorum, ita tangens ſemiſummæ angulorum ad quartum, qui erit tangens ſemidifferentiæ angulorum; hæc angulorum ſemidifferentia addita ſemiſummæ dat majorem angulum, ſubtracta à ſemiſumma dat minorem.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si in triangulo ducatur ad maximum latus perpendicularis ab angulo oppoſito, ita erit majus latus ad ſummam reliquorum ut differentia eorundem ad differentiam ſegmentorum, ejuſdem maximi lateris.



Ducatur in triangulo ABC perpendicularis BD ad latus maximum AC, ab angulo oppoſito B, ex puncto B ut centro, intervallo minimi lateris BC, circulus CEF; producaturque latus AB, in H; & ducatur AG tangens circulum. Eritque AH ſumma laterum AB, BC; & AF eorum differentia; cùm FB, BC, BH ſint æquales; erit item AE differentia inter AD, DC ſegmenta baſis, cum (*per 3. 3. Eucl.*) ED, DC ſint æquales: dico ita eſſe AC ad AH, ſicut AF ad AE.

Demonſtratio (*per 36.3.Eucl.*) quadratum AG, æquale eſt tam rectangulo AH, AF, quam rectangulo AC, AE; ergo rectangula ſunt æqualia inter ſe; quare ſi ita diſponantur AC, AH, AF, AE, cùm rectangulum ſub extremis æquetur rectangulo ſub mediis, erit (*per 16. 6. Euclidis*) ut AC ad AH, ita AF ad AE; quod erat demonſtrandum.

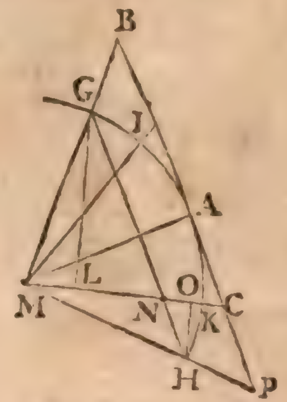
COROLLARIUM.

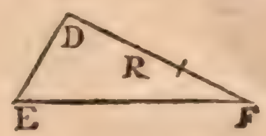
Hæc propoſitio eſt uſui ad cognoſcendos angulos trianguli cujus dantur tria latera ſine ullo angulo; tunc enim demiſſa perpendiculari BD, dividitur in duo triangula; & cùm ſupponantur dari omnia latera, datur latus AC, datur ſumma AH; & ſubtracto BC ex AB, reſtat AF; tum facta regula aurea, cum terminis AC, AH, AF, datur AE; ergo & EC; quo diviſo bifariam in D, reſtat DC; quare in triangulo rectangulo BDC, ſi fiat ut latus BC ad DC; ita ſinus totus ad alium, habebitur (*per 1. hujus*) angulus DBC, cujus complementum eſt angulus C.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Si tangentes duorum arcuum ſinubus aliorum arcuum, aut angulorum proportionales fuerint, ſinus ſummæ & ſinus differentiæ primorum arcuum, tangentibus ſemiſummæ, & ſemidifferentiæ ſecundorum proportionales erunt.





Sint tangentes AB, AC arcuum AG, AK proportionales ſinubus angulorum E, & F trianguli DEF. Sit arcus AH, æqualis arcui AG, & arcus AI, æqualis arcui AK, erit arcus KH, differentia inter arcum AH, ſeu AG, & AK, & GAK ſumma arcuum AG, AK, ducantur ad radium MC, perpendiculares GL, HO, quæ erunt ſinus eorum arcuum, dico ita eſſe GL ſinum ſummæ GAK ad HO ſinum differentiæ eorum, ut tangens ſemiſummæ angulorum E & F, ad ſinum ſemidifferentiæ eorum. Ducatur GH.

Demonſtratio. Supponitur ita eſſe AB ad AC ut ſinus anguli E ad ſinum anguli F, ſeu (*per 1. hujus*) ut latus DF ad DE; ergo componendo, & dividendo ita erit ſumma BC ad CP eorum differentiam, ut ſumma laterum ED, DF ad RF differentiam eorum, id eſt (*per 4. hujus*) ut tangens ſemiſummæ angulorum E & F ad ſinum ſemidifferentiæ eorum; ſed ut BC ad CP ita GN ad NH; (*per 3.6.Eucl.*) & quia rectangula triangula GNL, NOH, propter angulos ad verticem in O æquales, ſunt æquiangula, ut GN ad NH, ita eſt GL ad HO; ergo ita eſt GL ad HO, ut tangens ſemiſummæ angulorum E & F ad tangentem ſemidifferentiæ eorum; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

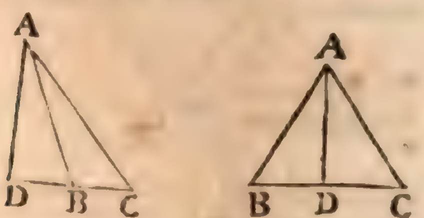
Cognitis lateribus DE, DF & angulo *D* ab ipſis comprehenſo, reliquos angulos invenimus hoc modo. Aſſumatur quæcumque tangens AB arcûs AG; fiatque ut DF ad DE, ita tangens AB ad

ad AC, dabiturque arcus AK; hi arcûs AG, AK addantur, & ſubtrahantur ab invicem; ſumanturque ſinus ſummæ, & differentiæ eorum, nempe GL, HO; fiatque ut GL ad HO, ita tangens ſemiſummæ angulorum E & F, quæ datur cognito angulo D; factâque regula trium dabitur tangens ſemidifferentiæ; quæ addita ſemiſummæ, dat angulum E, & ſubtracta ab eadem, dat angulum F.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Ut ſinus totus ad ſinum complementi alicujus anguli in triangulo, ita duplum rectangulum ſub lateribus talem angulum comprehendentibus, ad differentiam quadratorum eorum laterum, & quadrati lateris oppoſiti.



Sit primò angulus ABC acutus; dico ita eſſe ſinum totum ad ſinum complementi anguli B ut duplum rectangulum comprehenſum ſub AB, BC ad exceſſum quo quadrata AB, BC ſuperant quadratum AC; ille autem exceſſus ducta perpendiculari AD eſt duplum rectangulum ſub BD, BC, cum (*per* 13. 2.) quadratum AC, unà cum duplo rectangulo ſub BD, BC, æquale ſit quadratis AB, BC; BAD eſt complementum anguli B.

Demonſtratio. Ita eſt ſinus totus ad ſinum anguli A, ut AB ad BD; & (*per* 1. 6. *Eucl.*) ſumpta communi altitudine BC, ut rectangulum AB, BC ad rectangulum BD, BC; & ut duplum rectangulum ſub AB, BC ad duplum rectangulum ſub BD, BC; quod erat demonſtrandum.

Sit ſecundò ABC obtuſus; ducta perpendiculari AD; angulus DAB eſt complementum anguli acuti ABD; ergo & obtuſi ABC. Dico ita eſſe ſinum totum ad ſinum anguli DAB, ut duplum rectangulum ſub AB, BC ad duplum rectangulum ſub BC, DB; nempe exceſſum, quo quadratum AC ſuperat quadrata AB, BC, cum (*per* 12. 2. *Eucl.*) quadrata AB, BC; unà cum duplo rectangulo ſub BC, DB æqualia ſint quadrato AC.

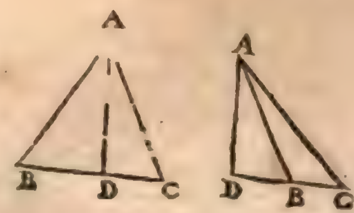
Demonſtratio. Ita eſt ſinus totus ad ſinum anguli DAB, ut AB ad DB, (*per primam hujus*) & ſumpta communi altitudine BC (*per* 1. 6.) ut rectangulum ſub AB, BC ad rectangulum ſub BD, BC; & ut duplum rectangulum ſub AB, BC ad duplex rectangulum ſub BC, BD; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

In triangulo ita eſt ſinus totus ad ſinum anguli, ut unum latus talem angulum comprehendens ad perpendicularem ductam ab angulo adjacente, ad aliud latus.

Proponatur triangulum ABC, dico ita eſſe ſinum totum ad ſinum anguli B, ut latus AB comprehendens talem angulum, ad perpendicularem AD, ductam ab angulo A, adjacente lateri AB, ad latus BC.



Demonſtratio. In triangulo ABD, rectangulo in D, ita eſt (*per* 1. *hujus.*) ſinus anguli D recti ſeu ſinus totus, ad ſinum anguli ABC, ut AB ad AD; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Ut ſinus totus ad ſinum anguli, ita rectangulum ſub lateribus angulum comprehendentibus, ad duplum trianguli. Nempe in hoc exemplo, ita erit ſinus totus ad ſinum anguli ABC, ut rectangulum ſub AB, BC ad duplam aream trianguli.

Demonſtratio. Ita eſt ſinus totus ad ſinum anguli ABC, ut AB ad AD (*per hanc*) & ſumpta communi altitudine BC, ut rectangulum ſub AB, BC ad rectangulum ſub AD, BC quod rectang. ſub AD, BC (*per* 41. 1. *Eucl.*) eſt duplum trianguli.

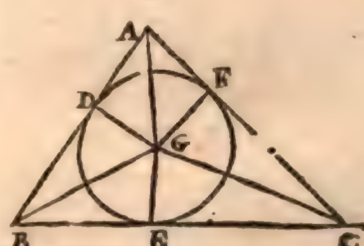
Quare ſi in triangulo cognoſcamus duo latera AB, BC, & angulum ABC, comprehenſam facilè aream trianguli habebimus. Fiat enim ut ſinus totus ad ſinum anguli ABC, ita rectangulum ſub AB, BC, quod habetur multiplicando AB, per BC, ad quartum; & exurget dupla trianguli area; cujus ſemiſſis erit trianguli area.

Logarithmice; adde logarithmum ſinus anguli ABC, & logarithmos laterum AB, BC, & ex ſumma ſubtrahe logarithmum ſinus totius, relinquetur logarithmus dupli trianguli.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

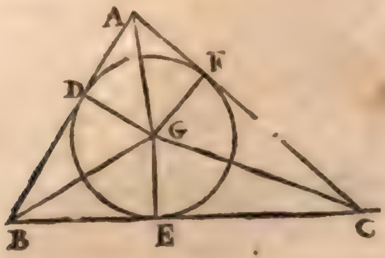
Ut ſinus totus ad tangentem ſemianguli verticalis; ita rectangulum, ſub ſemiſumma laterum & ſub exceſſu ſemiſummæ ſupra latus oppoſitum ad aream trianguli.



Triangulo BAC inſcribatur circulus DFE (*per* 4. 4.) eruntque tangentes AD, AF æquales; quia quadratum ex AG æquale eſt tam quadratis DG, AD, quam quadratis GF, AF, (*per* 47. 1.)

 ſunt

ſunt ergo æqualia DG, AD quadratis, AF, GF, & ablatis æqualibus, DG, GF, reſtant quadrata AD,



AF æqualia ; ita ſunt æqualia CF, CE; BD, BE; Eritque DAG, media pars anguli BAC. Item BC, & AD erit ſemiſumma laterum omnium; cum BE habeat BD ſibi æqualem, & EC habeat FC, ſicut AD habet AF ; item AD erit differentia inter ſemiſummam, & latus oppoſitum BC. Dico ergo ita eſſe ſinum totum ad tangentem ſemianguli BAC, ut rectangulum comprehenſum ſub ſemiſumma laterum & differentia AD ad Aream trianguli.

Demonſtratio. In triangulo ADG, rectangulo in D (*per 2. hujus*) ita erit AD ad DG ut ſinus totus ad tangentem anguli DAG. Sed ut AD ad DG, aſſumpta pro communi altitudine ſemiſummâ laterum, (*per 1. 6. Eucl.*) ita erit rectang. ſub AD & ſemiſumma ad rectangulum ſub DG & ſemiſumma, quod contendo æquale eſſe triangulo ABC; nã rectangulum comprehenſum ſub DG & AD (*per 41. 1.*) duplum eſt trianguli ADG, ſeu æquale triangulis æqualibus ADG, AGF, comprehenſum ſub DG, ſeu GE, BE, duplum eſt trianguli BGE, ſeu æquale triangulis BGE, BDG; denique comprehenſum ſub GE, EC æquale eſt triangulis EGC, CGF; ergo (*per 1. 1.*) comprehenſum ſub DG & ſemiſumma laterum æquale eſt triangulo. Ergo ita eſt ſinus totus ad tangentem ſemianguli BAC, ut rectangulum comprehenſum ſub ſemiſumma, & ſub differentia inter ſemiſummam, & baſin ad aream trianguli.

COROLLARIUM I.

Hac propoſitione datis lateribus habemus aream trianguli. Primo inveſtigamus angulum A, tum addimus latera ut habeamus ſummam, & ſemiſummam, ſubtrahimus baſin BC ex ſemiſumma, & habemus AD, tum facimus ut ſinus totus ad tangentem ſemianguli BAC, ita rectangulum ſub ſemiſumma, & ſub AD ad aream trianguli. Logarithmicè addimus logarithmos tangentis ſemianguli BAC, logarithmum, ſemiſummæ laterum, & logarithmum differentiæ baſis à ſemiſumma, & ſubtrahimus log. ſinus totius, reſtat logarithmus Areæ trianguli.

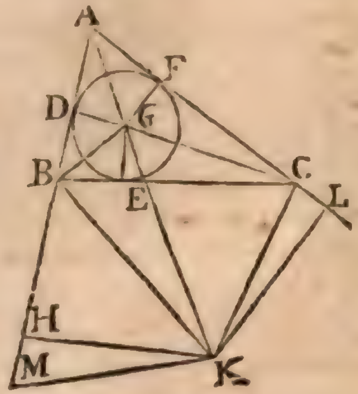
COROLLARIUM II.

Sicut AD eſt differentia lateris BC, & ſemiſummæ; DB, aut BE eſt differentia lateris AC & ſemiſummæ; nam AC, & BE, efficiunt ſemiſummam; pariter EC eſt differentia lateris AB, & ſemiſummæ, cum AB & EC ſummiſummam abſolvant. Vocentur hæ, differentiæ laterum, ſubintelligendo à ſemiſumma.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Area trianguli media proportionalis eſt inter rectangulum comprehenſum ſub ſemiſumma laterum, & ſub differentiâ unius, & rectangulum comprehenſum ſub differentiis aliorum laterum.



Sit triangulum ABC ut prius, dico aream trianguli, mediam proportionalem eſſe inter rectangulum comprehenſum ſub ſemiſumma, & ſub linea AD, differentiâ lateris BC & inter rectangulum comprehenſum ſub BE, EC differentiis aliorum laterum à ſemiſumma. Producatur AB in H, ſitque BH, differentiæ EC æqualis, ducatur HK perpendicularis ad AH, & conſequenter parallela lineæ DG, quæ ſicut DG concurrat cum AG producta in K, ducaturque BK.

Primo in quadrilatero BDGE cum anguli ſint quatuor rectis æquales, & duo D & E ſint recti, reliqui duo DGE, DBE ſunt duobus rectis æquales, ſicut DBE, EBH, ergo ablato communi DBE, anguli DBE, anguli DGE æquales.

Secundo intendo probare angulum *HBC* bifariam dividi lineâ BK, ſicut DGE *bifariam diviſus* eſt. Abſcindantur CL, MH æquales lineæ BE; eruntque AL, AH ſingulæ æquales ſemiſummæ laterum, eruntque (*per 4. 1. Eucl.*) triangula AHK, AKL omnino æqualia, cum angulus A ſit diviſus bifariam; ergo & angulus L rectus erit, ſicut H rectus eſt, & lineæ HK, KL, æquales erunt. Item cum lineæ HM, CL ſint æquales, erunt (*per 4. 1.*) baſes KL, KC æquales. Denique in triangulis BCK, BMK, cum ſingula latera ſint æqualia, erunt anguli MBK, KBC æquales (*per 4. 1.*) ergo cum totales anguli MBC, DGE eſſent æquales, anguli HBK, BGE æquales, & triangula BGE, BHK ſimilia.

Demonſtratio. (*Per præcedentem*) ita eſt rectang. ſub AD, & ſemiſumma, ad aream trianguli ut AD ad DG, ſeu (*per 4.6.*) ut ſemiſumma AH ad HK; & ſumptâ eadem altitudine EG, ut rectangulum ſub ſemiſumma, & ſub EG, ſeu area trianguli, ad rectangulum ſub HK, EG: ſed cum triangula BEG, BHK ſint ſimilia, & ita ſit BH ad HK, ſicut EG ad BE, rectangulum ſub mediis HK, EG æquabitur rectangulo ſub extremis BH, ſeu EC & ſub BE; ergo ita eſt rectangulum ſub AD, & ſemiſumma ad aream trianguli, ut area trianguli ad rectangulum ſub BE, EC; quod erat demonſtrandum.

COROL

COROLLARIUM.

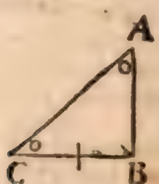
Datis omnibus trianguli lateribus datur area, ſi enim omnia latera addas, faciaſque ſummam, & ſemiſummam, à qua ſingillatim ſingula latera ſubtrahas ut habeas ſingulorum differentiam, tum efficias rectangulum ſub ſemiſumma & una differentia,& aliud rectangulum, ſub aliis differentiis, area trianguli media erit proportionalis.Hoc eſt ſi multiplices hujuſmodi rectangula ad invicem, & producti extrahas radicem quadratam, habebis aream trianguli.

Quamvis praxes in ſingulis Theorematibus indicaverim,ut tamen facilius inveniantur, eas ſequentibus problematibus ordine referam, & in rectangulis triangulis unicam adhibebo analogiam, in obliquangulis duplicem. Id quod quæritur in figura notabo hoc charactere°, partes verò datas hac nota—. Latera angulum rectum comprehendentia vocamus crura, oppoſitum angulo recto, baſin.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Datis cruribus trianguli rectanguli angulos invenire.



In triangulo A B C rectangulo in B, data ſint crura AB 606,BC 1124.quæritur angulus C aut A.

Fiat ut latus BC 1124
ad latus AB 606,
Ita ſinus totus 1000000
ad quartum 5391459, tangentem anguli C gr.28.20,cujus cōplementū 61,40 erit angulus A.

Demonſtr. (*Per 1.hujus*) in triangulis rectangulis, ita eſt unum crus ut BC, ad aliud AB, ut ſinus totus ad tangentem anguli C; ergo ſi ſecundum per tertium multiplices, & productum dividas per primum, habebis tangentem anguli C, quæ quæſita in tabula tangentium dat è regione angulum quæſitum,& in alia pagina ejus complementum.

Logarithmicè ita operaberis. Addantur logarithmi ſecundi, & tertii, & ex ſumma ſubtrahe logarithmum primi, reſtabit logarithmus quæſiti.

2 Logarith. lateris AB 606. L. 2.7924726 } adde
3 Logarithmus ſinus totius 10.0000000 }
ſumma 12.7824726
1 Subtrahe lateris 1124. Log. 3.0507663
Reſtat tangentis c. Log. 9.7317063 ang.28.20.

PROPOSITIO XII.

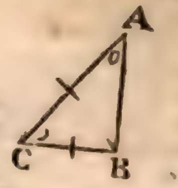
Problema.

Dato crure, & baſi trianguli rectanguli, invenire angulos.

Supponitur trianguli rectanguli ABC, præter angulum rectum B,cognita baſis AC,& crus BC, quæritur angulus A, aut C.

Fiat ut baſis AC
ad latus BC,
ita ſinus totus
ad ſinum anguli A.

Demonſtratio. (*Per primam hujus*) latera ſunt ſinubus angulorum oppoſitorum proportionalia,



ergo ut AC ad BC,ita ſinus anguli B recti, ſeu ſinus totus ad ſinum anguli oppoſiti A.

Logarithmicè.Adde logarithmos cruris BC, & ſinus totius, & à ſumma ſubtrahe logarithmum baſis AC, reſtabit logarithmus ſinus anguli A.

Per ſecantes.

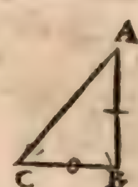
Fiat ut latus BC
ad baſin AC,
ita ſinus totus
ad ſecantem anguli adjacentis C.

Demonſtratur (*in ſecunda hujus.*)

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Dato uno crure,& angulo obliquo trianguli rectanguli, invenire crus alterum.



Detur crus AB, & angulus C trianguli ABC rectanguli, quæritur latus BC.

Dato angulo C datur, & angulus A, cum in triangulo rectangulo, unus angulus obliquus ſit alterius complementum, Fiat ergo

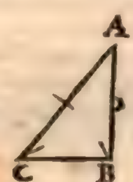
Ut ſinus anguli C
ad ſinum anguli A,
ita latus A B
ad latus BC.

Demonſtratio. (*Per 1.hujus*) latera ſunt proportionalia ſinubus angulorum oppoſitorum.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Dato angulo obliquo, & hypothenuſa trianguli rectanguli, invenire crus quodlibet.



Supponitur præter angulum rectum B,in triangulo ABC data baſis AC & angulus obliquus C, quæritur crus AB, primò cognito angulo C datur & ejus complementum A. Fiat ergo

Ut ſinus totus
ad ſinum anguli C.
ita baſis AC
ad latus AB.

Demonſtratio (*per 1.hujus.*)

Per ſecantes.

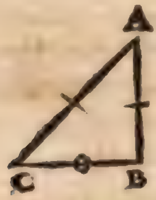
Fiat ut ſecans anguli C
ad tangentem ejuſdem,
ita baſis A C
ad latus A B.

Demonſtratio. (*Per 2.hujus*) nempè ſi BC fiat radius, AC evadit ſecans anguli C & AB tangens ejuſdem.

PROPOSITIO XV.

Problema.

In triangulo rectangulo, datâ baſi & uno crure, invenire aliud crus.



Detur trianguli rectanguli ABC baſis AC, & crus AB, quæritur aliud crus BC: Quæratur (*per 12.*) angulus C, & habebitur etiam angulus A, ejus complementum.

Tum fiat ut ſinus anguli C
ad ſinum anguli A,
ita latus A B
ad latus B C.

Alio modo.

Ex quadrato baſis AC, ſubtrahe quadratum lateris AB, reſtabit quadratum BC: ex quo ſi extrahas radicem quadratam, habebis latus BC.

Demonſtratur (*per 47.1.Eucl.*) Logarithmicè. Hypothenuſæ AC logarithmus dupletur, habebitur ejus quadratum, dupletur item logarithmus lateris AB, & habebis logarithmum quadrati ejus, & conſequenter quadratum, ſubtrahendum ex quadrato A B, reſtabit quadratum B C, cujus logarithmus ſi bifariam dividatur, fiet logarihtmus lateris BC.

Hæc operatio fundatur in modis extrahendi radicem quadratam ſuperiori libro traditis.

Alio modo.

Latus AB addatur hypothenuſæ A B, ut fiat ſumma, idem ab ea ſubtrahatur ut fiat differentia, multiplica ſummam per differentiam, exurget quadratum lateris BC, ex quo ſi radicem quadratam extrahas habebitur latus BC.

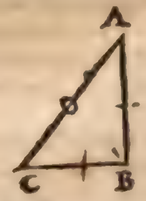
Demonſtratio. (*Per 3.hujus*) latus BC eſt medium proportionale inter ſummam hypothenuſæ & lateris AB, & inter eorum differentiam, ergo rectangulum ſub extremis, æquale eſt quadrato medii (*per 17.6.Eucl.*)

Logarithmicè. Addatur logarithmus ſummæ ex hypothenuſa & latere AB, ad logarithmum differentiæ eorum, fietque duplus logarithmus lateris BC, ſeu logarithmus quadrati ejus.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Dato angulo obliquo, & uno crure trianguli rectanguli; invenire hypothenuſam.



Supponitur trianguli rectanguli ABC cognitum latus AB & angulus A, quæritur baſis AC. Primò dato angulo A, datur ejus complementum C.

Fiat ut ſinus anguli C
ad ſinum totum, ſeu ſinum anguli recti B,
ita latus A B
ad baſin A C.

Demonſtr. (*Per 1. hujus*) latera ſunt ſinubus angulorum oppoſitorum proportionalia.

Alio modo.

Ut habeatur ſinus: Primo loco, ad vitandam diviſionem.

Fiat ut ſinus totus
ad ſecantem anguli A,
Ita latus A B
ad hypothenuſam AC.

Demonſtratio (*per 2.hujus*) ſatis patet.

Alio modo.

Fiat ut tangens anguli C
ad ſecantem ejuſdem.
ita latus A B
Ad hypothenuſam B C.

Demonſtratio (*in ejuſdem 2.*) continetur, nam aſſumpto pro radio crure B C, crus AB fit tangens anguli C, & baſis AC ejuſdem ſecans.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Datis cruribus trianguli rectanguli invenire hypothenuſam.

Vide figuram præcedentem.

Sint in triangulo rectangulo ABC, cognita crura AB, BC, quæritur hypothenuſa.

Primò (*per 11.*) quærantur anguli, & (*per 16.*) hypothenuſa.

Alio modo.

Fiant quadrata AB, BC, quæ addantur, & ex eorum ſumma extrahatur radix quadrata, hæc erit baſis AC.

Demonſtratio patet (*per 47.1.Eucl.*)

Per logarithmos.

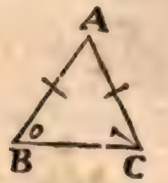
Singuli logarithmi crurum AB, BC duplentur, ut habeantur logarithmi quadratorum, & conſequenter quadrata, quæ addita dant quadratum hypothenuſæ, hujus logarithmum ſi bifariam dividas habebis logarihmum baſis AC.

PROPO

De Triangulis obliquangulis.

PROPOSITIO XVIII.

Datis in triangulo quocumque, duobus lateribus, & angulo uni eorum oppoſito; invenire angulum alteri oppoſitum, modò ſciatur utrum acutus, vel obtuſus ſit.



In triangulo ABC, ſupponuntur latera AB, AC, cognita unà cum angulo C, qui alterutri laterum, uti AB opponitur, quæriturque angulus B, oppoſitus alteri lateri AC.

Fiat ut latus AB, oppoſitum angulo dato C
Ad latus AC,
ita ſinus anguli C
ad ſinum anguli B.

Quia autem idem eſt ſinus anguli acuti, & obtuſi, reliqui nempe ad ſemicirculum, debet cognoſci an angulus B obtuſus ſit, vel acutus.

Demonſtratio. (*Per* 1. *hujus*)

COROLLARIUM.

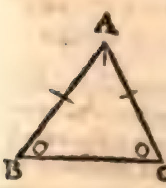
Cognito angulo B, cum jam cognoſcatur C, dabitur angulus A, nempe reliquus ad duos rectos, & conſequenter latus BC.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Cognitis duobus trianguli lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo, reliquos angulos cognoſcere.

Sit triangulum ABC, cujus cognoſcantur latera AB, AC, & angulus A ab ipſis comprehenſus, quæruntur anguli B & C.



Primò datur ſumma angulorum B & C, ſi ſubtrahas angulum A ex 180 gradibus: datur igitur & ſemiſumma angulorum B & C; addantur latera ut fiat eorum ſumma; minimum à majori ſubtrahatur ut habeatur differentia.

Fiat ut ſumma laterum AB, AC
ad eorum differentiam,
ita tangens ſemiſummæ angulorum B & C
Ad tangentem ſemidifferentiæ eorum. Hæc ſemidifferentia addita ſemiſummæ dat angulum majorem, & detracta ab eadem dat minorem.

Demonſtratio patet (*per* 4. *hujus*) in qua habetur ita eſſe ſummam laterum ad eorumdem differentiam, ut tangens ſemiſummæ angulorum ad eorum ſemidifferentiam; habentur autem tres primi termini, ergo & quartus.

Alio modo.

Sumatur quæcumque tangens quæ primò occurret, dicaturque tangens D.

Fiatque, latus AB,
Ad latus AC,
ita tangens D
ad tangentem E.

Arcus reſpondentes hujuſmodi tangentibus addantur, & minor à majori ſubtrahatur.

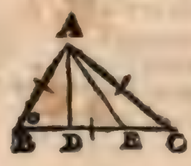
Fiatque ut ſinus ſummæ iſtorum arcuum.
Ad ſinum differentiæ eorum,
ita tangens ſemiſummæ angulorum B & C
ad tangentem ſemidifferentiæ eorum.

Demonſtr. Cum tangentes D & E ſint proportionales lateribus AB, AC, & latera (*per primam hujus*) ſint ſinubus angulorum B & C proportionalia, erunt & tangentes D & E, iiſdem ſinubus proportionales; quare (*per* 6. *hujus*) ſinus ſummæ arcuum reſpondentium tangentibus, ad ſinum differentiæ eorum, erit ut tangens ſemiſummæ angulorum B & C ad tangentem ſemidifferentiæ eorum.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Cognitis tribus trianguli lateribus cognoſcere angulos.



Sint trianguli ABC cognita ſingula latera, quæritur aliquis angulus. Ad majus latus BCA, ex angulo oppoſito A, cadat perpendicularis AD, dividens triangulum in duo triangula rectangula.

Fiatque ut baſis BC.
ad ſummam laterum AB, AC,
ita differentia eorumdem laterum AB, AC,
Ad differentiam ſegmentorum baſis nempe ad EC, quâ ſubtracta ex BC, reſtat BE; quâ diviſa bifariam datur BD, & DE, & conſequenter DC.

Si velis angulum B,
Fiat ut latus AB
ad ſegmentum BD,
ita ſinus totus
ad ſinum anguli BAD complementi ipſius B.

Hæc ultima analogia demonſtratur (*per* 1. *hujus.*)

Prima Analogia Demonſtratur (*per* 5. *hujus*) in qua oſtendi, ita eſſe majus latus ad ſummam reliquorum, ut differentia eorum laterum inter ſe, ad differentiam ſegmentorum baſis.

Alio modo.

Dentur tria latera trianguli ABC quæraturque angulus B; fiat rectangulum ſub lateribus angulum quæſitum comprehendentibus, voceturque rectangulum ABC; fiat item eorumdem laterum AB, BC quadratorum ſumma, quæ auferatur ex quadrato AC, ſi fieri poteſt, vel quadratum AC ex ea ſumma; ſi ſumma quadratorum major eſt quadrato AC angulus B acutus erit, ſi minor obtuſus; facta ſubtractione habebitur differentia.

Fiat ut duplex rectangulum ABC
ad differentiam inter quadrata laterum, & quadratum baſis,

ita ſinus totus
ad ſinum complementi anguli B
Demonſtratio eſt ipſa propoſitio 7.
Logarithmicè.

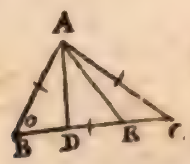
Adde logarithmum differentiæ quæ eſt inter quadrata laterum, & quadratum baſis, logarithmo ſinus totius, & ab ea ſumma, ſubtrahe logarithmum lateris AB, item logarithmum lateris BC & logarithmum binarii reſtabit logarithmus, ſinûs complementi anguli B.

Aliter.

Alia methodus procedit & inquirit aream trianguli hoc modo & per aream trianguli inveſtigat angulum.

Proponatur triangulum A B C, cujus dantur omnia latera, quæraturque angulus A. Addantur omnia latera fiatque ſumma & ſemiſumma; ab hac ſemiſumma ſubtrahe latus BC oppoſitum angulo A, ut habeatur eius differentia; fiatque idem circa quodlibet latus, fiat rectangulum ſub ſemiſumma, & ſub differentia lateris BC, fiat item aliud rectangulum ſub aliis differentiis; multiplica hujuſmodi rectangula inter ſe; & producti extrahe radicem quadratam, hæc erit area trianguli,

Fiat ergo ut rectangulum ſub ſemiſumma & differentia lateris BC,
Ad aream trianguli;
ita ſinus totus
Ad tangentem ſemianguli A.
Prima operatio demonſtratur (*per* 10. *hujus*)



ſecunda demonſtratur (*per* 9.) Inventâ area trianguli facile invenitur angulus A, fiat ut rectangulum ſub AB, AC, ad duplam aream trianguli ita ſinus totus ad ſinum anguli A, (*per coroll.*) propoſitionis octavæ hujus.

Praxis logarithmica.

Adde { Logarithmum ſemiſummæ,
Logarithmum differentiæ lateris BC à ſemiſumma,
Logarithmum differentiæ lateris AB à ſemiſumma,
Logarithmum differentiæ lateris AC à ſemiſumma. }

Hujus ſummæ dimidium eſt logarithmus Areæ trianguli.

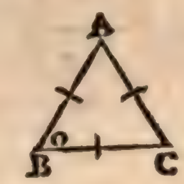
Tum Adde { Hunc logarithmum areæ,
Et logarithmum ſinus totius;
E quorum ſumma ſubtrahes logarithmum ſemiſummæ
Et logarithmum differentiæ lateris B C.
Reſtabit logarithmus tangentis ſemianguli A. }

Aliter.

Ulac hanc tradit praxin ut addantur omnia latera, fiatque eorum ſumma & ſemiſumma; à qua ſingillatim latera angulum quæſitum comprehendentia ſubtrahantur, habeaturque ſingulorum differentia. Tum fiat;

Ut latus AB
Ad differentiam lateris AB,
Ita differentia lateris BC
Ad quartum,
Item ut latus BC
Ad ſinum totum,
Ita quartus numerus prius inventus,
Ad ſeptimum.

Hic ſeptimus numerus multiplicetur per ſinum totum, hujus producti radix quadrata erit ſinus ſemiſſis Anguli A.



Vel faciliùs Adde logarithmum ſinus totius logarithmo ſeptimi numeri, ſemiſſis ſummæ eſt logarithmus ſinus dimidii anguli A.

Logarithmicè.

Proponatur angulus ABC quærendus.

Latera { AC 1277
AB 865
BC 632 }
Summa laterum 2774
Semiſumma 1387
Differentia later. AB. 522 log. 2. 7176705
Differentia later. BC. 755 log. 2. 8779479

Summa 5. 5956174
Subtrahe logar. AB 865. 2. 9370161

Logarithmus quarti cũ ſinu toto 12. 6586013
Subtrahe logar. lat. BC 632. 2. 8007171

Logarithm. ſeptimi cũ ſinu toto 19. 8578842
Semiſſis eſt log. ſinus grad. 58. 6 $\frac{1}{2}$ 9. 9289421
Hujus duplum gr. 116. 13′ eſt angulus quæſitus ABC.

Aliter.

Factâ ut priùs ſemiſummâ, ſubtractiſque ab ea lateribus AB, BC angulum quæſitum comprehendentibus, ut habeantur eorum differentiæ à ſemiſumma; ſubtrahe logarithmos prædictorum laterum à ſinu toto, ut habeantur eorum complementa Arithmetica; quæ addes logarithmis differentiarum inventarum; ſemiſſis ſummæ, erit logarithmus dimidii anguli quæſiti,

Ut in eodem triangulo ABC,
Latus AB 865. compl. Arithm. 7. 0629839
Latus BC 632. compl. Arithm 7. 1992819
Differentia AB 522 2. 7176705
Differentia BC 755 2. 8779469

Summa 19. 8578842

Semiſſis logarithmus ſemianguli B 9. 9289421 vel log. ſinus ſemianguli ABC 58. 6 $\frac{1}{2}$; ideoque totalis angulus erit graduum 116. 13.

Hæc ſecunda praxis cùm priori coincidit, in qua ſubtrahebantur logarithmi laterum; cùm ergo in ea bis ponatur ſinus totus, & ſubtrahantur latera AB, BC, & reliquæ partes addantur, poſſunt hi laterum

laterum logarithmi ſubtrahi à ſinu toto, & reliqua ſeu complementa Arithmetica addi

Demonſtrationem autem prioris praxis ſatis claram adhuc non inveni, quamvis ſimilem praxin in triangulis ſphæricis ſim infra allaturus in ſexto libro. Demonſtratio autem debet eſſe fundata in hoc Theoremate.

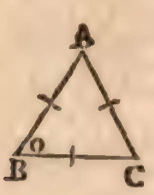
In omni triangulo ita eſt rectangulum ſub cruribus AB, BC
ad quadratum radii,
ut rectangulum, ſub differentiis eorumdem crurũ à ſemiſumma trium laterum,
ad quadratum ſinus ſemianguli ABC,

Si hæc propoſitio demonſtretur adducto lemmate ante propoſitionem 29 libri ſexti hujus poſito, facile demonſtrabitur hæc praxis.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

In omni triangulo rectilineo, ut rectangulum ſub ſemiſumma trium laterum & ſub differentia baſis ab ea ad quadratum radii, ita rectangulum ſub differentiis crurum ab eadem ſemiſumma ad quadratum tangentis ſemianguli verticalis.



Proponatur triangulum ABC, cujus quæritur angulus B; fiat ſumma trium laterum AB BC AC, & à ſemiſumma ſubtrahatur baſis AC habeaturque ejus differentia à ſemiſumma. Subtrahantur item ſingula crura AB BC, ut habeantur eorum differentiæ à ſemiſumma. Dico ita eſſe rectangulum ſub ſemiſumma, & ſub differentia baſis ab ea, ad quadratum radii, ut rectangulum ſub differentiis crurum ad quadratum tangentis ſemianguli B.

Demonſtratio. Ita eſt rectangulum ſub ſemiſumma & ſub differentia baſis AC ad aream trianguli, ut ſinus totus ad tangentem ſemianguli B (*per 9. hujus*) ſed (*per 10.*) area trianguli media proportionalis eſt, inter propoſitum rectangulum, & rectangulum ſub differentiis crurum; ergo rectangulum ſub ſemiſumma & differentia baſis; ad rectangulum ſub differentiis crurum, eſt in duplicata ratione ſinus totius ad tangentem ſemianguli verticalis; ſed quadratum ſinus totius ad quadratum tangentis, eſt in duplicata ratione ſinus totius ad tangentem; ergo ita eſt rectangulum ad rectangulum, ut quadratum ad quadratum, & alternando ita erit

Rectangulum ſub ſemiſumma & ſub differentia baſis
ad quadratum ſinus totius,
ut rectangulum ſub differentiis crurum
ad quadratum tangentis dimidii anguli quæſiti.

COROLLARIUM.

Datis tribus trianguli lateribus ita logarithmicè habebimus angulum B.

Addе { Logarithmum ſinus totius duplicatum,
Item logarithmos differentiarum crurum; & ab ea ſumma
Subtrahe logarithmum ſemiſummæ, & logarithmum differentiæ baſis,

Reſtabit logarithmus, qui diviſus bifariam, eſt logarithmus tangentis dimidii anguli B.

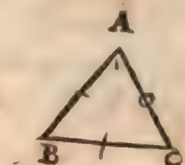
Vel aliter.

Fiat ut ſemiſumma trium laterum
ad differentiam lateris AB,
ita differentia lateris BC
ad quartum numerum.
Fiat item ut differentia baſis
ad ſinum totum
ita quartus numerus
ad ſeptimum, qui ſeptimus numerus multiplicatus per ſinum totum, dat quadratum tangentis, & hujus radix quadrata eſt tangens ſemianguli B. Hæc praxis demonſtratur in lemmate ante (*prop.* 29 6. *libri hujus.*)

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Datis duobus lateribus, & angulo uni eorum oppoſito, invenire aliud latus.



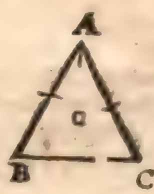
In triangulo ABC ſupponuntur cognita latera AB, BC cum A; quæritur latus AC; debet primò quæri angulus C hoc modo,
Ut latus BC
ad latus AB,
ita ſinus anguli A
ad ſinum anguli C.
Ex quo cognoſcitur angulus B.
Fiat ut ſinus anguli A
ad ſinum anguli B,
ita latus BC
ad latus AC.

De area trianguli.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

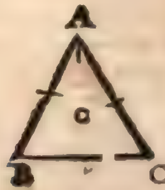
Datis duobus trianguli lateribus cum angulo ab ipſis comprehenſo; invenire aream trianguli.



Trianguli ABC cognoſcantur latera AB, AC,

 cum

cum angulo A ab ipſis cmoprehenſo, quæriturque area trianguli.



Fiat ut ſinus totus
ad ſinum anguli A,
ita rectangulum ſub AB, AC
ad duplum trianguli.

Demonſtratio eſt in corollario *propoſ.* 8. *hujus.*

Logarithmicè.

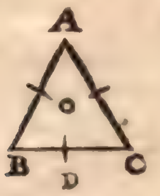
Adde { Logarithmum ſinus anguli A,
Logarithmum lateris A B,
Logarithmum lateris A C. }

Ex eorum ſumma ſubtrahatur logarithmus ſinus totius, reſtabit logarithmus dupli areæ trianguli. Datur & alia praxis in ſequenti propoſitione.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Cognitis tribus trianguli lateribus, Aream invenire.



Sint trianguli ABC cognita omnia latera quæritur ejus area.

Primò quæro (*per* 20.) angulum A, non tamen per eam praxin, quæ ſupponat datam aream trianguli; tum fiat

Ut ſinus totus
ad tangentem ſemianguli A,
ita rectangulum comprehenſum ſub ſemiſumma laterum, & differentia lateris BC
ad aream trianguli.

Hæc demonſtratur *in* 9. *hujus.*

Aliter invento angulo B.

Fiat ut ſinus totus
ad ſinum anguli B
ita latus AB
ad perpendicularem AD, quæ perpendicularis AD multiplicata per dimidium lateris BC exhibet aream trianguli (*per* 41.1. *Eucl.*)

Demonſtratio analogiæ eſt *prop.* 8. *hujus.*

Alio modo ſine inventione angulorum.

Addantur ſimul omnia latera, fiatque ſumma, & à ſemiſumma ſubtrahantur ſingula latera, ut habeantur eorum differentiæ.

Rectangulum comprehenſum ſub ſemiſumma, & una differentia multiplica per rectangulum comprehenſum ſub aliis differentiis: hujus producti radix quadrata eſt area trianguli.

Demonſtratio eſt *prop.* 11. in qua dicitur area trianguli eſſe media proportionalis inter prædicta rectangula; ergo ſi ea in numeris exhibeantur, ſicut & area (*per* 17. 6.) productum ex multiplicatione extremorum æquale eſt quadrato medii.

Praxis logarithmica.

Adde { Logarithmum ſemiſummæ
Logarithmum primæ differentiæ
Logarithmum tertiæ differentiæ
Logarithmum quartæ differentiæ. }

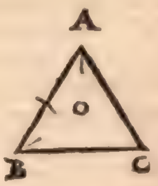
Semiſſis ſummæ eſt logarithmus areæ trianguli.

Demonſtratio Addendo logarithmum ſemiſummæ, & unius differentiæ, fit logarithmus rectanguli comprehenſi ſub ſemiſumma, & tali differentia; addendo logarithmos aliarum differentiarum fit logarithmus rectanguli ſub illis comprehenſi; addendo hujuſmodi logarithmos fit logarithmus producti ex multiplicatione horum rectangulorum, quod productum æquale eſt quadrato areæ trianguli, (in numeris loquor.) Denique ſi quadrati logarithmus biſecetur, habetur radix eius quadrata.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Datis trianguli duobus angulis, & uno latere; eius Aream invenire.



In triangulo ABC cognoſcuntur anguli A & B, & latus AB, ita invenietur eius area.

Primò datis angulis A & B, datur & angulus C, cum trianguli omnes anguli æquales ſint duobus rectis. Quæratur latus BC,

Fiatque ut ſinus anguli C
ad ſinum anguli A,
ita latus A B
ad latus BC; quo cognito,

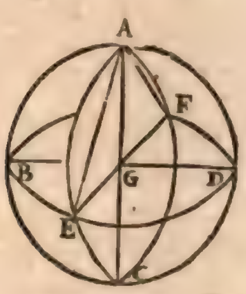
Fiat ut ſinus totus
ad ſinum anguli B,
ita rectangulum ſub A B, B C
ad duplum trianguli. Quære alios modos in propoſitione 23.

TRIGONOMETRIÆ LIBER QVARTVS,

Iſagogicus ad ſolvenda triangula ſphærica.

DEFINITIO UNICA.

Angulus duorum circulorum in ſphæra eſt angulus quem plana eorum comprehendunt.



Sint duo circuli in ſphæra ABCD, AECF, ſit planorum communis ſectio AC, ad quam ex communi puncto G in ſingulis planis excitentur perpendiculares BG, EG, comprehendentes angulum BGE, is erit angulus inclinationis planorum, ſeu angulus BAE quem duo circuli præcipuè maximi ABCD, AECF in puncto A comprehendũt; hujus anguli menſura eſt arcus BE, maximi circuli BEDF, ex polo A ad intervallum quadrantis deſcripti, cujus nempe centrum eſt in axe, AC, immò eſt ipſum centrum G; pariter anguli ad verticem oppoſiti FAD arcus FD eſt menſura; & cum anguli BGE, FGD ad verticem ſint æquales, erunt & arcus BE, FD æquales; quare cum angulus perpendicularium EG, BG, nempe BGE æqualis ſit oppoſito ſibi ad verticem angulo FGD, notum eſt per ſe, dum duo circuli maximi ſe ſecant verbi gratia ABCF, AECF in puncto A fieri angulos BAE, FAD oppoſitos ad verticem æquales.

Item cum anguli BGE, EGD ſint æquales duobus rectis, erunt & anguli BAE, EAD duobus rectis æquales: cum igitur maximus circulus alium ſecat; & angulos ad verticem oppoſitos æquales invicem efficit; & duos vicinos hinc inde æquales duobus rectis; & circa unum punctum in ſuperficie ſphæræ aſſumptum angulis omnes ſimul ſumptis, quatuor tantum rectis æquales erunt.

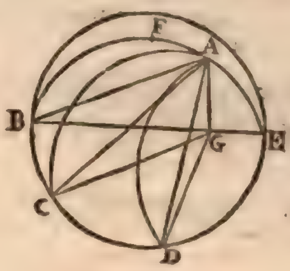
Item cum arcus BE, non tantum ſit menſura anguli BAE, ſed etiam anguli BCE, quoties duo circuli maximi ſe ſecant, erunt anguli ſemicirculo oppoſiti æquales, nempe BAE, BCE.

Suppono autem libros Theodoſii, ne ea repetere cogar, quæ in iis clare demonſtrata continentur, præcipuè quod circulus maximus per alterius polos tranſiens, cum eo angulos rectos efficiat. Agimus autem hic de triangulis ſphæricis, quæ ab arcubus maximorum circulorum in ſuperficie ſphærica efformantur.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Si ex puncto quod circuli polus non ſit (ſive circulus ille ſit maximus ſive non) plurimi cadant arcus maximorum circulorum in eius circumferentiam, maximus eſt qui per polum tranſit, & reliquus minimus: maximo viciniores majores ſunt: facientque ex parte maximi cum priori circulo angulum obtuſum.



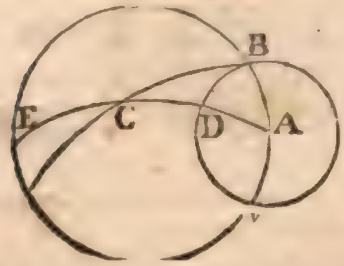
Punctum A in ſuperficie ſphæræ aſſumptum, non ſit polus circuli BCDE, ducanturque à puncto A plurimi arcus maximorum circulorum; nempe AFB per polum F tranſiens; AC; AD; AE; dico arcum AFB eſſe maximum; AE, minimum; AC, minorem quam AFB; & majorem quam AD; item angulos ACB, ADB obtuſos eſſe. Primo cum arcus AFB tranſeat per polum circuli BCDE, illum perpendiculariter, & bifariàm dividet (*per 15. 1. Theod.*) ergo EGB communis ſectio diameter erit, & ſemicirculus EAB, perpendiculariter inſiſtet circulo BCD, & cum F ſit polus, erit arcus AE minor ſemiſſe ſemicirculi EAB quare (*per lemma ad prop. 17. 2. Theod.*) linea AB maxima erit, AE minima, AC major quam AD; ergo & arcus AFB maximus erit, AE minimus, AC major quam AD, cum ſint arcus æqualium circulorum, id eſt maximorum.

Item intelligatur duci ex polo F, maximus circulus FD, qui ductus non eſt in figura, eſſet angulus FDC rectus (*per 15. 1. Theod.*) ergo angulus ADC major recto nempe major ſua parte, ergo obtuſus, & conſequenter angulus ADE acutus; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Duo quælibet trianguli ſpherici latera, reliquo ſunt majora.



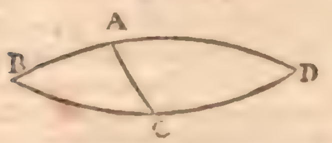
Ponatur triangulum ſphæricum ABC, conſtans arcubus trium maximorum circulorum, dico duo quælibet AB, BC reliquo AC eſſe majora. Ex pũcto A ut polo deſcribatur circulus BD intervallo AB.

Demonſtratio. Cumlatus CA (*per precedentem*) minus ſit ſemicirculo, punctum C, non erit alius polus circuli BD polus enim diſtat à polo ſpatio ſemicirculi *ex ſphæricis* Theodoſii; ergo arcus CE tranſiens per alium polum circuli BDV erit maximus: CD, minor quam CB; (*per præcedentem*) & additis utrinque æqualibus arcubus AB, AD, erunt arcus BC, BA, ſimul majores arcubus, AD, DC, ſeu majores toto arcu AC; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Tria ſphærici trianguli latera, circulo ſunt minora.



Sit triangulum ſphæricum ABC, dico tria eius latera ſimul ſumpta integro circulo eſſe minora, Producantur BA, BC donec rurſus concurrant in D.

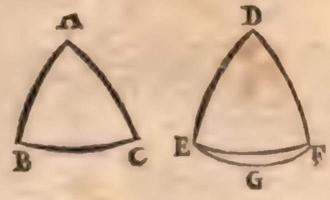
Demonſtratio arcus BAD, BCD ſunt ſemicirculi, cùm (*per 11. 1. Theod.*) circuli maximi ſe bifariam ſecent: ſed arcus AD, CD majores ſunt arcu AC (*per præcedentem*), ergo ſi iis utrinque addas AB, CB, fient tria latera AC, AB, BC ſimul, minora ſemicirculis BAD, BCD; ergo tria latera AB, AC, BC minora ſunt circulo.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si duo triangula ſphærica, habeant duo latera ſingillatim æqualia, & angulos iis comprehenſos æquales; baſes quoque & reliquos angulos ſingillatim æquales habebunt.

Sint duo triangula ſphærica ABC, DEF, quorum latera AB, DE; AC, DF, ſint æqualia, & pariter anguli A & D æquales, dico & baſin baſi æqualem eſſe, cæteroſque angulos.

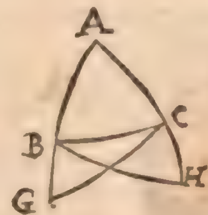


Demonſtr. Si Arcus ED intelligatur ſuperponi arcui AB, congruent cum ſint æquales ſed tunc arcus DF cum arcu AC etiam congruet, alioquin angulus angulo A, aut major aut minor eſſet, & cum arcus DF arcui AC æqualis ſit, punctum F coincidet cum puncto C; ergo tunc baſis EF congruet cum baſi BC; neque enim convenire poteſt in duobus tantum punctis, ut vides in EGF, quia in tali caſu, EF & EGF eſſent ſemicirculi, cũ maximi circuli ſe bifariã ſecent. & additis arcubus DE, EF baſi EF, majoribus, tria trianguli ſphærici latera eſſent majora ſemicirculo (contra præcedentem,) ergo baſes congruent, & æquales erunt, ſicut & anguli ad baſin; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

In triangulis ſphæricis Iſoſcelibus, Anguli ſupra & infra baſin æquales ſunt.



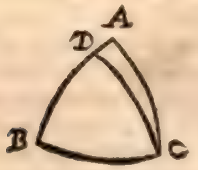
Triangulum ſphæricum ABC ſupponitur Iſoſceles, nempe latera AB, AC ſunt æqualia: dico angulos ſupra baſin ABC, ACB æquales eſſe; item productis lateribus AB, AC in G & H, angulos GBC, HCB æquales eſſe. Abſcindantur arcus æquales AG, AH, ducanturque per puncta B & H; ſicut & per C & G, arcus maximorum circulorum BH, GC (*per 20. 1. Theod.*)

Demonſtratio. Primò triangula ABH, ACH, habentia angulum A communem, & latera AB, AC; AG, AH æqualia, ſunt omni modo æqualia (*per 4.*) habentque baſes BH, CG, ſicut & angulos ABH, ACG, item H & G æquales. Item triangula GBC, BCH, habent latera BH GC BG, CH, æqualia & angulos G & H æquales, ergo (*per eandem*) anguli GBC, BCH infra baſin æquales erunt, & cum (*per def. hujus*) arcus in alium incidens angulos duobus rectis æquales efficiat, erunt anguli ABC, ACB ſupra baſin æquales; quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Triangulum ſphæricum cujus anguli ad baſin æquales ſunt, eſt Iſoſceles.



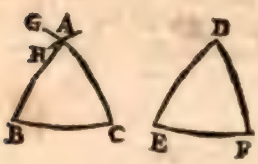
Sint in triangulo ſphærico ABC, anguli ad baſin, nempe ABC, ACB, æquales. Dico triangulum eſſe iſoſceles,ſeu latera AB,AC eſſe æqualia. Si enim AB eſſet majus, abſcindatur BD, æquale lateri AC, ducaturque arcus maximi circuli CD (*per* 20. 1. *Theod.*)

Demonſtratio triangula ABC, DCB habent latus BC commune, & latera AC, BD æqualia, & inſuper angulos B, & ACB æquales; ergo (*per* 4.) æqualia ſunt, totum & pars; quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si duo triangula ſphærica, ſingula latera ſingulis æqualia habuerint; angulos quoque æquales habebunt.



Duo triangula ABC, DEF, habeant ſingula latera, ſingulis æqualia, dico angulos quoque habere æquales. Ex puncto,B ut polo intervallo BA deſcribatur arcus GA, & ex C intervallo CA deſcribatur arcus AH.

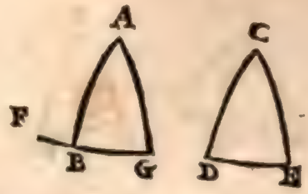
Demonſtratio. Intelligatur latus EF, ſuperponi lateri BC, congruet cum ſit æquale. Dico quod in tali caſu punctum D, cadet in A, neque enim poteſt cadere ultra aut citra arcum AG, alioquin arcus ED, major aut minor; neque etiam citra, aut ultra arcum AH; ergo cadet præcisè in interſectionem illorum arcuum, id eſt in punctum A; cum quilibet arcus ſit ſemicirculo minor (*per coroll.* 3.) congruent.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Ad datum punctum circuli maximi, conſtituere angulum dato æqualem.

Sit datum punctum A circuli maximi AB, in quo conſtituendus eſt angulus, æqualis angulo dato C.Ex A, & C ut polis,intervallo quadrantis



circuli, deſcribantur DE, FG,fiantque arcus DE, BG æquales, tum per A & G deſcribatur maximus circulus (*per* 20. 1. *Theod.*)

Demonſtratio. Arcus BG, DE ſunt menſuræ angulorum A & C; ſed illi ſunt æquales inter ſe; ergo anguli A, & C inter ſe æquales erunt.

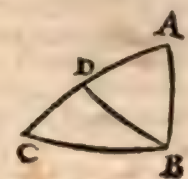
COROLLARIUM.

Poterant ex A & C ut polis deſcribi quilibet circuli. Quorum arcus (*per* 10. 2. *Theod.*) ſimiles eſſent arcubus DE, BG, atque adeò tam bene eſſent menſuræ angulorum A & C.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

In triangulo ſphærico major angulus, majori angulo ſubtenditur.



Sit in triangulo ſphærico ABC, angulus ABC, major angulo A: dico latus AC oppoſitum majori angulo majus eſſe. Fiat angulus ABD angulo A æqualis.

Demonſtratio. Cum anguli A & ABD ſint æquales; erunt (*per* 6. *huius*) latera AD, DB æqualia, & addito communi DC,erunt latera BD,DC, æqualia lateri AC, ſed latera BD, DC ſunt majora latere BC (*per* 3.) ergo latus AC, majus eſt latere BC.Converſa ita demonſtratur.Poſito latere AC majore quam BC, dico angulum ABC majorem eſſe, quàm A. Si enim eſſet æqualis, latera eſſent æqualia, ſi A major eſſet quam ABC,latus BC majus eſſet quam AC; contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO X.

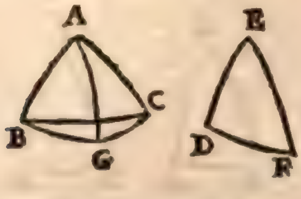
Theorema.

Si triangulum duo latera, ſingula ſingulis æqualia habeat lateribus alterius, angulum vero iis contentum majorem: baſin quoque baſi majorem habebit. Et viciſſim ſi baſin baſi maiorem habeat, angulum quoque maiorem habebit.

Duo triangula ſphærica ABC, EDF habeant latera

Digitized by

latera AB, DE, AC, EF æqualia; ſitque angulus BAC major angulo E; dico baſin BC, majorem



eſſe baſi DF. Fiat enim angulus BAG, æqualis angulo E, & latus AG, æqualis angulo EF; ducanturque arcus BG, GC.

Demonſtratio. In triangulis ABG, DEF, baſes BG, DF æquales erunt (*per 4. huius*) ruſus cum latera AG, AC ſint æqualia, utpote æqualia lateri EF, erunt anguli AGC, ACG æquales, ſed angulus BGC, major eſt angulo AGC, & angulus BCG, minor angulo ACG; ergo angulus BGC major eſt angulo BCG; ergo (*per præcedentem*) baſis BC major eſt, quam BG, ſeu DF.

Converſa ita demonſtratur. Supponatur baſis BC major quam DF, dico angulum BAC majorem eſſe angulo E; ſi enim non ſit major, erit minor, aut æqualis; ſi primum, baſis BC minor eſſet baſi DF; ſi ſecundum, æqualis foret; utrumque contra ſuppoſitionem.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Si duo latera trianguli ſpharici ſint æqualia ſemicirculo, & baſis producatur: erit angulus externus interno æqualis, & anguli ſupra baſin, æquales duobus rectis; ſi ſint maiora externus interno maior erit, & anguli ſupra baſin minores duobus rectis; ſi ſint minora ſemicirculo, externus interno maior erit, & anguli ſupra baſin maiores duobus rectis.

Viciſſim ſi angulus externus interno, & oppoſito æqualis fuerit, aut anguli ſupra baſin æquales duobus rectis, latera duo æqualia erunt ſemicirculo. Si externus interno major ſit, & anguli ſupra baſin minores duobus rectis, latera maiora erunt ſemicirculo. Denique ſi externus interno minor fuerit, aut anguli ſupra baſin maiores duobus rectis, erunt latera minora ſemicirculo.



In triangulo ABC duo latera AB, AC ſint æqualia ſemicirculo. Dico producta baſi BC, uſque ad D, angulum externum ACD, æqualem eſſe interno oppoſito B. item angulos ACB, ABC æquales eſſe duobus rectis.

Demonſtratio. Arcus AB, AC æquales ſupponuntur ſemicirculo, ſed BAD eſt ſemicirculus cùm circuli maximi ſe bifariàm ſecent: ergo latera AC, AD ſunt æqualia; ergo (*per 5.*) anguli ACD, & D ſunt æquales; ſed anguli B & D ſunt æquales (*per defin. huius*) ergo angulus externus ACD, æqualis eſt angulo interno B; & cum anguli ACD, ACB æquales ſint duobus rectis, erunt B & ACD æquales duobus rectis.

Viciſſim ſi angulus ACD æqualis ſit angulo B, & conſequenter anguli B & ACB fuerint æquales duobus rectis, erunt anguli ACD, & D æquales, & (*per 6.*) latera AC, AD; ergo BA, AC æqualia erunt ſemicirculo.

Secundò, ſint AB, AC majora ſemicirculo, cùm BAD ſit ſemicirculus, erit latus AC majus quàm AD, & angulus D ſeu B major quàm externus ACD, angulus ergo externus minor erit, quam B; & cùm ACD, & ACB ſint æquales duobus rectis, erunt B & ACB majores duobus rectis.

Viciſſim ſi ACD minor ſit quam angulus B, ſeu anguli ſupra baſin majores ſint duobus rectis, erit angulus ACD minor quàm D; ergo latus AC major arcu AD, & cùm AD, AB componant ſemicirculum, erunt AB, AC majora ſemicirculo.

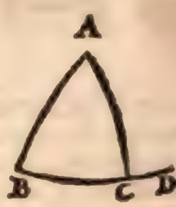
Tertiò, ſint BA, AC minora ſemicirculo, cùm AB, AD efficiant ſemicirculum, erit arcus AC minor quàm AD; ergo angulus ACD, externus, major erit angulo D, aut interno B, & cum ACD, ACB æquales ſint duobus rectis, erunt anguli B & ACB ſupra baſin minores duobus rectis.

Viciſſim ſi angulus ACD externus major ſit angulo B, atque adeo anguli B & ACB ſupra baſin minores ſint duobus rectis, erit angulus ACD, major quam D; ergo arcus AD, major erit quam AC, ergo latera AB, AC minora ſunt ſemicirculo; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

In triangulis ſphæricis Iſoſcelibus, ſi latera ſint quadrantes, anguli ad baſin recti erunt; ſi maiores quadrante, obtuſi; ſi minores, acuti; & viciſſim.



Crura AB, AC trianguli Iſoſcelis ABC ſint quadrantes, eruntque (*per 11.*) anguli ACB, ABC duobus rectis æquales, & cum ſint æquales (*per 5.*) recti erunt.

Viciſſim ſint anguli B, & ACB recti, latera AB, AC (*per 15.1. Theod.*) tranſeunt per polum circuli BC, qui cum ſint maximus; erunt arcus AB, AC quadrantes.

2 Latera AB, AC ſint majora quadrante, anguli B, & ACB majores erunt duobus rectis, & cum ſint æquales inter ſe (*per 5.*) uterque obtuſus erit.

E contra Anguli B & ACB ſint obtuſi; ambo ſimul majores erunt duobus rectis, quare externus ACD, minor erit quam B, ergo (*per 11.*) latera AB, AC, majora erunt ſemicirculo, & cum æqualia ſint, utrumque majus erit quadrante.

3 Latera AB, AC ſint minora quadrante, ea ſimul

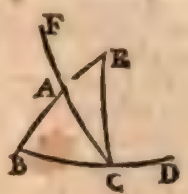
ſimul ſumpta minora erunt ſemicirculo ; ergo (*per* 11.) angulus externus ACD major erit interno B, & duo B,& ACB minores erunt duobus rectis, & cum ſint æquales ; uterque acutus erit.

Denique uterque B & ACB ſit acutus, erunt duo ſimul æquales duobus rectis ergo (*per* 11.) duo latera AB, AC minora erunt ſemicirculo, & cum (*per 6.*) æqualia ſint, utrumque minus erit quadrante; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Cuiuſcumque trianguli ſpharici, omnes anguli duobus rectis ſunt maiores, & ſex rectis minores.



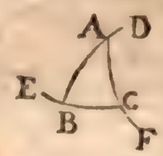
Proponatur quodcumque triangulum ſphæricum ABC ; dico omnes eius angulos ſimul ſumptos majores eſſe duobus rectis, producatur latus BC in D, angulus externus ACB, vel eſt major, vel minor, vel æqualis angulo externo B. Sit primò æqualis.

Demonſtr. Cùm angulus ACD æqualis ſit interno B, ergo (*per* 11.) anguli B. & ACB ad baſin ſunt duobus rectis æquales : ergo tres majores ſunt duobus rectis. Sit ſecundo ACD minor angulo B.

Demonſtratio. Addito communi A C B, erunt ACB, ABC majores quam ACB, ACD, qui tamen æquales ſunt duobus rectis ; ergo multò magis tres anguli majores erunt duobus rectis.

Denique angulus externus ACD major ſit angulo interno B, fiatque angulus ECD illi æqualis; producatur CA donec concurrat cum CE.

Demonſtratio cum angulus externus E C D, æqualis ſit interno B, latera B E, C E erunt (*per* 11.) æqualia ſemicirculo; ergo EC, AE. minora erunt ſemicirculo, & (*per eandem*) angulus externus F A E, aut illi oppoſitus ad verticem BAC, major erit quam ACE, & additis utrinque ECD, & B æqualibus ; & ACB communi, erunt tres anguli B, BAC, & BCA, majores angulis ECD, ACE, BCA, hoc eſt duobus rectis.

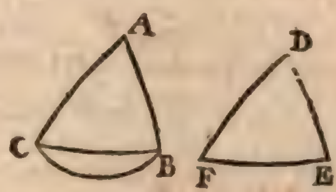


Secunda pars facilè demonſtratur, nempe tres angulos A,B C, minores eſſe 6 rectis. Producantur tria latera, anguli DAC, CAB (*per def. huius*) æquales ſunt duobus rectis, ſicut FCB, BCA, item EBA, ABC ; ergo tres BAC, ABC, ACB, minores ſunt ſex rectis ; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Si duo triangula ſpharica habeant duos angulos ſingillatim æquales cum angulo adiacente, illa erunt omnino æqualia.



Triangula ABC, DEF habeant angulos B, & E; C & F, & latera BC, EF his adjacentia, æqualia ; dico illa omni ſenſu æqualia, hoc eſt habere reliqua latera ſingillatim æqualia.

Intelligatur FE, ſuperponi lateri BC, cum ſint ſemicirculo minores, ſpatium non comprehendent, alioquin eſſent ambo arcus ſemicirculi, igitur in tali ſuperpoſitione BC, EF, quadrabunt; tunc autem latus ED quadrabit lateri AB, alioquin angulus E major, aut minor eſſet angulo B, contra ſuppoſitionem ; idem dicito de latere FD, ergo quadrabunt ſibi invicem triangula : ergo in omni ſenſu ſunt æqualia.

TRIGONOMETRIÆ

LIBER QVINTVS.

De Reſolutione triangulorum ſphæricorum rectangulorum.

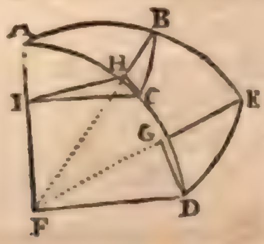
PROPOSITIO I.

Theorema.

In triangulis ſphæricis univerſis, ſinus laterum, ſunt ſinubus angulorum oppoſitorum proportionales.

Primò proponatur triangulum ſphæricum rectangulum ABC, cujus nempe angulus ABC rectus eſt ; dico ita eſſe ſinum anguli recti ABC ad ſinum hypothenuſæ AC, ut ſinus anguli BAC, ad ſinum lateris B C. Perficiantur quadrantes ABG, ACD, & ex A ut polo, intervallo quadrantis deſcribatur arcus DE & ex centro ſphæræ F ducantur lineæ FD, FB, FE, FA cum punctum A pertineat ad plana circulorum ABE, ACD, ſicut &

centrum ſphæræ, quod eſt in planis omnium circulorum maximorum, erit AF communis eorum ſectio, ſicut FB, communis ſectio planorum AB,

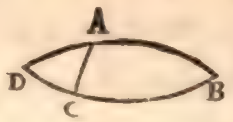


BC. Ducantur ad AF, FB, FE perpendiculares CH, CI, DG, quæ erunt ſinus arcuum AC, BC, DE, & cum arcus DE ſit menſura arcus CAB, erit DG ſinus ejuſdem anguli CAB. Item cum arcus AD ſit quadrans, erit FD ſinus totus, & angulus AFD rectus. Jungatur HI; probare debeo, ita eſſe ſinum anguli recti nempe FD ad DG, ſinum arcus DE, ſeu ſinus anguli CAB, ſicut CI ſinus hypothenuſæ AC ad CH ſinum lateris BC; quod probavero ſi oſtendero triangula FGD, ICH eſſe æquiangula.

Demonſtratio Cum linea FB ſit communis ſectio plani ABEF, & plani FBC ad ipſum recti, cum angulus ABC ſupponatur rectus, ſitque ducta CH ad ipſam perpendicularis, hæc (*per 3. def. 11. Eucl.*) erit recta ad planum ABEF, & (*per 4. def.*) ejuſdem angulus CHI rectus erit. Sicut angulus FGD rectus eſt. Item cum planum ABEF ſit rectum ad planum EDF, cum arcus EA tranſeat per polum arcus ED, ſitque DG perpendicularis ad FE, communem ſectionem, recta erit ad planum ABEF, ad quod recta oſtenſa eſt linea CH; ergo (*per 6. 11. Eucl.*) lineæ DG, CH ſunt parallelæ, ſed parallelæ etiam ſunt IC, FD cum ſint perpendiculares ad eandem FA ergo (*per 10. 11. Eucl.*) anguli FDG, ICH æquales ſunt, & cum præterea anguli DGF, CHI ſint oſtenſi æquales triangula, æquiangula erunt: ergo (*per 3. 6.*) ita erit FD ſinus totus, ſeu anguli recti, ad DG ſinum anguli CAB, ut IC, ſinus lateris AC, ad CH ſinum lateris BC, quod erat demonſtrandum.

Si id probandum de angulo ACB, & latere AB, aliter exhibenda eſſet figura.

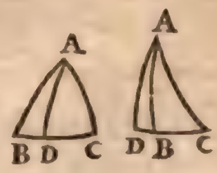
Hæc demonſtratio procedit de angulo rectangulo, cujus angulus de quo agitur acutus eſt. Eandem oſtendo in triangulo rectangulo habente unum angulum obtuſum. Proponatur ergo triangulum ABC rectangulum ABC, cujus angulus



ACB rectus ſit, & angulus BAC obtuſus, dico ita eſſe ſinum anguli ACB ad ſinum lateris oppoſiti AB, ſicut ſinus anguli BAC, ad ſinum lateris BC. Producantur latera BA, BC donec concurrant in D, fietque aliud triangulum DAC, in quo angulus ACD rectus erit, & angulus CAD acutus, cum CAB ſit obtuſus.

Demonſtratio. In triangulo CAD ita eſt (*per punctum præcedens*) ſinus anguli recti ACD ad ſinum lateris DA, ut ſinus anguli DAC, ad ſinum lateris DC, ſed anguli DAC, BAC, & latera DA, AB; DC, CB eundem ſinum habent, cum ſint ſibi invicem ſupplementa ad ſemicirculum: ergo ita eſt ſinus totus ad ſinum lateris AB, ut ſinus anguli CAB ad ſinum lateris oppoſiti DC; quod erat demonſtrandum.

Tertiò proponatur triangulum non rectangulum ABC; dico ita eſſe ſinum anguli ABC ad



ſinum lateris oppoſiti AC, ut ſinus anguli ACB; ad ſinum lateris AB. Demittatur ex A ad baſin BC arcus perpendicularis AD, qui primò cadat intra triangulum.

Demonſtratio. In triangulo rectangulo ADC ita eſt ſinus totus ad ſinum AC, ut ſinus anguli C ad ſinum lateris AD (*per primam partem hujus*) Item in triangulo rectangulo ADB ita eſt ſinus AB ad ſinum totum, ut AD ad ſinum anguli B; eſt igitur perturbata ratio, quare (*per 23. 5. Eucl.*) ita eſt ſinus AB ad ſinum AC, ut ſinus ACB ad ſinum ABC; quod erat demonſtrandum.

Eadem demonſtratio ſuam vim obtinet, dum arcus perpendicularis cadit extra; ſed in tali caſu anguli ABC, ABD eundem ſinum habent.

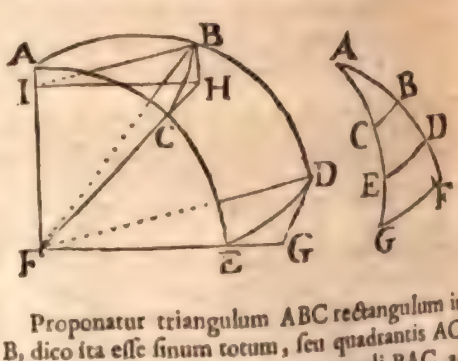
COROLLARIUM.

In triangulo quocumque datis duobus lateribus & angulo uni eorum oppoſito, innoteſcit per regulam trium angulus alteri lateri oppoſitus. Pariter cognitis duobus angulis, & latere uni eorum oppoſito, datur aliud latus.

PROPOSITIO II.

Theorema.

In triangulis rectangulis, ita eſt ſinus totus ad ſinum lateris adjacentis angulo recto, ut tangens anguli ad tangentem lateris & oppoſiti.



Proponatur triangulum ABC rectangulum in B, dico ita eſſe ſinum totum, ſeu quadrantis AC, ad ſinum lateris AC, ut tangens anguli BAC ad tangentem lateris oppoſiti BC.. Perficiantur quadrantes ABD, ACE, & ex A ut polo, intervallo quadrantis, deſcribatur arcus ED, ducanturque ex centro ſphæræ F, lineæ FEG, FCH, FB, FA; tum in plano FDE ducatur DG, perpendicularis ad FD, quæ (*per 16. 3. Eucl.*) tanget arcum DE, eritque eius tangens, & cum arcus ED ſit menſura anguli BAC, erit etiam tangens ejuſdem anguli. Ducatur item in plano FBH linea HB perpendicu

perpendicularis ad FB, quæ erit tangens arcus BC, ducatur ex puncto B linea BI perpendicularis ad FA, jungaturque HI, oſtendere debeo ita eſſe ſinum totum FD ad BI ſinum arcus BA, ſicut DG tangens anguli BAC ad BH tangentem arcus BC; quod præſtitero ſi oſtendero triangula BIH, FDG eſſe æquiangula.

Demonſtratio. Cum angulus ABC ſupponatur rectus (*per defin. hujus*) planum BFH rectum eſt ad planum ADF. Pariter cum arcus AD tranſeat per polum A, arcûs DE erit planum FDE rectum ad idem planum ADF, ſunt autem ad communes ſectiones FB, FD, ductæ perpendiculares GD, HB, quæ (*per 3.def.11.Eucl.*) erunt rectæ ad planum ADF, ergo (*per 6.11.*) erunt parallelæ inter ſe, & anguli GDF, HBI recti erunt; item plana per eas ducta nempe GDF, HBI, erunt ad idem planum AFD recta, & cum ad communes ſectiones BI, FD ducta ſit perpendicularis FA, hæc erit recta ad ea plana; ergo anguli FIH, IFE recti erunt: parallelæ igitur ſunt lineæ FE, IH: ſed lineæ IB FD ſunt etiam parallelæ cum ad eandem FA ſint perpendiculares: quare (*per 10.11.*) anguli BIH, DFE ſunt æquales; ergo triangula BIH, FDG ſunt æquiangula, & (*per 3.6.Eucl.*) ita eſt FD ſinus totus, ad DG tangentem anguli BAC, ut BI ſinus lateris AB ad BH tangentem lateris BC; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Si ſint plurima triangula rectangula ABC, ADE, habentia prætereа alium angulum A æqualem, aut eundem, dico ita eſſe ſinum AB ad tangentem BC, ſicut ſinus AD, ad tangentem DE; perfectis enim quadrantibus ut prius. Quia ita eſt ſinus totus ad ſinum AB, ut tangens anguli A ad tangentem DE, & pariter ita eſt ſinus totus ad ſinum AB, ut tangens anguli A, ad tangentem BC, ita erit ſinus AD ad ſinum AB, ut tangens DE ad tangentem BC.

Quamvis ex his duobus Theorematibus ſolvi poſſint omnia triangula ſpharica rectangula, quia tamen multa occurrunt ambiguitates; ideo reliqua Theoremata addenda ſunt.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Si duo Trianguli ſpharici latera continuentur, fiet aliud triangulum eandem baſin, & angulum baſi oppoſitum habens, cæteraſque partes priorum ſupplementa ad ſemicirculum.



Trianguli ſphærici ABC, latera BA, BC continuentur ad concurſum D, dico fieri aliud triangulum ACD, cujus eadem baſis AC, idem angulus baſi oppoſitus, & reliquæ partes, ſunt ſupplementa ad ſemicirculum, partium trianguli ACB.

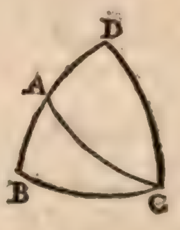
Demonſtr. (*Per def. hujus*) anguli B & D ſunt æquales cum anguli DAC, CAB ſint duobus rectis æquales, unum erit alterius ſupplementum ad duos rectos, aut ſemicirculum. Idem dicito de latere DA, reſpectu lateris AB, cum DAB ſit ſemicirculus.

Quia præcedentia duo Theoremata videntur accommodata eſſe iis triangulis rectangulis quorum latera ſunt majora quadrante, & anguli acuti, ope iſtius accommodantur omni triangulo rectangulo, etiam cujus latera ſunt majora quadrante; nam productis ejus lateribus ad concurſum uſque, fiat aliud triangulum rectangulum cujus latera ſunt quadrante minora.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Si producatur crus trianguli rectanguli uſque ad polos alterius cruris; fit aliud triangulum, commune latus habens, & reliquas partes aut æquales partibus præcedentis, aut earum ſupplementa ad ſemicirculum aut complementa ad angulum rectum.



Proponitur triangulum ABC, rectangulum in B, produciturque crus BA uſque ad punctum D, polum alterius cruris BC, duciturque latus DC; dico fieri aliud triangulum ADC, cujus ſingulæ partes ſunt vel æquales partibus alterius, vel eorum ſupplementa ad ſemicirculum, vel denique earum complementa. Nam 1. baſis eſt eadem AC, 2 latus DC eſt quadrans, æquale angulo B. 3 angulus D æqualis, cruri BC alterius, eſt enim BC, menſura anguli D. (*per def. hujus*) 4 angulus DAC eſt ſupplementum ad ſemicirculum anguli BAC, 5 anguli AD complementum lateris AB, 6 denique cum angulus DCB (*per 15. 1. Theod.*) ſit rectus, erit angulus DCA complementum anguli ACB; ergo ſex partes unius trianguli reſpondent, eo modo quo dictum eſt, ſex partibus alterius trianguli. Idem accidit in triangulo cujus unum latus eſt quadrans, ut in ADC, ſi DA producatur donec quadrantem perficiat fiet triangulum ABC, cujus angulus B rectus erit, BC erit menſura anguli D, &c.

PROPOSITIO V.

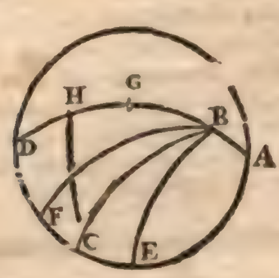
Theorema.

In triangulis rectangulis, crura ſunt ejus affectionis ac anguli ipſi oppoſiti.

Sit triangulum ABC rectangulum in A, dico quod ſi latus AC comprehendens angulum rectum A fuerit quadrans, angulus CBA illi oppoſitus rectus erit; ſi crus fuerit majus quadrante, ut AF angulus illi oppoſitus FBA major erit quadrante, ſi fuerit minor quadrante ut AE, angulus EBA acutus erit.

Demonſtratio, Angulus A rectus ſupponitur; ergo

ergo (*per* 15.*Theod.*) circulus ACD per polos cruris AB tranſit, & cum AC dicatur quadrans,



erit polus punctum C, & (*per* 15.1.*Theod.*) angulus CAB rectus erit; ergo angulus FBA obtuſus, & EBA, acutus, quod erat demonſtrandum.

Converſa etiam patet. Si enim angulus EBA ſit acutus, fiat ABC rectus, eritque C polus, ergo AE, minor quadrante, idem dicito de angulo obtuſo FBA.

COROLLARIUM I.

Cognitis angulis, tollitur ambiguitas circa crura; & cognitis cruribus, ambiguitas circa angulos.

Pro ſolvenda ambiguitate circa baſin.

COROLLARIUM II.

Si crus fuerit quadrans ut AC, baſis CB quadrans erit, cum oſtenderimus punctum C polum eſſe cruris AB.

COROLLARIUM III.

Si duo crura fuerint affectionis ejuſdem, non tamen quadrantes, baſis erit quadrante minor. Primò BA, AE ſint ambo quadrante minora, erit BE minor quadrante.

Demonſtr. Cum ſemicirculus AB inſiſtat perpendiculariter circulo ACD, eò quòd angulus B ſit rectus, erit (*per* 1. *præcedentis*) BE, minor quam BC; ſed BC eſt quadrans, ergo baſis BE eſt quadrante minor.

Sint ambo crura majora quadrante ut DB, DE, pariter baſis DE minor eſt quadrante.

COROLLARIUM IV.

Si duo anguli fuerint recti, ut A, & BCA, baſis BC erit quadrans, & CA.

COROLLARIUM V.

Si anguli ad baſin fuerint affectionis ejuſdem, non tamen recti, baſis erit quadrante minor, ut ſi anguli ABE, AEB fuerint acuti, latera AB, AE erunt minora quadrante; ergo baſis BE erit minor quadrante. Idem oſtendam ſi fuerint obtuſi; nam latera majora erunt quadrante.

COROLLARIUM VI.

Si anguli ad baſin fuerint affectionis diverſæ, & nullus quadrans, aut latera, ut in ABF, angulus ABF obtuſus eſt, & AFB acutus (*per* 1. *præcedentis*) baſis BF erit major quadrante.

COROLLARIUM VII.

Si fuerint in triangulo duo anguli recti, vel duo latera ſint quadrantes, vel unus angulus rectus ſit, & unum latus quadrans 4 in triangulo æquabuntur quadranti.

Demonſtratio. Sint enim primò anguli recti CAB, CBA, uterque arcus CB, CA, erit quadrans, quia (*per* 15. 1.*Theod.*) polus eſt in utroque arcu BC, AC; ergo eſt in puncto C, & cùm à polo ad maximum circulum ſit ſemper quadrans, arcus BC, AC erunt quadrantes.

Secundò arcus AC, BC ſint quadrantes neceſſariò punctum C eſt polus, ſi enim polus non eſſet unus alio minor eſſet (*per* 1. *præcedentis*) denique ſit angulus A rectus, & AC quadrans, oſtendam (*per* 15. 1.*Theod.*) in arcu AC, eſſe polum, & in polo ejus C.

In hujuſmodi triangulis non eſt opus calculo, ſed latus eſt menſura anguli oppoſiti. Nec deduci aliquid poteſt, nempe poſſunt fieri triangula inæqualia, licet habeant 4. partes æquales.

COROLLARIUM VIII.

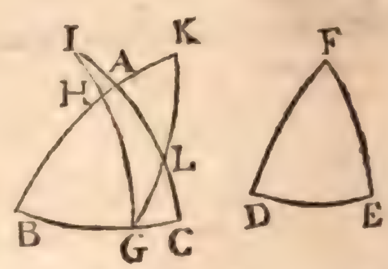
In genere quoties fieri non poteſt ut duo triangula inæqualia eaſdem partes habeant, ac illæ quæ in triangulo cognoſcuntur, nulla poteſt eſſe eſſe ambiguitas.

Ut ſi dentur trianguli duo latera, & angulus ab iis comprehenſus. Pariter datis omnibus lateribus, quia fieri non poteſt ut duo triangula inæqualia, aut diſſimilia, habeant omnia latera æqualia. Pariter nulla eſt ambiguitas quoties dantur duo anguli cum angulo adjacente, quia non per ultimam præcedentis triangula habentia duo angulos adjacentes cum latere adjacente ſunt æqualia.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Triangula ſpharica omnes angulos ſingillatim æquales habentia, latera quoque habent æqualia.



Triangula ABC, DEF habeant angulos, ſingulos ſingulis æquales, dico eorum latera ſingillatim æqualia eſſe. Sit enim ſi fieri poteſt latus BC, majus quam DE, & AB ſit æquale FD, abſcindatur arcus BG, æqualis DE; ducaturque AG.

Demonſtratio. Cùm BG, DE, AB, FD ſint æqualia, & anguli B & D; erunt (*per* 4. *præcedentis*) anguli BAG, DFE æquales, quod eſt contra ſuppoſitionem, cum anguli BAC, & F ſupponantur æquales. Multò magis ſi dicantur AB, DF, AC, FE æqualia eſſe, & latus BC eſſe majus; clarum enim eſt (*per* 10. *præcedentis*) angulum BAC eſſe majorem angulo F.

Secundò dicatur AB majus eſſe quam DF, ſicut BC majus eſt quàm DE. Abſcindatur BH, æquale

æquale lateri DF, & BG ipſi DE, ducatur GHI, donec concurrat cum I producto.

Demonſtratio. Triangula BHG, DFE æqualia eſſent (*per 4. præcedentis*) & angulus HGB, æqualis foret angulo E, cùm igitur angulus HGB æqualis ſit angulo interno C, erunt (*per 11. præcedentis*) latera GI, CI æqualia ſemicirculo. Ex alia parte, angulus BHG, aut illi oppoſitus ad verticem IHA, æqualis eſt angulo E, qui ſupponebatur æqualis angulo BAC, aut illi oppoſito ad verticem IAK; ergo angulus externus IAK oppoſito ad verticem IHA æqualis eſſet; ergo (*per 11. præcedentis*) latera HI, AI ſemicirculo ſunt æqualia, quod eſt abſurdum, cum latera CI, GI ſint oſtenſa ſemicirculo æqualia.

Tertiò ſit latus AB minus quàm DF, ſitque ſemper GF æquale lateri DE, producatur BA, donec BK ſit æquale lateri DF, ducaturque KG.

Demonſtratio. (*per 4. præcedentis*) erunt triangula BKG, DFE omninò æqualia; ergo angulus BGK, æqualis eſt angulo E, qui ſupponebatur æqualis angulo C; ergo angulus BGL, æqualis eſt interno C. Ergo (*per 11. præcedentis*) erunt latera GL, CL æqualia ſemicirculo. Sunt etiam æquales anguli K & F, ſed F ſupponebatur æqualis angulo BAC; ergo in triangulo AKL externus angulus BAC æqualis eſſet interno K, ergo (*per 11. præcedentis*) latera AL, KL æqualia eſſent ſemicirculo; ergo aut AC aut BK eſſent ſaltem ſemicirculus, quod eſt abſurdum; nam ſi AC eſſet ſemicirculus, deberet rurſus convenire cum circulo AB, cum circuli maximi ſe bifariam ſecent.

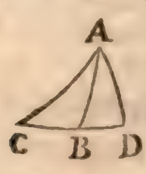
COROLLARIUM.

Hinc ſequitur quod datis tribus trianguli angulis nulla poſſit eſſe ambiguitas; cùm fieri non poſſit ut duo triangula habeant angulos ſingulos æquales, & non ſint in omni ſenſu æqualia.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Poſſunt duo triangula habere duos angulos, ſingillatim æquales, & latus æqualibus angulis oppoſitum æquale, & eſſe inæqualia.



Sit triangulum ABC cujus duo latera AB, AC ſimul ſumpta æqualia ſemicirculo, ideoque (*per 11. præcedentis*) angulus externus ABD interno ACB ſit æqualis. Producatur latus CB, ducaturque latus AD.

Demonſtratio. Triangula ADB, ADC ſunt inæqualia, ſed ea habent angulos ACB, ABD æquales, angulum D communem, ſicut latus AD oppoſitum angulis æqualibus ACB, ABD; ergo triangula inæqualia poſſunt habere duos angulos ſingillatim æquales, & latus angulis æqualibus oppoſitum, æquale.

COROLLARIUM I.

In tali caſu eſt ambiguitas; nam ſi velles inſtituere analogiam, diceresque, ut ſinus anguli ABD, aut ACD ad ſinum anguli D, ita ſinus lateris AD, quartus numerus eſſet tam ſinus lateris AB, quam lateris AC; hæc enim latera cum ſint ſemicirculo æqualia, ſintque ſibi invicem ſupplementa, eundem ſinum habent.

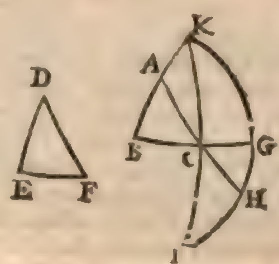
COROLLARIUM II.

Solvetur hæc ambiguitas, ſi aliquid aliud cognoſcas, nempe ſi AD quadrans eſſet, baſis AB, aut AC eſſet quadrans. Si AB, AD ejuſdem fuerit affectionis, baſis erit quadrante minor, ſi diverſæ major, ſi anguli obliqui fuerint ejuſdem denominationis, non tamen recti baſis AB erit quadrante minor ſi diverſæ major; ſi nihil horum ſciatur non ſolvetur ambiguitas.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Triangula rectangula habentia angulum obliquum æqualem, ſicut & hypothenuſam, ſunt omni ſenſu æqualia.



Duo rectangula ABC, DEF habeant angulos B & E rectos, & angulos ACB, DFE æquales, ſicut & hypothenuſas AC, DF. Dico ea inter ſe omni modo eſſe æqualia. Sit CG æquale lateri EF, & CH lateri DF, ſeu AC. & quia anguli ad verticem ACB, GCH ſunt æquales, & ACB & F ſupponuntur æquales, erunt (*per 4. præcedentis*) triangula DEF, CGH omni ſenſu æqualia; & conſequenter ſi producatur latus HG, cum anguli G & B ſint recti, convenient latera BA, HG in puncto K polo arcus BCG (*per 15. 1. Theod.*) ſi ducatur arcus KCI, erunt K & I poli ejuſdem arcûs BCG, eruntque Arcus BK, CK, GK, GI, CI quadrantes.

Demonſtratio. Primò triangula ACK, ICH (*per 4. præcedentis*) omnino æqualia ſunt; ergo baſes AK, HI, æquales habent, & cum KB IG eſſent quadrantes, erunt AB, GH, æquales; ſed GH æqualis erat DE; ergo DE, AB æquales ſunt; ſed item anguli HIC, CKA ſunt æqualia, quorum menſuræ BC, CG, ſeu EF erunt æquales, item ſunt æquales anguli CAK, CHI; ergo & eorum ſupplementa CAB, CHG, ſeu EDF; ergo triangula ABC, DEF ſunt omninò æqualia.

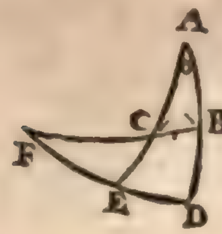
Cæteræ ambiguitates ſolventur ſuis locis potiuſque pertinent ad obliquangula, quam ad rectangula.

Quantum fieri poteſt in ſequentibus analogias à ſinu toto incipiam, ut vitetur diviſio. Quia diviſio per ſinum totum 10000000, fit tantum delendo 7 ultimas cyphras, vitatur item in logarithmis ſubtractio.

PROPOSITIO IX.

Problema I.

In triangulis rectangulis cognito angulo obliquo, & crure ipſi adjacente, dare alium angulum.



In triangulo ABC, rectangulo in B, cognoſcatur præter angulum rectum B, angulus C,& latus BC quæritur angulus A.

Fiat ut ſinus totus
ad ſinum anguli C,
ita ſinus complementi lateris BC
ad ſinum complementi anguli A,

Præparatio. Producantur latera AB, AC ita ut AD, AE ſint quadrantes. Ex A, ut polo, intervallo AD, deſcribatur arcus DF; donec concurrat cum BC producto, & quia AD, AE ſunt quadrantes anguli E, & D recti: ſed jam angulus B rectus erat; quare (*per* 15.1.*Theod.*) arcus BCF, DE, concurrunt in polo arcus ABD; ſunt igitur quadrantes BF, DF; & FC, complementum lateris BC; ſicut FE eſt complementum lateris ED, ſeu anguli A; cum ED ſit eius menſura. Hæc præparatio ſæpè fiet, ideò notanda eſt.

Demonſtratio. In triangulo rectangulo F C E, ita eſt ſinus totus nempe anguli E recti, ad ſinum anguli C, ſicut ſinus lateris FC, complementi BC, ad ſinum lateris FE, complementi lateris ED ſeu anguli A, (*per* 1. *hujus.*) quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Poſſet hoc problema dari per modum theorematis in rectangulis; ut ſinus totus ad ſinum anguli obliqui, ita ſinus complementi lateris ei adjacentis ad ſinum complementi anguli alterius.

Quia autem radius eſt medius proportionalis inter ſecantem arcus, & ſinum complementi, ſive quia eſt; ut ſecans arcus ad ſinum totum, ita ſinus totus ad ſinum complementi: Poſſet ita inſtitui analogia.

Ut ſecans lateris C B
ad ſinum totum;
ita ſinus anguli C
ad ſinum complementi anguli A.

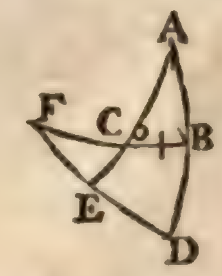
Hoc problema non patitur ullam ambiguitatem, quia cum (*per* 5. *hujus*) in rectangulis crura ſint ejuſdem affectionis, ac anguli oppoſiti, cognito crure BC, ſcietur ſpecies anguli A.

PROPOSITIO X.

Problema II.

Dato angulo obliquo, & latere ipſi oppoſito invenire alium angulum, modo vel eius ſpecies cognoſcatur, vel ſpecies lateris ipſi oppoſiti, vel an baſis ſit quadrans, aut major, vel minor quadrante.

In triangulo ABC, præter angulum rectum B,



cognoſcatur angulus A, & latus ipſi oppoſitum BC, quæritur autem angulus C.

Fiat ut ſinus complementi lateris BC
ad ſinum totum,
ita ſinus complementi anguli A
ad ſinum anguli C.

Præparatio conſueta fiat.

Demonſtratio. In triangulo FEC rectangulo in puncto E, ita eſt (*per* 1. *hujus*) ſinus lateris FC, complementi lateris BC, ad ſinum totum anguli recti E, ut ſinus lateris FE, hoc eſt complementi ipſius ED ſeu anguli A, ad ſinum anguli C; quod erat oſtendendum.

Et quia ſinus totus eſt medius proportionalis inter ſinum complementi & ſecantem anguli: erit ut ſinus complementi lateris BC ad ſinum totum; ita ſinus totus, ad ſecantem ipſius BC: Quare fiat,

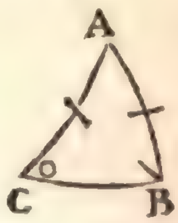
Ut ſinus totus
ad ſecantem lateris BC,
ita ſinus complementi anguli A
ad ſinum anguli C,

In hoc caſu eſt ambiguitas quam oſtendimus (*prop.*7. *huius*) quæ ſolvi non poteſt, niſi primò cognoſcatur ſpecies anguli C, vel cognoſcatur ſpecies lateris BA, nam (*per* 5. *huius*) erit angulus C ejuſdem affectionis, ac BA; vel cognoſcatur ſpecies ipſius hypothenuſæ AC, juxta corollararia (*prop.*5.)

PROPOSITIO XII.

Problema III.

Datâ hypothenuſâ, & uno crure, invenire angulum prædicto cruri oppoſitum.



Sit datum triangulum ABC rectangulum in B, cujus

Digitized by Google

cujus cognoſcatur latus AB,& baſis AC,quæritur autem angulus C.

Fiat ut ſinus lateris AC
ad ſinum totum;
ita ſinus lateris AB
ad ſinum anguli C.

Demonſtratio. (*Per* 1. *hujus*) ut ſinus lateris AC ad ſinum anguli B recti, id eſt, ad ſinum totum; ita ſinus lateris AB ad ſinum anguli C ipſi oppoſiti.

Vel

Ut ſinus totus
ad ſecantem complementi AC,
ita ſinus lateris AB
ad ſinum anguli C.

Quia nempe ſinus eſt medius proportionalis inter ſinum lateris AC, & ſecantem complementi ejus, erit ſicut ſinus lateris AC primæ analogiæ ad ſinum totum; ita ſinus totus ad ſecantem complementi lateris AC.

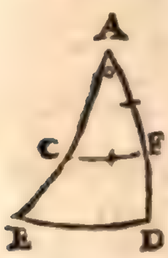
Hic caſus nullam patitur ambiguitatem, quia ex latere AB cognito, (*per* 5. *hujus*) innoteſcit ſpecies anguli C, cùm ſint ejuſdem affectionis.

PROPOSITIO XII.

Problema IV.

Cognitis cruribus, cognoſcere quemlibet angulum obliquum.

In triangulo AFC rectangulo in B, dentur latera AF, FC; quæritur angulus A.



Fiat ut ſinus lateris AF
ad ſinum totum,
ita tangens lateris FC
ad tangentem anguli A.

Producantur enim AF, AC ad quadrantem uſque; & ex A ut polo deſcribatur arcus ED.

Demonſtratio. (*Per* 2. *ejus*) ita eſt ſinus AF ad ſinum totum quadrantis AD, ſicut tangens FC ad tangentem lateris ED, ſeu anguli A, eſt enim ejus menſura.

Vel

Ut ſinus totus
ad ſecantem complementi lateris AF,
ita tangens lateris FC
ad tangentem anguli A.

Hæc ſecunda analogia eodem modo demonſtratur, quo in aliis propoſitionibus. Hic caſus non patitur difficultatem; nam ex latere FC (*per* 5. *huius*) innoteſcit ſpecies anguli A.

PROPOSITIO XIII.

Problema V.

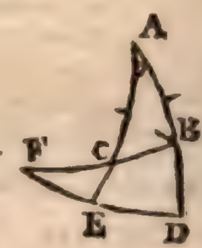
Datâ baſi, & crure, cognoſcere angulum ab ipſis comprehenſum.

Sit triangulum ABC, rectangulum in B, cujus cognoſcitur baſis AC, & crus AB; quæritur autem angulus A, ab ipſis comprehenſus.

Fiat ut tangens complementi lateris AB
ad ſinum totum;
ita tangens complementi baſis AC
ad ſinum complementi anguli A.

Fiat conſtructio conſueta.

Demonſtratio. (*Per* 2. *huius*) in triangulo FEC, rectangulo in E, ita eſt tangens lateris DB, ſeu



complementi lateris AB, ad ſinum totum: ſicut tangens lateris CE, ſeu complementi baſis AC, ad ſinum EF, complementi lateris ED, ſeu anguli A, cum ſit eius menſura.

Et quia ſinus totus eſt medius proportionalis inter tangentem arcus & complementi (*per* 24. 1. *huius*) ita erit

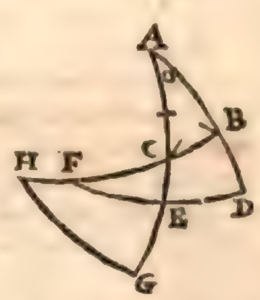
Sinus totus
ad tangentem lateris AB,
ſicut tangens complementi baſis AC
ad ſinum complementi A.

Hic caſus nullam patitur ambiguitatem, quia tam latus AB datur quam baſis AC, quæ (*per* 5. *huius*) ſi ſit quadrans angulus A erit quadrans, ſi major eſſet quadrante anguli A & C ita ſe haberent ut unus eſſet acutus, & alius obtuſus, & latus AB manifeſtaret cujus ſpeciei eſſet angulus C, & conſequenter ſpeciem anguli A, ſi verò baſis AC eſſet minor quadrante, anguli A, & C eſſent affectionis ejuſdem; cùm autem AB manifeſtet ſpeciem anguli C, manifeſtabit etiam ſpeciem anguli A.

PROPOSITIO XIV.

Problema VI.

Data baſi, & uno angulo invenire alium angulum.



In triangulo ABC, præter angulum rectum B, cognoſcatur baſis AC, & angulus C, quæritur angulus A.

Fiat ut ſinus totus
ad ſinum complementi baſis AC;
ita tangens anguli C
ad tangentem complementi anguli A.

Præparatio. Conſueto more perficiantur quadrantes ABD, ACE, ducaturque ex A ut polo circulus DE, concurrens cum CB producto in F, item perficiantur quadrantes CFH CEG, & ex C ut polo deſcribatur arcus GH, cum AE, CG ſint quadrantes: erit arcus EG æqualis baſi AC, & HG erit menſura anguli C.

Demonſtr.

Digitized by Google

Demonſtratio. (*Per 2. huius*) in triangulo CEF rectangulo in E, cum AE AD ſint quadrantes, erit ut ſinus totus lateris CG ad ſinum lateris C E, ita tangens arcus GH ſeu anguli C, ad tangentem arcus FE complementi arcus ED; ſeu anguli A; quod erat demonſtrandum.

Hic caſus nullam patitur ambiguitatem, nam ſi baſis ſit quadrante minor, anguli A & C erunt ejuſdem affectionis, ſi major diverſæ (*per 5. huius.*)

PROPOSITIO XV.

Problema VII.

Datâ baſi, & angulo obliquo, latus ipſi oppoſitum invenire.

In triangulo ABC præter angulum rectum B, cognoſcatur baſis AC, & angulus A, quæritur latus BC.



Fiant ut ſinus totus
ad ſinum anguli A;
ita ſinus baſis AC
ad ſinum lateris BC.

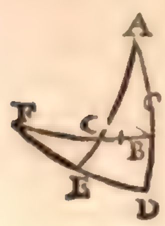
Demonſtr. Eſt ipſamet (*prop. 1. huius*) nulla eſt in hoc caſu perplexitas; cùm (*per 5. huius*) in triangulis rectangulis latera, & anguli oppoſiti ſint eiuſdem affectionis.

PROPOSITIO XVI.

Problema VIII.

Datâ baſi, & uno latere aliud latus invenire.

In triangulo ABC præter angulum rectum B, detur baſis AC, & latus BC, quæritur latus AB.



Fiat ut ſinus complementi BC
ad ſinum totum,
ita ſinus complementi baſis AC
ad ſinum complementi lateris AB.

Fiat conſueta conſtructio.

Demonſtr. In triangulo FEC rectangulo in E, (*per 1. huius*) eſt ut ſinus lateris FC, ad ſinum totum: nempe anguli E recti, ita ſinus lateris EC, complementi baſis AC, ad ſinum anguli F ſeu menſuræ eius BD; hoc eſt complementi lateris AB quæſiti.

Si velis retrahere ſinum totum in primum locum.

Fiat ut ſinus totus
ad ſecantem lateris BC,
ita ſinus complementi baſis AC
ad ſinum complementi lateris AB.

Solvetur omnis ambiguitas ex baſi A C cognitâ; quæ ſit ſit minor quadrante, latera CB, AB, erunt ejuſdem affectionis, & contrà ſi major, diverſæ.

PROPOSITIO XVII.

Problema IX.

Cognitis omnibus angulis, cognoſcere latus, angulum rectum comprehendens.

Sit triangulum ABC, cujus anguli omnes cognoſcuntur, & B ſit rectus quæritur latus BC.



Fiat ut ſinus anguli C adjacentis lateri quæſito
ad ſinum totum,
ita ſinus complementi anguli A oppoſiti
Ad ſinum complement. lateris BC.

Demonſtratio. Probavimus in (*propoſ. 9. huius*) hanc eſſe analogiam.

Ut ſinus totus
ad ſinum anguli C,
ita ſinus complementi lateris BC
ad ſinum complementi anguli A.

Quare permutando erit.

Ut ſinus anguli C
ad ſinum totum,
ita ſinus complementi anguli A
ad ſinum complementi lateris BC.

Si velis retrahere ſinum totum in primum locum.

Fiat ut ſinus totus
ad ſecantem complementi anguli C,
ita ſinus complementi anguli A
ad ſinum complementi lateris BC.

Non eſt ambiguitas in hoc caſu quia (*per 5. huius*) anguli indicant cujus affectionis ſint latera.

PROPOSITIO XVIII.

Problema X.

Cognito angulo obliquo, & latere adjacente, dare latus oppoſitum.

Sit triangulum A B C, cujus cognoſcatur latus AB, & angulus obliquus A ipſi adjacens: requiritur latus BC.



Fiat ut ſinus totus, lateris AD
ad tangentem anguli A, ſeu E lateris BD,
ita ſinus lateris AB
ad tangentem lateris C B.

Demonſtr. Eſt ipſamet (*prop. 2.*)

Cùm (*per 5. huius*) anguli obliqui in rectangulis ſint ejuſdem affectionis, ac latera ſibi oppoſita, angulus A deteget ſpeciem lateris CB quæſiti.

PROPOSITIO XIX.

Problema XI.

Cognito crure, & angulo obliquo ipſi oppoſito; cognoſcere alind crus, modò ſciatur eius ſpecies, vel ſpecies anguli alterius, vel ſpecies hypothenuſæ.

Sint in triangulo ABC cognita, præter angulum

lum rectum B, angulus obliquus A & latus ipſi oppoſitum BC, quæritur latus AB.



Fiat ut tangens anguli A, ſeu lateris E D
ad ſinum totum quadrantis AD;
ita tangens lateris C B,
ad ſinum lateris AB.

Demonſt. Eſt ipſamet (*propoſ. 2. hujus.*)

Si velis ſinum totum retrahere in primam ſedem, cùm ſit medius proportionalis inter tangentes arcus, & complementi.

Fiat ut ſinus totus
ad tangentem complementi anguli A;
ita tangens lateris C B,
ad ſinum lateris A B

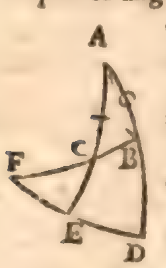
Eſt ambiguitas in hoc caſu; neſcitur enim, an ſinus inventus reſpondeat arcui AB minori quadrante, vel majori quadrante, quæ ambiguitas tolletur (*per 5. huius*) ſi ſciatur cujus affectionis ſit alius angulus C, vel ſciatur cujus affectionis ſit baſis AC. Si ſit minor quadrante, latera AB, BC ſunt ejuſdem affectionis, ſi ſit major erunt affectionis diverſæ.

PROPOSITIO XX.

Problema XII.

Datâ baſi, & angulo oblique; invenire latus dato angulo adjacens.

Sit præter angulum rectum B, data baſis AC, & angulus obliquus A, quæritur latus ipſi adjacens AB.



Fiat ut ſinus complementi anguli A, nempe FE,
ad ſinum totum quadrantis DF;
ita tangens complementi baſis, nempe EC,
ad tangentem DB complementi lateris AB.

Demonſtratio. Patet ex 2. hujus factâ præparatione ſolita.

Et quia (*per 25. 1. huius*) tangentes arcuum, & complementorum ſunt reciprocè proportionales, erit ut tangens complementi baſis ad tangentem complementi lateris AB, ita tangens lateris AB ad tangentem baſis. Quare

Fiat ut ſinus totus
ad ſinum complementi anguli A;
ita tangens baſis AC,
ad tangentem lateris AB.

Solvetur omnis ambiguitas in hoc triangulo; quia ſi baſis AC cognita, fuerit minor quadrante, erunt A, & C affectionis ejuſdem; ſi major, diverſæ. Ejuſdem autem affectionis eſt latus AB, cujus eſt angulus C.

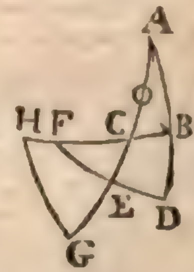
PROPOSITIO XXI.

Pblema XIII.

Cognitis angulis, cognoſcere baſin.

Sint cogniti in triangulo A B C, omnes anguli, & B ſit rectus, quæritur baſis AC.

Fiat ut tangens anguli C
ad ſinum totum,
ita tangens complementi anguli A,
ad ſinum complementi baſis AC.



Perficiantur quadrantes ABD, ACE more conſueto, item perficiantur quadrantes CEG, CFH

Demonſtratio. (*Per 2. huius*) in triangulo CGH, erit ut tangens arcus GH, ſeu anguli C, ad ſinum totum quadrantis CG, ita tangens arcus FE, ſeu complementi arcus ED ſeu anguli A, ad ſinum arcus CE, ſeu complementi baſis.

Si velis retrahere ſinum totum in primam ſedem; quia ſinus totus eſt medius proportionalis inter tangentes arcus, & complementi, erit ut tangens anguli C ad ſinum totum, ita ſinus totus ad tangentem complementi anguli C. Quare

Fiat ut ſinus totus
ad tangentem complementi anguli C;
ita tangens complementi anguli A
ad ſinum complementi baſis AC.

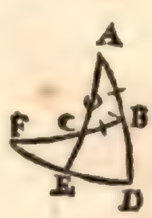
In hoc caſu nulla eſt ambiguitas, quia ſi anguli A & C. ſint ejuſdem affectionis (*per 5. huius*) erit baſis AC quadrante minor, ſi diverſæ, major, ſi unus rectus, baſis erit quadrans.

PROPOSITIO XXII.

Problema XIV.

Datis cruribus, invenire baſin.

Sint data crura AB, BC, cum angulo B recto, quæritur baſis AC.



Fiat ut ſinus totus
ad ſinum complementi lateris B C,
ita ſinus complementi lateris A B
ad ſinum complementi baſis A C.

Perficiantur quadrantes more conſueto.

Demonſtratio. In triangulo F E C, rectangulo in E, (*per 1. huius*) ita eſt ſinus totus, anguli E recti ad ſinum lateris oppoſiti FC ſeu complementi lateris C B; ut ſinus anguli F, ſeu arcus B D qui eſt complementum lateris AB, ad ſinum arcus C E, qui eſt complementum baſis A C.

Latera AB, BC tollent ambiguitatem circa baſin AC. Si enim ſint ejuſdem affectionis, baſis erit quadrante minor, ſi diverſæ, major.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXIII.

Problema XV.

Dato crure, & angulo ipſi oppoſito, habere hypothenuſam, modo ſciatur ſpecies eius, vel ſpecies alterius lateris, aut anguli.

In triangulo ABC, præter angulum rectum B, cognoſcatur angulus C, & latus AB, ipſi oppoſitum. Quæritur autem baſis AC.



Fiat ut ſinus anguli C
ad ſinum totum;
ita ſinus lateris AB
ad ſinum baſis AC.

Demonſtratio patet (*ex 1. huius*)

Si velis retrahere ſinum totum in primam ſedem.

Fiat ut ſinus totus
ad ſecantem complementi anguli C,
ita ſinus lateris AB
ad ſinum baſis AC.

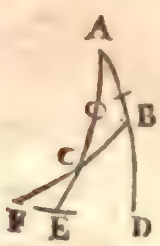
In hoc caſu eſt ambiguitas. Poſſunt enim dari duo triangula in quibus tres primæ partes iſtius analogiæ inveniantur, quæ tamen non habebunt eandem baſin; ſi nempe unum habeat baſin minorem quadrante, & aliud majorem, (*ut propoſitione 7. oſtendimus*) non poteſt tolli iſta ambiguitas niſi cognoſcatur ſpecies, aut alterius anguli, aut alterius lateris, juxta (*propoſitionem 5. huius*) & eius corollaria.

PROPOSITIO XXIV.

Problema XVI.

Dato crure, & angulo obliquo, ipſi adjacente; cognoſcere baſin.

In triangulo ABC, rectangulo in B; dentur angulus A & latus AB, ipſi adjacens; quæritur baſis AC.



Fiat ut ſinus totus
ad ſinum complementi anguli A,
ita tangens complementi lateris AB
ad tangentem complementi baſis AC.

Perficiatur tota conſtructio more conſueto.

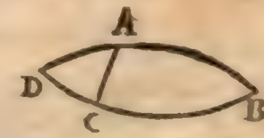
Demonſtratio. In triangulo FEC rectangulo in E, (*per 2. huius*) ita eſt ſinus totus quadrantis FD ad ſinum arcus FE id eſt complementi arcus ED, ſeu anguli A; ſicut tangens arcus BD, complementi lateris AB, ad tangentem arcus E C, complementi baſis AC.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Omne triangulum rectangulum cujus duo latera ſunt quadrante majora, & conſequenter duo anguli obtuſi, reſolvi poteſt per triangulum rectangulum cuius latera erunt minora quadrante, & anguli acuti.

Sit triangulum ABC rectangulum in B, cujus duo crura AB, BC, ſint quadrante majora, & conſequenter anguli obliqui CAB, ACB (*per 5.*



huius) obtuſi: dico eſſe aliud triangulum rectangulum, cujus ſolutione ſolvitur triangulum ABC, producantur latera BA, BC donec concurrant in D.

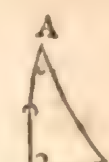
Demonſtr. Triangulum DAC eſt rectangulum in D, cujus baſis eadem, angulus D A C ſupplementum ad ſemicirculum anguli BAC; ideoque eundem ſinum habens, & ita de cæteris partibus ut intuenti patet.

Licèt nullus ſit caſus in triangulis rectangulis qui ſolvi non poſſit facilè, quia tamen *illarum* analogiarum obliviſci poſſumus; ita ut niſi ſemper libet habeatur præ manibus, non ſit facilè earum recordari; unicam Neperi propoſitionem afferemus, omnes hujuſmodi analogias complectentem.

Diximus ſuprà ipſum diviſiſſe omnia triangula in quadrantalia, & non quadrantalia (ſcilicèt quæ nullam partem habent quadranti, aut angulo recto æqualem) hæc dividi poſſunt in duo triangula rectangula demittendo perpendicularem, unde etiam hâc ſolâ propoſitione ſolvi poſſunt. Loquimur ergo de quadrantalibus ſimplicibus, quæ unicam tantùm partem habent angulo recto, aut quadranti æqualem.

In triangulo autem rectangulo verbi gratiâ A B C cujus angulus B, ſit rectus; mutat tres partes magis rèmotas ab angulo recto B, nempe angulos A, C, & baſin AC in ſua complementa, & hanc notam C, appoſuimus pro complementis. In quolibet autem triangulo præter angulum rectum dantur aliæ duæ partes, & quæritur tertia.

Quare partes, tàm quæ dantur, quàm quæ quæritur, (non autem recenſeo inter partes datas angulum rectum, aut quadrantem) partes inquam illæ duæ, quæ dantur, & tertia quæ inquiritur, vel continuè ſe ſequuntur, ita ut nulla ſit alia quæ inter illas cadat, vel eſt inter illas interruptio aliqua, (non cenſetur autem eſſe interruptio, quando angulus rectus ſolus earum ordinem interrumpit) ut ſi 1. proponantur hæc tria; anguli A complementum, complementum baſis AC, complementum anguli C, & harum trium partium duæ dentur, & altera quæratur, vel 2. proponatur arcus AB, anguli A complement. baſis AC complementum; vel 3. complement. baſis A C complement. anguli C, latus BC, vel 4. anguli C complement. latus CB, latus BA, interruptio quæ eſt propter angulum rectum ne computetur pro interruptione. Pariter 5. ſi detur latus CB, latus AB, & anguli A complementum, neque alia fieri poteſt combinatio, quæ non habeat interruptionem propriè dictam. Ex tribus illis propoſitis partibus non interruptis quarum duæ dantur, & altera quæritur, quæ medium locum obtinet vocetur media, aliæ duæ vocentur extremæ, ut datis angulorum A & C, complementis, & baſis AC complemento, complementum baſis AC, vocetur



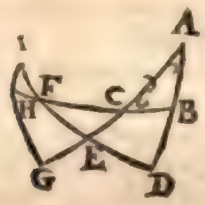
Digitized by Google

tur media, complementa angulorum A & B vocentur partes extremæ.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema.

In triangulis quadrantalibus, ex tribus partibus continuis, ut ſinus totus ad tangentem unius extremæ, ita tangens alterius extremæ ad ſinum intermediæ.



In triangulo ABC rectangulo in B. Primò proponantur tres partes non interruptæ, complementum anguli A, complementum baſis AC, & complementum anguli C, dico ita eſſe ſinum totum
ad tangentem complementi C,
ſicut tangens complementi A
ad ſinum complementi AC.

Perficiantur quadrantes more conſueto.

Demonſtratio. In triangulo CGH (*per 2. hujus*) ita eſt tangens arcus GH, ſeu anguli C, ad ſinum totum; ut tangens arcus FE, complementi anguli A, ad ſinum arcus EC, ſeu complementi baſis AC, quia autem ſinus totus eſt medius proportionalis inter tangentes arcuum & complementorum (*per 24.1.huius*) erit ut, tangens anguli C ad ſinum totum, ita ſinus totus ad tangentem complementi anguli C: ergo ut ſinus totus ad tangentem complementi anguli C,
ita tangens complementi anguli A
ad ſinum complementi baſis AC.

Quare ſi harum trium partium duæ dentur; dabitur tertia.

Secundò dentur latus BC anguli C complemen. & complementum baſis AC, dico
ita eſſe ſinum totum
ad tangentem complementi baſis AC,
ſicut tangens lateris BC
ad ſinum complementi anguli C.

Perficiantur quadrantes CG, CH, & ex C, ut polo, ducatur arcus GHI, erunt EI, GI, quadrantes; eritque FH arcus æqualis lateri CB, cùm CH, FB ſint quadrates. Pariter arcus HI, erit complementum arcus GH, ſeu anguli C, & arcus GE æqualis erit, arcui AC, cum AE, CG ſint quadrantes.

Demonſtr. In triangulo IGE (*per 2.huius*) ita eſt tangens arcus GE ſeu AC,
ad ſinum totum quadrantis IG;
ſicut tangens arcus FH, ſeu BC,
ad ſinum arcus HI, complementi arcus GH ſeu anguli C.

Sed ut tangens arcus AC ad ſinum totum (*per 24.1. huius*) ita ſinus totus ad tangentem complementi arcus AC; ergo
Ut ſinus totus
ad tangentem complementi baſis AC,
ita tangens lateris BC
ad ſinum complementi anguli C.

Tertiò. Proponantur latus AB, latus BC, & complementum anguli A, dico pariter
ita eſſe ſinum totum,
ad tangentem complementi anguli A;
ſicut tangens lateris BC
ad ſinum lateris AB.

Demonſtratio. In triangulo ADE
ita eſt tangens arcus DE, ſeu anguli A,
ad ſinum totum quadrantis AD;
ſicut tangens lateris BC,
ad ſinum lateris AB.

Sed (*per 24. 1. huius*) ut tangens anguli A; ad ſinum totum; ita ſinus totus ad tangentem complementi anguli A; ergo
Ut ſinus totus
ad tangentem complementi anguli A;
ita tangens lateris BC
ad ſinum lateris AB.

Quartò eodem modo demonſtrabitur; ſi detur latus AB, complementum anguli A, complementum baſis AC, quo demonſtravimus, datis latere BC, complemento anguli C, & complemento baſis AC, veram eſſe propoſitionem, ut fecimus in ſecundo caſu, perficiendo quadrantes & parte anguli A, idem enim omninò continget, eademque ſuppoſitio.

Pariter demonſtratus eſt alter caſus, in quo darentur duo crura AB, CB, & complementum anguli C, eſt enim caſus ſimilis tertio, in quo dabatur complementum anguli A.

Pars dicitur alteri oppoſita; inter quam, & alteram aliquid mediat, præter angulum rectum, cui autem duæ oppoſitæ ſunt, hæc vocetur media, ut ſi dentur partes illæ; nempe arcus AB, complementum AC, & BC: latus AC, erit oppoſitum baſi AC, & BC eidem opponetur, idcóque AC cui duæ partes opponuntur dicitur media. Dentur item tres partes BC, complementum baſis AC, & complementum anguli A, AC opponetur ipſi CB; quia C mediat. Item complementum A ipſi CB opponetur, cum mediet AB, quare BC dicetur media cui duæ opponuntur, & aliæ duæ dicentur oppoſitæ.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

In quadrantalibus triangulis ſimplicibus, eſt ut ſinus totus ad ſinum complementi unius oppoſitæ; ita ſinus complementi alterius oppoſitæ ad ſinum intermediæ.

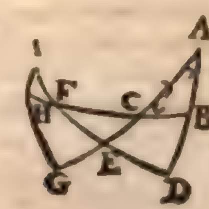
Vide figuram præcedentem.

Sit triangulum ABC rectangulum in B, cujus proponantur tres aliæ partes diſtinctæ, ab angulo recto B, inter quas ſit aliqua interruptio propriè dicta, ut ſi detur latus AB, latus BC & complementum baſis AC; eritque baſis AC intermedia, & aliæ duæ partes ipſi erunt oppoſitæ. Dico,
Ita eſſe ſinum totum
ad ſinum complementi oppoſitæ AB,
ut ſinus complementi oppoſitæ BC
ad ſinum intermediæ AC.

Perficiantur quadrantes more conſueto.

In triangulo FEC, ita eſt ſinus totus anguli E recti (*per primam huius*) ad ſinum anguli EFC, aut arcus DB complementi oppoſitæ AB; ſicut ſinus arcus FC, complementi alterius oppoſitæ BC,

ad ſinum arcus EC, complementi AC: ergo in hoc caſu vera eſt propoſitio.



Secundò proponantur tres partes latus BC, complementum anguli A, complementum baſis AC; tàm complementum baſis AC, quàm complementum anguli A, opponuntur lateri BC; BC ergo intermedia erit. Quare dico quòd eſt ut ſinus totus ad ſinum complementi oppoſitæ, quæ oppoſita complementum eſt baſis AC, complementum autem complementi eſt ipſe arcus, dico inquam quod ut eſt ſinus totus ad ſinum complementi complementi AC ſive ad ſinum ipſius AC.

Ita ſinus complementi, complementi anguli A, hoc eſt ſinus anguli A,

ad ſinum intermediæ BC.

Demonſtratio patet (ex 1 *huius*) Eſt enim ut ſinus totus ad ſinum baſis AC, ita ſinus anguli A ad ſinum lateris BC.

Tertiò proponantur complementum anguli A, complementum anguli C, & latus BC, tàm latus BC quàm complementum anguli C, opponuntur complemento anguli A: igitur complementum anguli A eſt pars intermedia; debet ergo eſſe

Ut ſinus totus

ad ſinum complementi, complementi anguli C, hoc eſt

ad ſinum anguli C

ita ſinus complementi lateris BC

ad ſinum complementi anguli A.

Demonſtr. In triangulo FEC, ut ſinus totus anguli recti E ad ſinum anguli C; ita (*per* 1. *huius*) ſinus arcus FC, complementi BC ad ſinum arcus FE, complementi arcus ED; ſeu anguli A; quod erat demonſtrandum.

Neque fieri poteſt alia combinatio quæ non ſit ſimilis prioribus. quod enim demonſtratum eſt de uno latere CB, idem demonſtrari poteſt de alio latere AB, & quod de uno angulo obliquo probatum eſt, de alio æqualiter probari poteſt.

Notandum autem ex duabus partibus datis, præter angulum rectum, poſſe per regulam trium innoteſcere tertiam. Eaſdem tamen in hàc methodo eſſe ambiguitates quas explicuimus.

Notavi etiam ſuprà, triangula in quibus latus erat quadrans, ſolvi eodem prorſus modo, quo rectangula, & habere eaſdem omninò partes, modo tres magis remotæ à quadrante mutentur in ſua complementa.

TRIGONOMETRIÆ
LIBER SEXTVS.
De reſolutione triangulorum ſphæricorum obliquangulorum.

DVAS methodos circa triangulorum obliquangulorum menſurationem in hoc libro proſequimur, prima facilius demonſtratur, praxin tamen difficiliorem habet, utpote quæ triangulum obliquangulum in duo rectangula reſolvit, ideoque triplicem ut plurimum, analogiam ſeu regulam trium adhibet. Secunda difficiliori demonſtratione innixa, faciliori utitur calculo unicaque, aut altera analogia contenta eſt, utramque in hoc libro tradimus, adjectis nonnullis propoſitionibus, ad vitandas perplexitates, & ambiguitates neceſſariis. Ordine tamen Theoremata proponemus, praxes in problematibus adjecturi.

DEFINITIO I.

Perpendicularem ſimpliciter vocamus arcum ex angulo, ad oppoſitum latus ductum, & cum eo angulum rectum comprehendentem.

DEFINITIO II.

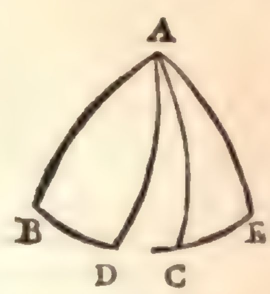
Arcum quadrantem vocamus, qui ab angulo ad latus oppoſitum ductus gradus 90 continet.

PROPOSITIO I.

Theorema.

In quocumque triangulo ſpharico, ſi anguli ad baſin fuerint affectionis ejuſdem, perpendicularis ab angulo oppoſito ducta, intra triangulum cadet; ſi diverſæ, extra.

Sint trianguli ABC anguli B & C ejuſdem affectionis vel ambo acuti, vel ambo obtuſi. Dico perpendicularem Arcum, ab angulo oppoſito A



ad baſin BC cadere intra triangulum ut arcus AD. Ponantur primò anguli B & C ambo acuti, cadatque, ſi fieri poteſt, perpendicularis extra triangulum ut AE.

Demonſtr.

Digitized by Google

Demonſtratio. In triangulo rectangulo ABE, cum angulus B acutus ſit, erit latus AE, angulo B acuto oppoſitum minus quadrante (*per 5. 5. hujus*) rurſus in triangulo rectangulo ACE in quo angulus ACE obtuſus eſt, cum ACB ſit acutus, erit AE, quadrante major: igitur major & minor erit, quod implicat: non igitur cadit extra.

Eadem demonſtratio valet ſi anguli B & ACB ponantur obtuſi.

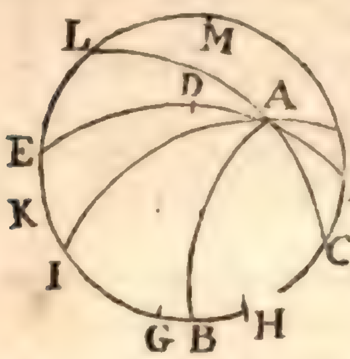
Secunda pars propoſitionis, nempe quod ſi anguli B & ACB ſint affectionis diverſæ, perpendicularis cadet extra triangulum, ita probatur. Ponatur angulus B acutus, & ACB obtuſus, & perpendicularis ſi fieri poteſt cadat intra triangulum ut AD.

Demonſtr. In triangulo rectangulo ABD cum angulus B ſupponatur acutus, erit (*per 5. præced.*) arcus AD minor quadrante. E contra in triangulo rectangulo ACD cum angulus ACD ſit obtuſus, latus oppoſitum AD erit quadrante majus, quod implicat, cum jam oſtenſum ſit minus quadrante; ergo perpendicularis cadit extra triangulum; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Si trianguli crura ſint affectionis ejuſdem, arcus quadrans, ab angulo ad latus oppoſitum ductus, cadit extra; ſi diverſa, intra triangulum.



Sit primò triangulum ſphæricum ABC, cujus crura ſint affectionis ejuſdem, & ambo minora quadrante, dico arcum quadrantem ductum ab angulo A cruribus comprehenſo, ad latus oppoſitum BC, cadere extra triangulum. Sit punctum D polus circuli BCF, ducatur ex D per A circulus FDE, eruntque F & E anguli recti (*per 15. 1. Theod.*) Dividatur FBG bifariam in G, eritque G polus circuli EDF, eritque GA, ſi duceretur quadrans quæſitus. Oſtendo hunc polum cadere extra triangulum; cadat enim ſi fieri poteſt in H, intelligaturque ductus arcus AH.

Demonſtratio. Arcus AH (*per lemma 2. ad 21. l. 2. Theodoſii*) minor eſt arcu AB, qui minor quadrante ſupponitur, ergo arcus AH non eſſet quadrans.

Secundò ſit triangulum LAI, cujus crura AL, AI ſint ambo majora quadrante, dico arcum quadrantem cadere extra triangulum ut IG.

Demonſtratio. Non poteſt arcus quadrans cadere inter E & I; eſſet enim major latere AI (*per 1. 5.*) qui major quadrante ſupponitur, nec inter E & L propter eandem rationem.

Tertiò ſit triangulum IAB, ſitque IA majus, AB minus quadrante, cadet arcus quadrans inter utrumque.

Demonſtr. Si enim caderet inter I & E, eſſet major crure AI, majore quadrante, ſi inter B & F, eſſet minor crure AB, minore quadrante.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Trianguli ſpharici acutanguli quodlibet latus quadrante minus eſt.



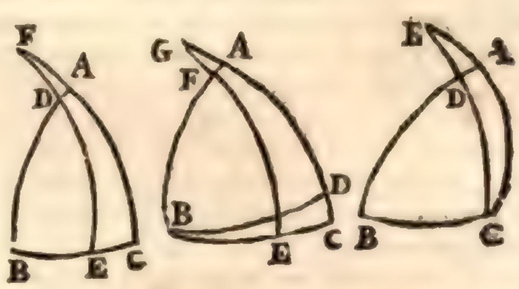
Triangulum ABC ſit acutangulum, hoc eſt ſinguli eius anguli ſint acuti; dico ſingula eius latera eſſe quadrante minora. In punctis B & C excitentur arcus perpendiculares, qui (*per 15. 1. Theod.*) concurrent in D polo circuli BC, ducatur arcus DAE, qui per primam hujus cadet intra triangulum, cum anguli ABC, ACD ſint affectionis ejuſdem.

Demonſt. In triangulo rectangulo AEC (*per 5. 5. hujus*) cum anguli ECA, EAC ſint acuti, erit baſis AC quadrante minor. Idem oſtendam de latere AB, & facta alia conſtructione de latere AB.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Trianguli cuius omnia latera ſunt quadrante maiora, vel unum quadrans, alia maiora quadrante; omnes anguli obtuſi ſunt.



Sit primò triangulum ABC cujus omnia latera ſint quadrante majora, & æqualia, clarum eſt quod erit omnifariam Iſoſceles: ergo (*per 12. 4.*) erunt omnes anguli obtuſi.

Secundò ſit ABC Iſoſceles cujus omnia latera ſint quadrante majora, eruntque (*per 12. 4.*) anguli B & C obtuſi. Abſcindantur quadrantes BE, BD, ducaturque ED concurrens cum CA, producto in F.

Demonſtr. Quia BD, BE ſunt quadrantes, B erit polus arcus ED, atque adeo anguli B & D recti erunt (*per 12. 1. Theod.*) & DE menſura anguli B obtuſi erit major quadrante; CA autem ſupponitur major quadrante, ſunt igitur arcus FD, FA

FA minores ſemicirculo, ergo (*per* 11.4 *huius*) angulus D rectus major eſt oppoſito D A F, ergo reliquus DAC erit obtuſus.

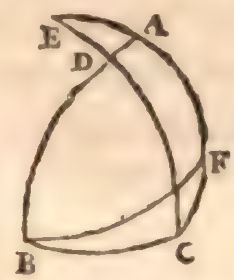
Tertiò ſit ſcalenum triangulum ABC, ſitque AC latus majus latere AB, abſcindatur AD illi æquale, & quia AB eſt majus quadrante, etiam AD majus erit quadrante; quare per ſuperiorem caſum angulus A B D erit obtuſus, multò magis ABC. Ex BA & BC majoribus quadrante, abſcindantur quadrantes BE, BF, ducaturque arcus EF, concurrens cum CA producto in G, eruntque anguli F & E recti, & E F menſura anguli obtuſi ABC major quadrante; AC item ſupponitur majus quadrante.

Demonſtr. Erunt arcus AG, FG, minores quadrante: ergo (*per* 11.4. *huius*) angulus externus F qui rectus eſt, major erit oppoſito FAG, qui conſequenter acutus erit; ergo reliquus FAC obtuſus erit.

Quartò ſit triangulum Iſoſceles ABC, cujus duo latera AB, AC ſint æqualia, & majora quadrante, & BC quadrans, dico omnes angulos obtuſos eſſe. Id conſtat (*per* 11.4.) de angulis ABC, ACB; reſtat id probandum de angulo BAC. Abſcindatur BD quadrans, ducaturque arcus CDE, concurrens cum C A producto in E; eritque B polus circuli CDE (*per* 11.1.*Theod.*) & angulus D rectus. Item arcus DC menſura anguli B obtuſi, erit major quadrante, ergo arcus FG, AG erunt ſinguli minores quadrante.

Demonſtr. (*Per* 11.4.*huius*) cum latera E D, EA ſint minora ſemicirculo, angulus externus D qui rectus eſt, major erit interno EAD, qui propterea acutus erit, & reliquus DAC obtuſus erit.

Quintò AB, AC ſint inæqualia, AC majus, &



ambo majora quadrante, & B C quadrans. Abſcindatur BD quadrans, & ex B ut polo deſcribatur arcus CD, concurrens cum CA producto in E, abſcindatur AF, æquale AB, ducaturque BF. Eritque (*per* 12.4.*huius*) angulus ABF obtuſus, multò magis ABC; erit item angulus D rectus, & CD, menſura anguli obtuſi major quadrante, ſicut & CA; quare reliqui arcus DE, AE erunt minores quadrante.

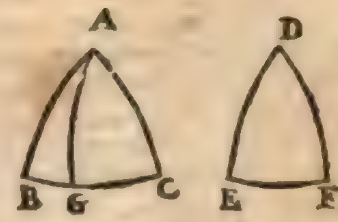
Demonſtr. (*Per* 11. 4.) angulus externus D qui rectus eſt, major erit angulo oppoſito DAE, qui conſequenter acutus erit, ergo reliquus BAC obtuſus erit; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Si duo triangula habeant duos angulos ſingillatim æquales, unumque latus angulo æquali oppoſitum æquale, reliquum alteri angulo æquali oppoſitum ejuſdem affectionis, non tamen quadrans; erunt triangula omnimodo æqualia.

Sint in triangulis ABC, DEF, anguli C & F; B & E ſingillatim æquales, item latus DF lateri AC æquale, & DE, AB ejuſdem affectionis, non tamen quadrantes; dico reliqua omnia æqualia eſſe.



Si enim non ſunt; ſit BC majus, abſciſſoque CG, æquali ipſi EF, ducatur AG.

Demonſtratio. Triangula A C G, DFE (*per* 4. 4.) ſunt omnino æqualia; ergo anguli AGC, & E, æquales ſunt; ſed E, & B ſunt æquales; ergo AGC, & B ſunt æquales: ergo (*per* 11. 4.) AB, AG, ſeu DE ſunt æqualia ſemicirculo, & cum non ſint quadrantes, ſi unum ſit majus quadrante, alterum quadrante minus erit, quod eſt contra ſuppoſitionem, cum dicantur affectionis ejuſdem.

COROLLARIUM I.

Ex hoc ſequitur quod ſi in triangulo ABC detur latus AC, cum duobus angulis C & B, poſſit quidem inſtitui analogia, ut ſinus anguli B ad ſinum anguli C, ita latus AC ad quartum, qui erit ſinus tam lateris AB, quam AG; ſunt autem AB, AG ſupplementa. Quod ſi ſciatur an latera A B, A C ſint affectionis ejuſdem, ſolvetur ambiguitas.

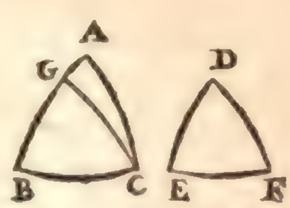
COROLLARIUM II.

Si punctum A eſſet polus lateris BC, ita ut arcus AC, AB, AG eſſent quadrantes, triangulum eſſet quadrantale, atque adeo calculo non indigeret.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Ea triangula ſunt omni modo æqualia, quæ unum angulum æqualem habent, unà cum lateribus circa alium angulum, modò tertius angulus in utroque ſit affectionis ejuſdem, non tamen recti.



In triangulis ABC, DEF ſint anguli B & E æquales, ſintque latera BC, EF, CA, FD æqualia, item anguli A & D ſint affectionis ejuſdem, non tamen recti, dico reliqua omnia eſſe æqualia. Si enim latus AB majus eſſet latere DE, abſcindatur BG æquale ipſi DE, ducaturque arcus CG.

Demonſtratio. (*Per* 4.4. *huius*) triangula BGC DEF ſunt omnino æqualia; ergo latera CG, EF ſunt

ſunt æqualia, ſed EF, AC ſupponebantur æqualia; ergo CG, CA ſunt æqualia; ergo (*per 5. 4. huius*) anguli A & CGA ſunt æquales; ſed CGA, & CGB ſunt duobus rectis æquales; ergo anguli CGB ſeu D & A erunt duobus rectis æquales; ergo non affectionis ejuſdem; contra ſuppoſitionem.

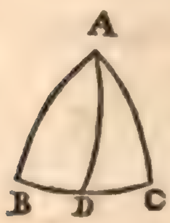
COROLLARIUM.

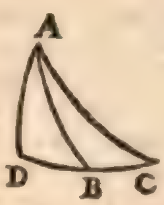
Patet in triangulo non ſufficere ut dentur duo latera, & angulus uni eorum oppoſitus, niſi aliquid aliud cognoſcatur ad ſolvendam ambiguitatem.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

In triangulis obliquangulis demiſſa perpendiculari ita erunt reciproce ſinus ſegmentorum baſis, ut tangentes angulorum baſi adjacentium reciproce.





In triangulo ABC, demiſſa perpendiculari AD, dico ita eſſe ſinum arcus BD ad ſinum arcus DC, ut tangens anguli C, ad tangentem anguli B.

Demonſtratio. (*Per 2. 5. huius*) in triangulo ABD, rectangulo in D, ita eſt ſinus totus ad ſinum arcus BD, ut tangens anguli B ad tangentem perpendic. AD, & (*per eandem*) in triangulo ADC, ita eſt ſinus lateris AD ad ſinum totum, ut tangens AD ad tangentem anguli C; ergo ita diſponi poſſunt in perturbata ratione

Sinus DC tangens B,
Sinus totus tangens AD,
Sinus BD tangens C.

Ergo ſubductis mediis ita erit ſinus DC ad ſinum BD, ut tangens anguli B ad tangentem anguli C; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

In triangulis obliquangulis demiſſa perpendiculari, tangentes ſegmentorum baſis proportionales ſunt tangentibus partium anguli verticalis.

Vide figuram præcedentem.

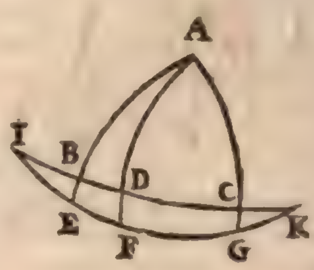
In triangulo ABC demiſſa perpendiculari AD, dico ita eſſe tangentem arcus BD ad tangentem arcus DC, ſicut tangens anguli BAD ad tangentem anguli CAD.

Demonſtratio. (*Per 2. 5. huius*) in triangulo rectangulo BAD, ita eſt ſinus totus ad ſinum lateris AD, ut tangens anguli BAD ad tangentem BD; ita pariter in triangulo CAD ita eſt ſinus totus ad ſinum lateris AD ut tangens anguli CAD ad tangentem lateris CD; ergo ita eſt tangens BAD ad tangentem BD, ut tangens CAD ad tangentem CD; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

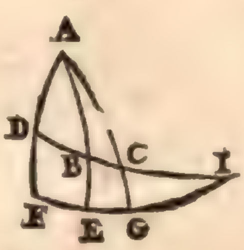
In obliquangulis demiſſa perpendiculari ita ſunt ſinus complementorum partium anguli verticalis, ſicut tangentes complementorum laterum.



In triangulo ABC, cadat primò perpendicularis AD intra triangulum, dico ita eſſe ſinum complementi anguli BAD ad ſinum complementi anguli CAD, ſicut tangens complementi AB, ad tangentem complementi AC, perficiantur quadrantes AE, AF, AG, & ex A ut polo deſcribatur maximus circulus EFG, concurrens cum BC, in K, & I, eruntque ID, DK, IF, FK, quadrantes, & anguli E, & G recti, (*per 15. 1. Theod.*)

Demonſtr. (*Per 2. 5. huius*) in triangulo rectangulo IBE, ita eſt ſinus totus ad tangentem anguli I ſeu arcus FD, ut ſinus EI, complementi EF, ſeu anguli BAD, ad tangentem BE complementi AB. Pariter in triangulo CKG, ita eſt ſinus totus ad tangentem anguli K, ſeu arcus FD, ſicut ſinus GK, complementi FG, ſeu anguli DAC, ad tangentem CG, ſeu complementi AC, ergo ut ſinus complementi anguli BAD ad tangentem complementi AB; ita ſinus complementi DAC ad tangentem complementi AC; quod erat demonſtrandum.

Si perpendicularis AD cadat extra triangulum



ABC; perfectis quadrantibus AF, AE, AG, deſcriptoque circulo FI, ex A ut polo, donec concurrant cum DC producto in I, erunt quadrantes FI, DI, & anguli F, E, G recti.

Demonſtr. (*per 2. 5. huius*) in triangulo CGI, ita eſt ſinus GI, complementi arcus FG, ſeu anguli FAG, ad tangentem CG, complementi lateris AC, ſicut ſinus arcûs EI, complementi arcûs FE, ſeu anguli DAB, ad tangentem EB complementi lateris AB.

Licèt autem aſſumpſerimus latera minora quadrante,

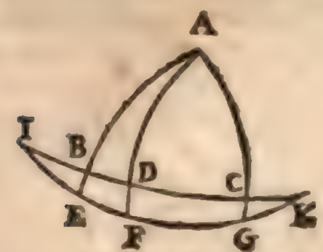
Digitized by Google

drante, id etiam veriſſimum eſt, ſi aſſumantur latera majora quadrante.

PROPOSITIO X.

Theorema.

In obliquangulis demiſsâ perpendiculari ita ſunt ſinus complementorum laterum; ut ſinus complementorum ſegmentorum baſis.



In eadem figura dico ita eſſe ſinum complementi AB ad ſinum complementi BD, ut ſinus complementi AC ad ſinum complementi CD.

Demonſtr. (*Per 1.5.hujus*) In triangulo rectangulo IBE, ita eſt ſinus totus, ſeu quadrantis ID, aut anguli recti E, ad ſinum anguli I, ſeu arcûs DF, complementi perpendicularis, ut ſinus IB complementi ſegmenti BD, ad ſinum BE, complementi lateris AB. Pariter in triangulo KCG, ita eſt ſinus totus ad ſinum anguli K, ſeu menſuræ eius lateris DF, ut ſinus CK, complementi ſegmenti DC ad ſinum CG, complementi lateris AC, ergo ut ſinus complementi BD, ad ſinum complementi AB, ita ſinus complementi DC, ad ſinum complementi AC; quod erat demonſtrandum.

Idem in 2 figura demonſtrari poteſt cum perpendicularis cadit extra triangulum.

COROLLARIUM.

Ita eſt ſinus complem. BD ad ſinum complementi AB, ut ſinus totus ad ſinum complementi perpendicularis AD.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

In obliquangulis demiſsâ perpendiculari ita ſunt reciprocè tangentes laterum, ut ſinus complementorum angulorum verticalium.

Vide figuram præcedentem.

In eadem figura dico ita eſſe ſinum complementi BAD ad ſinum complementi CAD, ut tangens AC ad tangentem AB.

Demonſtratio. (*Per 9.*)
ita eſt ſinus complementi BAD
ad ſinum complementi CAD,
ut tangens complementi AB
ad tangentem complementi AC.

Sed (*per 25.1.hujus*) tangentes arcuum tangentibus complementorum ſunt reciprocè proportionales ideoque
Ut tangens complementi AB
ad tangentem complementi AC,
ita tangens arcus AC
ad tangentem arcus AB.

Ergo ita erit
Sinus complementi BAD,
ad ſinum complementi CAD,
ſicut tangens AC
ad tangentem AB; quod erat demonſtr.

PROPOSITIO XII.

Theorema.

In obliquangulis demiſsâ perpendiculari erunt ſinus angulorum verticalium ſinubus complementorum angulorum ad baſin proportionales.

Vide figuram præcedentem.

Sit triangulum ABC, ſitque perpendicularis AD, dico ita eſſe ſinum anguli DAB ad ſinum complementi anguli B, ſicut ſinus anguli CAD, ad ſinum complementi anguli C.

Demonſtr. (*Per 9.5.hujus*)
Ut ſinus complementi anguli B
ad ſinum alterius anguli BAD,
ita ſinus complementi lateris AD
ad ſinum totum.
Sed pariter in triangulo ADC
Ita erit ſinus complementi anguli C
ad ſinum anguli CAD,
ſicut ſinus complementi AD
ad ſinum totum.
Ergo ita erit ſinus complementi B
ad ſinum anguli BAD,
ut ſinus complementi C
ad ſinum anguli CAD; quod erat demonſtrandum.

Idem demonſtrari poteſt cum perpendicularis cadit extra triangulum.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

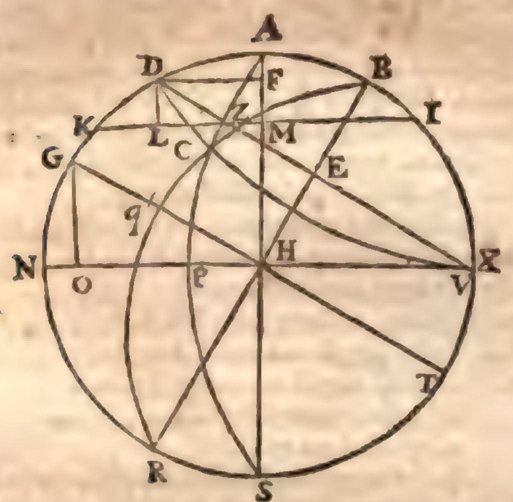
In triangulis ſphæricis, ita eſt rectangulum ſub ſinubus crurum, ad quadratum radii; ut differentia inter ſinum verſum baſis, & ſinum verſum differentiæ crurum, ad ſinum verſum anguli verticalis.

Proponitur triangulum ſphæricum ABC, cujus crura AB, BC, baſis AC; angulus oppoſitus baſi qui verticalis dicitur ABC, dico ita eſſe rectangulum comprehenſum ſub ſinubus crurum AB, BC, ad quadratum radii, ſicut differentia quæ eſt inter ſinum verſum baſis AC, & ſinum verſum differentiæ crurum, ad ſinum verſum anguli verticalis ABC.

Conſtructio. Perficiatur circulus ABR, ducantur item ſemicirculi ACS, BCR, & ducantur diametri AS, BR, quibus ſint perpendiculares GT, NX, tum ex polo B intervallo BC deſcribatur parallelus DCV, cujus in plano ABR, ſit diameter DV, erit autem DV diameter cum circulus ABR per polum eius B tranſeat, atque adeo eum bifariam dividat, punctum igitur C eſt in ſuperficie ſphæræ.

Item ex puncto A ut polo intervallo AC, deſcribatur parallelus KCI, (qui ductus non eſt vitandæ confuſionis gratiâ) eius diameter erit KI, ſecans priorem diametrum in puncto Z, linea ZC erit

erit communis ſectio illorum parallelorum, qui cum ſint recti ad planum circuli ABR, per



eorum polos tranſeuntis, linea CZ erit perpendicularis ad planum ABR (*per 19. 11. Eucl.*) atque adeo anguli CZK, CZD recti erunt. Eritque ZD, ſinus verſus arcus CD paralleli DCV, qui arcus CD eſt totidem graduum ac angulus ABC. Ex puncto D ducantur DF, DL perpendiculares ad lineas AS, KI, item GO perpendicularis ad NX, ſitque Gq ſinus verſus anguli ABC, ſumptus in diametro ſphæræ, ſicut ZD erat ſinus verſus arcus totidem graduum ſumptus in parallelo.

Præparatio. Quia BG, AN ſunt quadrantes ablato communi AG, erunt arcus BA, GN æquales, eſt ergo GO ſinus arcus AB.

Item quia ex polo B ductus eſt parallelus DCV, erunt arcus BC, BD æquales, & BE ſinus arcus BD, aut BC.

Item AD erit differentia crurum AB, BC, & AF ejus ſinus verſus. Pariter erunt AK, AC æquales cum ex polo A, deſcriptus ſit parallelus KCI, & KD, erit exceſſus quo baſis AC, ſuperat AD differentiam crurum, MA eſt ſinus verſus arcus AK, ſeu baſis AC, quare erit FM ſeu DL differentia inter MA, ſinum verſum baſis AC, & FA ſinum verſum differentiæ crurum. Debeo igitur probare rectangulum comprehenſum ſub DE, GO, ſinus crurum AB BC, ita eſſe ad quadratum radii GH, ut DL, differentia inter ſinus verſos, MA, FA, baſis & differentiæ crurum ad Gq ſinum verſum anguli verticalis ABC.

Demonſtratio. Triangula DZL, GHO ſunt æquiangula propter parallelas DZ, GT; DL, GO: ergo (*per 4. 6. Eucl.*) ita erit GO ad GH, ut DL ad DZ, eſt item DE ad GH, ut DZ ad Gq, cum DZ & Gq ſint ſinus verſi ejuſdem anguli aut arcûs DZ quidē in parallelo, & Gq in circulo maximo, ſic ſe habent ut diametri circulorum (*per 1. 1. Trigon.*) Rectangulum autē ſub DE, GO, ad quadratum radii, nempe rectangulum ſub GH, GH componitur ex ratione GO ad DH, ſeu DL ad DZ, cum ſit æqualis, & DE ad GH, ſeu DZ ad Gq, ergo rectangulum ſub GO, DE ad quadratum radii DH, eſt in ratione compoſita ex ratione DL ad DZ, & DZ ad Gq, quæ ratio compoſita, eſt ratio DL ad DZ. Ergo rectangulum ſub DO, DE, ſinubus crurum, eſt ad quadratum radii GH, ut DL differentia inter ſinus verſos baſis & differentiæ crurum, ad Gq ſinum verſum anguli ABC; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

In triangulis omnibus, ita eſt rectangulum ſub ſinubus crurum, ad quadratum radij, ut differentia inter ſinum complementi baſis, & ſinum complementi differentiæ crurum, ad ſinum verſum anguli verticalis.

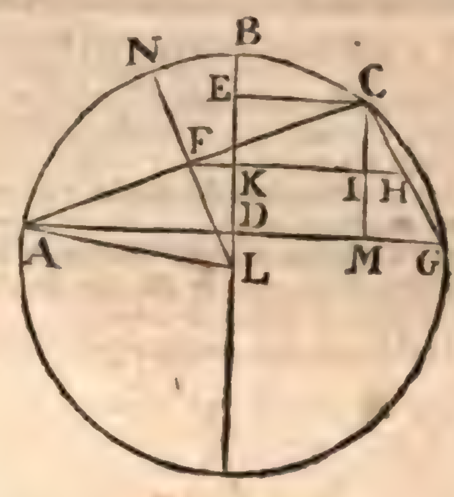
Linea DL ſeu FM, eſt etiam differentia inter FH, ſinum arcus DN, ſcilicet complementi AD differentiæ crurum, & ſinus MH ſinus arcus KN, complementi baſis AC, ſeu AK,

Ita erit rectangulum ſub ſinubus crurum
ad quadratum radii,
ut differentia ſinuum complementorum
baſis, & differentiæ crurum
ad ſinum verſum anguli verticalis.

L E M M A.

Ita eſt ſinus totus, ad ſinum ſemiſummæ duorum arcuum; ut ſinus ſemidifferentiæ eorum, ad ſemiſſem differentiæ ſinuum verſorum.

Sint duo arcus AB, BC, ſitque ſumma eorum ABC, ducatur linea AC, quæ bifariam dividatur



in F, ducaturque ex centro L linea LF, eritque FC ſinus ſemiſummæ, ſit BK æqualis AB eritque CG, differentia arcuum BG, ſeu AB. BK, ducatur CG, quæ bifariam dividatur in H, jungaturque FH, & ex C demittatur perpendicularis ad AG, ſicut CE; AG ſunt perpendiculares ad LB. erit CH ſinus ſemidifferentiæ, & EK ſemiſſis lineæ ED, quæ eſt differentia ſinus verſorum DB, BE. Oſtendo primò CI eſſe ſemiſſem lineæ CM, cum enim ſit ut CF ad FA, ita CH ad HG, erit (*per 2.6.*) FH parallela AG, & (*per 4.6.*) erit ut CH ad HG, ita CI ad IM. Primæ autem ſunt factæ æquales; ergo, & ſecundæ. Debeo igitur probare ita eſſe radium AL ad AF, ſicut CH ad CI.

Demonſtr. Angulus ALN in centro inſiſtens arcui AN, & angulus CGA in peripheria inſiſtens arcui duplo ANC, ſunt æquales, quare triangula rectangula ALF, CMG aut CIH ſunt æquiangula, ergo

Ita eſt radius AL
ad AF ſinum ſemiſummæ,
ut CH, ſinus ſemidifferentiæ arcuum
ad CI ſemidifferentiam ſinuum verſorum
DB, EB.

COROLLARIUM.

Ita eſt quadratum radii, ad rectangulum ſub ſinubus ſemiſumma, & ſemidifferentiæ duorum arcuum, ut diameter ad differentiam ſinuum verſorum.

Hoc corollarium à Cavalerio proponitur; facilius autem à me ſic demonſtratur.

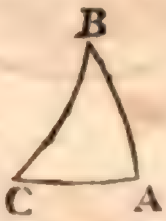
Ita eſt radius
ad ſinum dimidiæ ſummæ;
ut ſinus dimidiæ differentiæ
ad dimidiam differentiam ſinuum verſorum.

Ergo rectang. ſub radio & ſub ſemidifferentia ſinuum verſorum (*per* 16.6.*Eucl.*) æquale eſt rectangulo ſub ſinu ſemiſummæ, & ſub ſinu ſemidifferentiæ arcuum; ſed quadratum radii, ad rectangulum ſub radio & ſub ſemidifferentia ſinuum verſorum, eſt (*per* 1. 6.) ut radius, ad ſemidifferentiam ſinuum verſorum, aut ut diameter ad totam differentiam, ergo etiam ita erit quadratum radii, ad rectang. ſub ſinubus ſemiſummæ, & ſemidifferentiæ arcuum, ut diameter ad differentiam ſinuum verſorum; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

In omni triangulo,
Ita eſt rectangulum ſub ſinubus crurum
ad quadratum radii,
ut rectangulum ſub ſinu ſemiſumma baſis & differentia crurum, & ſub ſinu ſemidifferentiæ baſis, & differentiæ crurum,
ad quadratum ſinûs dimidii anguli verticalis.



Proponatur triangulum ABC, cujus ſint crura AB 24, BC 30 graduum, baſis AC 42, differentia laterum eſt gr.6. ſumma baſis & differentiæ crurum eſt 48, ſemiſumma 24, differentia inter baſin 42, & differentia crurum 6 eſt 36, ſemidifferentia eſt 18, dico

ita eſſe rectangulum ſub cruribus AB 24, & BC 30
ad quadratum radii,
ſicut rectangulum ſub ſinu 24 ſemiſummæ ex baſi, & ex differentia crurum & ſub ſinu 18 ſemidifferentiæ inter baſin, & differentiam crurum,
ad quadratum ſinûs dimidii anguli verticalis.

Demonſtratio. (*Per* 13.)

Ita eſt rectangulum ſub ſinubus crurum
ad quadratum radii,
ut differentia ſinuum verſorum baſis, & differentiæ crurum,
ad ſinum verſum anguli verticalis, & ſumpto radio pro communi altitudine, ita etiam erit (*per* 1. 6.*Eucl.*) rectang. ſub radio, & differentia ſinuum verſorum baſis, & differentiæ crurum, ad rectangulum ſub radio, & ſinu verſo anguli verticalis; & eorum dimidia in eadem ratione erunt. Nempe rectangulum ſub radio, & ſemidifferentia ſinuum verſorum baſis, & differentiæ crurum, ad rectangulum ſub ſemiradio, & ſinu verſo anguli verticalis, & eorum æqualia in eadem ratione erunt. Nempe (*in coroll. ſuperiori*) oſtendimus rectangulum ſub radio, & ſemidifferentia ſinuum verſorum, æquale eſſe rectangulo ſub ſinu ſemiſummæ, & ſub ſinu ſemidifferentiæ.

Ex alia verò parte cum (*per* 1.*coroll.*4. 1.*huius*) ſinus dimidii arcus, aut anguli, ſit medius proportionalis inter dimidium radium, & ſinum verſum arcûs totius; rectangulum ſub dimidio radio, & ſinu verſo anguli verticalis æquabitur quadrato ſinûs dimidii anguli verticalis. Quare erit

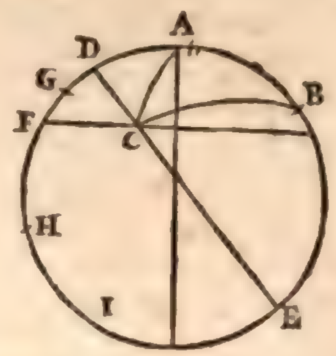
Ut rectangulum ſub ſinubus crurum
ad quadratum radii,
ita rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ ex baſi, & ex differentia crurum, & ſub ſinu ſemidifferentiæ inter eandem baſin, & differentiam crurum,
ad quadratum ſinûs ſemianguli verticalis; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XV.

Theorema.

In omni triangulo
ita eſt rectangulum ſub ſinubus crurum
ad quadratum radii;
ut rectangulum ſub ſinubus differentiarum crurum à ſemiſumma omnium laterum,
ad quadratum ſinus dimidii anguli verticalis.

Sint trianguli ABC, crura AB, BC ſitque baſis AC, ſupponatur eſſe facta ſumma, & ſemiſumma



omnium laterum, à quâ ſingillatim ſubducantur ſingula crura, ut fiat eorum differentia à ſemiſumma; dico ita eſſe rectangulum ſub ſinubus crurum ad quadratum radii, ut rectangulum ſub ſinubus differentiarum crurum AB, BC à ſemiſumma, ad quadratum ſinûs dimidii anguli verticalis ABC.

Cruri BC, ſint æquales arcus BD, BE; & baſis AC, arcui AF; eritque AD, differentia crurum; addatur FH, æqualis arcui AD, ſeu differentiæ crurum, tum FD dividatur bifariam in G, ſit item FI, æqualis cruri BC. Arcus AH eſt ſumma baſis AC, ſeu AF, & differentiæ crurum AD, & AG eius dimidium, erit ſemiſumma baſis, & differentiæ crurum. Pariter arcus BDI eſt ſumma omnium laterum, nempe FI, ſeu BC; FA, ſeu AC & ipſius

Digitized by Google

ipſius AB & BG ſemiſumma, cum FG, & GD ſint æquales. ergo AG, quæ prius erat ſemiſumma baſis & differentiæ crurum, eſt differentia cruris AB à ſemiſumma omnium crurum.

Item GD quæ prius erat ſemidifferentia baſis AF & differentiæ crurum, eſt differentia lateris BC, à ſemiſumma BG.

Demonſtratio. (*Per præcedentem*)
ita eſt rectangulum ſub ſinubus crurum
ad quadratum radii,
ut rectangulum ſub ſinubus ſemiſummæ ex baſi & differentia crurum, & ſub ſinu ſemidifferentiæ quæ eſt inter baſin & differentiam crurum,
ad quadratum ſinus ſemianguli verticalis.

Sed AG ſemiſumma baſis & differentiæ crurum, eſt differentia cruris BA à ſemiſumma laterum, & GD ſemidifferentia baſis & differentiæ crurum eſt differentia cruris BC ab eadem ſemiſumma.

Ergo ita eſt rectangulum ſub ſinubus crurum
ad quadratum radii,
ut rectangulum ſub ſinubus differentiarum crurum à ſemiſumma omnium laterum,
ad quadratum ſinûs ſemianguli verticalis.

COROLLARIUM.

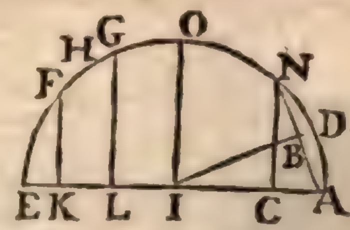
Vt quadratum radii
ad rectangulum ſub ſecantibus complementorum crurum,
ita rectangulum ſub ſinubus differentiarum crurum à ſemiaggregato laterum omnium
ad quadratum ſinûs dimidii anguli verticalis.

Demonſtratio. Ratio rectanguli ſub ſinubus crurum ad quadratum radii componitur ex ratione primi ſinus ad radium, & ſecundi ſinus ad radium; ſed ut primus ſinus ad radium, ita radius ad ſecantem complementi eius; & ut ſecundus ſinus ad radium (*per* 17.1.*hujus*) ita etiam radius ad ſecantem complementi ſecundi; & præterea ratio quæ eſt inter quadratum radii, & rectangulum ſub ſecantibus complementorum crurum, componitur ex rationibus radii ad ſingulas ſecantes, ſeu ex iiſdem rationibus ſingulorum ſinuum ad radium, ergo ita eſt rectangulum ſub ſinubus crurum ad quadratum radii, ut quadratum radii ad rectangulum ſub ſinubus ſecantium complementorum crurum; ergo
Ita eſt quadratum radii
ad rectangulum ſub ſecantibus complementorum crurum,
ut rectangulum ſub ſinubus differentiarum crurum à ſemiſumma omnium laterum
ad quadratum ſinûs ſemianguli verticalis.

LEMMA II.

Vt quadratum ſinûs alicujus arcûs
ad rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ, & ſinu ſemidifferentiæ aliorum duorum arcuum,
ita ſinus verſus arcûs dupli illius primi
ad differentiam ſinuum verſorum poſteriorum arcuum.

Sit AB ſinus arcûs AD, & CA ſinus verſus arcûs dupli. Sint item arcus EF, EG, addaturque GO æqualis EF, & differentia eorum FG bifariam dividatur in H; eritque EO ſumma, & EH eorum ſemiſumma, LE ſinus verſus majoris EG, & KE minoris EF; KL erit differentia ſinuum verſorum: ubi notandum eſt ſicut & in propoſitionibus ſe-



quentibus, ſinum verſum anguli obtuſi eſſe majorem radio, exempli gratia, ſinum verſum arcûs GA eſſe LA,

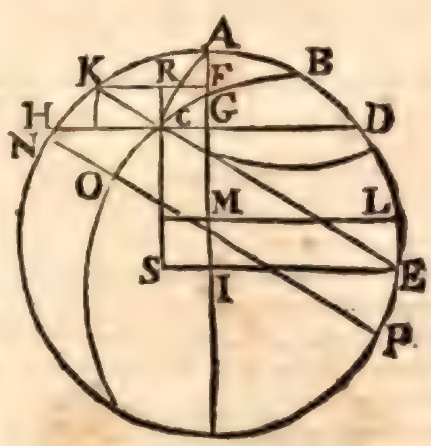
Dico ita eſſe quadratum AB
ad rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ EH & ſub ſinu ſemidifferentiæ FH,
ut CA ſinus verſus arcûs dupli
ad KL differentiam ſinuum verſorum.

Demonſtratio. Ut CA ad KL, ſumpto ſemiradio pro communi altitudine, ita (*per* 1.6.) rectangulum ſub ſemiradio, & ſub CA, ad rectangulum ſub ſemiradio & ſub KL, ſeu ad rectangulum ſub toto radio & ſub dimidia KL; ſed primo rectangulo ſeu antecedenti rationis, æquale eſt quadratum AB (*per* 1. *corol.*4. 1.*huius*) & ſecundo rectangulo ſeu conſequenti rationis æquale eſt rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ EH, & ſub ſinu ſemidifferentiæ FH (*per lemma primum.*)
Ergo ut quadratum AB
ad rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ EH, & ſinu ſemidifferentiæ FH,
ita CA
ad KL; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

In omni triangulo differentia ſinuum verſorum baſis, & differentiæ crurum, eadem eſt cum differentia ſinuum verſorum baſis, & ſummæ crurum trianguli coalterni.



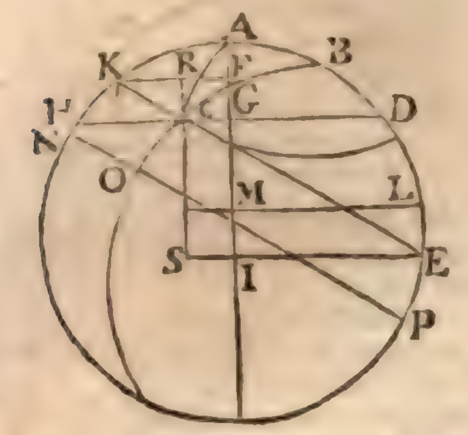
Voco triangulum coalternum, qui æqualia habet crura, ſed angulus verticalis eſt complementum ad duos rectos anguli verticalis alterius cum quo comparatur.

Sit ergo triangulum ABC, cujus crura AB, BC, angulus verticalis ABC; ſit item alius triangulum CBD, cujus crura CB, BD ſint æqualia cruribus AB, BC, & angulus verticalis CBD ſit ſupplementum ad duos rectos anguli ABC, & baſis ſit DC, reliqua hypotheſis eadem eſt ac in (*prop.*15. *hujus.*) In priori triangulo FG eſt differentia ſinuum

Google

ſinuum verſorum baſis AC, ſeu AH & differentiæ crurum AK.

In ſecundo AE eſt ſumma crurum cujus ſum-



mæ verſus eſt IA, ſit AL arcus æqualis baſi DC, cujus ſinus verſus MA, differentia horum ſinuum eſt MI, debeo oſtendere FG, MI æquales eſſe. Sit NO ſinus verſus anguli ABC.

Demonſtratio. (*Per 13. hujus*) ita eſt rectang. ſub ſinubus crurum AB, BC aut BC, BD, ad quadratum radii, ut FG ad NO in triangulo ABC, aut ut FM ad OP in triangulo BDC cum FA, ſit ſinus verſus differentiæ crurum quæ eadem eſt in utroque & MA ſit ſinus verſus, arcus AL quem æqualem voluimus baſi CD, ſed ut NO ad KC, ita OP ad CE, cum ſint ſinus verſi ſibi correſpódentes in circulo maximo, & in eodem parallelo, ergo ex æqualitate ordinata ut FG aut CR ad KC, ita FM ad CE, ſed ut CR ad KC, ita CS, ſeu GI ad CE, ergo FM, & GI habentes eandem rationem ad CE ſunt æquales, & ablata communi MG, reſtant FG, MI æquales; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Sequitur AF ſinum verſum differentiæ crurum, AG ſinum verſum baſis AC, AM ſinum verſum alterius baſis DC; & AI ſinum verſum ſummæ crurum, eſſe æquè differentes, ſeu Arithmeticè propoportionales.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

In omni triangulo
ut rectangulum ſub ſinubus crurum
ad quadratum radii,
ita rectangulum ſub ſinu dimidiæ ſummæ laterum omnium & ſub ſinu differentiæ baſis à ſemiſumma eadem,
ad quadratum ſinûs dimidii anguli qui ſit complementum anguli verticalis ad duos rectos, vel quod idem eſt ad quadratum ſinûs unius arcûs, qui ſit complementum dimidii anguli verticalis.

Vide figuram præcedentem.

Sit idem triangulum ABC cujus crura AB, BC baſis AC dico
ita eſſe rectangulum ſub ſinubus crurum AB, BC
ad quadratum radii
ut rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ omnium laterum, & ſub ſinu differentiæ baſis AC, ab ea ſemiſumma ad quadratum ſinus dimidii anguli CBD, qui angulus eſt complementum anguli verticalis ABC, ad duos rectos, & ſemiſſis anguli CBD, ut patet, erit complementum dimidii anguli ABD, cum hæ duæ ſemiſſes, nempe angulorum ABC & CBD, ſint æquales quadranti.

Demonſtratio. (*Per 13. hujus*) In triangulo CBD.
Ita eſt rectangulum ſub ſinubus CB, BD, ſeu AB, BC,
ad quadratum radii,
ut differentia ſinuum verſorum baſis CD, & AK differentiæ crurum, nempe linea FM, ſeu GI
ad ſinum verſum anguli CBD.

GI autem eſt etiam differentia ſinuum verſorum baſis AC, vel AH, & arcûs AE ſummæ crurum duorum AB, BE;
Ergo ut rectangulum ſub ſinubus crurum
ad quadratum radii,
ita differentia ſinuum verſorum, baſis AC, & ſummæ duorum crurum AB, BC
ad ſinum verſum anguli CBD. Sed (*per lemma ſecundum.*) Ut differentia ſinuum verſorum duorum arcuum nempe ſummæ duorum crurum, & baſis AC; ad ſinum verſum alicujus arcûs aut anguli nempe CBD, ita rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ illorum arcuum nempe baſis, & ſummæ duorum crurum, ſeu ſummæ trium laterum, & ſub ſinu ſemidifferentiæ baſis AC ſumma duorum crurum, ad quadratum ſinus dimidii arcus vel anguli CBD.
Ergo juxta mox allatam analogiam
Ut rectangulum ſub ſinubus crurum
ad quadratum radii,
ita rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ omnium laterum, & ſub ſinu differentiæ baſis AC à ſemiſumma trium laterum,
ad quadratum ſinûs dimidii anguli CBD, qui eſt complementum anguli verticalis ad duos rectos ſive ad quadratum ſinûs complementi ſemianguli verticalis; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

Ut rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ trium laterum, & ſub ſinu differentiæ baſis à ſemiſumma,
ad quadratum radii,
ita rectangulum ſub ſinubus differentiarum crurum à ſemiſumma
ad quadratum tangentis ſemianguli verticalis.

Demonſtratio. Quoniam (*per 15. hujus*) ut rectangulum ſub ſinubus crurum
ad quadratum radii,
ita eſt rectangulum ſub ſinubus differentiarum crurum à ſemiſumma trium laterum,
ad quadratum ſinus dimidii anguli verticalis.
Et (*per 17.*) ita eſt etiam rectang. ſub ſinu ſemiſummæ trium laterum, & ſub ſinu differentiæ baſis ab eadem ſemiſumma, ad quadratum ſinûs complementi dimidii anguli verticalis, igitur hæ duæ ultimæ rationes æquales erunt. Ut autem quadratum ſinus dimidii anguli verticalis, ad quadratum tangentis ejuſdem dimidii, ita eſt quadratum ſinus complementi dimidii anguli verticalis, ad quadratum radii; quadrata enim hujus analogiæ habent latera proportionalia (*per 16. 1. huius.*) Ergo ex æqualitate ordinata.

Ita erit rectangulum ſub ſinubus differentiarum crurum à ſemiſumma trium laterum, ad quadratum tangentis ſemianguli verticalis

ut

ut rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ trium laterum, & ſub ſinu differentiæ baſis ab eadem ſemiſumma ad quadratum radii; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM II.

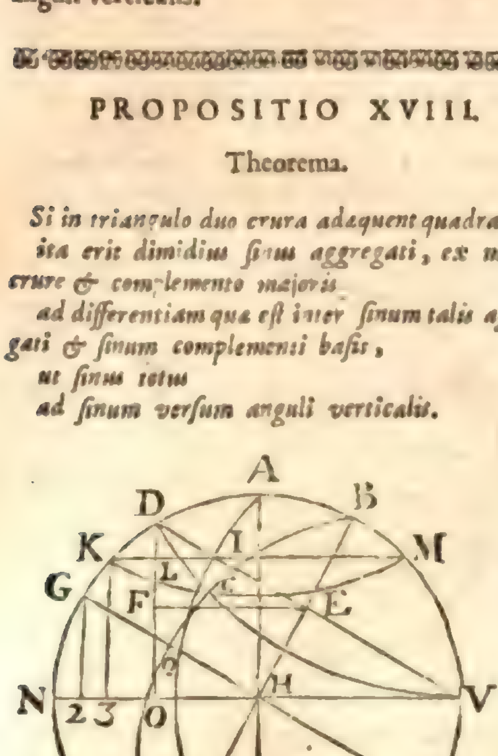
Vt rectangulum ſub ſinubus differentiarum crurum à ſemiſumma trium laterum,
ad quadratum radii,
ita rectang. ſub ſinu ſemiſummæ trium laterum & ſub ſinu differentiæ baſis ab ea
ad quadratum tangentis complementi ſemianguli verticalis.

Demonſtratio. Ita eſt rectangulum ſub ſinubus crurum
ad quadratum radii, per 15.)
ut rectangulum ſub ſinubus differentiarum crurum à ſemiſumma trium laterum
ad quadratum ſinus dimidii anguli verticalis.
Et (per 17.) ita rectangulum ſub ſinu dimidiæ ſummæ trium laterum, & ſub ſinu differentiæ baſis ab ea,
ad quadratum ſinus complementi dimidii anguli verticalis.
Ergo hæ duæ ultimæ rationes æquales ſunt.
Sed ut quadratum ſinus dimidii anguli verticalis ad quadratum radii, ita quadratum ſinus complementi dimidii anguli verticalis ad quadratum tangentis complementi ſemianguli verticalis (per 16 1.hujus) Ergo ex æqualitate ordinata, relictis mediis, ita eſt rectangulum ſub ſinubus differentiarum crurum à ſemiſumma trium laterum ad quadratum radii,
ut rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ trium laterum, & ſub ſinu differentiæ baſis ab ea,
ad quadratum tangentis complementi dimidii anguli verticalis.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Si in triangulo duo crura adæquent quadrantem,
ita erit dimidius ſinus aggregati, ex minori crure & complemento majoris
ad differentiam quæ eſt inter ſinum talis aggregati & ſinum complementi baſis,
ut ſinus totus
ad ſinum verſum anguli verticalis.



Duo crura AB, BC trianguli ABC ſimul adæquent quadrantem. Ex B ut polo intelligatur deſcribi parallelus, intervallo BC, qui tranſeat per D, & V. Sicque illius diameter DV, & arcus BC, BD, BV æquales erunt. Pariter ex A ut polo intelligatur deſcriptus parallelus, intervallo baſis AC cujus diameter ſit KM, eruntque arcus AK, AM, AC æquales, & cum crura AB, BC ſeu BV adæquent quadrantem, diameter DV tranſibit per punctum V extremitatem quadrantis AV, & cum hi paralleli V (per 15.1.Theod.) ſint recti ad circulum BAD per polos eorum tranſeuntis, communis eorum ſectio CI (per 19 11.Euclid.) erit ad planum circuli BAD recta; atque adeo angulus CID rectus erit, & ID ſinus verſus arcus CD, in parallelo, ſeu anguli verticalis ABC, ſit Gq ſinus verſus ejuſdem anguli ſumptus in diametro ſphæræ GT, ducantur diametri AS, BR, & ad ipſas perpendiculares GT, NV. Cum igitur arcus BG, AN ſint quadrantes, ablato communi GA, erunt arcus AB, GN æquales, ideoque GZ erit ſinus arcus AB. Ducantur alii ſinus K3, DO, & diviſo OD bifariam in F, ducatur FE ad centrum paralleli DCV. Item GD eſt complementum arcus BD, ſeu cruris majoris BC, ergo ND eſt aggregatum ex minori crure AB, ſeu NG, & complemento majoris, cujus aggregati DO eſt ſinus, & DF dimidius ſinus, arcus vero NK eſt complementum baſis AC, ſeu AK; DL eſt differentia, inter DO, ſinum aggregati prædicti, & K3 ſinum complementi baſis; dico ergo ita eſſe FD ad DL; ut ſinus totus GH ad Gq ſinum verſum anguli verticalis ABC.

Demonſtratio. Cum tam FD ſit ſemiſſis lineæ FO, quam DE, lineæ DV, ita erit FD ad FO ſicut DE ad EV, ergo (per 3.6.Eucl.) FE eſt parallela lineæ NV & KM, quare (per eandem) ita eſt FD ad DL, ſicut DE ad DI, ſed ut DE ad DI, ita eſt GH ad Gq, cum ſint ſinus verſi ſimilium arcuum, unus in parallelo alius in ſphæræ diametro; ergo
ita eſt FD dimidius ſinus aggregati ex minori crure, & complemento majoris
ad DL, differentiam inter talem ſinum, & K3 ſinum complementi baſis,
ut ſinus totus GH
ad Gq ſinum verſum anguli verticalis ABC; quod erat demonſtrandum.

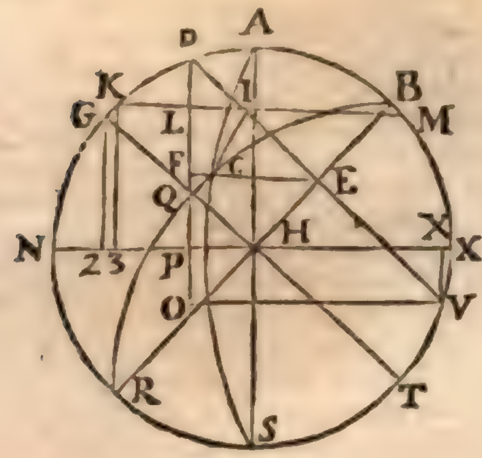
PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Si duo trianguli crura majora fuerint quadrante, erit dimidia ſumma ſinûs exceſſus eorum ſupra quadrantem & ſinus aggregati ex minori crure, & complemento majoris,
ad differentiam, quæ eſt inter ſinum hujuſmodi aggregati, & ſinum complementi baſis,
ut ſinus totus ad ſinum verſum anguli verticalis

Fiat eadem conſtructio niſi quod crura AB, BC ſimul, ſeu totum AV ſuperet quadrantem exceſſu XV, cujus ſinus VY, aut PO, PD eſt ſinus aggregati ex GN ſeu AB minori crure, & GD complemento majoris BC, ſeu BD K3 eſt ſinus arcus NK, complementi baſis AC, ſeu AK. Dico ita eſſe FD, dimidiam ipſius DO, quæ eſt ſumma ſinuum DP, & PO, ſeu VY ad DL, differentiam ſinuum PD, K3, ſicut ſinus totus GH ad GQ ſinum verſum anguli verticalis.

Demonſtratio. Cum triangula DLI, DFE ſint æquiangula, ita erit FD ad DL, ſicut DE ad DI,

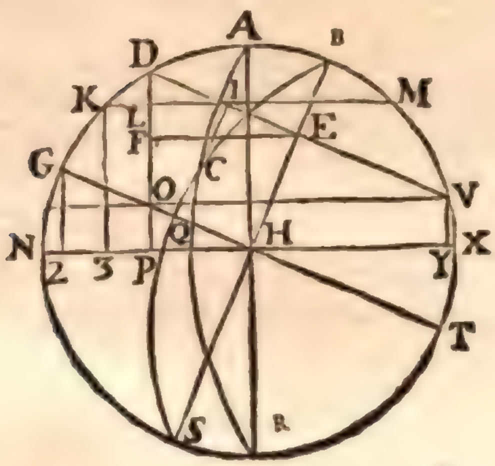


ſed ut DE ad DI; ita ſinus totus GH ad GQ, (*per* 1. 1. *hujus*) cum DI, GQ ſint ſinus verſi arcuum ſimilium; ergo ita eſt DF ad DL, ut ſinus totus ad ſinum verſum anguli verticalis; quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Si trianguli duo crura ſint minora quadrante, ablato ſinu defectus, à ſinu aggregati ex minori crure & complemento majoris; erit dimidium reliqui ad differentiam inter ſinum illius aggregati, & ſinum complementi baſis, ut ſinus totus ad ſinum verſum anguli verticalis.



Eadem conſtructione poſita demonſtratur propoſitio, niſi quod arcus AB, BC ſimul, ſeu totus arcus AV, deficiat à quadrante, erit VX defectus, & ſinus ejus VY ſeu OP, quo ſublato ex DP, ſinu aggregati ex GN, ſeu AB minori crure, & GD complemento majoris BC, ſeu BD, dico reliquæ lineæ OD dimidiam FD, ita eſſe ad LD differentiam inter DP ſinum illius aggregati, & K 3 ſinum arcus KN complementi baſis AC ſeu AK, ut ſinus totus GH ad GQ ſinum verſum anguli verticalis ABC.

Demonſtratio. Triangula DIL, DEF ſunt æquiangula: ergo ita eſt DF ad DL, ut DE ad DI, ſed ut DE ad DI, ita GH ad GQ, cum DI, GQ ſint ſinus verſi arcuum ſimilium, in parallelo & in circulo majori; ergo ita eſt DF ad DL, ut GH ad GQ; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

In triangulis rectangulis quorum crura æquantur quadranti, dimidius ſinus aggregati ex minori crure, & complemento majoris, æquatur ſinui complementi baſis, quia (*per* 18. *hujus*) ut radius ad ſinum verſum anguli verticalis qui rectus ſupponitur, ita dimidius ſinus aggregati ex minori crure, & complemento majoris, ad differentiam quæ eſt inter ſinum talis aggregati & ſinum complementi baſis; ſed duo prima ſunt æqualia; ergo & ſecunda; ergo ſinus talis aggregati excedit dimidio ſui ſinum complementi baſis. Ergo ſinus complementi baſis æqualis eſt alteri dimidio talis aggregati; quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM II.

Si trianguli rectanguli duo crura majora ſint quadrante, & addatur ſinus exceſſus ſinui aggregati ex minori crure, & complemento majoris, illius dimidium erit differentia inter ſinum complementi baſis, & ſinum aggregati, idque eandem ob cauſam.

COROLLARIUM III.

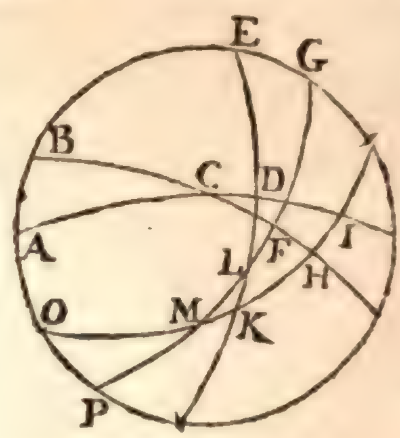
Si in triangulo rectangulo duo crura ſint minora quadrante, & auferas ſinum defectus, à ſinu aggregati ex minori crure, & complemento majoris, ſemiſſis reliqui erit differentia inter complementi baſis ſinum aggregati prædicti.

Notandum quod ſi in tribus ultimis propoſitionibus accidat lineam FD minorem eſſe linea DL, angulus verticalis obtuſus eſt, & ablato radio, ex ſinu ejus verſo reſtat ſinus complementi.

PROPOSITIO XXI.

Theorema.

Propoſito quolibet in ſphæra triangulo, datur aliud triangulum, cujus ſingula latera prioris angulis æqualia ſint, & viciſſim, mutato tamen maximo angulo in ſuum ſupplementum ad duos rectos.



Proponatur triangulum ABC, cujus maximus angulus ABC; dico quod mutato illo angulo in ſuum ſupplementum ad duos rectos, dabitur aliud in ſphæra triangulum, cujus ſingula latera æqualia ſint ſingulis angulis trianguli ABC.

Conſtructio. Ex A ut polo, intervallo quadrantis, circulus EDK deſcribatur, & ex B circulus GMP, & ex C circulus IMO. Dico triangulum MKL habere recenſitas conditiones.

Demonſtr.

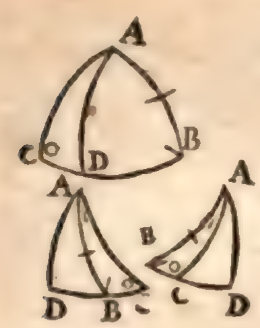
Digitized by Google

Demonſtratio. Cum anguli E, & G recti ſint (*per* 15. 1. *Theod.*) nam circulus ABG tranſit per polos A & B circulorum EL, GL; hi viciſſim concurrent in L, polo circuli ABG. Pariter cum anguli D & I recti ſint, nam circulus ACI, tranſit per polos A & C, circulorum DLK, IHK, hi circuli pariter convenient in puncto K, polo circuli ACDI. Eodem modo probo punctum M eſſe polum circuli BCH. Sunt igitur quadrantes LE, KD, & ablato communi DL, erunt arcus KL, DE, æquales; ſed DE eſt menſura anguli CAB; ergo latus KL æquale eſt angulo A. Pariter MF, LG ſunt quadrantes cum M ſit polus circuli BH, & L circuli ABEG; ergo ablato communi arcu LF, erunt ML, FG æquales; ſed FG eſt menſura anguli CBE ſupplementi ad duos rectos anguli CBA; ergo latus ML æquale eſt angulo CBG. Ita oſtendam latus MK æquale eſſe arcui HI, menſuræ anguli C; viciſſim arcus FH eſt menſura anguli M, eſt item æqualis lateri BC, cum CH, BF ſint quadrantes; DI eſt menſura anguli DKI ſupplementi ad duos rectos anguli MKL, & hic arcus DI æqualis eſt lateri AC. Denique EG eſt menſura anguli L, eſtque æqualis lateri AB.

PROPOSITIO XXII.

Problema I.

Datis duobus trianguli obliquanguli angulis, unà cum latere interpoſito, alium angulum reperire.



Cognoſcantur anguli ABC anguli A & B, cum latere AB, quæritur angulus B. Ex alterutro angulorum cognitorum, ad baſin productam ſi opus ſit, demittatur arcus perpendicularis, quæraturque in triangulo rectangulo ABD angulus DAC. (*per* 15. 5. *hujus*) hoc modo

Fiat ut ſinus totus
ad ſinum complementi lateris AB,
ita tangens anguli B
ad tangentem complementi anguli DAB.

Quo ſubducto & CAB, cognito in priori figura, vel addito ad DAB, ut in ſecundo, vel ſubducto angulo CAB ab ipſo, reſtat CAD.

Fiat ut ſinus anguli BAD
ad ſinum anguli CAD
ita ſinus complementi anguli ABC
ad ſinum complementi anguli C.

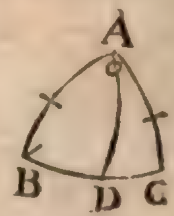
Prima analogia demonſtrata (*in* 15. 5. *hujus.*)

Demonſtratio 2. Analogiæ eſt (12. *hujus*) Sinus angulorum verticalium, ſinubus angulorum ad baſin proportionales ſunt. In tertio caſu ſumitur ſupplementum ad duos rectos anguli ACD inventi.

PROPOSITIO XXIII.

Problema II.

Datis duobus lateribus, & angulo uni eorum oppoſito, angulum ab ipſis comprehenſum invenire.



In triangulo ABC dentur duo latera AB, AC & angulus uni ipſorum oppoſitus, nempe B: quæritur angulus BAC ab ipſis comprehenſus: Primò in triangulo BAD (*per* 14. 5 *hujus*) quæratur angulus BAD, fiat enim

Ut ſinus totus
ad ſinum complementi lateris AB,
ita tangens anguli B
ad tangentem complementi anguli DAB.

Tum fiat ut tangens AC
ad tangentem AB,
ita ſinus complementi anguli BAD
ad ſinum complementi anguli DAC.

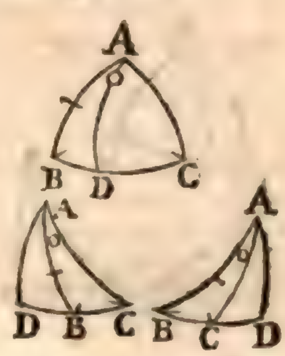
Demonſtratio. Secundæ analogiæ (*per* 11. *hujus*) tangentes laterum, ſunt reciprocè proportionales ſinubus complementorum angulorum verticalium.

In primo caſu quo perpendicularis cadit intra triangulum, anguli BAD, DAC addendi ſunt ut habeatur totus BAC, in aliis caſibus eorum differentia eſt angulus quæſitus.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Datis duobus angulis, & latere uni eorum oppoſito, tertium angulum invenire, modò ſciatur cujus ſit affectionis, vel cujus ſit affectionis latus alteri angulo dato oppoſitum.



Sint in triangulo ABC cogniti duo anguli B, & C, & latus AB oppoſitum angulo C, quæritur angulus BAC, quæratur ſicut prius, angulus DAB, hoc modo fiat. Ut ſinus totus

ad ſinum complementi AB;
ita tangens anguli B
ad tangentem complementi anguli BAD

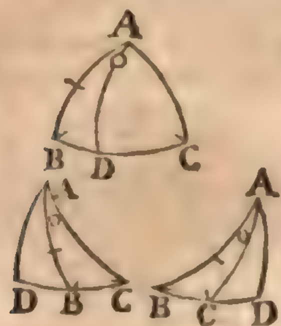
Deinde fiat

Ut ſinus complementi ABC

ad

ad ſinum complementi ACD,
ita ſinus anguli BAD
ad ſinum anguli CAD.

Si perpendicularis cadit intra triangulum, an-



guli BAD,CAD angulum quæſitum componunt, hoc eſt, ſumma illorum eſt angulus quæſitus; ſi extra, differentia inter BAD, & CAD eſt angulus BAC quæſitus.

Demonſtratio ſecundæ analogiæ eſt (*prop.12. huius.*)

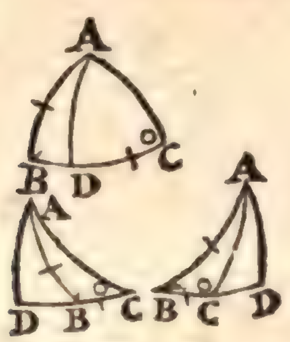
Ratio autem additæ conditionis petitur ex (*prop. 5. huius,*) ex quâ deducitur, poſſe dari ambiguitatem. Hæc tamen ambiguitas ſolvitur. Primò, in triangulo rectangulo A B D, baſis AB ſolvit ambiguitatem; nam ſi ſit minor quadrante; duo anguli BAD, & B erunt ejuſdem affectionis, & cùm B ſit cognitus,alter etiam cognoſcetur; ſi baſis AC fuerit major, erunt B, & BAD affectionis diverſæ, & cum A cognitus ſit, alter etiam cognoſcetur.

In triangulo ACD poteſt eſſe ambiguitas in cognoſcendo angulo DAC quæ ſolvitur, modò ſpecies anguli BAC; cognoſcatur, vel ſi ſciatur ſpecies lateris AC, quod in triangulo DAC rectangulo, eſt baſis, quæ ſi ſit quadrante minor erunt anguli C, & CAD affectionis ejuſdem; ſi major diverſæ (*per 5. 4. huius.*)

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Cognitis duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo, alium quemcumque angulum invenire.



Sit triangulum ABC, cujus cognoſcantur latera AB, CB, & angulus B ab ipſis comprehenſus,quæritur alius angulus C. A puncto A extremitate lateris oppoſiti angulo C demittatur perpendicularis ad aliud latus cognitum BC, productum ſi opus ſit; tum in triangulo rectangulo A B D quæratur (*per 20. 5. huius*) latus BD, fiat ergo

Ut ſinus totus
ad ſinum complementi anguli B,
ita tangens AB
ad tangentem BD

Tùm differentia inter BD, & BC eſt vel DB vel DC, addantur in ultimo caſu, tum fiat

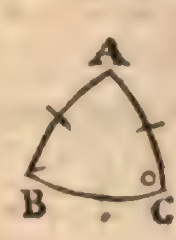
Ut ſinus CD
ad ſinum BD,
ita tangens ABD
ad tangentem ACD cujus in tertio caſu accipitur complementum ad duos rectos.

Demonſtratio. (*Per 7. huius*) ſinus ſegmentorum baſis ſunt ut tangentes angulorum baſi adjacentium reciprocè.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Cognitis in triangulo duobus lateribus, & angulo uni eorum oppoſito, cognoſcere angulum alteri lateri cognito oppoſitum, cuius ſpecies cognoſcitur.



Sint in triangulo ABC, cognita latera AB, AC; & angulus B; quæritur angulus C, cujus ſpecies cognoſcitur.

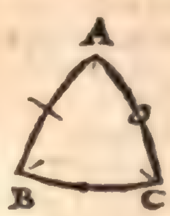
Fiat ut
Sinus A C
ad ſinum AB;
ita ſinus anguli B ad ſinum anguli C.

Demonſtratio. Eſt (*prop.1.5.huius.*)

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Cognitis duobus angulis, & latere uni eorum oppoſito, latus alteri angulo cognito oppoſitum, ſpecie tamen præcognitum invenire.



In eodem rectangulo ABC ſint dati anguli B & C, & latus AB angulo C oppoſitum quæritur latus AC cujus ſpecies cognoſcitur.

Fiat ut ſinus anguli C
ad ſinum anguli B,
ita ſinus lateris AB
ad ſinum lateris AC.

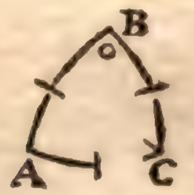
Eadem demonſtratio. (*per 1.5.huius.*)

PROPO

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Cognitis tribus trianguli Sphærici lateribus, quemlibet angulum reperire.



Multiplicem hujus problematis dabimus praxin; primò aptiſſimas, cum quis logarithmis utitur: dabimus item alias dum quis utitur ſinubus & tangentibus.

Sint igitur trianguli ſphærici ABC, tria latera data, quæraturque angulus B, qui vocetur verticalis, & AC baſis, latera AB, BC dicantur crura.

PRAXIS I.

Primò ſubducatur crus minus, à majori & habeatur differentia crurum, addaturque baſis & differentia crurum, ut habeatur ſemiſumma baſis & differentiæ crurum, item ſubducatur differentia crurum à baſi, ſi minor ſit, & habeatur ſemidifferentia baſis à differentia crurum; & hoc modo diſponantur ſemiſummæ baſis & differentiæ crurum, logarithmus ſemidifferentiæ baſis à differentiâ crurum.

Duplus logarithmus radii, hi tres addantur, ſimul; & ab eâ ſummâ ſubducantur logarithmus cruris AB,& logarithmus cruris BC, reſtabit duplus logarithmus ſemianguli verticalis qui, diviſus bifariam dabit logarithmum ſemianguli verticalis.

Demonſtratio. *Per* 14. *hujus*)

Ita eſt rectangulum ſub ſinubus crurum,

Ad quadratum radii;

Ut rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ baſis, & differentiæ crurum; & ſub ſemidifferentia baſis à differentia crurum; ad quadratum ſinus ſemianguli verticalis.

Logarithmus rectanguli ſub ſinubus crurum, æqualis eſt duobus logarithmis ſinuum crurum.

Logarithmus quadrati radii eſt duplus logarithmus radii, ut vidimus cum de logarithmis.

Igitur ſi à ſumma dupli logarithmi radii, & logarithmorum ſemiſummæ, & ſemidifferentiæ baſis, & differentiæ crurum auferas logarithmos ſinuum crurum, reſtabit logarithmus quadrati ſinus ſemianguli verticalis.

PRAXIS II.

Loco logarithmorum ſemiſummæ baſis,& differentiæ crurum &c. fiat ſem ſumma trium laterum, & ab eâ ſemiſummâ, aufer ſingillatim duo crura, ut habeantur crurum differentiæ ab eâ ſemiſumma.

Adde { Ponaturque duplus logarithmus radii
Sinus differentiæ cruris AB. à ſemiſumma logarithmus.
Sinus differentiæ cruris BC logarithmi.

Et ex ea ſumma aufer logarithmos utriuſque cruris, reſtabit logarithmus quadrati ſinus, ſemianguli verticalis.

Demonſtratio. (*Prop.*15 *hujus*) vidimus ita eſſe rectangulum ſub ſinubus crurum ad quadratum radii: ſicut rectangulum ſub ſinubus differentiarum crurum, à ſemiſumma trium laterum;

Ad quadratum ſinus ſemianguli verticalis.

Ideóque debet fieri regula proportionum logarithmica.

PAAXIS III.

Fiat ſemiſumma trium laterum AB, BC, AC à qua auferatur baſis,ut habeatur differentia baſis.

Adde { Ponantur duplus logarithmus radii,
Sinus ſemiſummæ trium laterum logarithmus,
Differentiæ baſis logarithmus,

Hæc tria ſimul addantur, & ab eorum ſumma ſubtrahantur logarithmi ſinuum crurum, & habebitur logarithmus quadrati, ſinus ſemianguli verticalis, hoc eſt logarithmus, quo diviſo bifariam, quotiens erit logarithmus complementi ſemianguli verticalis.

Demonſtratio patet (*ex* 17. *hujus*) quæ oſtendit ita eſſe rectangulum ſub ſinubus crurum ad quadratum radii, ut rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ trium laterum, & ſub ſinu differentiæ baſis, ad quadratum complementi ſemianguli verticalis.

PRAXIS IV.

Adde { Duplum logarithmum radii, &
Logarithmum differentiæ cruris AB, à ſemiſumma trium laterum
Et logarithmum differentiæ cruris BC.

Et à ſumma horum trium logarithmorum ſubtrahe logarithmum ſemiſummæ trium laterum,& logarithmum differentiæ baſis: relinquetur logarithmus quadrati tangentis ſemianguli verticalis.

Demonſtr. (*In coroll.*1.17.*hujus*) demonſtravimus ita eſſe rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ trium laterum, & ſub differentia baſis, ad quadratum radii, ut rectangulum ſub ſinubus differentiarum crurum, ad quadratum tangentis ſemianguli verticalis.

PRAXIS V.

Si invertatur hæc analogia habebitur tangens complementi ſemianguli verticalis hoc modo.

Adde { Duplum logarithmum radii,
Logarithmum ſemiſummæ trium laterum,
Et logarithmum differentiæ baſis ab ea.

Et à ſumma eorum ſubtrahe ſummam logarithmorum differentiarum crurum à ſemiſumma trium laterum, reſtabit duplus logarithmus tangentis complementi ſemianguli verticalis.

Demonſtr. (*eſt coroll.*2.17.*hujus*) in quo oſtenditur eſſe rectangulum ſub ſinubus differentiarum crurum,ad quadratum radii,

Ut rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ trium laterum; & ſub ſinu differentiæ baſis ab ea ſemiſumma,

Ad quadratum tangentis complementi anguli verticalis.

PRAXIS VI.

Complementum arithmeticum eſt id quod relinquitur ablato logarithmo ſinus alicujus arcus, à logarithmo radii, eſtque logarithmus ſecantis

complementi, ſi illi addatur logarithmus radii, cum enim radius ſit medius proportionalis inter ſinum, & ſecantem complementi: logarithmi extremorum æquabuntur duplo logarithmo medii. Idcòque ſi ex logarithmo medii bis ſumpto unum ſubtraxeris, relinquitur logarithmus alterius.

Adde { Complementa arithmetica crurum,
Logarithmis differentiarum crurum à ſemiſumma trium laterum, & fiet.

Duplus logarithmus ſinus ſemianguli verticalis.

Demonſtr. (*in corell.* 15.) oſtendimus, ita eſſe quadratum radii, ad rectangulum ſub ſecantibus crurum; ut rectangulum ſub ſinubus differentiarum crurum, à ſemiſumma trium laterum, ad quadratum ſinus ſemianguli verticalis: ergo additis logarithmis, ſecàntium crurum, & logarithmis differentiarum; ſi ab iis ſubtraxeris duplum logarithmum radii; relinquitur duplus logarithmus ſemianguli verticalis, dum autem pro logarithmis ſecantium aſſumuntur complementa arithmetica, ſubtractio invenitur facta.

Atque hæ ſunt praxes, dum utimur logarithmis, alio enim modo operari debemus per ſinus, nam deberent primò fieri, tam quadratum radii, quàm alia rectangula ſub ſinubus: deinde inſtituenda regula trium; excreſcerent autem in immenſum numeri, ideoque molliendæ ſunt hujuſmodi praxes ut ſinubus aptentur.

Sum autem longior in ſolvendo hoc problemate quod authores ut mirabile attollunt, unde volui illud in omnem partem verſare.

PRAXIS VII.

Vingat in ſuis logarithmis hanc praxin profert ſine demonſtratione quam hic demonſtrare contendo. Addantur ſimul tria latera, fiatque eorum ſemiſumma; ex qua auferatur baſis ut habeatur eius differentia.

Fiatque ut ſinus totus
ad ſinum A B,
ita ſinus B C
ad quartum ſinum. Deinde fiat
ut quartus ſinus
ad ſinum ſemiſummæ trium laterum,
ita ſinus differentiæ baſis A C
ad ſeptimum ſinum.

Si iſte ſeptimus ſinus multiplicetur per ſinum totum, producetur quadratum complementi dimidii anguli verticalis B

Demonſtr. (*Prop.* 17. *hujus*) demonſtravimus ita eſſe rectangulum ſub ſinubus crurum, ad quadratum radii, ut rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ, & ſub ſinu differentiæ baſis à ſemiſumma, ad quadratum complementi dimidii anguli verticalis B.

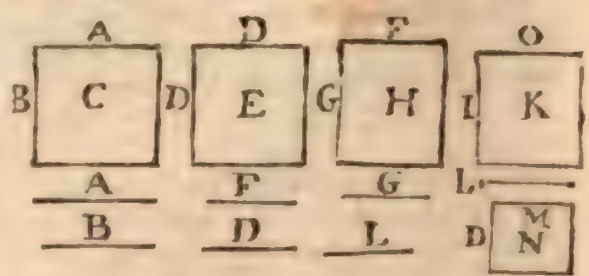
In prima analogia multiplicatur ſinus AB, per ſinum B C, hoc eſt ſit rectangulum ſub ſinubus crurum, quod dividitur per ſinum totum, & quotiens eſt quartus ſinus. Supponatur item ſinus totus dividere ſuum quadratum; quotiens erit ſinus totus; cum ergo ſinus totus etiam dividat rectangulum ſub ſinubus crurum, quotientes eandem rationem habebunt, quam habent diviſi. Quare.

Ut rectangulum ſub ſinubus crurum
ad quadratum radii,
ita ſe habet quartus ille ſinus
ad ſinum totum. Deberet igitur ita inſtitui ſecunda analogia.

Ut quartus ſinus ad ſinum totum, ita rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ trium laterum; & ſub ſinu differentiæ baſis ad quadratum complementi ſemianguli B, (*per prop.* 21. *arithmetices.*) Habetur quartus proportionalis, ſi tertium per primum dividamus, & quotientem multiplicemus per ſecundum, unde inſtituitur ſecunda analogia in qua multiplicantur ſecundus & tertius numerus, ut fiat rectangulum ſub ſinu ſemiſummæ, & ſub ſinu differentiæ baſis, & hoc rectangulum dividitur per quartum ſinum inventum, & ſeptimus qui exurgit per ſecundum multiplicatur, nempe per ſinum totum; ergo benè per hanc praxin invenitur quadratum ſinus complementi ſemianguli verticalis.

LEMMA.

Si duo numeri A, B, ſe invicem multiplicantes fecerint C: item D & D fecerint quadratum



E; & F, & G fecerint H, ſitque alius nůmerus K; ita ut ſit C ad H ſicut E ad K; quod ſi ſit ut A ad F; ita G ad L, & ut B ad D; ita L ad M, & D multiplicando M, faciat N; dico quod rectangula K & N ſunt æqualia. Sit ut A ad D; ita F ad O, & rectangulum K, aut illi æquale intelligatur deſcriptum ſuper lineam O, & quia ſupponitur eſſe ut C ad E; ita H ad K, ratio C ad E; H ad K, componitur ex rationibus A ad D; ſeu F ad O, & B ad D, & debebit eſſe G ad I, ſicut B ad D.

Demonſtr. Quia D multiplicans M, facit N; & multiplicans ſeipſum facit E; cum ſit eadem altitudo D (*per* 1. 6.) erit ut E ad N; ita D ad M, aut B, ad L, debeo probare E ad K ſe habere ut ut B ad L; tunc enim (*per* 7. 5.) K & N ſunt æquales. Hoc autem ita oſtendo. Ratio E ad K componitur ex rationibus D ad I, ſeu B ad G; & A ad F, ſeu G ad L, ratio autem compoſita ex rationibus B ad G, & G ad L, eſt ratio B ad L: igitur E ad K ſe habet ut B ad L hoc eſt ut E ad N, ergo K, & N ſunt æqualia.

PRAXIS VIII.

Hæc praxis profertur à Vlac. Addantur tria latera, ita ut fiat eorum ſemiſumma, & ab ea ſubducantur duo crura, habeanturque eorum differentiæ à ſemiſumma trium laterum.

Fiat ut ſinus cruris AB A
Ad ſinum unius differentiæ F,
Ita ſinus alterius differentiæ G
Ad quartum ſinum L.
Rurſus, ut ſinus cruris BC B
Ad ſinum totum D,
Ita quartus ſinus L
Ad ſeptimum ſinum M.
Si M multiplicetur per ſinum totum,
Exurget quadratum ſinus dimidii anguli verticalis.

Demonſtratio. Per Lemma ſuperius, ille producitur numerus hac praxi, qui eſt quartus proportionalis

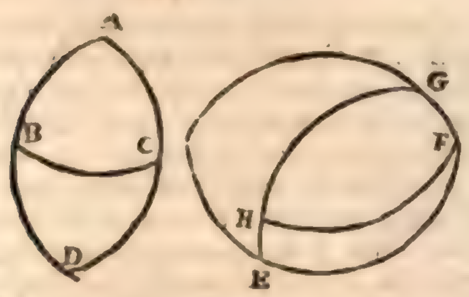
tionalis ad tres, nempè rectangulum ſub A & B, ſeu ſub ſinubus crurum, quadratum numeri D, ſeu ſinus totius, rectang. ſub F, G ſeu ſub ſinubus differentiarum crurum à ſemiſumma trium laterum: ſed quartus proportionalis ad tres propoſitos (*per* 15. *hujus*) eſt quadratum ſinus dimidii anguli verticalis; ergo qui invenitur hâc praxi eſt quadratum ſinus dimidij anguli verticalis.

Poſſent dari aliæ praxes deductæ ex 18. 19. 20; ſed de his infra cum de proſtaphæreſi.

PROPOSITIO XXIX.

Problema.

Datis tribus trianguli lateribus, cognoſcere cujus affectionis ſit angulus quilibet.



Si duo crura AC, AB fuerint quadrantes baſis, erit menſura anguli verticalis A, (*per* 6. 3. *hujus*) ſi AB, CA crura fuerint affectionis ejuſdem, & baſis non minor quadrante, angulus, A verticalis erit obtuſus. Primò ſint crura quadrante majora & baſis quadrante non minor: erunt (*per* 4. *hujus*) omnes anguli obtuſi. Si verò fuerint AB, AC crura quadrante minora, producantur donec concurrant in D. erunt DB, & CD quadrante majora, & ſupponitur baſis quadrante non minor, (*ergo per* 4.) in triangulo BDC omnes anguli obtuſi erunt: ergo cùm D obtuſus ſit, etiam angulus A obtuſus erit. Si crura fuerint affectionis diverſæ, & baſis quadrante, non major angulus verticalis acutus erit. Sit enim triangulum EFG rectangulum in F, & latera GF, FE ſint affectionis diverſæ, (*per* 5. 4.) baſis EG erit major quadrante; ut ergo fiat non major quadrante minuatur in H. fiet angulus GFH minor recto.

Si crura ejuſdem fuerint affectionis & baſis quadrante minor; Si ſinus complementorum crurum multiplicentur, & dividatur productum per ſinum totum, & reliquum ſit æquale ſinui complementi baſis, angulus rectus eſt.

Hoc eſt Si ita eſt ſinus totus
ad ſinum complementi AB,
ut ſinus complementi BC
ad ſinum complementi AC.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Datis omnibus trianguli Sphærici angulis, invenire latera.

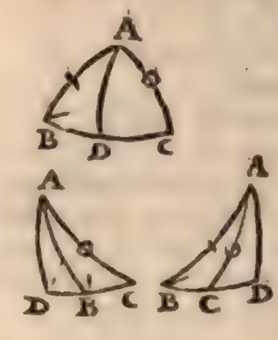
Per propoſitionem 21 hujus, mutentur anguli in latera alterius trianguli, quod ſolvatur; hoc eſt cujus inveniantur anguli ex quibus cognitis innoteſcent latera trianguli propoſiti.

Notandum ſi tres anguli fuerint acuti ſingula latera erunt quadrante minora (*per* 5. *hujus*) cætera innoteſcent ex alterius trianguli ſolutione.

PROPOSITIO XXXI.

Problema.

Cognitis duobus trianguli ſphærici lateribus; & angulo ab ipſis comprehenſo: invenire baſim.



Sit triangulum ABC cujus cognoſcuntur crura AB, BC, & angulus B, quæritur baſis AC.

Fiat ut quadratum radij
ad rectangulum ſub ſinubus crurum,
ita ſinus verſus anguli ABC
ad differentiam inter ſinum complementi baſis & ſinum complementi differentiæ crurum.

Habetur autem ſinus complementi differentiæ crurum; quare addita differentia, habebitur ſinus complementi baſis, ut habeatur ſinus verſus anguli B; ſubducendus eſt ſinus complementi anguli B ex radio.

Alio modo.

Sit triangulum ABC cujus cognoſcuntur crura AB, BC, & angulus B ab ipſis comprehenſus, quæritur autem latus AC, ex alio quocumque angulo A ad unum ex cruribus cognitis. Demittatur perpendicularis, quæ vel cadet intra triang. vel extra ad partes B, vel ad partes C. Fiat

ut ſinus totus
ad ſinum compl. ABC,
ita tangens AB
ad tangentem BD.

Qua cognita cognoſcitur CD, tum fiat ut ſinus complementi BD ad ſinum complementi CD, ita ſinus complementi AB, ad ſinum complementi AC.

Demonſtratio. Prima analogia (*eſt* 21. 5. *hujus*) ſecunda analogia eſt 10 hujus, in qua probavimus ſinus compl. ſegmentorum baſis, proportionales eſſe ſinubus complementorum crurum.

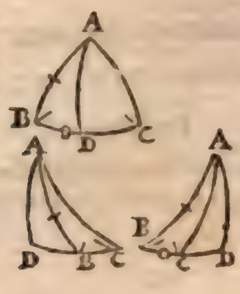
PROPOSITIO XXXII.

Problema.

Cognitis duobus angulis, & latere uni eorum oppoſito, invenire latus adiacens duobus angulis cognitis, modo vel cognoſcatur eius ſpecies vel ſpecies alterius lateris incogniti.

Sit triangulum ABC cujus cognoſcitur latus

AB. & anguli ABC, ACB; quæritur latus BC. Oportet autem ut ejus ſpecies cognoſcatur vel pecies lateris AC. Fiat



ut ſinus totus
ad ſinum compl. ABC,
ita tangens AB
ad tangentem BD Fiat rurſus
ut tangens ACB ad tangentem ABC, ita ſinus BD ad ſinum CD.

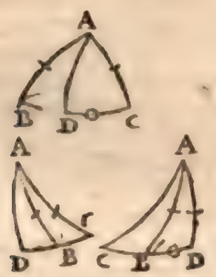
Demonſtratio. Prima analogia ſicut in præcedente problemate, ſecunda analogia eſt 7. hujus.

Ratio cautionis adhibitæ, prima quidem cautio tollit omnem ambiguitatem. In prima analogia baſis AB quæ datur, tollit omnem ambiguitatem (*per cor. 5.4. hujus*) pro latere BD; item in ſecunda, ſi cognoſcatur ſpecies lateris AC quod habet vicem baſis in triangulo ACD rectangulo; tollet omnem ambiguitatem circa latus CD; cognitis autem BD, DC facilè cognoſcitur tota BC.

PROPOSITIO XXXIII.

Problema.

Cognitis duobus lateribus, & angulo uni eorum oppoſito, cognoſcere tertium latus.



Sit triangulum ABC, cujus duo latera AB, AC ſint cognita; & angulus ABC lateri AC oppoſitus, quæritur aliud latus nempe BC. Demiſſa perpendiculari ex angulo A.

Fiat ſicut in præcedenti
ut ſinus totus
ad ſinum compl. ABC,
ita tangens AB
ad tangentem BD.
Rurſus fiat ut ſinus complementi AB ad ſinum complem. AC,
ita ſinus compl. BD ad ſinum compl CD.

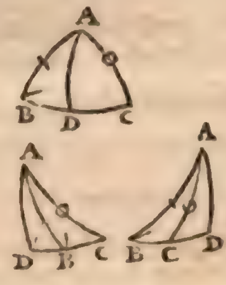
Quæ ſecundùm varietatem caſuum, perpendicularis vel addi debet ut in primo caſu, vel ſubtrahi.

Prima analogia demonſtrata eſt in ſuperioribus, ſecunda eſt 10. hujus.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema.

Cognitis duobus angulis, & latere utrique adiacente, aliud latus invenire.



Sit triangulum ABC cujus cognoſcuntur anguli ABC, BAC, & latus AB, quæritur latus AC. Primò demittatur perpendicularis ab angulo A cognito, & adjacente lateri quæſito, ſitque, ut ſinus totus ad ſinum complem. AB. ita tangens ABC ad tangentem complementi BAD, cognito BAD cognoſcitur CAD. Fiat item ut ſinus complementi CAD ad ſinum complementi BAD, ita tangens AB ad tangentem AC, ſic etiam tangens complementi AC ad tangentem complementi AB.

Demonſtratio. Prima analogia demonſtratur (*per 15. 5. huius*) ſecunda analogia demonſtratur in 11. hujus.

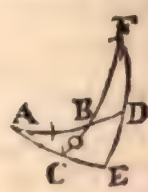
Iſta quidem ſufficerent ad perfectam Trigonometriam, quæ maximam facilitatem habet ex logarithmorum uſu. Si quis tamen vellet diſcere modum quo ſine logarithmis ſatis facilè ſolvebantur triangula ferè omnia per proſtaphæreſin ut vocant, id eſt per ſolam additionem & ſubtractionem, id exequar ſequentibus propoſitionibus.

PROPOSITIO XXXV.

Problema.

Multiplicationem, & diviſionem evitare: quando primo loco eſt radius, ſecundo & tertio eſt ſinus.

Mutentur duo latera aut anguli quorum ſinus dantur in ſua complementa, & habebitur triangulum ſolubile ſine ulla multiplicatione & diviſione; nam in quocumque triangulo ponitur ſinus totus, in primo loco, ſignum eſt aliquid in tali triangulo eſſe æquale quadranti.



Sit v. g. triangulum ABC cujus angulus C rectus, & ad quod ſolvendum dicitur ut ſinus totus anguli C recti ad ſinum lateris AB, ita ſinus anguli A ad ſinum lateris BC. Mutetur

AB

AB in ſuum complementum BD, & A ſeu ED in ſuum complementum. Fit triangulum BDF, cujus cognoſcitur primo angulus D rectus; deinde duo crura talem angulum comprehendentia; quoties autem angulus rectus eſt, & cognoſcuntur duo crura (*per coroll. prop. 19.*) primo addantur ſimul crura, quæ vel ſimul ſumpta æquabuntur quadranti, vel majora erunt, vel minora.

Sint primò æqualia. Fiat arcus compoſitus, ex minori crure, & complemento majoris, illius dimidius ſinus æqualis erit ſinui arcûs BC, complementi baſis ſi verò crura BD, DF majora ſint quadrante, ſinui arcûs compoſiti ex minori crure, & complemento majoris, addatur ſinus exceſſus; illius aggregati dimidium erit æquale differentiæ ſinus arcus BC, nempè complem. baſis FB, & ſinus arcus compoſiti: hoc eſt auferatur hæc differentia ex ſinu arcus compoſiti, & habebitur ſinus complementi baſis.

Si denique duo crura BF, DF ſimul ſumpta minora ſint quadrante: ſubtrahatur ſinus defectus, ex ſinu arcus compoſiti, ex minori crure, & complemento majoris: & reſidui dimidium erit differentia ſinus arcus BC, complementi baſis FB, & ſinus arcus compoſiti; unde hæc differentia ſubtrahatur ex ſinu arcus compoſiti reſtabit ſinus complementi baſis.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema.

Si ſinus totus ſit in primo, ſecundo & tertio loco, diviſionem evitare.

Primò quoties ſinus eſt in primo loco, certum eſt diviſionem nullam eſſe, quia cum ſinus totus ſit 1000 00 tot tantùm delendæ ſunt cyphræ numeri dividendi, quot ſunt o in diviſore, ſeu in ſinu toto, ut docetur in arithmetica.

Si verò ſinus totus ſit in ſecundo loco, retrahendus eſt in primum; nam ſi in primo loco ſit ſinus alicujus arcus, mutetur in ſecantem ſui complementi: ſic enim ſinus totus ponitur in primo ſecans complementi ponitur in loco ſinus totius, verbi gratiâ.

Sit ut ſinus anguli 30 ad tangentem aliquam, ita ſinus totus ad aliud.

Fiat ut ſinus totus ad tangentem eandem, ita ſecans anguli 60 ad idem.

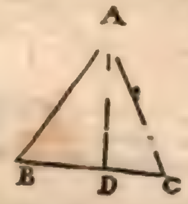
Ratio eſt quia quod in ſecundo, aut tertio loco ſit ſinus totus, perinde eſt.

Nam ſi ſit ut A ad B, ita C ad D, erit etiam ut A ad C, ita B ad D, quare ut ſinus anguli 30 ad ſinum totum, ita ſinus totus ad ſecantem anguli 60: ergo ut ſinus totus ad ſecantem 60, ita tangens illa ad quartum. Si ſinus totus ſit in ſecundo, aut tertio loco, & in primo ſit tangens, ſinus totus ponatur in primo loco, & tangens illa mutetur in tangentem complementi, ponaturque in ſecundo loco, quia nempe (*per 24. 1. hujus*) radius eſt medius proportionalis inter tangentes, arcus, & complementi. Pariter ſi in primo loco ſit ſecans, mutetur in ſinum complementi, ponaturque in ſecundo loco.

PROPOSITIO XXXVII.

Problema.

Si primo loco ſit ſinus, & nullibi radius; diviſionem in duplicem multiplicationem convertere.

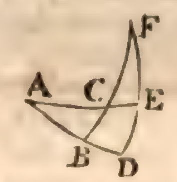


Triangulum ſolvendum in duplex triangulum, demiſsâ perpendiculari dividatur, fiatque duplex analogia, in qua radius primum locum obtineat. Sit verbi gratiâ quærendum latus AC, ex cognitis angulis B, & C. & latere AB debeatque fieri ut ſinus anguli C ad ſinum anguli B, ita latus AB ad latus AC, demittatur perpendicularis AD, fiatque ut radius ad ſinum anguli B, ita AB ad AD; pariter ut ſinus anguli C ad ſinum totum, anguli ſcilicet recti D, ita AD ad AC, muteturque hæc ſecunda in hanc, ut radius ad ſecantem complementi C; ita AD ad AC.

PROPOSITIO XXXVIII.

Problema.

Si primo loco ſit ſinus totus, & ſecundo, & tertio partim ſecantes, partim ſinus, aut tangentes, quartum proportionalem invenire, per proſtaphæreſin.



Radio primum locum obtinente, in ſecundo, aut tertio loco non ſit ſinus, ſed vel ſecantes, vel tangentes, immò quicumque alii numeri, operandum erit ſecundùm diverſitatem caſuum.

Primus caſus erit ſi numeri in primo, & ſecundo loco collocati ſint minores ſinu toto, atque adeo ſi pro ſinubus accipiantur, habeant in tabula ſinuum arcus ſibi reſpondentes. Utere ergo illis tanquam ſinubus, hoc eſt finge triangulum ABC, in quo radius ſit in primo loco, nempe ſinus anguli B recti, ſecundus numerus fingatur eſſe ſinus anguli A, tertius numerus quicumque ille ſit ponatur eſſe ſinus lateris AC, quæritur quartus proportionalis BC, modò autem tales numeri, ſecundo ſcilicet & tertio loco poſiti, minores ſint ſinu toto, poſſibile eſt tale triangulum. Quærantur ergo arcus reſpondentes numeris illis, habebitur talis trianguli fictitii angulus A, & latus AC, quæ ſi mutentur in ſua complementa CE, EF, tunc ſolvetur triangulum CEF (*per 34. hujus*) & habebitur ſinus lateris BC, qui erit quartus proportionalis, etiamſi revera eſſet tangens, & ſecans.

Secundus caſus eſt quando unus ex numeris in

ſecundo, & tertio loco poſitis, eſt major ſinu toto, & tunc duplex eſt via habendi quartum per proſtaphæreſin. Primus modus erit ſi hunc numerum majorem ſinu toto, minuas deletâ unâ eius cyphrâ ad dexteram, eoque ſic decurtato utaris, quartum enim proportionalem invenies decuplò minorem, quàm oporteat, quare addendus illi erit in fine, unus aut alter character, ut ſi quæratur ad ſequentes numeros quartus proportionalis.

Sinus totus	tangens gr. 21. 2.	tangens gr. 60.
10000000.	3912247.	17320508.

Cum tertius ſit major ſinu toto, eum decurtabo, deleto ultimo charactere 8, factaque regula inveniam pro quarto numerum 677185, cui addes 0, ut fiat 6771850.

Demonſtratio factâ regulâ, quæ eſt ratio primi, ad ſecundum, ea eſt tertii decurtati, ad quartum decurtatum, ſed quæ eſt tertii decurtati ad quartum decurtatum, eadem erit tertii aucti ad quartum eodem modo auctum, ergo, &c.

Alia item methodo idem numerus haberi poteſt, ſupponendo quod ſi quatuor numeri proportionales ſint A, B, C, E & tertius,

A. B. C 3 E 6

4. 8. D 2 F 4.

Et quartus ſimiliter dividantur, vel eorum ſimiles partes accipiantur, nempe D & F, ita erit A ad B, ut D ad F, quia ſimiles partes, in eadem ſunt ratione, ac tota.

Suppono item ex Arithmetica, inveniri quartum proportionalem ſi primus dividat tertium, & quotientem multiplices per primum. Sint ergo propoſiti priores numeri, nempe ſinus totus, & tangentes, divide tertium per ſinum totum, quotiens erit 1, qui ſi multiplicetur per ſecundum, habebitur quartus 3912247. tangens autem diviſa fuerat in duas partes quarum prima fuit 10000000. Secunda 7320508, & invenimus quartum proportionalem reſpondentem primæ parti nempe 3912247. Secundæ parti reſpondens habebitur per primum caſum facilè; cum hæc ſecunda pars minor ſit ſinu toto; invenies igitur illam eſſe 2863963, addantur illæ partes; fietque ſumma 6776210.

Tertius caſus eſt ſi ambo numeri qui ſunt in tertio, & ſecundo loco fuerint majores ſinu toto, ſunt igitur ambo decurtandi, abjectâ unâ, aut altera cyphrâ, quæ tamen addendæ erunt numero invento, nempe ſi unam ex troque abjeciſti, duæ reſtituentur.

Qui logarithmis utitur, ne valdè curet hujuſmodi proſtaphæreſin.

PRAXIS TRIGONOMETRIÆ.

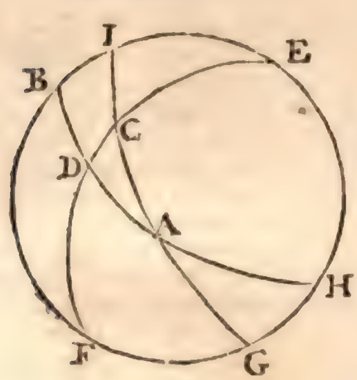
LIBER SEPTIMVS.

Vt melius uſus trigonometriæ innoteſceret, eius praxes alicui materiæ peculiari præſertim vero Aſtronomiæ, cui præſertim inſervit adaptare placuit.

PROPOSITIO I.

Problema I.

Datis maximâ eclypticæ obliquitate, ſoliſque diſtantiâ à proximo æquinoctio, eius declinationem reperire.



Supponitur æquator AB, eclyptica AI, & nota maxima eius obliquitas, nempe arcus BI, menſura anguli BAI, ſupponitur etiam data ſolis diſtantia ab interſectione A in qua fit æquinoctium nempe arcus AC, poſito quod ſol ſit in C, ducto per punctum C circulo per polos mundi tranſeunte, & conſequenter recto ad æquatorem AB, quæritur arcus DC, anguluſque D rectus eſt, & angulus CAD eſt graduum 23, 31. min. 30. ſec.

Fiat ut ſinus totus
ad ſinum lateris AC diſtantiæ ſolis ab æquinoctio,
ita ſinus anguli CAD
ad ſinum declinationis CD.

Demonſtratur (*In* 15. 5.) per quam in triangulo rectangulo datis uno angulo obliquo & hypotheneuſâ invenitur latus prædicto angulo oppoſitum.

PROPOSITIO II.

Problema II.

Datis declinatione ſolis, & obliquitate eclypticæ, invenire eius locum in zodiaco, ſeu diſtantiam à proximo æquinoctio.

Hæc eſt ſuperioris quaſi converſa. Supponitur nota declinatio ſolis CD, & datus angulus CAD eclypticæ cum æquatore, qui eſt graduum 23, 31′, 30″, quæritur AC, ſeu locus ſolis in eclyptica.

Fiat ut ſinus anguli A
ad ſinum declinationis C D,
ita ſinus totus, ſeu anguli recti *D*,
ad ſinum lateris AC,

Demonſtr.

Demonſtratur (*in* 23.5.) per quam in triangulo rectangulo datis uno latere & angulo ipſi oppoſito invenitur hypothenuſa.

PROPOSITIO III.
Problema III.

Cognita inclinatione eclypticæ ad æquatorem & diſtantia ſolis à proximo æquinoctio, eius Aſcenſionem rectam invenire.

Voco Aſcenſionem rectam punctum æquatoris ſimul oriens in ſphæra recta cum propoſito gradu eclypticæ, eſt autem circulus per polos tranſiens ut ECD, aliquis horizon ſphæræ rectæ, dato ergo angulo A, & latere AC, quæritur latus AD, nam punctum D æquatoris eſt illud quod ſimul oritur cum puncto eclypticæ C, & arcus DA ſeu diſtantia puncti D, ab æquinoctio eſt aſcenſio recta puncti C eclypticæ.

Fiat ut ſinus totus
ad ſinum complementi anguli A 23, 31′, 30″,
ita tangens lateris A C
ad tangentem lateris AD,
Vel
Ut ſinus complementi anguli A
ad ſinum totum,
ita tangens complementi lateris A C
ad tangentem complementi lateris AD.

Demonſtratur (*in* 20.5.) per quam in triangulo rectangulo, datis uno angulo obliquo & hypothenuſâ, invenitur latus prædicto angulo adjacens.

PROPOSITIO IV.
Problema IV.

Datis maxima declinatione eclypticæ & ſolis declinatione, invenire eius aſcenſionem rectam.

Supponitur datus angulus A, & declinatio CD, quæritur latus A D

Fiat ut tangens declinationis eclypticæ, ſeu anguli A,
ad tangentem declinationis CD,
ita ſinus totus
ad ſinum aſcenſionis rectæ A D.
Vel
Ut ſinus totus
ad tangentem declinationis C D,
ita tangens complementi maximæ obliquitatis
ad ſinum aſcenſionis rectæ AD.

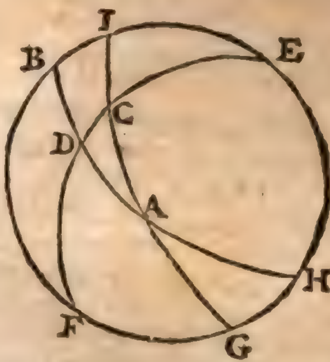
Demonſtratur (*in* 19.5.) per quam in triangulo rectangulo datis uno angulo & latere ipſi oppoſito invenitur aliud latus.

PROPOSITIO V.
Problema V.

Datis maxima eclypticæ obliquitate & diſtantia ſolis à proximo æquinoctio, invenire angulum eclypticæ cum meridiano.

Supponitur datus angulus A eclypticæ cum æquatore, ſupponitur datum latus AC, quæritur angulus C, quem eclyptica cum circulo ECDF comprehendit

Fiat ut ſinus totus
ad ſinum complementi diſtantiæ ſolis à proximo æquinoctio,
ſic tangens maximæ obliquitatis eclypticæ
ad tangentem complementi anguli quæſiti.



Demonſtratur (*in* 14.5.) per quam in triangulo rectangulo datis uno angulo obliquo & hypothenuſâ invenitur alius angulus.

PROPOSITIO VI.
Problema VI.

Datis maxima obliquitate eclypticæ & declinatione ſolis, invenire angulum eclypticæ cum meridiano.

Supponitur cognita declinatio CD, & angulus A, quæriturque angulus C

Fiat ut ſinus complementi declinationis C D
ad ſinum complementi obliquitatis eclypticæ
ita ſinus totus
ad ſinum anguli quæſiti.

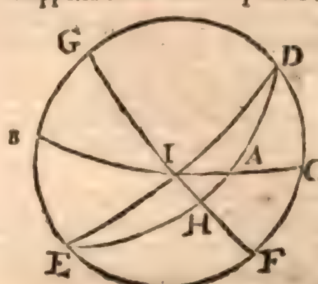
Demonſtratur (*in* 9.5.) per quam in triangulo rectangulo datis uno angulo obliquè cum latere ipſi oppoſito, invenitur alius angulus.

His propoſitionibus conficiuntur tabulæ Aſcenſionum rectarum, declinationum, & angulorum eclypticæ cum meridiano, ſeu cum omnibus circulis horariis.

PROPOSITIO VII.
Problema VII.

Datis declinatione ſolis, elevatione poli, ſolis amplitudinem ortivam aut occiduam invenire.

Supponatur ſol oriri in puncto A, horizontis BC, ſintque poli D & E, elevatio poli CD, quæ ſupponitur cognita, ſit æquator FG, intelligatur per punctum A in quo ſol oritur ductus circulus horarius DAE, eritque ad æquatorem rectus (*per* 15.1.*Theod.*) nempe angulus H rectus erit; ſit punctum I, illud in quo ſol oritur, dum percurrit æquatorem vocaturque punctum veri ortûs, quæritur arcus IA, nempe amplitudo ortiva, fit triangulum rectangulum, ſupponitur cognitum latus HA declinationis, item angulus AIH qui eſt complementum elevationis poli CD.



Fiat ut ſinus complementi elevationis CD, ſeu anguli I,

ad

ad ſinum declinationis H A,
ita ſinus totus anguli recti H,
ad ſinum amplitudinis ortivæ I A.

Demonſtratur (*in* 23.5.) datis videlicet in triangulo rectangulo, uno angulo obliquo cum latere ipſi oppoſito invenitur hypothenuſa.

PROPOSITIO VIII.
Problema VIII.

Datis declinatione ſolis, & elevatione poli, invenire differentiam aſcenſionalem.

Differentia aſcenſionalis eſt arcus oſtendens quantum diſtet punctum æquatoris cooriens cum aliquo puncto eclypticæ in ſphæra recta, ab eo quod cum eodem oritur in ſphæra obliqua. Ut in præcedenti figura cum circulus D A E per polos tranſiens ſit horizon ſphæræ rectæ, punctum H, erit aſcenſio recta puncti A quod ſupponitur eſſe eclypticæ, ſed in ſphæra obliqua punctum I æquatoris, oritur cum puncto A, igitur arcus H I eſt differentia illa aſcenſionalis quæ quæritur.

Fiat ut ſinus totus
ad tangentem declinationis HA,
ita tangens elevationis poli C D, ſeu complementi anguli I
ad ſinum arcus HI, aſcenſionalis differentiæ.

Demonſtratur (*in* 19.5.) in qua datis uno angulo obliquo cum latere ipſi oppoſito, quæritur aliud latus trianguli rectanguli.

PROPOSITIO IX.
Problema IX.

Datis declinatione ſolis, & elevatione poli, invenire horam ortûs, aut occasûs.

Eadem eſt; nam H I eſt arcus complementi arcus ſeminocturni, nam FH eſt arcus ſeminocturnus, quare differentia aſcenſionalis in tempus mutata, indicat quantum ante aut poſt ſextam ſol oriatur, aut occidat.

PROPOSITIO X.
Problema X.

Datis elevatione poli, & hora ortûs, aut occasûs, invenire declinationem & diem, quâ oritur aut occidit tali hora.

Cognita hora ortus aut occaſus, cognoſcitur differentia aſcenſionalis nempe I H in figura, & quæritur H A.

Fiat ut ſinus totus
ad ſinum arcus I H,
ita tangens anguli I ſeu arcus C F complementi elevationis poli
ad tangentem arcus HA declinationis.

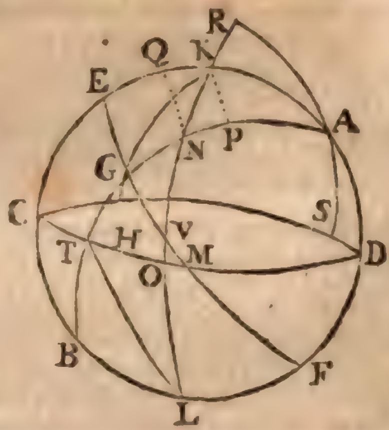
Demonſtratur (*in* 18. 5.)

Datâ declinatione ſolis (*per* 2.) quæritur eius locus in zodiaco, ſciturque ex tabulis quo die ſol ſit in tali loco zodiaci.

PROPOSITIO XI.
Problema XI.

Data declinatione ſolis, elevatione poli, & hora diei, ſolis elevationem ſupra horizontem reperire.

Sint poli A & B, horizon CD, æquator EF, ſitque primo ſol in G, hoc eſt declinatione careat, ſitque cognita hora, ſeu diſtantia à meridiano, nempe angulus EAG, aut arcus GE, ducatur ex zenith



K circulus verticalis GHL, qui (*per* 15.1.*Theod.*) ad horizontem CD rectus erit, quare in triangulo rectangulo G H M

Fiat ut ſinus totus anguli recti H
ad ſinum anguli GMH complementi elevationis poli,
ita ſinus lateris GM, complementi arcus EG, diſtantiæ ſolis à meridiano, ſeu ſinus diſtantiæ ſolis ab hora ſexta,
ad ſinum arcus GH elevationis quæſitæ.

Demonſtratur (*per* 15 5.) in qua datis trianguli rectanguli hypothenuſa & uno angulo obliquo quæritur latus ipſi oppoſitum.

Secundò ſupponatur ſol extra æquatorem in puncto N, in triangulo KAN datur arcus KA, complementum elevationis poli, ſicut & NA complementum declinationis cognitæ, datur & angulus A, ſeu arcus EG quæritur baſis KN, complementum elevationis NO, demiſſa perpendiculari KP.

Fiat ut ſinus totus
ad tangentē AK cõplementi *elevationis poli*,
ita ſinus GM complementi *diſtantiæ ſolis à* meridiano
ad tangentem arcûs PA.

Prima hæc analogia demonſtratur (*in* 20 5.)

Hic primus arcus PA auferatur à NA complemento declinationis, nempe ab hora ſexta matutina ad ſextam veſpertinam, quia perpendicularis KP tunc intra triangulũ cadit, ſi verò eſſet ſol ante horã ſextam matutinam, aut poſt ſextam veſpertinam addendus eſſet, facta ſubtractione reſtat NP.

Fiat ut ſinus complementi arcûs PA
ad ſinum complementi arcûs NP,
ita ſinus elevationis poli
ad ſinum altitudinis ſolis.

Hæc ſecunda analogia demonſtratur (*in* 10.6.)

Tota autem praxis demonſtratur (*in* 31.6.)

Hoc problemate fiunt tabulæ elevationum ſolis, pro qualibet hora, & quolibet ſigno quæ ſunt utiles in Gnomonica.

PROPOSITIO XII.
Problema XII.

Dato verticali ſolis, eius declinatione & horâ, invenire altitudinem.

In triangulo KAN, ſupponitur datus angulus A, cum ſciatur arcus EG, nempe hora cognita, ſeu diſtantia à meridiano, datus item arcus NA, complemen

complementum declinationis GN, angulus item OKA, nempè arcus OD, indicans verticalem, quæritur arcus K N complementum altitudinis ſolis.

Fiat ut ſinus anguli NKA, ſeu Azimuth
ad ſinum anguli A, diſtantiæ à meridiano,
ita ſinus arcûs NA complementi declinationis
ad ſinũ arcus KN cõplementi altitudinis ſolis.

Demonſtratur, (*per 1.5.*)

PROPOSITIO XIII.
Problema.

Datis Declinatione, Altitudine, & Azimuth ſolis, invenire horam diei.

In eodem triangulo NKA, datur NA complementum declinationis, HK complementum altitudinis, & angulus NKA, Azimuth, quæritur angulus A ſeu latus EG, & diſtantia à meridiano.

Fiat ut ſinus arcus NA, cõplemẽti declinationis
ad ſinum NK complementi altitudinis NO,
ita ſinus anguli N K A
ad ſinum anguli A, ſeu arcus E G diſtantiæ à meridiano.

Demonſtratur item (*per 1.5.*)

PROPOSITIO XIV.
Problema.

Data elevatione poli declinatione, & altitudine ſolis invenire horam diei.

Vide figuram præcedentem.

In eodem triangulo NAK dantur omnia latera nempè NK, complementum altitudinis ſolis, NA complementum declinationis GN, K A complementum elevationis poli; quæritur angulus NAK.

Addantur tria latera, nempè complementa altitudinis poli, elevationis & declinationis ſolis, fiatque eorum ſumma, & ſemiſumma, à qua auferes ſingillatim KA, & NA, quia nempè quæritur angulus A, & habebuntur eorum differentiæ à ſemiſumma.

Fiat ut ſinus complementi elevationis poli
ad ſinum unius differentiæ,
ita ſinus alterius differentiæ
ad ſinum quartum.

Fiat item ut ſinus complementi declinationis
ad ſinum totum,
ita ſinus quartus
ad ſinum ſeptimum.

Hic ſeptimus ſinus multiplicatus per ſinum totum, dat quadratum ſinûs ſemianguli A; vel ſummam logarithmorum illorum ſinuum divide bifariam habebis logarithmum ſinûs dimidii anguli verticalis.

Modus iſte eſt octavus (*propoſitionis 28.6.*)

Vel aliis modis ſoluatur hoc triangulum cujus omnia latera cognoſcuntur.

Eodem modo cognoſces circulum horarium in quo ſtella invenitur, nempè ejus diſtantiam à meridiano datis ejus declinatione, altitudine, & poli elevatione. Ut tamen ex ea cognoſcere poſſis horam ſolis, comparanda eſt ejus aſcenſio recta, cum aſcenſione recta ſolis.

Pariter dato loco ſolis, & conſequenter ejus declinatione, & altitudine poli, cognoſcemus horam initii auroræ. Si operemur eodem modo in hemiſphærio inferiori, ac in ſuperiori operati ſumus: incipit enim aurora, quando ſol depreſſus eſt infra horizontem gradibus 18. tunc enim dantur pariter tria latera in triangulo ſolvendo.

PROPOSITIO XV.
Problema.

Datis elevatione ſolis, declinatione, & altitudine poli invenire ſolis Azimutum.

Hoc problema ſimile eſt ſuperiori, niſi quod iſt hoc quæratur angulus N K A, & in ſuperiori angulus NAK; quare pariter addantur ſimul omnes termini dati, ſeu omnia latera, ut eorum fiat ſumma, & ſemiſumma, à qua ſubtrahes crura KA, KN ſeu complementum elevationis poli, & complementum elevationis ſolis, habeanturque laterum differentiæ à ſemiſummâ; tum fiat

Ut ſinus KA complementi elevationis poli
ad ſinum unius differentiæ,
ita ſinus alterius differentiæ
ad quartum ſinum.

Rurſus ut ſinus complementi altitudinis ſolis ſeu ut KN
ad ſinum totum,
ita quartus ſinus
ad ſinum ſeptimum.

Hic ſeptimus ſinus multiplicatus per ſinum totum, dat quadratum ſinus ſemianguli NKA, qui denotat Azimutum ſolis.

Hæc propoſitio utilis eſt ad inveniendam lineam meridianam, ſi enim quolibet tempore notes umbram alicujus ſtyli, in plano quocumque obſerveſque ſolis altitudinem, ſcies quot gradibus circulus meridianus diſtet ab Azimuto per umbram denotato.

Facilior erit operatio ſi ſol fuerit in æquatore, tunc enim in triangulo G K A latus G A erit quadrans, & ſi (*per 21.6.*) mutentur omnia latera in angulo, fiet aliud triangulum rectangulum, in quo datis angulis quæritur hypothenuſâ: in hac enim mutatione angulus G K A quæſitus reſpondebit hypothenuſæ, fiat ergo (*per 21.5.*)

Ut ſinus totus
ad tangentem elevationis ſolis,
ita tangens elevationis poli
ad ſinum complementi anguli quæſiti, nempè GKA diſtantiæ Azimut à meridiano.

PROPOSITIO XVI.
Problema.

Datis Altitudine, & declinatione ſolis unà cum Azimuto, invenire horam.

Vide figuram præcedentem.

In eodem triangulo AKN complementum altitudinis ſolis eſt latus NK, cognitum, ſicut & AN complementum declinationis, datur & angulus AKN, quem verticalis ſolis, tempore obſervationis cum meridiano comprehendit, quæritur angulus A, nempè diſtantia ſolis à meridiano.

Fiat ut ſinus NA, complementi declinationis
ad ſinum NK complementi elevationis ſolis,
ita ſinus anguli AKN, Azimuti cũ meridiano
ad ſinum anguli A, ſeu arcus EG.

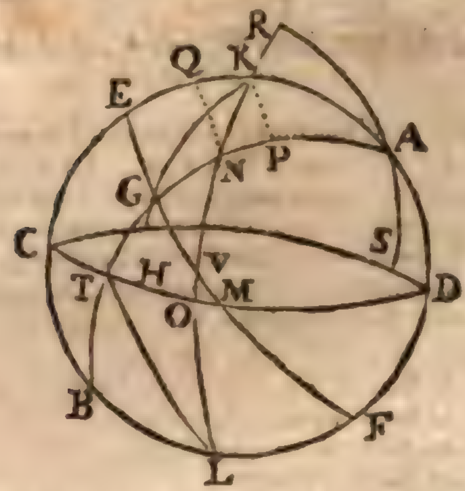
Demonſtratur (*per 1.5.*)

PROPOSITIO XVII.
Problema.

Datis altitudine ſolis aut ſtella unâ cum ejus Azimutho, & declinatione, invenire elevationem poli.

In eodem triangulo AKN, ſupponuntur data,

latera KN complementum elevationis ſyderis AN complementum declinationis, & angulus Azimu-



talis NKA, quæriturque latus AK. Ex angulo N ad latus quæſitum ducatur perpendicularis arcus Nq, hic arcus perpendicularis ferè ſemper cadet extra triangulum, ſaltem ab hora ſexta matutina, ad ſextam veſpertinam; fiet triangulum rectangulum qNK, cujus datur angulus qKN, hypothenuſa KN.

Fiat ergo ut ſinus totus
ad ſinum cōplementi anguli Azimutalis, qKN,
ita tangens complementi elevationis ſolis ſeu KN
ad tangentem Kq

Hæc analogia demonſtratur (*in propoſitione 20.5.*)

Rurſus in triangulo NqA.

Fiat ut ſinus complementi NK, ſeu ſinus elevationis ſolis
ad ſinum complementi NA, ſeu ſinum declinationis ſolis,
ita ſinus complementi arcus Kq
ad ſinum complementi qA, ſic innoteſcet arcus qA, ex quo ſi auferas arcum Kq, reſtabit arcus KA complementum elevationis poli.

Demonſtratio hujus analogiæ petitur (*ex 10.6.*) in qua demonſtratur ſinûs complementorum laterum eſſe proportionales ſinubus complementorum ſegmentorum baſis.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Datis declinatione ſolis, elevatione poli & Angulo Azimutali, invenire horam.

In eodem triangulo AKN, ſupponitur declinatio ſolis cognita, & conſequenter latus AN cognitum, datur item AK complementum elevationis poli, ducta ab angulo A, in latus KN, perpendiculari AR.

Fiat ut ſinus totus
ad ſinum elevationis poli, ſeu cō plementi AK
ita tangens anguli Azimutalis AKN ſeu RKA,
ad tangentem complementi anguli KAR

Hæc analogia demonſtratur (*in propoſ. 14.5.*)

Rurſus fiat ut tangens AN, complementi declinationis
ad tangentē AK complemēti elevationis poli,
ita ſinus complementi anguli KAR
ad ſinum complementi NAR, ex quo ſi auferas KAR reſtabit angulus quæſitus KAN.

Hæc ſecunda analogia demonſtratur (*in propoſitione 11.6.*) in qua oſtenditur tangentes laterum eſſe reciprocè proportionales ſinubus complementorum angulorum verticalium.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Datis elevatione poli & horâ, ſeu ſolis diſtantia à meridiano, invenire arcum horizontis comprehenſum inter meridianum, & circulum horarium ſolis.

Supponitur in eadem figura, ſol exiſtere in circulo horario AGB, ſupponitur item data elevatio poli AD, quæritur arcus horizontis CT, interceptus inter circulum horarium, & meridianum; producatur circulus horarius BGA ultra polum donec ſecet horizontem in S, eruntque arcus SD, CT, æquales. Invenietur autem facilè SD, cum in triangulo rectangulo SAD, notum ſit latus AD, & angulus DAS, ſeu arcus EG ejus menſura.

Fiat ut ſinus totus
ad ſinum elevationis poli AD,
ita tangens anguli SAD, diſtantiæ ſolis à meridiano
ad tangentem arcûs DS.

Demonſtratur (*in propoſitione 18.5.*)

Hæc propoſitio utilis eſt ad horologium horizontale trigonometricè conſtruendum.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Data ſtellæ latitudine & longitudine, invenire ejus aſcenſionem rectam declinationem.

Supponatur in eadem figura punctum K eſſe polus mundi, & CD æquator, ſit autem polus zodiaci punctum A, & EF eclyptica, punctum M erit initium arietis aut libræ. Sit ſtella in N, & ſupponatur cognita ejus longitudo MG & latitudo GN, quæritur ejus declinatio NO.

In triangulo NKA, cognoſcitur latus KA quod eſt æquale angulo eclypticæ cum æquatore; cognoſcitur item NA complementum latitudinis, item angulus A exhibet complementum longitudinis. Arcus autem AK eſt viginti trium graduum cum dimidio, quæriturque latus KN, ſeu complementum arcûs NO.

Eodem modo ſoluatur quo problematis undecimi ſecunda pars.

Fiat ut ſinus totus
ad tangentem AK grad. $23\frac{1}{2}$
ita ſinus longitudinis, numeratæ à proximo æquinoctio ſeu GM
ad tangentem arcus PA, quo ſublato ex AN, relinquitur PN.

Rurſus fiat ut ſinus complementi arcus PA
ad ſinum complementi arcus PN,
ita ſinus complementi arcus $23\frac{1}{2}$
ad ſinum declinationis ſeu arcûs NO.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Datis longitudinibus, & latitudinibus duarum ſtellarum, invenire earum diſtantiam.

Sint in eadem figura A polus eclypticæ, ſintque duæ ſtellæ in K & N, quarum cognitæ ſint longitudines MG, ME, & conſequenter differentia longitudinis EG ſeu angulus A, dantur item latitudines EK, GN, ſeu diſtantiæ ab eclyptica, quæritur arcus NK; igitur in triangulo AKN, cognoſcuntur latera NA, KA complementa latitudinum, & angulus A comprehenſus, quare (*per 31.6.*) dabitur latus KN.

TRACTA

Digitized by Google

TRACTATUS VI.

ALGEBRA.

INTER omnes Matheſeos noſtræ partes, præſtantiſſima à pleriſque cenſetur, ea quam communi vocabulo Algebram nominamus; quippe quæ nulli dignitate cedat, nullis numerorum, aut menſurarum finibus, nulla magnitudinum mole ſatis contineatur, quin ulteriùs excurrat, pleráſque & intricatas quantumlibet quæſtionum ambages ſagacitate mirabili fœliciter explicet. Hanc propterea divinam Algebram nonnulli nominarunt, quòd à ſenſuum cognitione remotiſſima perſcrutetur, abſtruſaque myſteria tanta facilitate aperiat; ut oracula fundere videatur. Hujus finis, & ſcopus eſt quantitatem aliquam ſub quæſtionis difficillimæ involucris delitеſcentem, ex leviſſimis indiciis ſubodorari, & ex æqualitate; quam cum alia nota habere deprehenditur, in lucem prodere; quod quomodo præſtet; & quonam artificio conſequatur, hic tractatus aperiet. Hujus ſcientiæ authorem Gebrum Arabem nonnulli falsò exiſtimant, ideoque Algebram nuncupatam. Alÿ veriùs Diophanto Alexandrino authori Græco, tribuunt; cujus ſcilicet extant opera de novo, commentariis eruditis ornata à D. Bachet Demeſeriac Nobili Sebuſiano elucubrata.

Algebram communiter his temporibus in duas partimur, in numeroſam ſcilicèt, ſeu communem, & in ſpecioſam, iiſdem tamen utramque nixam principiis, progreſſioniſque geometricæ proprietatibus additam. Vulgaris circa numeros occupatur, atque adeò proprium algorithmum, additionem, ſubtractionem, multiplicationem, diviſionem, radicum extractionem exercet.

Specioſa verò rerum ſpecies, & elementares Alphabeti litteras uſurpat, ideoque metaphoricum ſeu ſimilitudinarium algorithmum agnoſcit. Prior Diophantum authorem agnoſcit, hæc Vietam; utra autem ſit præſtantior, meliùs in decurſu patebit; admirabilitatem quidem majorem præ ſe fert ſpecioſa, quòd reconditiori, & abſtractiori methodo progrediatur; in hoc tamen deficere cenſeo quod imaginationi non ſerviat, imagines nec memoriæ hærentes habeat. Unde puto non pejus in matheſin peccari poſſe, quam ſi geometrica problemata, quæ figuris explicari, & quaſi oculis ſubjici poſſunt, methodo Algebricæ addicantur, & ſub hoc quaſi velamine in publicum prodeant. Adhibeat quidem author quilibet in ſuis commentationibus aut adinveniendis, aut examinandis quamcumque libuerit methodum, ne tamen ita malè de aliis mereatur ut eas novis difficultatibus implicet, methodumque communem, & à priſcis Mathematicis uſurpatam detrectet. Vulgaris Algebra in pleriſque imaginationi meliùs obſecundat in aliis item meliùs ſpecioſa; nam quoties analytica uſurpatur ratio; meliùs ſpecioſa totum operationis progreſſum indicat, in aliis autem operationibus facilior eſt communis.

Vtramque methodum ſeparatim aperire decreveram, duoſque ptropterea tractatus inſtitueram; re tamen paulò diligentius perpensâ, cum eadem principia ſint utrique communia, methodique in pleriſque ſint eadem, mutuoque ſibi opem ferant: unicum tractatum concinnandum putavi, qui utramque ſimul complecteretur. Hunc in tres libros partior, primus erit ad æquationem inveniendam Iſagogicus, numerorumque coſſicorum, tam integrorum, quàm fractorum algorithmum tradet.

Secundus Regulam Algebræ, hypobibaſmum, antitheſin, paraboliſmum cæteraſque reductiones explicabit; & ne diutius Tyronem in præceptis detineam, ſed ea ut ita dicam concoquendi facultatem tribuam, incipiam exempla tradere æquationum ſimplicium ut præcepta ad praxin revocare addiſcat.

Tertius liber Æquationes quadraticas cæteraſque methodo antiqua pertractabit. Tum poteſtatum omnium generationes explicabit, & extractiones radicum & de ſurdis ſeu irrationalibus quantitatibus aget.

Quartus affectas poteſtates variis problematis explicabit.

Quintus Poteſtatum Analyſin continebit, ad ſpecioſam imprimis ordinatam.

Sextus methodum continebit extrahendarum radicum ex poteſtatibus affectis quomodocumque.

Septimus duos proximè antecedentes ſecundùm ſpecioſæ methodum exemplis illuſtrabit.

Octavus denique præcedentis totius doctrinæ praxim, allatis ipſius Diophanti exemplis, & explicabit & confirmabit.

LIBER PRIMUS;
Ad Æquationem Algebricam, Iſagogicus.

PROPOSITIO I.

Theorema.

Si numerus ſeipſum multiplicet, productumque iterum multiplicet & ex ea multiplicatione ortum multiplicet, & ita conſequenter, orietur ſeries continuè proportionalium in ea ratione, quæ eſt unitatis ad primum numerum.

G	A	B	C	D	E	F
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.

Proponatur quilibet numerus A, qui in ſe ductus producat B, & multiplicando numerum B producat C, item A multiplicando numerum C producat numerum D, & ductus in D efficiat E, & ita conſequenter quantùm libuerit. Præponaturque numero A unitas G, dico productam eſſe ſeriem numerorum continuè proportionalium, in ea ratione quæ eſt unitatis G ad numerum A; hoc eſt ita eſſe G ad A ſicut A ad B, & B ad C, & C ad D, &c.

Demonſtratio. Cum A multiplicando ſeipſum faciat B, & G multiplicando ipſum B, faciat eundem B, nam unitas multiplicando, aut dividendo eumdem numerum nihil immutat, cum ſemel 4, ſint 4, erit quadratum numeri A ſcilicet B, æquale rectangulo comprehenſo ſub primo G, & tertio B; quare (*per* 17. 6.) erit eadem ratio unitatis G ad numerum A, quæ numeri A ad numerum B. Rurſus quia A, multiplicando numerum B, producit C, & unitas G multiplicando numerum C producit ipſum C; erit rectangulum ſub G & C æquale rectangulo ſub A & B, Quare (*per* 16. 6.) ita erit A ad B, ſicut B ad C, ita oſtendam eſſe C ad D, ſicut A ad B ita D ad E, &c. Ergo datur ſeries continuè proportionalium in ea ratione quæ eſt unitatis G ad numerum A.

COROLLARIUM.

Cum A per unitates ſuas oſtendat, quam rationem ipſe A habeat ad unitatem, nam ſi quæras quam rationem habeat A ad unitatem, reſpondebis duplam, quia continet duas unitates: idem etiam A oſtendet, quam rationem habeat quilibet numerus ad proximè antecedentem, Quare in qualibet ſerie numerorum continuè proportionalium, primus numerus poſt unitatem, denominat totam ſeriem, ideoque communiter vocatur radix eò quòd per eam continuè quaſi producantur.

Notandum autem hanc propoſitionem univerſalem eſſe & vim ſuam habere etiam in numeris

G,	A,	B,	C,	D,	E,	F,
1.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$

fractis, ut ſi A multiplicando ſeipſum faciat B, & A multiplicando B, faciat C. Oſtendam pariter ita eſſe G ad A, ſicut A ad B, & B ad C.

Notandum ſecundò in ſingulis quæſtionibus Algebricis, ſupponi talem ſeriem ita ut numerus aut quantitas quæ in quæſtionem vocatur, obtineat primum locum poſt unitatem. Poſſunt autem fingi infinitæ tales ſeries, ita ut quilibet numerus poſſit eſſe radix, & primum locum obtinere poſt unitatem: poteſt enim quilibet numerus ſeipſum multiplicare, & productum iterum multiplicare.

Quamvis communiter quantitas quæ inquiritur ſupponatur eſſe radix in aliqua ſerie, hæc tamen regula traditur. Si quantitas quæſita ſit longitudo ſupponatur eſſe radix, ſi ſit ſuperficies ſupponatur eſſe quadratum, ſeu ſecundus numerus ab unitate, ſi ſit ſolidum ſupponatur eſſe cubus, ſeu tertius numerus ab unitate.

PROPOSITIO II.

Theorema.

Denominatio numerorum coſſicorum.

In qualibet ſeriè continuè proportionalium primus numerus poſt radicem quadratus eſt, ſecundus cubus, tertius quadrato quadratus.

Cum in omni quæſtione Algebrica, ſupponatur aliqua ſeries numerorum continuè proportionalium ut dixi, quamvis ii numeri incogniti ſint, varias tamen habent denominationes, prout diverſas in ea ſedes occupant. Propterea dicuntur numeri denominati, coſſici item vocantur, quia Itali quadratum coſam dixerunt & conſequenter numeros coſſicos quaſi numeros radicis, & quadrati. Denominationes illorum ſicut & characteres varii ſunt.

Conveniunt omnes ut primus numerus poſt unitatem vocetur radix vel latus, eſt enim latus quadrati & radix omnium ſequentium nempe radix quadrata quadrati, cubica reſpectu cubi quadrata reſpectu quadrato quadrati, & ita de ſequentibus, nos eam ſignificamus littera R, quæ radicem ſignificabit.

Secundus numerus quadratus eſt, cum generetur

Digitized by Google

tur ex multiplicatione radicis per ſeipſam, metaphorâ ductâ à quadrato. Quoties enim linea perpendiculariter alteri ſibi æquali inſiſtens totam percurrit, hoc ductu quadratum deſcribit. Hic numerus quadratus, ex ductu alterius in ſeipſum procreatus ab nonnullis vocatur cenſus, aut zenſus, ideo dicitur radix zenſica, pro radice quadrata, hunc indicabit ſignum q.

Tertius numerus dicitur cubus, nempè, productus ex multiplicatione quadrati per radicem; ſi enim quadratum percurrat lineam ad ejus planum rectam, producet cubum: nos cubum indicabimus littera C.

Quartus erit quadrato-quadratum, ſeu quadratumquadrati, quæ appellatio rationem habet, quòd talis numerus non tantum producatur per multiplicationem cubi per radicem; ſed etiam oriatur ex ductu quadrati in ſeipſum, quod ita demonſtro.

E, A, B, C, D.
1. 2. 4. 8. 16.

Exponantur quatuor numeri continuè proportionales, A, B, C, D quibus præponatur unitas E, oſtendo D ortum ex multiplicatione numeri C per radicem A eſſe æqualem quadrato numeri B. Cum enim ita ſit E ad A ſicut B ad C, & ut A ad B ita C ad D, ita erit & æquè ordinatè E ad B ſicut B ad D, ergo (*per* 17.6.) quadratum medii æquabitur rectangulo ſub extremis. Sed rectangulum ſub E & D eſt ipſum D, cum unitas nihil immutet, ergo numerus D eſt quadratum numeri B, erit ergo quadratum quadrati. Nos illud notabimus hoc modo qq.

Quintus numerus ab unitate vocatur ab aliquibus quadrato-cubus, ſed malè, cum neque ſit quadratum, neque cubus, atque adeo nec dici poſſit quadratum cubi, nec cubus quadrati: eum vocabimus ſuperſolidum vel ſurdè ſolidum. Itali relatum primum dixerunt, nos illum littera S, notabimus.

Sextus erit quadrato cubus, vel cuboquadratus, eſt enim ſimul, & quadratum &. cubus immò eſt quadratum cubi, & cubus quadrati, quod ita demonſtrare poſſumus. Exponatur ſeries continuè proportionalium. Jam oſtendimus numerum

L, A, B, C, D, E, F, G, H, K.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512.

D eſſe quadratum numeri B, oſtendere debeo numerum F eſſe ejuſdem numeri B cubum, hoc eſt numerum F, aut illi æqualem produci ex ductu numeri B in ſuum quadratum D, eſt enim ita L ad B ſicut B ad D, ut ſupra oſtendi, & eodem modo oſtendere poſſum ita eſſe D ad F ſicut B ad D; ergo iſti quatuor numeri L, B, D, F ſunt proportionales, ergo idem numerus producetur ex ductu B in D, qui ex ductu L in F producetur: ſed numerus productus ex ductu L in F eſt ipſum F, cum unitas nihil immutet, ergo numerus F producitur ex multiplicatione numeri B in D ergo eſt cubus quadrati. Oſtendo idem F eſſe quadratum cubi C. Cum enim ex æqualitate rationum oſtendatur facilè ita eſſe L ad C ſicut C ad F, quadradum medii C erit æquale rectangulo ſub L & F, & cum unitas L nihil immutet per multiplicationem, aut diviſionem, erit numerus F æqualis quadrato numeri C notabiturque hâc notâ q C.

Ita oſtendere poſſumus ſeclusâ unitate omnes numeros qui ſunt in ſedibus paribus eſſe quadratos, ut B, D, F, H, numerus H erit quadrato quadrato quadratus, cujus hoc ſignum qqq.

Numerus G qui eſt ſeptimus ab unitate malè vocatur à nonnullis quadratocubus, unde ab aliis vocatur ſurdeſolidus ſecundus, & notatur hoc notâ ſſ.

Nonus ſeu K, erit cubo cubus, ſeu cubus numeri cubi C, quia ſcilicèt numerus C multiplicando quadratum ſuum F producit numerum K, quod ita oſtendo: eſt enim ex æqualitate rationum ut L ad C ita F ad K, ergo planum ſub mediis C & F æquabitur plano ſub extremis, ſed planum ſub unitate L & numero K eſt ipſe K: ergo numerus K producitur ex ductu numeri C in ſuum quadratum F, ergo eſt ejus cubus. Sicut ideò numerus C cubus eſt, quia fit ductu numeri A in quadratum ſuum B, notabitur autem cubocubus hâc notâ CC.

COROLLARIUM.

Ex his vides nonnullos numeros non tantùm produci ductu radicis in precedentem, ſed per alias multiplicationes, quod ipſæ notæ ſeu characteres ſatis oſtenduntur ut numerus D, non tantùm producitur multiplicatione numeri C, per radicem A, quod primitiva ejus productio ferebat, ſed etiam multiplicatione numeri B per ſeipſum.

Quæret forſitan non nemo cur iſtæ appellationes ab Algebra conſiderentur. Reſpondeo ſæpè numeros in ſeipſis non cognoſci, hoc eſt ſecundum propriam entitatem, poſſe tamen innoteſcere ex loco, & ſede quam in aliqua ſerie geometricâ obtinent, unde eos verſare debemus in omnem partem, hoc eſt addere, ſubtrahere, multiplicare, dividere, etiam quando ſub his tantum denominationibus noti ſunt, quod ſequentibus propoſitionibus docebimus.

Algebra ſpecioſa æquè ac communis tota in numeris coſſicis conſiderandis occupatur, alios tamen adhibet characteres, nam pro radice litteram aliquam verbi gratia A aut B, aut aliam quamcumque uſurpat, cæteroſque numeros coſſicos iiſdem litteris alphabeti indicat; conſonantibus utitur ad ſignificandos numeros datos, ſeu jam cognitos, & vocalibus ad ignotos ſeu quæſitos: ita ponet pro radice A, pro quadrato vel AA, vel A 2, pro cubo AAA, hoc eſt A ductum in A, & productum ductum in A, quod cubum indicat vel A3: pro quadrato-quadrato AAAA, vel A4, & ita conſequenter ita ut ſit differentia inter 4A, & A4, nam 4A ſignificat 4 Radices A, & A 4 ſignificat quadratum quadrati radicis A. Idem dicito de E, nam 2 E ſignificat duas radices E, at verò E 4 vel EEEE indicat quadrato-quadratum radicis E: idem dicendum eſt de aliis radicibus quibuſcumque.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Exponentes numerorum coſſicorum.

C	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
B	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.	2187.	6561.	19683.
D		R.	q.	c.	qq.	s.	qc.	ss.	qqq.	c.
F		A	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9

Proponatur ſeries numerorum continuè proportionalium & Geometricè quæ ſit B, primoque ponatus unitas, tum radix, quadratum, &c. Huic

Digitized by Google

ſeriei ſuperſcribatur alia ſeries Arithmetica communis numerorum, ita ut radici reſpondeat unitas, quadrato binarius, cubo ternarius & ſic deinceps unitati ſuper C ſcribatur o. Hi numeri progreſſionis arithmeticæ reſpondentes numeris coſſicis vocantur eorum exponentes.

Dico primò exponentes, explicare quam ſedem ab unitate quilibet numerus coſſicus obtineat atque adeò radici primam; quadrato ſecundam, cubo tertiam ſedem competere, exponentes indicant.

Secundò exponentes indicant, quot intercedant rationes inter unitatem & quemlibet numerum coſſicum æquales illi rationi quæ eſt inter unitatem, & radicem: ita ratio unitatis ad cubum triplicata eſt illius quæ eſt unitatis ad radicem; quadrato quadrati ratio ad unitatem quadruplicata eſt illius quæ eſt radicis ad unitatem eò quòd exponens qq, ſit 4. Quare ſi quæratur quiſnam numerus ſit ſurdeſolidus, reſpondebo eum eſſe qui ex multiplicatione radicis quinquies poſitæ producitur, quia habet exponentem 5, &c.

Notandum item eſt numeros coſſicos, quorum exponentes ſunt numeri compoſiti habere etiam characterem & appellationem compoſitam; ut quia quadratoquadrati exponens eſt 4, numerus compoſitus ex binario bis poſito, ſeu in ſe multiplicato, ideo appellatio quadrato-quadrati componetur bis ex appellatione & charactere quadrati. Pariter cubo quadrati exponens componitur ex 2 & 3, & indicat hunc numerum coſſicum, appellationem habere à quadrato cujus exponens eſt 2 & cubo, cujus exponens eſt 3.

Præcipuus tamen exponentium uſus fundatur in proprietate progreſſionis arithmeticæ, reſpondentis progreſſioni geometricæ; nam exponentes ſunt quaſi logarithmi numerorum, eumdemque uſum habent: ſicut, ergo additio logarithmorum, pro multiplicatione numerorum ſubſtituitur, & ſubſtractio diviſionis vices gerit, ita exponentium additio & ſubſtractio, numerorum coſſicorum multiplicationi, & diviſioni æquivalet.

Explicatur, Poteſtas quæcumque ſeu numerus coſſicus, per alium multiplicari aut dividi poteſt, exponentes additi aut ſubtracti oſtendent, quænam poteſtas ex talibus multiplicationibus, aut diviſionibus reſultet quod in exemplis faciliùs intelligetur. Si quæratur quis numerus oriatur ex multiplicatione cubi, per quadratum adduntur exponentes cubi & quadrati ſeu 3, & 2 fientque 5 ſcilicet exponens ſurdeſolidi, dico produci ſurdeſolidum. Multiplicandus ſit cubus per ſuperſolidum, exponentes ſunt 3, & 5, qui additi ſummam 8 componunt, dico ex tali multiplicatione producendum qqq.

Idem dicendum de diviſione, Cubocubus cujus exponens 9, dividendus ſit per cubum cujus exponens eſt 3, ſubtrahe 3 & 9, ſupererit numerus 6, exponens quadratocubi, igitur ex tali diviſione reſultabit quadrato cubus. Quod non tantum verum eſt quoties numeri ſecundum proprium valorem dividuntur, aut multiplicantur; ſed etiam dum ſub denominationibus coſſicis dividuntur aut multiplicantur. Hoc eſt ſi proponantur tres cubi multiplicādi per 4 quadratos, multiplico tria per 4 fiuntque 12, & quia exponens cubi eſt 3, & quadrati 2, additis duobus & tribus fiunt 5 exponens ſuperſolidi: aſſero ergo ex tali multiplicatione producendos 12 ſuperſolidos. Si 6 cubocubi dividantur per tres cubos, quotiens erit 2 quadratocubi: quæ omnia inferiùs demonſtrabo.

Multi inquirunt characteres, & denominationes, numerorum coſſicorum progreſſionis quantumlibet productæ: ſed ſatis inutiliter cum Diophantus vix unquam ad octavam poteſtatem perveniat. In genere tamen dicere poſſumus omnes numeros primos poſt quinarium, ad ſurdeſolidos pertinere: quare exponentes 7.11.13.17.19.23. ad ſurdeſolidos pertinent, quorum primus habet exponentem 5, ſecundus 7, &c. Notantur autem hoc modo, ſ. ſſ. ſſſ. ſſſſ. ſſſſſ, Ceteræ poteſtates quarum exponentes ſunt numeri compoſiti, denominationem habebunt compoſitam, quæ nempè contineat appellationes numerorum primorum, ex quibus coaleſcit exponens, ut numerus coſſicus cujus exponens eſt 12, numerus compoſitus ex 3 & 4 ſeu 3.2.2, vocabitur quadratoquadrato cubus, vel quia idem exponens 12 componitur ex 2 & 6 ſeu 2.3.3, poterit vocari quadratocubo-cubus.

Characteres Algebræ ſpecioſæ præſeferunt exponentes ſuos, ut ſi cubum progreſſionis cujus A eſt radix, ſignificare vellem, ſcriberem A3, vel a3, vel aaa. Si cubum progreſſionis cujus e eſt radix, ſcriberem eee, vel e3, ita ut exponens 3, ſubſequatur litteram, immò paulò ulteriùs eam afficiat. Quæ quidem ex inſtituto pendent, non tamen ſunt inconſideratè conſtituta.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Numeratio numerorum coſſicorum.

Non tantùm numerorum coſſicorum charactere ſupra explicati in Algebra occurrunt, ſed iis plerumque cyphrarum communium notæ præponuntur; ita invenies 1 R 2 R 5 R. 8 R. 30 R. quæ ſignificant unam radicem, duas radices, quinque radices, octo radices, triginta radices; ſeu radicem eſſe ſemel, bis, quinquies, octies trigeſies poſitam. Ita ut ſi radix ſit 2. & ſcribatur 8 R. idem ſit ac 16. ſi autem radix ſit 3. 8 R, ſignificabunt 24. ſeu radicem 3. octies poſitam.

Idem intelligendum de aliis poteſtatibus, ut 4 q. ſi quadratum fuerit 9, ſignificabit 36. 10 cubi, ſi radix fuererit 5. & conſequenter cubus fuerit 5. & conſequenter cubus fuerit 125. ſignificabit 1250. ſeu decies 125.

Idem intelligendum eſt de fractionibus. Ut ſi agatur de ſerie in qua radix eſt 2. inveniaſque $\frac{1}{2}$ qq, intelliges ſemiſſem qqti, qui cum illa ſerie ſit 16, ejus ſemiſſis erit 8.

Cognoſcenda item ſunt hæc ſigna + & — primum + plus, dicitur ſignum additivum, & — minus ſignum ſubtractivum. Numerus cui nullum ſignum præponitur, ſubintelligitur habere ſignum + verbi gratiâ. 10 q. 5 R. ſignificat decem quadrata, plus quinque radices, hoc eſt decem quadrata, & inſuper quinque radices. Ut ſi ſit quæſtio in illa ſerie proportionalium in qua 3 eſt radix 10 q + 5 radices, ſignificabit 105; nam quadratum eſt 9, & conſequenter 10q efficiunt 90, quibus addenda eſt quinquies radix 3, ſeu 15. Pariter 8 c, — 4 q ſignificat 8 cubos minùs 4 quadratis.

Ideo autem hujuſmodi ſignis utimur, quod ſæpe numeri ſecundum proprium valorem ſint incogniti, atque adeò peragi non poſſit proprie dictus Algorithmus, hoc eſt non poſſit fieri additio, & ſubtractio, ut ſi proponerentur addendæ quinque radices,

Digitized by Google

radices, 8 quadratis, procedatque quæſtio in ea ſerie Geometrica in qua quadratum eſt 4, quod tamen ignoretur: 8 quadrata efficiunt 32, quibus ſi addas quinquies radicem 2, efficies 42; quia tamen ſupponitur adhuc ignorari valor tam quadrati, quam radicis, ita notabitur hæc addito 8 q + 5 R. Donec innoteſcat quadrati & radicis valor.

Idem intelligendum de ſubtractione. Ut ſi ſubtrahendus ſit iſte numerus 8 ex 10; ſed ii incogniti ſint ſecundum proprium valorem: innoteſcant tamen ſub terminis coſſicis: verbi gratiâ ſubtrahendæ ſint 4 radices, ex 5 quadratis, in ea ſuppoſitione in qua radix eſt 2, & quadratum 4, donec innoteſcant hujuſmodi numeri notabo 5 q — 4R, quod propriè loquendo, non eſt ſubtractionem facere; ſed ſignare faciendam cum innoteſcent numeri.

Nonnunquam occurrunt notæ numerorum irrationalium, ſi tamen verè numeri ſunt: horum naturam inferiùs explicabo, ſufficiat modò eorum characteres, & notas cognoſcere ℞q. ℞c, id eſt radix quadrata, radix cubica.

Primò dicitur ℞q 20, ſeu radix quadrata numeri 20, qui cum quadratus non ſit, radice quadratâ præcisâ numeris, explicabili caret. Quia tamen poſſumus exhibere numerum cujus quadratum, ita parum à numero 20 deficiat ut defectus ille contemni poſſit, ideo conſideratio harum radicum non cenſetur inutilis. ℞c. 40. radix cubica numeri 40.

Secundò hæ notæ ℞. inveniuntur ante numeros coſſicos. ℞q. 4q, ſeu radix quadrata 4 quadratorum, ſenſus eſt quod ubi valor unius quadrati innotuerit, atque adeo cognoſcetur numerus æquivalens 4 quadratis, extrahenda erit ex eo radix quadrata. Quod ſi accidat ut numerus æquivalens 4 quadratis fuerit quadratus ℞q. 4q. non erit numerus irrationalis; ſed rationalis, ut quoties numerus quadratorum eſt quadratus, radix eſt rationalis. Sed ſufficiat cognitio notarum.

Tertiò inveniuntur notæ radicum ante plurimos numeros coſſicos intra parentheſin clauſos ut ℞c. (4c. + 8q — 4 R.) ſignificat autem radicem cubicam 4 cuborum, plus octo quadratorum minùs 4 radicibus. Hoc eſt ſi aſſumantur 4 cubi quibus addantur octo quadrata & ſubtrahantur ex ſumma 4 Radices, ex reliquo extrahenda erit radix cubica. Ut in ſerie in qua radix eſt 3, 4 cubi 108 efficiunt, adde 8 quadratos ſeu octies 9, id eſt 72, efficient 180, ſubtrahe quater radicem 3, ſeu 12 relinquentur 168. Superior nota indicat extrahendam eſſe radicem cubicam ex numero 168, ubi innoteſcet.

PROPOSITIO V.

Theorema.

Numeratio ſpecioſa.

Algebra ſpecioſa peculiarem habet numerationem, ſolet enim litteras, ſeu characteres Alphabeti adhibere, ad ſignificandam quamcumque quantitatem.

Incognitas quidem quantitates, quæ in quæſtionem vocantur vocalibus A, E, I, O, V, Y, cognitas vero ſeu datas, conſonantibus B, C, D, F, G, aliqui ſignificant: alii pro quantitatibus cognitis uſurpant primas litteras alphabeti, ut a, b, c, d, &c. Ultimas verò pro incognitis, ut x, y, z, u, &c.

Secundò his litteris tam vocalibus quam conſonantibus characteres numerales præponuntur ut 4 A, ſeu quatuor A. Significat quantitatem; litterâ A ſignificatam quater ſumendam eſſe.

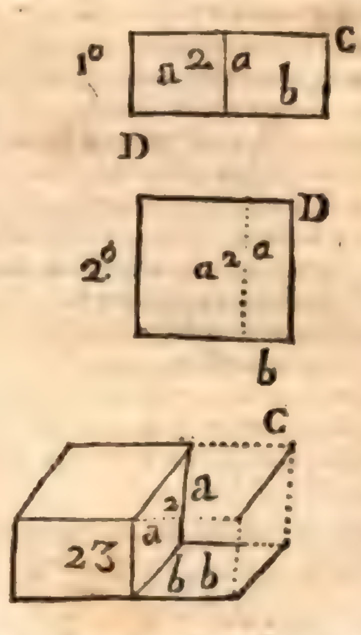
Si verò characteres numerales poſtponantur characteribus Alphabeti, & nonnihil altiùs ſignificatur poteſtas illa, cujus exponens per cyphram indicatur, ut a^4 indicat quadrato-quadratum: pariter e^3, ſignificat e cubum; idem alii explicant repetitione ejuſdem litteræ, ſeu vocalis ſeu conſonantis; ut pro e quadrato, ita notabunt ee, pro cubo eee, & ita de reliquis: cum enim duæ litteræ ſimul ponuntur, indicatur multiplicatio, unius per aliam, ut hic ee ſignificat quadratum, quod fit multiplicatione radicis e, per ſeipſam.

Non tantùm eadem littera repetitur, ſed etiam diverſæ ſimul ponuntur quod eſt ſignum multiplicationis unius per aliam ut a b, ſignificat a, in b, hoc eſt a, multiplicandam eſſe per b.

Pariter ba^2 vel baa, indicat b, multiplicandum per a quadratum, eſt ergo maxima differentia inter ba, & b + a Primum enim ſignificat multiplicationem, ſecundùm additionem ſeu ſummam ex b & a ſicut b — a ſignificat ſubtractionem, ſeu id quod relinquitur dum a ſubtrahitur ex b, hoc eſt differentia inter b, & a.

Quartò notandum eſt numeros coſſicos vocari poteſtates; quoties autem plures numeri coſſici ſimul conjunguntur, per ſigna + vel — numerus ille qui altiorem locum in ſua ſerie obtinet retinet nomen poteſtatis: alii autem dicuntur gradus parodici: Ut ſi proponatur hæc æquatio $a^2 + ba$, $= z$ (hæc autem nota $=$ ſignificat æqualitatem) a^2 vocabitur poteſtas, cui nempe adjungitur ba, & quia poteſtas illa eſt quadratum, dicetur numerus ba eſſe planus, ut nempe intelligatur eſſe in eadem ſpecie quantitatis in qua eſt quadratum, Quilibet enim numerus poteſt intelligi ut linea, ut ſuperficies, ut ſolidum, immo pluſquam ſolidum, cum nempe intelligamus numerum ſolidum multiplicari, per alium ſive ſimplicem quemcumque, generaturque alia ſpecies quantitatis, quæ in continua quantitate ampliùs locum non habet, in diſcreta ſeu numeris valet.

Quare in noſtra æquatione a^2, dicitur poteſtas

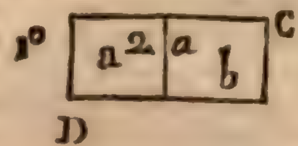


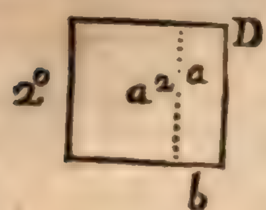
a verò gradus parodicus, b coëfficiens, quia ſimul cum radice a efficit planum ba, z verò quod eſt ex

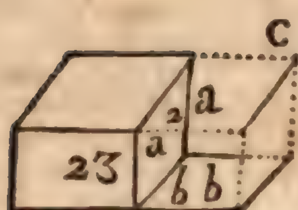
alis

alia parte æquationis dicitur homogeneum comparationis, ut in hac æquatione 1q. + 3R. = 22 τὸ 22 eſt homogeneum comparationis, ſed de his adhuc inferiùs ſuis locis.

Poteſtas cui adjungitur aliquid, dicitur affecta adjunctione; ut a2 + b a, = z erit quadratum







affectum adjunctione plani b a comprehenſi ſub radice a & coëfficiente lõgitudine b. Sit enim quadratum a2, cujus latus ſeu radix a; producatur aliud latus, ita ut illi adjungatur b longitudo, perficiaturque parallelogrammum: tota figura CD, ita exprimetur a2 + b a. Nempe quadratum a2, + planum ſeu rectangulum b a, comprehenſum ſub radice a, & ſub linea b; quæ propterea dicetur coëfficiens longitudo, quia ſimul cum radice a, efficit planum b a, quare poteſtas a2, ſeu quadratum a2, efficitur adjunctione plani ſub radice, coëfficiente.

Secundò ſit quadratum a2, ſeu CD, ex quo ſubtrahatur planum rectangulum b a, comprehenſum ſub radice a, & ſub linea b, dicetur quadratum a, affectum mulcta plani, ſub latere a, & ſub coëfficiente longitudine b.

Pariter cubus affici poteſt, & ſub radice, & coëfficiente plano, & ſub quadrato & coëfficiente longitudine. Verbi gratia proponatur hæc æquatio a3 + ba2 = z. Nempe 1c. + 3q = 54 ſupponendo a = 3 & b = 3 dicetur cubus affectus ſolido ſub quadrato a 2. & coëfficiente longitudine b; quod totum metaphoricum eſt, deſumpta ſimitudine ex quantitate continua. Ut enim augeatur cubus fiatque totale ſolidum, ſi addatur in directum linea B, perficiaturque totum ſolidum, dicetur illud ſolidum comprehenſum ſub quadrato a2, & b. Si enim quadratum a2, ducatur in b, perficietur ſolidum: quod appoſitè cubo adjungi poterit. Quare ſolidum adjunctum dicetur contineri ſub quadrato a2, & linea b.

Poteſt idem cubus affici adjunctione ſolidi, ſub radice, ſed tunc coëfficiens per modum plani concipietur; ut ſi ponatur a3 + a b = z ſeu 1c. + 4R. = 39, dicetur cubus affectus adjunctione ſolidi ſub latere a, & coëfficiente plano b. Sed hæc inferiùs.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Additio numerorum coſſicorum.

Algebra ut plurimum verſatur circa numeros incognitos, quos variè inflectere debet, ut in eorum cognitionem veniat. Quare de illorum algorithmo nobis agendum incumbit; eſt autem Algorithmus labor circa numeros, quo nomine, regulæ omnes, quæ verſantur circa numeros denominatos intelliguntur.

Prima occurrit additio circa quam commune profertur axioma.

Si magnitudo magnitudini additur, hæc illi homogenea eſt.

Si magnitudo magnitudini ſubtrahitur, hæc illi homogenea eſt.

Horum principiorum ſenſus in quantitate continua nullam difficultatem patitur, ſignificatur enim, ſuperficiem addi non poſſe lineæ, nec lineam aut ſuperficiem ſoliditati. In numeris verò qui metaphoricam tantum habent, cum quantitate continua ſimilitudinem, videtur res aliter ſe habere, cubum enim adjungimus quadrato, & lineæ; quilibet enim numerus cuilibet numero per additionem conjungi poteſt, ita ut ex duobus aliqua ſumma reſultet: denominationes enim cubi, radicis, quadrati ſunt numeris extrinſecæ, atque adeò quilibet numerus reſpectu aliorum eſt radix, qui reſpectu unius cubus, aut quadratum erat.

Poſſunt tamen explicari hæc axiomata in numeris coſſicis quòd in additione coſſicâ propriè dicta debeant numeri intelligi in eodem gradu progreſſionis geometricæ, ita ut quadratum quadrato, radix radici, cubus cubo tantùm addatur. Dixi additione propriè dicta, quæ non opus habeat ſigno +.

Additio igitur numerorum coſſicorum ferè ſimilis eſt additioni vulgari numerorum denominatorum, qui non incongruè adduntur, ſed tantùm qui ſunt ejuſdem ſpeciei in unam ſummam coaleſcunt: ita nummos nummis, francos francis, aſſes aſſibus, denarios denariis addimus; ita in Aſtronomia ſigna ſignis, gradus gradibus, minuta minutis, ſecunda ſecundis aptamus. Ita etiam in additione Algebrica, radicibus radices, quadratis quadrata, cubis cubos addimus, ut potes in exemplo videre. Atque ſi

8 qq. +	7 c. +	4 q. +	5 R.
4 qq. +	3 c. +	2 q. +	3 R.
12 qq. +	10 c. +	6 q. +	8 R.

nihil aliud accidat minor erit difficultas quam in additione vulgari numerorum denominatorum.

Idem in ſpecioſa obſervabis ut vides in exem-

8 a4. +	7 a3. +	4 a2. +	5 a.
4 a4. +	3 a3. +	2 a2. +	3 a.
12 a4. +	10 a3. +	6 a2. +	8 a

plo in quo 8 a4 debet addi 4 a4 ut fiat ſumma 12 a4 & ita de reliquis. Obſerva quod a4. a3. a2. &c. non ſunt numeri, ſed denominationes, quas additio non mutat: Sic a4 additum a4 non facit a8. ſed 2a4 ſeu 2 quadrato-quadrata numeri a.

Oritur major difficultas ex variâ combinatione ſignorum + & — quæ ut benè explicetur, exemplum commune, & familiare adducam. Solent mercatores in ſuis libris rationum, duas columnas inſtituere, quarum una eſt debitorum creditorum altera, & quo auctior eſt creditorum numerus, eo ditior evadit mercator, & quo majora

jora ſunt debita, eò ſit egentior, credita notantur ſigno +, debita ſigno — certum autem eſt quoties debita præciſè adæquant credita, mercatorem nihil omnino habere. Si credita majora ſint debitis, iis ſubtractis ex creditis reliquum ad mercatorem pertinebit.

	+ 100.
Adde	— 60.
	+ 40.

Supponamus mercatoris credita eſſe 100. nummorum, quibus addenda ſint debita 60. fiet additio debitorum, ſi ſubtrahantur debita, nam ſcriptis 40. additio peragetur.

Poſſunt autem varii caſus occurrere, quos hic referendo cenſeo; notavi autem ſuprà omnem numerum, cui nullum ſignum præfigitur, ſubintelligi affectum ſigno +.

Numeri addendi primò ſcribantur ita ut cubi cubis, quadrata quadratis reſpondeant.

4 c.	+ 8 q.	+ 7 R.	+ 18
5 c.	+ 0 q.	+ 7 R.	+ 0
3 c.	+ 1 q.	+ 0 R.	+ 1
12 c.	+ 9 q.	+ 14 R.	+ 19

4 R	— 10
5 R	— 20
9 R	— 30

Eodem modo addes numeros quibus præponitur ſignum — ſi nempè in omnibus ſibi reſpondentibus idem ſignum reperiatur, manet enim idem ſignum —

Quare hæ Regulæ communiter traduntur.

In Additione + additum ad + facit +

Pariter — additum ad — facit —

Sed quando + additur ad — fiat ſubtractio majoris à minore, remaneatque ſignum majoris.

G	3 q.	+ 6 R
H	2 q.	— 2 R
K	5 q.	+ 4 R

L	8 c.	— 8 q.	+ 3 R
M	3 c.	+ 3 q.	— 4 R
N	11 c.	— 5 q.	— 1 R

Proponatur numerus H addendus numero G, in primo membro quadratorum nulla occurrit difficultas, cum uterque numerus habeat ſignum +, ut verò addantur + 6 R. & — 2 R ſubtrahe 2. minorem ex majori 6, remanebit 4, cum ſigno majoris; ſi enim mercator habeat 6, & habeat 2, ut fiat ſumma ad indicandum ſtatum mercatoris; ſubtrahe debitum 2. ex credito 6 reſtabit creditum 4. Pariter addendi ſint numeri L & M, non eſt difficultas in primo membro, ſed tantum in ſecundo: cum mercator habeat tantum 3 R. & debeat 4, non habebit unde ſolvat, quare datis tribus, adhuc debebit 1. Idem dico de ultimo membro ultimi exempli; nam ſi habeat 12, & debeat, 15. reſtabunt 3 quæ debet; ideoque illis præponetur ſignum —.

O	3 R.	+ 12
P	2 R.	— 15
S	5 R.	— 3.

Quare in iis caſibus additio ſignorum — eſt potius ſubtractio quam additio; cum igitur numerus poſitivus alteri poſitivo additur, fit numerus poſitivus; cum defectivus defectivo additur, exurgit numerus defectivus; ſi defectivus poſitivo addatur ſe invicem deſtruunt, omnino quidem ſi ſint æquales, ut ſi + 4R, addas — 4R. nihil omnino fiet ſe ſeinvicem deſtruent; vel ex parte ſi ſint inæquales.

Additio numerorum coſſicorum in algebra ſpecioſa eodem modo perficitur quo in communi, nam pariter quantitates ejuſdem appellationis colliguntur per additionẽ numerorum, qui quantitatibus præponuntur: ut in oppoſito exemplo ſatis

1. a3.	+ 3. a2.	+ a.
2. a3.	+ 6. a2.	+ a.
3. a3.	+ 9. a2.	+ 2a.

obſervare licèt, ut ſi addas a ad a fient 2 a. ſi 3. a2 addas ad 6, a2. fient 9. a2. Si 1. a3. ad 2. a3. addas fient 3. a3. Monui jam a3 eſſe denominationem & ſignificare a cubum, ſi quantitates addendæ fuerint diverſæ appellationis additio fiet ope ſignorum + — ut ſi addi debet a poſitivum b poſitivo ſcribes a + b: ſi b eſt defectivum, ſcribes a — b.

Littera Alphabeti cui nullus præfigitur character numeralis, cenſetur habere characterem 1 ut a, id eſt 1 à.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Subtractio numerorum coſſicorum.

Subtractio minoris quantitatis à majore eſt ſumptio exceſſus majoris ſupra minorem.

5 R	— 8.
3 R	— 5.
2 R	— 3.

Subtractio numeri coſſici minoris à majore ejuſdem denominationis & ſigni, eodem modo perficitur, quo communis ſubtractio. Ut

Si ex + 5 R ſubtrahere debeas + 3 R. reſtabunt + 2 R. ſi ex — 8 ſubtrahas — 5, reſtabit — 3.

+ 5 R	— 3.
+ 8 R	— 7.
— 3 R	+ 4
4 —	3 R.

Si numerus major ex minori ejuſdem denominationis & ſigni ſubtrahendus ſit, fiat contraria ſubtractio, cum ſigno item contrario. Ut ſi ſubtrahere debeas + 8 R ex + 5 R, ſubtrahe 5 ex 8, fientque — 3 R. ſi ex — 3 ſubtrahere debeas — 7, reſtabit + 4; fietque 4 — 3 R. Si enim mercator habeat 5 nummos ex quibus propter aliquam rationem ſubtrahere debeat 8. verè mu-

Digitized by Google

tuò ſumere debebit 3; atquè adeò notandum erit — 3. Pariter mercator debebat tria,& habet unde obliteret 7 debita, verè non tantùm obliterat totum ſuum debitum, verùm etiam habet reſidua 4. quæ non poſſunt poni in numero debitorum, ergo in numero creditorum.

Tertiò ſi numerus affectus ſigno + ſubtrahatur à numero affecto ſigno — fiat utriuſque additio, & remaneat —. Ut ſi mercator debeat 100, atque adeo habeat — 100, & ex eo numero debet ſubtrahere + 50,adhuc habebit plura debita, atque adeo habebit—150.

Quartò ſi debeat fieri ſubtractio numeri defectivi ex poſitivo, verbi gratia debeat ſubtrahi — 50 ex + 100. cum ſubtrahi non poſſit negatio niſi per poſitionem alicujus poſitivi, reſtabit + 150.

Quare hæ regulæ ſubtractionis dari poſſunt.

Eadem ſigna idem ſignum reponunt ſi communis fiat ſubtractio, ſeu ſi minor numerus ex majori ſubtrahatur.

Eadem ſigna diverſum reponunt, ſi inverſa fiat ſubtractio. Diverſa ſigna addi pètunt utrumque numerum,remanetque ſignum ſuperioris.

In Algebra ſpecioſa eodem modo fit ſubtractio, ac in Algebra numeroſa; ſubtrahuntúrque tantùm quantitates ejuſdem appellationis. Nam quæ ſunt diverſæ adſciſcunt ſigna contraria dum ſubtrahuntur: ut ſi ex A ſubtrahi debeat + b—c. fiet A—b + c.

Ut meliùs harum regularum veritas eluceſcat, altiuſque memoriæ hæreant; poſſent in aliquibus exemplis ſubſtitui numeri ſimplices pro litteris, aut numeris coſſicis: ut ſi ex A+B debeam ſubtrahere C + D;pro A pone quemcumque numerum, ut 6 pro B alium ut 4 ſitque A + B 10. ſit C 3. & D 2. ſi ſubtrahas C—D,ſubtrahes tantum unum, quare debebunt reſtare 9. Sed ſi mutatis ſignis ſcribas A + B — C + D ſeu 10 — 3 +2. fient 9. ergo hæc operatio exhibet numerum qui relinqui debet poſt ſubtractionem.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Examina additionis & ſubtractionis.

Primum examen additionis, & ſubtractionis coſſicæ, erit commune, additio nempè ſubtractionem probabit, & viciſſim; in quo nulla eſt difficultas.

Secundum examen erit, ſi Additio, aut ſubtractio probetur in aliqua progreſſione Geometrica, per reductionem valoris ſingularum poteſtatum ad numeros ſimplices.

Sint v. g. addendi numeri A & B in unam ſummam C. Inſtituatur examen in ſerie Geometrica in qua radix eſt 2. in ea ſerie cubus eſt 8. atque adeo 4 cubi efficiunt 32, & duo quadrata efficient 8, ſumma eſt 40. auferantur duæ radices, ſeu 4,reſtant 36. Addantur 8. fient 44. Pariter in numero B ſunt duo cubi, ſeu 16 minùs uno quadrato, ſeu 4 reſtant 12. adde 4, radices ſeu 8. fient 20. adde 6. erunt 26. adde 44.& 26.fiunt 70. debent ergo in numero C, inveniri 70.6.cubi ſunt 48, cum uno quadrato ſeu 4. efficiunt 52 cum duabus radicibus ſeu 4. & 14. ſunt 70; ergo proba fuit additio prædictorum numerorum. Idem in ſubtractione præſtandum.

A	4 c.	+	2 q.	—	2 R.	+	8.
B	2 c.	—	1 q.	+	4 R.	+	6.
C	6 c.	+	1 q.	+	2 R.	+	14.

Regulæ Additionis.

Eadem ſigna idem ſignum reponunt.

Diverſa ſigna jubent numerum unius ſigni ſubtrahi ex numero alterius ſigni, nempè minorem ex majori, & relinqui ſignum majoris numeri.

Regulæ ſubtractionis.

Eadem ſigna idem ſignum reponunt, niſi fiat præpoſtera ſubtractio, ſeu major numerus ex minori ſubtrahatur.

Diverſa ſigna jubent addi utrumque numerum; remanetque ſignum ſuperioris, à quo ſcilicèt fit ſubtractio.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Multiplicatio numerorum coſſicorum.

Multiplicatio numerorum coſſicorum, & diviſio peculiaribus nititur principiis, quæ ſunt iſta.

Si magnitudo in magnitudinem ducitur, quæ producitur utrique erit heterogenea.

Si magnitudo magnitudini applicatur, ſeu per magnitudinem dividitur, diviſa utrique erit heterogenea.

Senſus horum axiomatum eſt quod quoties numerus coſſicus per numerum coſſicum multiplicatur, productus ſemper ſit altioris gradus; nam ſi radix in radicem ducitur fit quadratum, ſi radix in quadratum fit cubus, & ita conſequenter; quæ omnia hâc propoſitione explicanda ſuſcipimus.

Prima regula eſto. Numerus abſolutus, numerum abſolutum multiplicans, producit numerum abſolutum; ideoque quoties occurrit abſolutus in abſolutum ducendus, fiat communis ſeu vulgaris multiplicatio, & producto nullus character coſſicus apponatur.

Secunda, ſi numerus coſſicus in numerum abſolutum ducatur, fiat multiplicatio characterum numeralium, & producto idem character coſſicus præponatur, ut ſi numerus A conſtans pluribus numeris coſſicis, multiplicetur per nume-

A	4 c.	+	8 q.	+	2.
B					4
C	16 c.	+	86 q.	+	8.

rum abſolutum B. multiplica characteres numerales ſingulorum membrorum per B, ut quater quatuor efficiunt 16 ſcribo 16, cubos.

Ratio eſt quia ſi quater repeteretur numerus A, fieretque una ſumma, ea eſſet æqualis numero C, ſed multiplicatio ejuſdem numeri A per B idem præſtare debet, ac ſi quater repeteretur numerus coſſicus A, quot nempè ſunt unitates in abſoluto B; ergo proba eſt multiplicatio.

Eadem Regula probari poteſt per analyſin:fiat ſuppoſitio, alicujus progreſſionis geometricæ, verbi gratia illius in qua radix eſt 2. & cubus eſt

8.4 cubi

8. 4 cubi ſunt 32, ſi multiplices 4. cubos per 4. efficis 16. cubos; ſed 16 cubi ſunt octies 16. ſeu 128. ſed pariter quater 32. idem præſtat, ergo proba eſt multiplicatio. Ratio petitur (*ex* 2. 2.) in qua habetur rectangulum ſub inſecta, & totâ aliquâ lineâ, æquale eſſe omnibus rectangulis comprehenſis ſub inſecta, & ſingulis ſegmentis ſectæ.

Tertia Regula cum numerus coſſicè denominatus, per alium numerum coſſicè item denominatum multiplicatur; fiat multiplicatio communis characterum numeralium, & producto character coſſicus addatur, indicatus per ſummam exponentium utriuſque numeri multiplicati. Sit numerus coſſicè denominatus 3 q multiplicandus per 4. c. primò multiplico 3. per 4. & fiunt 12, quibus apponendus eſt character coſſicus S. indicatus per 5 qui eſt ſumma 2. ſeu exponentis 3q, & 3 ſeu exponentis C.

Demonſtr. petitur ex iis quæ demonſtravimus in generatione logarithmorum, nempè quoties numeri arithmeticè proportionales aptantur geometricè proportionalibus; idem præſtari additione arithmeticorum quod perficitur multiplicatione geometricorum. Sed per additionem exponentium quadrati, & cubi, fit exponens ſurdeſolidi; ergo ſi unum quadratum multiplices per unum cubum, generabitur unus ſurdeſolidus; ſi unum quadratum duos cubos multiplicet, producentur duo ſurdeſolidi; ſi duo quadrata multiplicent duos cubos fient 4. ſurdeſolidi: ergo ſi 3q. multiplicent 4 c. fient 12. ſurdeſolidi.

Radix ergo multiplicans ſeipſam facit quadratum.

Radix multiplicans quadratum producit cubum.

Et univerſaliter radix multiplicans aliquam poteſtatem generat ſequentem.

Quadratum multiplicans radicem facit cubum diſtantem à radice duobus gradibus.

q. ductum in q. efficit qq. diſtans à quadrato duobus gradibus.

q. multiplicans cubum generat ſurdeſolidum diſtantem à cubo duobus gradibus.

q. multiplicans qq, producit q c, diſtantem duobus gradibus à qq.

Cubus multiplicans R. producit qq. remotum à radice tribus gradibus.

c. ductus in q. ſurdeſolidum efficit tribus gradibus à q. remotum.

c. ductus in c. producit q. c.

Regula ergo Quarta generalis eſto; Exponens cujuſcumque numeri coſſici indicabit quot gradibus remotus ſit productus ab alio multiplicante.

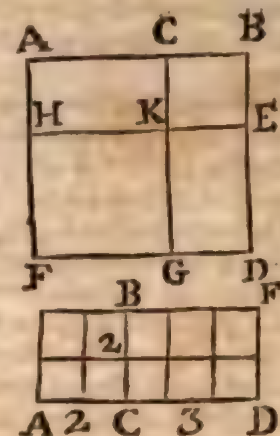
Regula Quinta, Eadem ſigna reponunt ſignum +, diverſa ſigna, ſignum —.

Non apparet ulla difficultas ut numerus affectus ſigno + multiplicatus per alium affectum ſigno +, producat affectum ſigno +; nam in multiplicatione vulgari omnes numeri ſubintelliguntur habere ſignum +.

Secundò cum + per — multiplicatur, numerus productus habet hoc ſignum —: quod penetratis terminis ſatis intelligetur. Proponantur + 4 R. multiplicandæ per 3 R — 4 ſi abeſſet additamentum illud — 4, multiplicando 4 R. per 3 R. fiunt 12 q, ſed nolumus ut fiat integra illa multiplicatio per 3 R, ſed innuimus ſubtrahi prius debere, ex 3 R. quatuor unitates; ergo productus erit minor, quam ſi deeſſet illud additamentum — 4. ergo 16 R, quæ oriuntur ex multiplicatione 4 radicum per 4 debent habere præfixum ſignum —.

Major apparet difficultas in ultimâ parte regulæ, nempè ut minus multiplicatum per minus, efficiat plus; quod tamen ita demonſtro nempè in tota operatione multiplicationis, id quod exurgit ex multiplicatione numeri affecti ſigno + per numerum affectum ſigno eodem — addendum eſſe, ad hoc ut fit ea æqualitas quæ inquiritur.

Jam aliàs ſæpè oſtendimus per multiplicationem generari rectangulum: Proponantur ergo



numeri A B. — B C. ſeu 8 — 2. & B D. — B E ſeu 7 — 3. multiplicandi invicem: primus A B — B C eſt AC: ſecundus verò B D — B E erit D E; inquirimus ergo rectangulum ſub A C & D E, hoc eſt rectangulum F K; quod ita inquirèmus. Clarum eſt rectangulum A D, æquale eſſe rectangulis F K, A E, K D; addatur utrinque rectangulum K B, erit rectangulum A D + rectangulo K B, æquale rectangulis F K, A E, & duobus K D, K B, ſeu rectangulo G B. Quare ſi ex rectangulis A D, K B, auferantur rectangula A E, & G B, reſtabit rectangulum F K, id autem præſtamus virtualiter regula noſtrâ. Nam primò multiplicamus — 2. per — 3. fitque + B K 6 tum multiplicamus + 8. per — 3. fitque — 24 ſeu A E. tum multiplicamus + 7. per — 2. fitque — 14. ſeu BG. deinique multiplicamus + 8. per + 7. fitque 56. ſeu A D. habemus A D — AE & B G. + BK. ergo reſtat F K.

$$
\begin{array}{r}
8 - 2 \\
7 - 3 \\
\hline
- 24 + 6 \\
56 - 14 \qquad \\
\hline
56 - 38 + 6
\end{array}
$$

Proponenda ſunt aliqua exempla in quibus multiplicationis artificium meliùs videatur. Proponatur numerus A. multiplicandus per numerum B.

Digitized by Google

A	8 c. — 4 q. + 8 R. — 8
B	3 c. + 3 q. + 5 R. — 6
C	— 48 c. + 24 q. — 48 R. + 48
D	+ 40 qq. — 20 c. + 40 q. — 40 R.
E	+ 24 ſ. — 12 qq. + 24 c. — 24 q.
F	24 qc. — 12 ſ. + 24 qq. — 24 c.
G	24 qc. + 12 ſ. + 52 qq. — 68 c. + 40 q. — 88 R. + 48

Primò multiplicentur ſingula membra numeri A per —,6 ultimum ſcilicèt membrum numeri B, obſervatis iis quæ de diſtinctione ſignorum + & — diximus, fietque numerus C.

Secundò multiplicentur ſingulæ partes numeri A per + 5 R., penultimum membrum numeri B, fietque numerus D.

Tertiò multiplicetur A, per + 3 q. obſervatis iis regulis quas dedimus fiet numerus E.

Quartò multiplicetur idem A per 3 c. primum membrum numeri B, & habebis F.

Quintò adde ſimul numeros C, D, E, F. fietque numerus G, in quo vides obſervari in multis methodum communem multiplicationis: debet autem Tyro in his exemplis ſe exercere.

Hæ Regulæ multiplicationis obſervari debent etiam in Algebra ſpecioſa. Nempè primò ſi numerus quilibet abſolutus multiplicet quamcumque poteſtatem, multiplicatur tantum character numeralis præfixus tali poteſtati: ſi 4 a3. multiplicari debeant per 4. fient 16 a3.

Pariter a in a producit a2.

a in a2 generat a3.

a in a3 generat a4 & ita conſequenter.

a2 in a2 producit a4.

a2 in a3 producit a5 additis ſcilicet exponentibus.

a2 in a4 producit a6.

a3 in a3 producit a6. & ita de aliis omnibus.

Quando quantitates diverſæ denominationis ſe invicem multiplicant, fit alia quantitas utrique heterogenea: ut ſi a in b ducatur, intelliganturque a & b, eſſe longitudines fit planum a b. Si longitudo in planum ducatur, fit ſolidum; ut ſi a in b planum ducatur, fit ſolidum a b, latitudo in ſolidum producit planoplanum & ita conſequenter. In quo notandum eſt quemlibet numerum poſſe concipi per modum latitudinis, per modum plani, aut ſolidi, idcóque his denominationibus non eſt multum inhærendum, quæ tamen poſſunt confuſionem parere.

Quantitatibus coſſicis ut plurimum præponuntur characteres numerales, ut 3 a, 4 a2; hi autem characteres multiplicari debent: ut ſi 3 a ducantur in 4 a2. fient 12 a3; ex 2 a in 3 bc fiunt 6 abc; ex 2 a b in 6 cd, fiunt 12 a b c d.

Notandum item eſt, dum character coſſicus multiplicat alium coſſicum compoſitum, in quo jam prædictus character reperitur, ſufficere ut mutetur exponens: ut ſi a b ducatur in a fiet a2b. Quod ut melius intelligatur, ſit a idem quod 3. & b idem quod 4. eritque ab 12. dum multiplico 12 per 3. idem numerus producitur, nempe 36, ac ſi primò 3. per 3. multiplicarem, formaremque quadratum 9, quod poſtea per b ſeu per 4 multiplicarem. Oſtendimus enim in arithmetica quoties tres numeri ſe invicem multiplicant, eundem ſemper numerum produci, quomodocumque hæ multiplicationes diſponantur.

Pariter ſi a b multiplicetur per a b, fiet a2, b2, ut ſi 12. per 12. multiplicentur, fiatque 144. dico ſi multiplicetur 9. quadratum a, per b quadratum, ſeu 16. eundem numerum produci, quia ſcilicet poſitis duabus radicibus 3 & 4. & earum quadratis 9. & 16, ſi radices ſe multiplicent, fiantque 12. & quadrata ſe multiplicent fiantque 144. 12. eſt radix numeri 144. Ratio eſt quia cum 3. multiplicet & ſeipſum & 4, faciatque 9. & 12, erit 9. ad 12. ut 3. ad 4. pariter quia 4. multiplicat & 3. & ſeipſum, efficitque 12. & 16. erit ut 12 ad 16, ita 3 ad 4. ergo ita eſt 9 ad 12. ut 12 ad 16, ergo (*per* 16.6.) quadratum mediæ æquabitur rectangulo comprehenſo ſub extremis, quod erat demonſtrandum. Ergo ſi a b multiplicet a b fiet $a^2 b^2$.

In genere ergo hæc regula obſervari debet, quoties idem eſt character in multiplicante, & multiplicato, ſufficit mutare exponentem, ut vides in præcedenti exemplo.

Denique notandum eſt in multiplicatione eſſe differentiam inter hæc duo multiplicare a + b, per a + b, & multiplicare a b, per a b. Nam poſito quod a ſit 3. & b ſit 4. a + b ſeptem efficiunt, ſed a b, ſignificant a in b, ſeu 12. Pri-

	a + b
	a + b
	+ a b. + b2
a2	+ a b.
a2 + 2 a b.	+ b2

mum ita peragitur: primò, multiplicetur b in b, fitque + b2. tum multiplicetur b in a, fitque + a b. Tertiò multiplicari debet a + b per a, fitque + a b, & a2 ita ut omnibus collectis fiant a 2 + 2 a b. + b2.

Secunda verò multiplicatio peragitur mutando tantum exponentes quantitatum a & b, ita ut fiant a^2 b^2, intelligaturque a quadratum in b quadratum.

PROPOSITIO X.

Problema.

Diviſio numerorum coſſicorum.

Diviſio, eſt acceptio quantitatis ad quam diviſa eam habeat rationem quam habet diviſor ad unitatem. Hæc quantitas vocatur quotiens. Dicitur diviſio eſſe applicatio ſuperficiei ad lineam; numerus enim dividendus concipitur per modum ſuperficiei rectangulæ, quæ applicatur ad unum latus, ut innoteſcat aliud latus, atque adeò quantitas applicanda, illi cui applicatur eſt heterogenea. In numeris vulgaribus hæc regula locum non

habet,

Digitized by Google

habet ; in coſſicis tamen vim ſuam obtinet.

Eædem ferè regulæ & obſervationes uſurpandæ ſunt in diviſione, quæ multiplicationi perficiendæ accommodatæ ſunt. Quare

Quoties numerus coſſicus per numerum abſolutum dividitur, quotiens erit numerus coſſicus ejuſdem denominationis; cum enim multiplicatio numeri coſſici per abſolutum, eundem characterem coſſicum retineat, diviſio quæ numerum multiplicatum in priorem ſtatum reſtituit, eundem etiam characterem ſervabit.

Quare ſi dividas 20 q per numerum abſolutum 4, fiet quotiens 5 q.

Quoties numerus coſſicus major per minorem dividitur, fiat ſubtractio exponentis ab exponente, & apponatur character coſſicus reſpondens reliquo. Proponatur hic numerus 12 C, dividendus per 4q. Dividatur numerus abſolutus 12 per abſolutum 4, erit quotiens 3; tum quia exponens cubi eſt 3, & quadrati 2, facta ſubtractione 2 a 3 reſtat 1, dices igitur quotientem eſſe 3 R. quod ex regulis in multiplicatione traditis facilè demonſtratur.

	R	q	c	qq	S	qc	SS
R	N	R	q	c	qq	S	qc
q	R	N	R	q	c	qq	S
c	q	R	N	R	q	c	qq
qq	c	q	R	N	R	q	c
S	qq	c	q	R	N	R	q
qc	S	qq	c	q	R	N	R
SS	qc	S	qq	c	q	R	N

Poteſt tamen addi hæc tabula totam doctrinam diviſionum continens : uſus illius talis erit. Quære in ſummitate numerum dividendum, & in primâ columnâ diviſorem, communis concurſus exhibebit quantitatem. Ut ſi dividendum proponas qq. per q, illud accipe in ſummitate primæ lineæ & in prima columna diviſorem ſeu q. communis utriuſque concurſus quadratum exhibebit. Si cubum per quadratum divides, quotiens erit R.

Signorum regulæ priùs traditæ obſervandæ ſunt, + diviſum per + facit +; — per — dat in quotiente +.

Plus diviſum per — aut — per +, efficit —

Facilis eſt diviſio cum diviſor unum habet tantum membrum; alioqui difficilis eſt, & ſequentes habet leges.

Si diviſor fuerit compoſitus, id eſt habeat plura membra, & membra dividentis non habeant eamdem rationem ad membra diviſi, non fiet diviſio propriè dicta, ſed reſultabit fractio. Ut ſi dividere debeas hunc numerum 7q + 15 R, + 10 per 2 R, + 2. fiet fractio $\frac{7q + 15\,R + 10}{2R + 2}$ indicans ubi innotuerit valor tàm radicis quàm quadrati inſtituendam eſſe talem diviſionem.

Si numeri dividendi membra eamdem habuerint rationem, ad membra diviſoris compoſiti, poterit inſtitui diviſio, ut ſi dividere debeas 16q. + 6R. per 8R. + 3 quotiens erit 2R.

Denique ſi numerus denominationis minoris dividatur per numerum denominationis majoris, exurget fractio : ut hic numerus 10R. dividendus ſit per hunc, 5c, naſcetur hæc fractio $\frac{10\,R.}{5.\,C.}$

In multiplicatione & diviſione coſſicorum, ſæpe accidit ut numeri in ſpecie differentes, eundem tamen producant, eò quòd in ſpecie tantùm differant, re vera tamen ſint iidem numeri; ſic 3, eſt idem ac 5 — 2; quare ſi per ſeipſos multiplicentur, habebunt quadrata æqualia.

Notandum item eſt in algebra occurrere numeros minores quam nihil, qui licet fictitii ſint, poſſunt tamen conferre ad inveniendos veros numeros.

Quod pertinet ad diviſionem ſecundum methodum in ſpecioſa uſurpatam, obſervandæ ſunt regulæ diviſionis coſſicorum. Quare

Primò quoties poteſtas ſuperior, per inferiorem ejuſdem appellationis dividitur, ſubtrahitur exponens dividentis ab exponente diviſæ. Sic dividendo a3 per a2, reſtat a1 ſeu a, ſi ante poteſtatem adſcripti ſint characteres numerales, tam in dividendo, quam in diviſore, debent illi dividi ut ſi 12 a4 dividantur per 3 a3; erit quotiens 4a.

Secundò quando poteſtas, aut etiam quantitas, per aliam alteriùs nominis, ſeu ex alia radice ortam dividitur, diviſio peragitur ſubſcriptione diviſoris : ut ſi b4 dividi debeat per a2, fiet quotiens $\frac{b4}{a2}$

Tertiò quando quantitas expreſſa per litteras dividitur per quantitatem expreſſam per aliquas ex illis, quotiens eſt quantitas expreſſa per reliquas. Ut ſi a b dividatur per a, reſtabit b. Cum enim a b nihil ſignificet aliud, niſi productum ex a in b, clarum eſt quod ſi tale productum dividatur per unum latus a, quotiens erit aliud latus b.

Major erit difficultas in diviſione quantitatis compoſitæ, per aliam quantitatem compoſitam. Poſſumus tamen in multis imitari methodum diviſionis arithmeticæ communis. Proponatur primò quantitas compoſita dividenda per quantitatem ſimplicem; ut ſi proponatur quantitas

A c + B c
(A + B
c c

A c + B c, dividenda per c; divido primum membrum A c per c, & fit quoties A, tum multiplico c per inventum quotientem A, & fit Ac, quo ſubtracto ex primo membro AC, nihil reſtat, promoveo diviſorem, & divido Bc, per c, & fit quotiens B, quem ſcribo, tum multiplicando diviſorem c, per B, fit Bc, quo ſubtracto ex B c nihil reſtat; quare A + B erit quotiens. Quando autem dubitamus, an ritè fuerit peracta diviſio, poſſumus per multiplicationem id probare.

Proponatur ſecundò Ac + AD, + BC, + BD

Ac, + AD, + Bc, + BD

c, + D, (A + B.

dividenda per c + D. Dividatur primum membrum A c, per c, quotiens erit A, per quem multiplica totum c + D, fietque A c + AD, quibus ſubductis ex Ac + AD nihil relinquitur. Intelligatur diviſor c + D promotus, divide Bc,

 per

per c, quotiens erit B, per quem ſi multiplices totum diviſorem c + D, fiet Bc, + BD, quibus ex dividendo ſubductis nihil relinquitur, ergo quotiens erit A + B.

Quando ita fieri non poſſunt diviſiones, ut nihil relinquatur, diviſor ſubſcribatur dividendo, & perfecta erit diviſio. Sit dividenda quantitas B D per A, fiet quotiens $\frac{BD}{A}$, pariter ſi proponeretur hæc quantitas compoſita BD, + D G, dividenda per A, ita ſcribendum eſſet $\frac{BD + DG}{A}$ hæc methodus eſt facilior: ut verum tamen fatear, non tam eſt diviſio, quam nota diviſionis faciendæ, ubi quantitates ſecundum propriam naturam innoteſcent.

PROPOSITIO XI.
Problema.

De Fractionum coſſicarum numeratione.

Numeri coſſici, ſuas æquè ac vulgares numeri fractiones habent, circa quas eædem valent regulæ & axiomata.

Prima regula ſit hæc. Minutiæ in quibus eadem eſt ratio numeratoris ad denominatorem æquales ſunt, ita $\frac{1}{3}\,\frac{2}{6}\,\frac{3}{9}$ idem ſonant: cum enim denominator fractionis pro unitate diviſa in partes ſupponatur, & numerator indicet quot hujuſmodi partes fractio contineat, eadem erit ratio fractæ magnitudinis ad unitatem, quæ numeratoris ad denominatorem; ergo (*per 7.5.*) magnitudines fractæ erunt æquales. Ex hoc ſequitur quod ſi fractionis denominator, & numerator per eumdem numerum aut multiplicentur, aut dividantur fiet fractio æqualis.

Secunda ſit numeratio fractionum, quæ melius intelligi non poteſt quam in exemplis variis. Proponatur hæc fractio $\frac{12}{15}$R. hæc fractionem ſignificat, in qua 12. eſſet numerator & 15 R. eſſet denominator, ita ut ſi verſemur in progreſſione geometrica in qua Radix eſt 2. atque adeo 15 R. æquantur numero 30. hæc fractio $\frac{12}{15}$R. ſit huic æqualis $\frac{12}{30}$. Pariter hæc fractio $\frac{12\ qc. + 10\ qq.}{7\ q.}$ ſignificat eam fractionem in qua numerator eſſet æqualis 12 qc. + 10 qq. & denominator æquaret 7. quadrata. ut in progreſſione geometrica dupla 12qq. efficiunt 768. & 10qq. faciunt 160. erit ergo numerator fractionis 928, cujus denominator erit 28. ſeu 7 quadrata radicis 2: & fractio conſequenter major erit unitate, ut vides $\frac{928}{28}$.

Harum fractionum algorithmus 6. regulis continetur, nempè abbreviatione, reductione ad eundem denominatorem, additione, ſubtractione, multiplicatione, diviſione.

In Algebra ſpecioſa frequentiores occurrunt fractiones unitate majores, quam in algebra numeroſa, aut in arithmetica communi, quia nempè ſæpè diviſio perficitur per ſimplicem ſubſcriptionem diviſoris: ut $\frac{AB}{c}$ ſignificat rectangulum contentum ex A in B, & diviſum per c. ex quo oritur fractio plerumque major unitate: in qua ſcilicèt denominator minor eſt numeratore.

Certum eſt etiam in fractionibus Algebraicis, eam fractionem æqualem eſſe unitati, in qua denominator, & numerator æquales ſunt.

Certum eſt item, quemlibet numerum transformari poſſe in fractionem, ſi illi ſubſcribatur unitas qualis eſt iſta. $\frac{AB}{1}$

Tertiò ſi accidat quantitatem ſcribendam eſſe per modum fractionis, cujus denominator aſſignetur, per denominatorem multiplicetur, & ſic multiplicata fiat numerator fractionis, ut ſi quantitas A debeat notari per modum fractionis cujus denominator ſit B multiplicetur A per B, fiet AB, numerator fractionis $\frac{AB}{BA}$ quæ eſt æqualis ipſi A, aut $\frac{A}{1}$. Reliquæ praxes communes ſunt aliis fractionibus.

PROPOSITIO XII.
Problema.

Abbreviatio fractionum coſſicarum.

Abbreviatio fractionem coſſicarum, ſeu reductio ad minores numeros, duplex eſſe poteſt; nempè reductio ad minores numeros iiſdem præfixos denominationibus coſſicis; ſecunda reductio erit ad characteres coſſicos minus altos, ſeu minus diſtantes à radice. De utraque agendum eſt in hac propoſitione.

Abbreviatio minutiæ quoad numeros, eſt ſubſtitutio numerorum eamdem rationem habentium: ut $\frac{16q}{4R}$ reducitur ad hanc $\frac{4q}{1R}$. Methodus autem eadem quæ in arithmetica communi uſurpatur, per inventionem ſcilicèt maximæ communis menſuræ, ut in propoſito exemplo, tam 16. quam 4 dividuntur per 4. maximam communem utriuſque menſuram.

Quia autem ut plurimum in fractionibus coſſicis plures occurrunt quam duo numeri, ideo non tantum duorum numerorum, ſed plurium communis menſura invenienda eſt. Invenitur autem maxima communis menſura duorum numerorum ſubtrahendo minorem à majori quoties poteſt, & hoc alternatim, donec occurrat aliquis, qui proximè majorem præciſè metiatur, hic enim erit communis maxima duorum numerorum menſura: quæ ſi tertium metiatur, erit trium maxima communis menſura, ſi tertium non metitur. Quæratur hujus communis menſuræ jam inventæ, & tertii numeri maxima communis menſura; atque ita inveniemus trium, quatuor, quinque numerorum maximam communem menſuram, per quam ſi dividamus propoſitos numeros, fiet abbreviatio quoad numeros. Proponatur hæc fractio $\frac{8c + 16q}{4R + 10}$ quatuor numerorum 8. 16. 4. 10, maxima communis menſura eſt 4, per hanc divide prædictos numeros, habebiſque aliam fractionem priori æqualem $\frac{2c + 4q}{1R + 5}$ reductam ad minores numeros. Eſſe autem æqualem clariſſimum eſt, cum ejus termini eamdem rationem habeant, ac termini præcedentis fractionis.

Abbreviatio characterum coſſicorum alicujus minutiæ, eſt reductio utriuſque termini, ut dixi, ad minores characteres coſſicos, qui eamdem inter ſe rationem obſervent; hoc eſt ſi inter terminos erant duo gradus progreſſionis geometricæ ante reductionem, poſt reductionem totidem inveniantur, ſed minus alti. Proponatur hæc minuntia $\frac{5qq + 4q}{1R}$ [illegible] minimus character eſt 1 R: hic

hic deſcendat uſque ad numerum abſolutum, & quia inter radicem & quadratum nihil mediat, & pariter inter abſolutum & radicem nihil mediat, pro 3q reponantur 3R. & quia inter q & qq mediat cubus, & inter radicem & cubum mediat q pro 5qq. Ponantur 5c. eritque fractio nova $\frac{5c + 3R}{1}$

Quare hæc eſto regula generalis: minimus character tranſeat in numerum abſolutum, & alij æquè à numero abſoluto diſtent, ac præcedentes diſtabāt à minimo. Quod ut facilius exequaris ſubtrahe exponentem minimi characteris, ab exponentibus majorum, reſtabunt exponentes characterum apponendorum ut in præcedenti exemplo ſi 1, exponentem radicis ſubtrahas ex 4. exponente qq, reſtabit 3, exponens cubi; ſi ab exponente quadrati ſeu 2, ſubtrahas 1, reliquus erit 1 exponens radicis.

Demonſtratio clara eſt. Cum enim idem numerus fractionis terminos multiplicat, aut dividit, æqualis exurgit fractio: ſed quod in numeris per multiplicationem, aut diviſionem peragitur, id in exponentibus per additionem & ſubtractionem perficitur, ergo ſubducto exponente infimi termini, idem perficitur; ac ſi per infimum omnes dividerentur.

Addo inſuper in Algebra ſpecioſa, fractionem ad minores terminos commodiſſimè reducendam, diviſione per quantitatem, quæ in utroque termino exprimatur; ut ſi proponatur hæc $\frac{a\,2b}{bD}$, fiat diviſio utriuſque termini per b, reſtabit alia fractio ſimplicior $\frac{a2}{D}$ æqualis priori. Pariter ſi occurreret hæc fractio $\frac{a\,2b + a\,2D}{bD + D2}$ dividatur numerator & denominator per b + d, fiet $\frac{a2}{d}$ fractio priori æqualis. Nam dividendo a 2b per b fit quotiens a2, per quem ſi multiplices b + d, fit a 2b + a 2d, quibus ſubductis ex numeratore nihil relinquitur; pariter dividendo bd + d 2 per b + d, primò divido bd per b, & quotiens erit d, per quem multiplico diviſorem b + d, & fit bd + d2, quo ſubducto ex denominatore nihil relinquitur: quare termini fractionis rectè diviſi ſunt per b + d; ergo quotientes a2 & d eamdem habent rationem.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Reductio minutiarum coſſicarum ad eumdem denominatorem.

Hæc reductio neceſſaria eſt ut minutiæ addantur, aut ab invicem ſubtrahantur. Perficitur autem multiplicatione in crucem decuſſata, eo ferè modo quo ſolet in minutiis vulgaribus. Hoc eſt primò denominatores ad invicem multiplicantur, ut communis exurgat denominator, tum numeratores decuſſatim per denominatores, ut producantur numeratores.

A.	4 R.	X	D.	6c
B.	5q		C.	7q
H.	28 c		G.	30. S
K.	35 qq		F.	35. qq

Proponantur fractiones AB, DC reducendæ ad eamdem denominationem, multiplica denominatores B & C inter ſe, nempe 7q per 5q, fiet communis denominator 35. qq. Duc A in C fietque 28 c. numerator H: duc B in D ſeu 6c in 5q, fient 30. S, numerator G.

Demonſtratio eadem recurrit quæ in fractionibus vulgaribus; cum enim C multiplicando A & B producat H & K, eadem erit ratio H ad K quæ A ad B: ergo fractiones AB, HK æquales erunt. Pariter cum B multiplicando D & C, efficiat G & F, erit eadem ratio D ad C, quæ G ad F, quare fractiones DC, GF æquales erunt.

Si numerus integer, & fractus ad eandem denominationem revocari debeant, numero integro ſubſcribitur unitas. Ut ſi hic numerus 4 R + 3R debeat reduci ad eamdem denominationem cum aliqua fractione, illi ſubſcribe unitatem, ut fiat fractio $\frac{4R + 3R}{1}$

Si integro adhæreat fractio, integer priùs ad fractionem revocetur: nempe multiplicatus per denominatorem fractionis, & additus numeratori fractionis: ut cum proponetur 6q + $\frac{4R}{3R}$, ſi multiplices 6q per 3R, fiunt 18C: ſcribe ergo $\frac{18c + 4R}{3R}$.

In Algebra ſpecioſa quia multiplicatio fractionum in crucem, ita fractiones compoſitas reddit, ut expurgatione operosâ indigeant, aliam viam tentabimus. Primò propoſitis duabus quantitatibus; quæremus minimam quantitatem, quam illæ ſine reſiduo dividant hoc modo. Proponantur duæ quantitates a 2b & bd, hæ ſcribantur ad modum fractionis in hanc formam $\frac{a\,2b}{bd}$. Reducantur primò ad ſimpliciorem fractionem, hæc erit $\frac{a2}{d}$. Inſtituatur multiplicatio in crucem, ut prius;

$$\frac{a\,2b}{bd} \;\mathsf{X}\; \frac{a2}{d}$$

idem numerus proveniet ſive a2 multiplicet bd, ſive d multiplicet a 2b nempe a 2bd, hæc erit minima quantitas quæ per a 2b & bd dividi poteſt.

Pariter datæ ſint duæ quantitates a 2b — a 2d & bd—d2, ſitque quærenda minima quantitas per utramque exactè diviſibilis, ſcribantur hæ quantitates ad modum fractionis $\frac{a\,2b - a\,2d}{bd - d2}$ reducatur hæc fractio ad minores terminos fietque $\frac{a2}{d}$ fiat multiplicatio in crucem cum priori,

$$\frac{a2}{d} \;\mathsf{X}\; \frac{a\,2b - a\,2d}{bd - d2}$$

fiet utrobique eadem quantitas, nempe a 2bd—a 2 d2. Cum enim eadem ſit ratio in utraque fractione numeratoris ad denominatorem, ſunt enim æquales, productus ſub mediis æquabitur producto ſub extremis.

Si tribus quantitatibus propoſitis quæreretur minima quantitas per quamlibet exactè diviſibilis: quærenda primò eſſet quantitas minima diviſibilis exactè per duas, quæ ſi diviſibilis non eſſet per tertiam, quærenda eſſet minima quantitas diviſibilis exactè per hanc inventam, & tertiam.

Sed jam ad reductionem minutiarum veniamus. Proponantur duæ fractiones $\frac{b\,3d}{a\,2f}$ & $\frac{a3}{df}$ Primò quæratur minima quantitas per utriuſque fractionis

fractionis denominatorem diviſibilis, hæc erit a 2df; hæc poterit eſſe communis denominator. Hunc communem denominatorem divide per denominatores a 2f & df, fient quotientes d & a, per quos multiplicabis numeratores fractionum, producenturque numeratores b3 d2 & a4; & habebis fractiones $\frac{a4}{a2\ df}$ · $\frac{b3\ d2}{a2\ df}$, quas dico eſſe præcedentibus æquales. Nam cum a 2df dividatur, per a2f, & df denominatores & quotientes ſint d & a, hi quotientes ducti in denominatores a2f & df, faciunt communem denominatorem, & ducti in numeratores b3d & a3, faciunt numeratores b3 d2 & a4: erit ergo eadem ratio numeratorum ad denominatores in novis fractionibus, quæ in prioribus erat: ergo erunt æquales fractiones.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Additio & ſubtractio fractionum coſſicarum.

Fractiones coſſicæ addendæ, aut ſubtrahendæ ad eamdem prius denominationem revocentur, tum numeratores ſimul addantur ad additionem; unus ab alio ſubtrahatur ad ſubtractionem. Ut ſi ſint iſtæ fractiones $\frac{3R}{8q}$ $\frac{7R}{8q}$

colligantur numeratores fientque $\frac{10R}{8q}$

Ratio hujus operationis eadem eſt quæ in vulgaribus fractionibus. Poſſet tamen ulteriùs probari reſolutione terminorum ad proprium valorem. Ut ſi verſemur in progreſſione dupla 3R. efficiunt 6, & 8q efficiunt 32; eſt igitur $\frac{3R}{8q}$ idem ac $\frac{6}{32}$. pariter $\frac{7R}{8q}$ efficiunt $\frac{14}{32}$. eritque aggregatum fractionum $\frac{20}{32}$. ſeu $\frac{10R}{24}$ Eadem eſt praxis ſubtractionis, nam retento eodem denominatore, numerator fractionis ſubtrahendæ, à numeratore alterius ſubtrahitur, ut ſi $\frac{3R}{8q}$ ſubtrahere debes à $\frac{7R}{8q}$, ſubtrahe 3R ex 7R reſtabunt $\frac{4R}{8q}$; quæ praxis majorem difficultatem non patitur, quam in fractionibus vulgaribus.

In Algebra ſpecioſa eadem praxis uſurpanda eſt.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Multiplicatio, & diviſio minutiarum coſſicarum.

Minutia coſſica per aliam multiplicatur, cum tam numeratores inter ſe, quam denominatores multiplicentur; quæ regula communis eſt minutiis vulgaribus, ſimiliterque demonſtratur; habet tamen id proprium, quod in tali multiplicatione debeat haberi ratio characterum coſſicorum, & ſignorum + & — Ut ſi multiplicandæ ſint iſtæ minutiæ $\frac{3R}{4q}$ in $\frac{5R}{5q}$

producetur hæc $\frac{15q}{20qq}$

Ad diviſionem minutiæ per minutiam coſſicam: numerator fractionis dividendæ multiplicatur per denominatorem dividentis, fietque numerator quotientis ſupra lineam ſcribendus; tum multiplicetur denominator ejuſdem fractionis dividendæ per numeratorem dividentis, & producetur denominator quotientis: hæc fractio $\frac{12q + 6R}{5c}$ dividenda ſit per $\frac{4R}{5}$, multiplica numeratorem dividendæ per 5, fiet 60q + 30R. Multiplica item denominatorem dividendæ ſeu 5c. per 4R fient 20qq pro denominatore. Habes igitur quotientem $\frac{60q + 30R}{20qq}$

Demonſtratio eſt in arithmetica communi.

1	5	
9	20	5.180
16	27	12.332
4	3	

Quia tamen per hujuſmodi praxes, præcipuè verò in multiplicatione, oritur fractio non ad minimos terminos reducta, ita operaberis ut habeas fractionem ſub minimis numeris comprehenſam. Proponatur $\frac{9}{16}$. & $\frac{20}{27}$. fractiones multiplicandæ. Quæratur communis maxima menſura numeratoris 9, & denominatoris 27, decuſſatim ſe reſpicientium, eritque 9; per quam ſi utrumque numerum dividas, habebis quotientes 1 & 3, ſcribendos. Pariter inquiratur maxima communis menſura numerorum 20 & 16, eritque 4, per quam ſi uterque numerus dividatur; quotientes erunt 4 & 5. Multiplica denominatores 4 & 3, fient 12, denominator. Multiplica pariter numeratores 1 & 5, & habebis numeratorem 5, habebiſque fractionem $\frac{5}{12}$. reductam ad minimos terminos, loco iſtius $\frac{180}{432}$. Hæc praxis poteſt etiam in fractionibus coſſicis uſurpari, quando ſcilicet facilè poteſt inveniri communis menſura, in alternis terminis fractionum; & hoc etiam in ſpecioſa. Ut

a2 — b2	a2
a2 c — a2 d — b2 c + b2 d	a3 + a2b
a2 + 2a b + b2	cd — d2
a + b	d
a4 — a2b2	
ad + bd	

propoſitis duabus fractionibus, communis menſura primi numeratoris & ſecundi denominatoris erit c — d, per quam ſi fiat utriuſque diviſio, erunt quotientes a2 — b2 ex una parte, & d ex alia; pariter ſecundus numerator, & primus denominator habent communem menſuram a + b, per quam diviſi exhibent quotientes a2 & a + b, tùm multiplicentur quotientes numeratorum inter ſe, & habebis numeratorem a4 a2 b2, deinde multiplicentur quotientes denominatorum & habebis, denomminatorem ad + bd.

Si per fractionem multiplicandus eſſet integer, aut integer cum fracto, priùs ſubſcripta unitate ad fractionem revocandus eſſet, vel ad fractionis denominationem.

Datur ferè ſimilis praxis ad diviſionem fractionis per fractionem, ut nempe exurgat quotiens ad minimos numeros redactus.

Sit

Digitized by Google

3	5	
9	15	20
—	—	—
16	28	21
4	7	

Si per $\frac{9}{16}$, dividenda *fractio* $\frac{15}{28}$, quære maximam communem menſuram denominatorum 16 & 28, hæc erit 4, per quam ſi dividatur uterque numerus, habebuntur quotientes 4 & 7. Pariter maxima communis menſura numeratorum 9 & 15 eſt 3, per quam ſi dividas numeratores 9 & 15, erunt quotientes 3 & 5. Multiplica inter ſe alternos quotos 4 & 5, fiet numerator 20, multiplica 7 per 3, producetur 21; habes igitur $\frac{20}{21}$, quotientem diviſionis qua $\frac{15}{28}$, dividitur per $\frac{9}{16}$, ſicut $\frac{21}{20}$, eſt quotiens diviſionis qua $\frac{9}{16}$, dividuntur per $\frac{15}{28}$.

Denique ſi fractiones ad eamdem denominationem reduxeris; diviſo numeratore per numeratorem, quotiens erit numerator fractionis qui quæritur: ut ſi proponantur $\frac{40}{7}$ dividendo 40 per 10, quotiens 4 erit numerator fractionis $\frac{4}{7}$ quæ eſt quotiens quæſitus.

Hæc item doctrina applicari poteſt fractionibus coſſicis.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Datæ minutiæ partem, aut partes quaſcumque methodo compendioſâ eidem addere.

Proponatur quæcumque minutia Coſſica $\frac{3\,c. - 16.}{2}$ cui addere debemus ejuſdem minutiæ $\frac{3}{4}$, adde 7 his partibus valorem unitatis, ſeu $\frac{4}{4}$, ut fiat $\frac{7}{4}$, tum multiplica prædictam fractionem per $\frac{7}{4}$, multiplicando numeratorem per 7, & denominatorem per 4, producetur hæc fractio $\frac{21.\,c. - 112.}{8.}$ quæ $\frac{7}{4}$ prædictæ continebit ſeu, ipſammet & tres ejus quadrantes.

Eodem modo erit operandum ſi pro fractione coſſica proponeretur numerus integer, ut ſi proponeretur 12. q. cui addendi $\frac{3}{4}$, facta pariter fractione $\frac{7}{4}$, multiplicabis $\frac{12.\,q.}{1}$ per $\frac{7}{4}$, & habebis $\frac{84.\,q.}{4.}$ ſeu 21. q.

Eodem artificio propoſitæ minutiæ, aut numeri coſſici partes quaſcumque non ad ipſum numerum, ſed ad ejus minutiam addes: verbi gratiâ addenda ſit $\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{4}$, cujuſcumque numeri; primò adde has minutias, ita ut fiat earum ſumma $\frac{11}{12}$. Quæris ergo $\frac{11}{12}$, cujuſcumque minutiæ, aut numeri coſſici, hunc numerum, ſive minutiam multiplica per $\frac{11}{12}$, & habebis intentum.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Quaſcumque partes à dato numero coſſico compendioſâ methodo ſubtrahere.

Proponatur quilibet numerus coſſicus, ſimplex aut compoſitus, ex quo auferre debes $\frac{2}{3}$

& $\frac{1}{4}$. Adde ſimul iſtas minutias, ut earum ſummam habeas $\frac{11}{12}$, hanc aufer ab ab unitate nempe 11. à 12, reſtabitque $\frac{1}{12}$, multiplica propoſitum numerum per $\frac{1}{12}$, & habebis unam duodecimam talis numeri; ergo ab eo ſubtraxiſti $\frac{11}{12}$, quod intentum erat.

Non diſſimili ratione partes quaſcumque propoſiti numeri à partibus ejuſdem numeri ſubtrahes, verbi gratiâ ſit ſubtrahendus $\frac{1}{4}$, alicujus numeri ex $\frac{1}{3}$, ejuſdem, ſubtrahe $\frac{1}{4}$, ex $\frac{1}{3}$, reſtabit $\frac{1}{12}$, debes igitur habere unam duodecimam propoſiti numeri, quæ exhibebitur multiplicando prædictum numerum per $\frac{1}{12}$.

Pariter propoſiti numeri partes quaſcumque invenies, ſi eum multiplices per fractionem ſignificantem hujuſmodi partes.

Agendum quidem eſſet de ſecundis radicibus numerorum coſſicorum, quia tamen tanta præceptorum coacervatio ſolet tyronibus caliginem affundere, & tædium creare, algebræ regulam ejuſque varios caſus, & proprietates hîc proponendam cenſui.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Artificium regulæ Algebræ.

1. Pro numero quæſito ponatur una radix, aut plures, ſi ſimpliciter de numero agatur; ſi de ſuperficie, ſuperficies quæſita ſit quadratum: ſi de ſolido, ſolidum ſit cubus.

2. Examinetur hæc radix, quadratum aut cubus ſecundum circumſtãtias quæſtionis cognitas, addendo, ſubtrahendo, multiplicando, dividendo, donec occurrat aliqua æquatio, ſeu donec cognoſcatur æqualitas inter notam & ignotam quantitatem.

3. Illa æquatio revocetur ad terminos ſimpliciſſimos.

4. Per numerum altioris characteris, numerus characteris depreſſioris, aut numerus abſolutus dividatur, radix quæſita erit aut quotiens, aut quotientis aliqua radix.

In exemplo melius intelligetur regula.

Datâ laterum differentia, & eorum aggregato, latera ipſa invenire: hoc eſt numerum datum dividere in duas partes dato exceſſu ſe ſuperantes.

Proponatur numerus 100, dividendus in duas partes, quarum una alteram ſuperet numero 40, quæratur minor pars hæc primò ſupponatur 1R.

Secundò examinetur ſecundum circumſtantias quæſtionis, ſi minor pars eſt 1R, eâ ſubtractâ ex 100, reſtabit major pars 100 — 1R. Subtrahatur item minor ex majori, habebiturque exceſſus unius ſupra aliam, facta Subtractione reſtat 100 — 2R. Habemus autem talem exceſſum eſſe 40, habemus ergo æquationem 100 — 2R = 40.

Tertiò reducatur ad ſimpliciſſimos terminos inventa æquatio, ſcilicet adde 2R, utrinque adhuc remanebit æqualitas inter 100 = 40 + 2 R, ſubtrahe utrinque 40, adhuc erit æqualitas 60 = 2R.

4 Divide 60, per 2R altiorem characterem, habebis unam radicem eſſe æqualem numero 30; quare minor pars erit 30, & major 70, ſe ſuperantes exceſſu 40.

Idem præſtabis methodo Algebræ ſpecioſæ: numerus 100 ponatur eſſe b, & exceſſus 40, d,

 ſitque

ſitque minor pars a, eritque major b—a, auferatur minor ex majore, ſeu a ex b—a fient exceſſus b—2a, qui æqualis eſt numero d, erit ergo æquatio $b - 2a = d$, & addendo 2a utrinque fiet alia æquatio $b = d + 2a$, & ſubtrahendo utrinque d erit $b - d = 2a$, & dividendo per 2 characterem altioris poteſtatis, habebis æquationem $\frac{b-d}{2} = a$, quare aufer d ex b, nempe 40 ex 100, & reliqui 60. Sume dimidium & habebis 30, pro minore parte.

In hoc exemplo facillimo licet, animadvertere potuiſti, æquationem non ſtatim occurrere ſimpliciſſimam, atque adeò opus fuiſſe variis reductionibus, quas explicandas ſuſcipio.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Antitheſis.

Antitheſis eſt tranſpoſitio alicujus quantitatis ab una æquationis parte in aliam ſub contrario ſigno: hæc æquationem non labefactat. Proponatur æquatio $4R + 4 = 24$. transferatur illud + 4. ab una parte æquationis in aliam, ſub contrario ſigno, ita ut fiat $4R = 24 - 4$. Dico adhuc æqualitatem perſeverare, ſi enim æqualibus ſubtrahantur æqualia, quæ fiunt, erunt æqualia; ſed in noſtro caſu utrinque ſubtrahitur 4. in uno membro delendo + 4, in alio apponendo — 4. ergo perſeverat æqualitas.

Secundò proponatur æquatio $4R - 5 = 15$, dico ſi 5, transferatur in aliam partem æquationis ſub contrario ſigno, ita ut fiat alia æquatio $4R = 15 + 5$ eam legitimam & veram eſſe æqualitatem, ex ſuppoſitione quod præcedens eſſet bona; ſi enim æqualibus 4R—5. & 15 addantur æqualia remanent æqualia: ſed delendo —5, ex una parte, additur 5. & ſcribendo ex alia parte + 5, additur 5. ergo quæ fient adhuc æqualia perſeverabunt.

Sint inveniendi duo numeri in proportione tripla: quorum ſi major detrahatur ex 30. & minor ex 16. remaneant numeri æquales: ſit minor numerus 1R, & conſequenter major erit 3R, cum ſint in proportione tripla; ſubtrahatur 1R, ex 16 fiet 16—1R. Subtrahantur 3R ex 30 fient 30—3R. facta tali ſubtractione eſt æqualitas nempè $16 - 1R = 30 - 3R$. transferantur 3R per antitheſin: fiet æquatio $16 - 1R + 3R = 30$: ſeu 16 + 2R. nam — 1R. & — 1 R ſe elidunt. reſtabit ergo æquatio $16 + 2R = 30$. transfer 16 per antitheſin, fiet æquatio $2R = 30 - 16$. aufer igitur 16 ex 30. habebis æquationem $2R = 14$. ſeu $1R = 7$. Erunt ergo quæſiti numeri 7 & 21. quorum alterum ſi ſubtrahas ex 16, alterum ex 30, reſtabit utrobique 9. Methodo ſpecioſâ idem præſtabis Sint 30 b & 16 d. numeri quæſiti a & 3 a. ſubtrahe 3 a ex b fiet b — 3 a, ſubtrahe a ex d fiet d — a. eſt ergo æquatio $d - a = b - 3a$ transfer 3 a per antitheſin fiet + 3 a. quod additum alteri parti efficit $d + 2a = b$, transfer etiam d fiet $2a = b - d$ divide per 2 fiet $a = \frac{b-d}{2}$. ſubtrahe igitur 16 ex 30. fit 14. divide per 2. habebis a eſſe 7. & 3 a eſſe 21.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Hipobibaſmus.

Hipobibaſmus eſt depreſſio terminorum ad gradum inferiorem, quam depreſſionem licitam eſſe contendo, & æquationi legitimæ nullo modo contrariam. Proponatur æquatio $1c. + 2q = 15R.$ dico licitum eſſe deprimere quemlibet terminum æquationis, ad gradum inferiorem, ita ut fiat alia æquatio legitima $1q + 2R. = 15$.

Demonſtr. Intelligantur omnes termini primæ æquationis dividi per 1 R. quotientes eamdem habebunt inter ſe rationem, nam quantitates, & earum æquè multiplices ſunt in eadem ratione, ſed dum 1R. dividit 1 cubum, quotiens eſt 1q. & cum una radix dividit 2 q quotiens eſt 2 R. & dum una radix dividit 15R. quotiens eſt 15. ergo hi termini ſunt in eadem ratione, ſed 1 c. + 2 q æquales erant 15 radicibus: ergo & $1q + 2R. = 15$. Non tantùm autem uno gradu deſcendere poſſunt, ſed duobus & tribus modo æqualiter omnes deſcendant. Poſſet etiam probari eo quod termini coſſici ſint termini progreſſionis Geometricæ, atque adeò ſint proportionales: eſt ergo eadem ratio, qq ad cubum, quæ cubi ad quadratum, & quadrati ad radicem, & radicis ad numerum abſolutum.

Hæc reductio in Algebra etiam ſpecioſa locum habet, ut ſi detur æquatio $a4 + 2a3 = a2z$ fiet omnibus diviſis per a2 alia æquatio legitima $a2 + 2a = Z$: Z enim quod intelligebatur ut ſolidum, jam intelligetur ut ſimplex longitudo.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Iſomeria.

Iſomeria eſt reductio æquationis per multiplicationem; certum eſt autem quod ſi omnes termini æquationis cujuſcumque per eumdem numerum multiplicentur, producti eamdem rationem habebunt. Quamvis autem ſit ut plurimùm inutile numeros integros multiplicare per alium, non eſt tamen inutile numeros fractos ita multiplicare, quia hujuſmodi multiplicatione ad eamdem denominationem reducuntur, & neglectis denominatoribus, reducitur æquatio numerorum, ad æquationem integrorum. Fundatur igitur hæc reductio, in hoc axiomate: Si duos numeros æquales idem numerus multiplicet, productos æquales efficiet vel etiam in hoc: Quod in minutiis æqualibus, eadem ſit ratio numeratorum ad denominatores; quod ſi minutiæ æquales eumdem habeant denominatorem, numeratores æquales erunt.

$$\frac{6\ R + 24}{5} \times \frac{72\ q - 396\ R.}{3}$$

$$\frac{18\ R + 72}{15.} \qquad \frac{460\ q - 1980\ R.}{15.}$$

Sit inventa æqualitas inter iſtas minutias coſſica $\frac{6\ R. + 24}{5.} = \frac{72\ q. - 396\ R.}{3.}$ multiplicentur in crucem, ut ad eamdem denominationem reducantur: fit communis denominator 15. & denominatores erunt 18 R. + 72. & 360 q. — 1980 R. quos aſſero eſſe æquales, ita ut æquatio 18 R. + 72 = 360 q. — 1980 R.

Demonſtratio. Per multiplicationem in crucem minutiæ, quæ æquales ſupponebantur, ad eandem denominationem redactæ ſunt, ergo producta erunt æquales inter ſe: cum autem in minutiis æqualibus eadem ſit ratio numeratorum ad denominatores, & denominatores ſint æquales, numeratores etiam æquales erunt: erit ergo æquatio inter hos numeros 18 R. + 72 = 360 q. — 1980 R. & transferendo 1980 R. per antitheſin fiet æquatio 1998 R. + 72 = 360 q.

Secundò detur æquatio inter minutiam coſſicam & numerum abſolutum, verbi gratia ſi æquatio $\frac{4\ q. + 10\ R.}{3} = 12.$ reducatur numerus abſolutus ad minutiam ſubſcriptâ unitate $\frac{12}{1}$. tum reducantur hæ minutiæ quæ æquales ſunt ad eamdem denominationem, fient duæ minutiæ $\frac{4q + 10 R.}{3}$ $\frac{36}{3}$ & neglectis denominatoribus, dabitur æquatio 4 q. + 10 R. = 36.

Tertiò ſi unus tantum terminus æquationis ſit fractus omnes termini ad minutiam revocentur. Proponatur hæc æquatio 1 q. + 8 $\frac{1}{2}$ R. = 246. reducantur omnes termini ad medietates $\frac{2}{2}$ q. + $\frac{17}{2}$ R. = $\frac{492}{2}$, neglectiſque denominatoribus habebimus æquationem 2 q. + 17 R. = 492. Quia tamen praxes communes volunt, ut numerus altioris poteſtatis ad unitatem revocetur, hæc praxis tradetur. Primò ponatur 1 q. pro 2q. Secundò quia radix uno tantum gradu diſtat à quadrato, multiplica 17 per hunc numerum 2. fient 34. quem numerum per 2. communem denominatorem divides, redibúntque 17 radices. Pro numero abſoluto, quia numerus abſolutus diſtat à quadrato duobus gradibus, multiplica 492. non per 210, ſed per ejus quadratum 4. habebiſque 1968. quem numerum divides per 2 communem denominatorem fientque 984, habes ergo æquationem 1 q. + 17 R. = 984.

Demonſtratio. Supponatur radix augeri, in proportione denominatoris, fiat nempè dupla, quadratum erit quadruplum prioris, quamvis id non exprimatur; quando autem creſcit unus terminus ſecundum unam rationem: debent & alii omnes creſcere ſecundum eamdem rationem: quare creſcere debet non tantùm ipſa radix, ſed etiam numerus radicum ut rectangulum ſub radice & ſub 17, creſcat in eadem ratione qua creſcit quadratum, quod fit duplicando numerum radicum ut duplicatus eſt valor radicis. Deinde homogeneum comparationis non debet duplicari, ſed multiplicari per quadratum ejuſdem denominatoris 2, ut creſcat in eâdem ratione in qua ſupponitur creſcere quadratum; quare dabitur alia æquatio in qua quadratum duplum coefficiens ex R & numero, duplus: & homogeneum duplum, fietque legitima 1 q + 17 R. = 984.

Hanc praxin utpote utiliſſimam in aliis exemplis faciliorem reddamus. Proponatur æquatio 4 qq. + 3 c + 2 R. = 1272. ſi omnia dividantur per 4, numerum altioris poteſtatis, fieret æquatio 1 qq + $\frac{3}{4}$ c. + $\frac{2}{4}$ q + $\frac{2}{4}$ R. = 318. vel 1 qq + $\frac{3}{4}$ c. + $\frac{2}{4}$ q + $\frac{2}{4}$ = $\frac{1272}{4}$, atque ita omnes fractiones redactæ ſunt ad eamdem denominationem: ſic autem omnia reduces ad integros. Si omnia multiplices per 4 numerorum qqtorum, ſed diverſimodè, pro ut termini magis à qqto ſeu poteſtate primâ removebuntur. Quare numerus cuborum manebit idem, quia cubus unico tantum gradu diſtat à qqto, unde abjecto denominatore fient 3 c. quia vero qtum à qqto diſtat per quadratum multiplica 3, non per 4, ſed per quadratum 16, fientque 48, quem numerum ſi dividas per 4, communem denominatorem erunt 12 q.

Tertiò quia radix diſtat à qqto ut cubus à numero abſoluto; multiplica 2, numerum radicum per 64, cubum numeri 4, fient 128. quem numerum ſi dividas per 4, communem denominatorem habebis 32. numerum radicum.

Denique quia numerus abſolutus diſtat à qqto ut quadrato quadratum à numero abſoluto, multiplica 1272, per qqtum radicis 4, ſeu per 256, habebiſque 325632, divide per 4, & habebis 81408, habes igitur aliam æquationem 1qq + 3 c. + 12 q. + 32R. = 81408.

Demonſtratio eadem; augetur enim radix, ut ſit quadrupla prioris, & conſequenter debent augeri omnes termini prout exigit radix, ita aucta. Cum autem qdto quadratus ſit in quadruplicata ratione radicis, omnes termini debent creſcere in quadruplicata ratione 1 ad 4, nempè ut 1 ad 516, quod quidem non exprimitur in quadrato-quadrato, ſufficit enim exprimere unum quadrato quadratum, intelligendo de quadratoquadrato talis radicis; quo poſito debent augeri reliqui termini in eadem ratione. Quia verò facta hac ſuppoſitione jam crevit cubus in triplicata, ſufficiet ut numerus cuborum quadruplicetur: ſic enim productus ex numero cuborum, in eorum valorem, erit in quadruplicata ratione, unde pro $\frac{3}{4}$ cuborum ponemr 3 cubi.

Pro quadratis quia valor quadrati eſt in duplicata radicis, ideo numerus quadratorum multiplicatur per quadratum numeri 4, nempè per 16, ſic enim productus ex numero quadratorū, in eorum valorem, erit in quadruplicata ratione radicis, & productus dividitur per 4 communem quotientem, ut reducatur ad integros numeros.

Pro radice, quia valor radicis augetur quadruplò tantum, ut productus ex numero radicum, in earum valorem ſit in quadruplicata ratione debet multiplicari per cubum numeri 4, ſeu per 64, & productus dividi per 4, ut ad integros reducatur.

Denique ipſum homogeneum comparationis debet creſcere in quadruplicata ratione 1 ad 4, nempe ut 1 ad 516, quare multiplicari debet per 516, & productus dividi per 4, ut ad integros reducatur.

Appoſitè uſurpatur iſomeria, quoties numerus radicum eſt impar, ut vitentur fractiones, nam in ſolutione æquationum quadraticarum aſſumi debet ſemiſſis radicum, verbi gratia proponatur æquatio 1 q + 3 R = 10.

Poſſumus cogitare radicis valorem duplum eſſe, & conſequenter quadratum quadruplum, & ad hoc ut productus ex coefficiente 3, & radice augeatur in eadem ratione, debet talis coefficiens duplicari & fieri 6 ut ſint 1q. + 6 R. Denique homogeneum comparationis debet augeri in duplicata ratione radicis, ita ut multiplicetur per 4 quadratum numeri 2, & fiat 40, habemus ergo æquationem aliam 1 q + 6R = 40, eritque radix 4.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Paraboliſmus.

In regula Algebræ jubemur ultimo loco diviſionem adhibere, hoc eſt dividere numeros inferiorum poteſtatum, aut etiam comparationis homogeneorum, per numerum poteſtatis altioris, in qua diviſione, virtualis intervenit regula trium. Proponatur hæc æquatio 5 R = 50, per diviſionem comparationis homogenei 50, per 5, dicimus ſi 5 radices dant 50, una radix quid dabit, & invenio unam radicem eſſe 10. Quoties enim in regula proportionum ſecundus, aut tertius numerus eſt 1, ſola diviſio regulam abſolvit, eò quòd multiplicatio per unitatem, numerum non immutet.

Pariter ſi eſſet inventa æquatio 4 q = 100, dividendo 100. per 4. haberentur 25, pro valore unius quadrati.

Non tantùm in ſimplicibus æquationibus, per diviſionem conſequimur valorem unius poteſtatis, ſed etiam in compoſitis, modò reliqui omnes termini æquationis ſimili modo dividantur. Proponatur æquatio 2 q = 10 R — 12. divide omnes terminos per 2, numerum ſcilicet altioris poteſtatis, habebis valorem unius quadrati 1 q = 5R — 6, vel ſit propoſita hæc 2q + 6 R = 10, per diviſionem habebitur iſta 1 q + 3 R = 10.

Ratio hujus praxis eſt quod ſimiles partes aliquotæ, in eâdem ſunt ratione, ac tota; ſed diviſione omnium terminorum per eumdem numerum, ſumuntur partes aliquotæ ſimiles ſuorum totorum: ergo in eadem ratione erunt; ſed ante diviſionem erat æqualitas inter tota; ergo poſt diviſionem dabitur æqualitas inter quotientes.

In genere igitur debet fieri regula trium, ut æquatio ad unitatem revocetur; ut ſi ſit æquatio 12 q = 66 R. + 36. dices ſi 12 q ſunt æquales Radicibus 66 + 36, unum quadratum quid dabit; Multiplicandi eſſent 66 R + 36 per 1, & cum idem numerus producatur, divides 66 R. + 36. per 12. invenieſque 1 q = 5 $\frac{1}{2}$ R. + 3.

Si accidat ut per hanc diviſionem fiant fractiones ut in hoc ultimo exemplo, recurres ad præcedentem propoſitionem, ſeu iſomeriam.

Eamdem regulam in ſpecioſa uſurpamus; ut ſi proponatur æquatio ſequens B A 2, + D + A = Z Sol. divide omnia per B numerum ſcilicet adjunctum altiori poteſtati, fiet A 2 + D + A = $\frac{\text{Z Sol.}}{\text{B}}$

Quare propriè paraboliſmus eſt diviſio terminorum æquationis per eam quantitatem, per quam altior poteſtas erat multiplicata. Inſtituitur autem hæc diviſio, ut poteſtas ſola ponatur: ſic enim faciliùs cum aliis terminis comparabitur.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Analogiſmus.

Analogiſmus eſt revocatio æquationis ad proportionalitatem, in hoc principio fundata, quod in tribus proportionalibus quadratum medii æquale ſit rectangulo ſub extremis, & in quatuor proportionalibus factum ſub extremis, æquetur facto ſub mediis. Ut ſi ſint 4 q. = 8 R. erit rectangulum comprehenſum ſub 4, & valore quadrati æquale rectangulo ſub 8, & valore radicis. Quare ſi 8, ponatur primus numerus erit ut 8 ad 4, ita quadratum ad radicem.

Hic analogiſmus videtur eſſe utilior in Algebra ſpecioſa, quam in communi; ut ſi proponatur æquatio R A = S B, fiant S B mediæ, erit ut R ad S, ita B ad A.

Proponatur hæc æquatio paulò difficilior R A + S A = S B, cum duo ſint rectangula, R A + S A fiet ex his duobus unum, ſi nempè R + S multiplicetur per A, fiatque (R + S) A = S B fiant B & S mediæ, erit analogiſmus ut R + S ad S ita B ad A.

Sit alia æquatio R A + S A = SB + RB, A multiplicet S + R, fiet (R + S) A, ita B multiplicet S + R fiet (R + S) B, cum R + S) A = (R + S) B, ſi ultimæ fiant mediæ erit analogiſmus R + S; R + S: B: A. Ergo B & A æquales erunt.

Occurrat hæc æquatio 2BA — DA = 2 B D + 2GD ita concipi debet, ut inſtituatur æquatio (2 B — D) A = (2 B — 2 G) D; ſi ultimæ fiant mediæ erit ut 2 B — D ad 2 B + 2 G, ita D ad A.

Poteſt item advocari aliud principium, nempè ſi plana, aut ſolida ſimilia fuerint proportionalia, eorum radices, ſeu latera ſunt proportionalia, ut ſi hi termini fuerint proportionales G 2 — D 2, 4B2 + G2 — D2; D2, A2. hi etiam proportionales erunt ℞ q $\overline{\text{G 2 — D 2}}$. ℞ q $\overline{\text{4 B 2 + G 2 — D 2}}$; D, A.

Sæpè etiam ab uno analogiſmo ad alium gradum facimus componendo, dividendo, convertendo, multiplicando, & ex ſecundo analogiſmo ad aliam æquationem.

Eſt aliqua difficultas in formando analogiſmo, quoties occurrit æquatio, in qua fractio æquatur integro: quod in exemplis melius explicabitur. Proponatur hæc æquatio $\frac{\text{B2}}{\text{D}}$ = A ſenſus eſt quod ſi B 2 dividatur per D, quotiens æqualis erit numero A; ergo ille quotiens ſeu numerus A illi æqualis, multiplicando D producet B2; ergo quadratum radicis B, æquale eſt producto ex D in A, ſunt ergo proportionales A, B, D.

Sit alia æquatio $\frac{\text{B3}}{\text{A}}$ = D 2, quotiens ergo diviſionis quâ A dividit B3 eſt æqualis D 2, quare D2 A = B3, ſed B 3 producitur ſi B ducatur in B2; quare ſi ita ordinentur quantitates A, B, B2, D2, cum factum ſub extremis æquetur facto ſub mediis proportionales erunt.

Sit

Digitized by Google

Sit æquatio $\frac{BD}{A} = G$ ſenſus eſt quod G æquale ſit quotienti diviſionis qua A dividit BD; ergo G multiplicando A facit B D, ſed pariter B in D facit BD, quare datur analogia A : B : D : G.

Hæc æquatio $\frac{BDG}{A} = F$. indicat F æquari quotienti diviſionis quâ A dividit B D G, ergo ſi F multiplicet A, reſtituet BDG, quare AF æquabitur BDG; ſed B ductum in DG facit BDG, quare ſi B, DG fiant mediæ, habebimus analogiſmum A, B, D, G, F, vel A, B, D, G, F vel A, B, G, D, F.

$\frac{BD + GD}{A} = F$ hanc analogiam efficit A, B + G, D, F.

Hæc erit difficilior $\frac{B2 - D2}{G} = A$, eritque A G æquale B2 — D2. Sed hoc ultimum fit ſi B + D ducatur in B — D; ergo probus erit analogiſmus G, B + D, B — D, A: cum factum ſub extremis æquetur facto ſub mediis.

Hæc æquatio $\frac{B2 + 2BD + D2}{A} = F$, hanc dabit analogiam A, B + D, F quia nempè quadratum mediæ æquatur facto ſub extremis, nam oſtendam productum ex F in A eſſe B2 + 2BD + D2; quod quadratum habet radicem B + D ut oſtendemus inferius, & ex multiplicatione probari poteſt.

Iſta æquatio $\frac{B4\,D4}{G2} = A2$, exhibet hanc analogiam G2, B2D2. A2.

Si numerator fractionis reſolubilis non ſit in plures terminos poterit fieri radix ligata, ut in hac æquatione $\frac{BD + FG}{H} = A$ cum A H æquetur BD + FG; erit æquatio A, radix quadrata (BD + F G) H, vocatur aut radix quadrata numeri compoſiti radix ligata, eò quod numerus parentheſi ligandus, ſeu claudendus ſit.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Æquatio poteſtatis cum numero abſoluto.

Jam explicuimus ſupra æquationem radicis cum numero abſoluto.

Explicuimus item eam in qua quadratum æquabatur radicibus, oſtendimus enim per hypobibaſmum, reducendam eſſe ad æquationem radicis cum abſoluto. Idem dicendum de quacúmque poteſtate reſpectu inferioris ſequentis, ſunt enim tunc ut vocant numeri collaterales.

Reſtat igitur modò explicanda æquatio inter numerum abſolutum & quadratum. Sit hæc æquatio 1q. = 100, extrahatur radix quadrata hujus numeri 100, & habebitur valor unius radicis.

Idem dicendum de cubo, nempè quoties occurrit æquatio unius cubi cum numero abſoluto; ità ut habeas valorem unius cubi; extrahendo radicem cubicam, habebitur valor unius radicis: idem intelligendum eſſet de aliis poteſtatibus: quia tamen Arithmetica communis ſiſtit, in extractione radicis cubicæ, ideo alias inferius ſuo loco explicabimus.

Si ſit æquatio inter cubum & radicem, idem præſtandum ac in æquatione quadrati cum abſoluto: nam eadem eſt ratio cubi ad radicem, quæ quadrati ad abſolutum, ita ut ſi 1 c. æquetur 4 R, etiam 1q. æquabitur quaternario, unde extrahendo radicem quadratam habebitur valor unius radicis.

Ordo doctrinæ poſtularet ut cæteras æquationes explicarem ne tamen, tanta præceptorum coacervatio tædium Tyronibus afferat, & eorum memoriam obruat. Exempla priùs afferenda cenſui, ut in praxi ſuperiora meliùs intelligerentur, quæ haud dubiè Tyro prima vice non concipiet, niſi ea videri in praxi applicata.

ALGEBRÆ LIBER SECVNDVS.

Præceptorum uſus tam methodo communi quàm ſpecioſâ.

PROPOSITIO I.

Problema.

Numerum propoſitum 110, dividere in duas partes, quæ inter ſe multiplicata producant numerum decuplum quadrati minoris partis.

Sit minor pars numeri 110 una radix, eritque alia pars major 110 — 1R, multiplicentur ut jubet quæſtio, nempe 100 — 1R, per 1R, fient 110R — 1q, qui numerus decuplus eſt quadrati minoris partis, ſeu unius quadrati; ergo æqualis eſt 10, quadratis; habemus ergo æquationem 110R — 1q = 10q, & per antitheſin 110R = 11 quadratis, & per hypobibaſmum, cum eadem ſit ratio quadrati ad radicem quæ radicis ad abſolutum, habebitur æquatio 110 = 11R & per paraboliſmum erit 1R. = 10, ſeu pars minor, & major pars erit 100, multiplicentur fient 1000, qui numerus decuplus eſt numeri 100, ſeu quadrati partis minoris 10.

Idem per ſpecioſam ita obtinebimus. Sit 110 b, ponatur minor pars eſſe A, major erit b — A multiplicetur major per minorem fiet bA — A2. quem numerum decuplum eſſe diximus quadrati minoris A, ſeu A2. Eſt ergo æquatio bA — A2 = 10 A2, & per antitheſin bA = 11 A 2, & diviſis omnibus per A, erit æquatio b = 11 A. Divide omnia per 11, erit æquatio $\frac{b}{11}$ = A. Divide ergo b ſeu 110, per 11, & quotiens 10 erit minor pars & major 100, quadratum minoris 100, &c.

PROPOSITIO II.

Problema.

Duos numeros reperire in proportione ſextupla quorum majori ſi addas 6 & minori 4 fiat primus ſecundi quadruplus.

Sit minor numerus 1R, major erit 6R cum ſint in proportione ſextupla: adde majori 6 fient 6R. + 6 & minori 4; eritque 1R. + 4, dicuntur autem eſſe in proportione quadrupla, hoc eſt primus 6R, + 6, eſt quadruplus poſterioris 1R + 4: quare hic poſterior quadruplicandus eſt, ut fiat æqualis, eſt ergo æquatio 4R + 16 = 6R. + 16, transfer 4R. in aliam partem per antitheſin, eaſque aufer ex 6R, reſtabit æquatio 16 = 2R, + 6. Aufer utrinque 6, fiet æquatio 10 = 2R, divide per 2 habebis 1R. = 5, primus igitur numerus eſt 5, ſecundus ſextuplus erit 30. Adde majori 6 fient 36, & minori 4, fient 9, clarum eſt priorem 36 eſſe quadruplum poſterioris 9.

Per ſpecioſam ſit minor A, major erit 6A Cui adde 6 fient 6A + 6 & minori 4, habebis A + 4; hic quadruplicetur, erit 4A + 16, habes igitur æquationem 4A + 16, = 6A + 6 transfer 6, per antitheſin reſtabit 4A + 10 = 6A transfer 4A, habebis 10 = 2A; ergo 5 eſt A, &c.

PROPOSITIO III.

Problema.

Invenire numerum qui additus ad 90, & ad 20 faciat numeros in proportione ſextupla.

Numerus quæſitus ſupponatur eſſe 1R qui addatur prædictis numeris, producentur 1R + 90, & 1R, + 20, & primus debet eſſe poſterioris quadruplus: ergo ſecundus quadruplicatus, hoc eſt 4R + 80, æquabitur priori 1R. + 90 ſubtrahatur utrinque 1R fiet æquatio 90 = 3R, + 80: aufer utrinque 80, habebis æquationem 10 = 3R, divide per 3, erit 1R = $3\frac{1}{3}$ qui numerus additus ad 90, efficit $93\frac{1}{3}$. & ad 20, $23\frac{1}{3}$. eſt autem prior poſterioris quadruplus.

Si quæreremus numeros in proportione majore quam ſit 90 ad 20. inveniretur æquatio impoſſibilis, quam impoſſibilitatem ut dignoſcere in ipſa æquatione diſcamus; quæramus animi gratiâ numerum, qui additus ad 90 & 20, numeros faciat in proportione quintupla: is numerus ex more ſupponatur 1R. Eruntque 90 + R, & 20 + 1 R. in proportione quintupla, atque adeo ultimus multiplicatus per 5, erit primo æqualis, hoc eſt 100. + 5R, æqualis 90 + 1R, quod eſt impoſſibile; nam 90 + 1R, invenitur in 100 + 5R, tamquam pars in toto.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Propoſitum numerum 140, ita ſecare ut major pars, ſit minoris quintupla, & inſuper contineat 20.

Supponatur minor pars 1R. Eritque major $140 - 1R$, quæ eſt quintupla prioris & inſuper continet 20, ſeu erit $5R + 20$, habemus ergo æquationem $140 - 1R = 5R + 20$.

Adde 1R, & habebis $140 = 6R + 20$.

Subtrahe 20, utrinque $120 = 6R$. Divide per 6.

Erit $1R = 20$, minor pars; major 120, prioris quintupla & inſuper continens 20.

Methodo ſpecioſa ſit numerus 140 b, 20 d, ſitque A minor pars. Major erit $b - A$. Eadem major eſt minoris quintupla + d erit, ergo æquatio $b - A = 5A + d$. Per antitheſin transfer $- A$, fiet æquatio $b = 6A + d$, transfer illud d per antitheſin, habebitur æquatio $b - d = 6A$. Divide omnia per coëfficientem 6 habebis æquationem $\frac{b-d}{6} = A$, id eſt $\frac{140-20}{6}$ A, vel $\frac{120}{6} = A$: divide ergo 120 per 6, habes valorem unius A eſſe 20.

PROPOSITIO V.

Problema.

Numeros invenire in proportione ſeptupla quorum differentia ſit 120.

Minor ponatur 1 R, major erit 7R, cum ſint in proportione ſeptupla; aufer minorem ex majori habebis differentiam, quæ erit 6R, hanc æqualem dicimus 120; ergo habemus æquationem $120 = 6R$. Divide 120, per 6 habebis 1R, eſſe 20; atque adeo minorem numerum eſſe 20, majorem 140, & differentiam eſſe 120.

Sit per ſpecioſam differentia b, minor numerus erit A, major 7A. Aufer majorem ex minore, habebimus differentiam eſſe 6A. Sed hanc voluimus eſſe d: ergo habemus æquationem $d = 6A$. Divide per coëfficientem 6, erit æquatio $\frac{d}{6} = A$. nempe A erit æquale quotienti diviſionis qua d dividetur per 6.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Numerum invenire, à quo ſi auferantur 20, & 80, relinquantur duo numeri in proportione tripla.

Numerus quæſitus ſupponatur 1R, erit major $1R - 20$, minor $1R - 80$, eſt autem primus poſterioris triplus. Triplicetur ergo poſterior ut fiat æqualis primo, habebimus æquationem $1R. - 20 = 3R - 240$. Adde 20 utrinque $1R = 3R, - 220$, transfer 220, per antitheſin, erit æquatio $1R + 220 = 3R$ ſubtrahe 1R, habebis æquationem $220 = 2R$, divide per 2, habebis $1R = 110$, à quo ſi ſubtrahas 20, reſtat 90. Si ſubtrahas 80, reſtabit 30 ſunt autem 90 & 30, in proportione tripla.

Per ſpecioſam, ſint 20 B, & 80 D, & numerus quæſitus A, eruntque $A - B$, & $A - D$ in proportione tripla. Triplicetur ultimus, fiet $A - B = 3A - 3D$: adde 3 D utrinque habebis æquationem $3D + A - B = 3A$, ſubtrahe unum A fiet $3D - B, = 2A$. Divide per coëfficientem 2, erit $\frac{3D-B}{2} = A$, ſunt 3D, 240 ſubtrahe B, ſeu 20, fient 220. Divide per 2, habebis A eſſe 110.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Invenire numerum qui additus ad 30, & ſubtractus à 90, faciat ſummam reſidui ſubduplam.

Numerus quæſitus ſit 1R, addatur ad 30, fiet $30 + 1R$, ſubtrahatur à 90, & habebis $90 - 1R$, qui numerus prioris $30 + 1R$, eſt duplus: Duplicetur ergo hic ultimus ut ſit $60 + 2R, = 90 - 1R$, adde utrinque 1R, fiet $60 + 3R, = 90$. Aufer 60, utrinque erit æquatio $3R, = 30$. Divide 30 per 3 numerum radicis fiet $1R = 10$; quare ſi ex 90 auferas 10, fient 80. Si numero 30, addas 10, fient 40, ſunt autem 80 & 40 in proportione dupla.

Per ſpecioſam ſit B 30, & D 90, & A numerus quæſitus; erit $B + A$ ſubduplus numeri $D - A$; Quare prior $B + A$ duplicetur ut ſit $2B + 2A = D - A$, adde utrinque A, fiet $2B + 3A$ D transfer 2B per antitheſin, fient $D - 2B = 3A$, divide per 3 habebis æquat. $\frac{D-2B}{3} = A$ ex D, ſeu 90, ſubtrahe 2B, nempe 60 reſtat 30, divide per 3 habebis 10.

Debeat iiſdem ſervatis ſumma eſſe tripla reſidui, nempe $30 + 1R$, ſi triplus numeri $90 - 1R$, tripla hunc numerum & habebis æqu. $270 - 3R = 30 + 1R$, adde utrinque 3R, fiet æquatio $270 = 30 + 4R$, ſubtrahe 30, habebis $240 = 4R$, divide per 4 erit $60 = 1R$, adde 60 ad 30 fient 90, ſubtrahe 60 ex 90 fient 30, eſt autem 90, triplus numeri 30.

Debeat ſumma eſſe reſiduum ut R ad S. Sit 30 idem quod B & 90, idem quod D. Erit ergo $B + A$ ad $D - A$ ut R ad S, & conſequenter rectangulum ſub extremis nempe $SB + SA$, æquabitur rectangulum ſub mediis $RD - RA$, transfer RA per antitheſin habebis æquationem $RA + SB + SA = RD$; transfer SB per antitheſin habebis $RA + SA = RD - SB$. Supponatur R ad S eſſe ut 2 ad 3, erit RD 180, SB 90, ſeu $RD - SB$, ergo $90. = RA + SA$ divide $RA + SA$ per + S, ſeu divide 90 per 5, fiet $A = 18$, ſi ergo addas ad 30, 18, fient 48, ſi ſubtrahas 18, ex 90, erunt 72. Eſt autem 48 ad 72, ut 2 ad 3.

PROPO

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Numeros invenire qui multiplicati invicem numerum producant ſextuplum eorum ſummæ.

Sit primus numerus 1R, ſecundus alius quicúmque major quam 6, verbi gratia 30. & hoc ne incidamus in quæſtionem impoſſibilem, erit eorum ſumma 1R. + 30, productus autem ex eorum multiplicatione 30R, qui dicitur eſſe ſextuplus prioris. Quare ut ſit æqualitas debet præcedens multiplicari per 6, fietque $6R + 180 = 30R$. Subtrahe utrinque 6R, habebis æquationem $24R = 180$; divide per 24, habebis pro quotiente $7\frac{1}{2}$. erit ergo $1R = 7\frac{1}{2}$. & ſumma $37\frac{1}{2}$. productus 225, illius ſextuplus.

Ut dignoſcas æquationem impoſſibilem; aſſumatur primus numerus 1R. Secundus aſſumatur 5, minor denominatore proportionis. Erit ſumma 1R + 5. & productus 5R. Debet autem productus eſſe ſextuplus. Multiplica igitur 1R + 5, per 6, fiet 6R + 30. Quare habebimus æquationem impoſſibilem $6R + 30 = 5R$.

Per ſpecioſam ſit primus numerus A. Secundus B major, ſitque productus ſummæ ſextuplus, ſeu ut R ad S, erit AB ad A + B ut R ad S; & planum ſub mediis, æquabitur plano ſub extremis: eſt ergo æqualitas $SAB = RA + RB$. Transfer RA per antitethesin erit æquatio $SAB - RA = RB$, ſit R 7, & S. Idem quod 1, & B 30, erit RB 210, erit RA, 7A. SB erit 60. SBA erit 60 A, habemus ergo æquationem $60A - 7A = 210$. Subtrahe 7A, fient $53A = 210$. Divide 210, per 53, habebis $3\frac{51}{53} = A$. Summa erit $33\frac{51}{53}$ productus $118\frac{46}{53}$.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Numerum quemcumque ut 100 in duos numeros partiri, ut ſi unus alium dividat, quotiens ſit 10.

Ponatur una pars eſſe 1R, alia erit 100 — 1R, debet autem 1R dividere 100 — 1R; ita ut quotiens ſit 10. Hoc eſt ſi 10 multiplicet 1R, faciatque 10R, efficiet 100 — 1R. Quare invenimus æquationem $10R = 100 - 1R$. Adde utrinque 1R, fiet æquatio $11R = 100$. Divide 100, per 11, habebis $1R = 9\frac{1}{11}$. quare unus numerus erit $90\frac{10}{11}$. & alius $9\frac{1}{11}$. Si poſterior priorem dividat quotiens erit 10.

Per ſpecioſam ponatur numerus 100, eſſe B & quæſitus eſſe A, eritque alius B — A. Ponatur quotiens eſſe D, ita ut A multiplicando D faciat B — A, erit ergo æquatio $AD = B - A$, transferatur A per antithesin, erit $AD + A = B$ Habemus autem B eſſe 100, & D 10; quare 10A + 1A ſeu $11A = 100$, fiat diviſio, idem invenies.

PROPOSITIO X.

Problema.

Numerum quemvis ut 125, ita dividere in quinque partes ut ſecunda ſit primæ dupla & inſuper contineat 2.
Tertia ſecundæ tripla, & inſuper contineat 3.
Quarta tertiæ ſit dupla — 4.
Quinta ſit dupla quartæ — 13.

Prima pars numeri 125, ponatur	1R
Secunda quæ dupla eſt + 2, erit	2R + 2
Tertia quæ eſt ſecundæ tripla + 3 erit	6R + 9
Quarta ſit tertiæ dupla — 4, erit	12R + 14
Quinta quartæ dupla — 13, erit	24R + 15
Addantur hæc omnia, fient	45R + 40

quæ æqualia ſunt 125, habemus ergo æquationem $45R + 40 = 125$, dele 40 utrinque:

Habebimus æquationem $45R = 83$. Divide 83 per 45.

Habebimus æquationem	$1R = \frac{38}{45}$
Erit ergo prima pars	$1\frac{38}{45}$
Secunda erit	$5\frac{31}{45}$
Tertia erit	$20\frac{1}{45}$
Quarta erit	$36\frac{6}{45}$
Quinta erit	$59\frac{12}{45}$
Summa erit	125

PROPOSITIO XI.

Problema.

Duos numeros reperire quorum differentia ſit 4, & quadratorum differentia 144 maior quam 16 quadratum numeri 4.

Ponatur minor numerus 1R major, erit 1R + 4 cum eorum differentia ſit 4 fiant eorum quadrata. Eritque minoris 1q, majoris quadratum fiet multiplicando 1R + 4, per 1R + 4. Eritque 1q + 8R + 16. Auferatur primum quadratum 1q ex ſecundo 1q + 8R. + 16, reſtabit utriuſque differentia 8R. + 16, quam voluimus eſſe æqualem numero 144; eſt ergo æquatio $8R + 16 = 144$. Subtrahe utrinque 16, fiet æquatio $8R = 128$. Divide per 8, habebis æquationem $1R = 16$; quare minor numerus erit 16, ſecundus 20, differentia eſt 4, quadratum primi eſt 256, ſecundi eſt 400, differentia eſt 144.

Specioſâ methodo ſit differentia 4, idem quod B, & 144 D. Primus numerus ſit A. Secundus erit A + B, fiat utriuſque quadratum erit primum A2, ſecundum A2 + 2AB + B2. Subtrahatur unum ab alio, reſtat 2AB + B2, pro differentia quæ eſt D, habemus æquationem $2AB + B2 = D$. Transfer B2, per antithesin erit $2AB = D - B2$. Divide omnia per B, erunt $2A = \frac{D}{B} - B$, eſt autem D 144. Divide per B, ſeu 4, habebis 36; aufer B, ſeu 4, reſtat $2A = 32$, divide per 2, erit $A = 16$.

Notandum autem appoſitam eſſe in titulo conditionem ne æquatio fieret impoſſibilis.

PROPO

PROPOSITIO XII.

Duos numeros reperire in proportione quintupla, quorum major additus ad 15. eandem ſummam efficiat, ac minor additus ad 55.

Sit primus numerus ſeu 1R, major erit 5R. eum dicantur eſſe in proportione quintupla, eritque 55 + 1R = 15 + 5R. ſubtrahatur utrinque 1R. erit 55 = 15 + 4R. ſubtrahe 15 utrinque erit æquatio 4 R = 40; divide per 4. erit, R = 10. ſunt ergo numeri 10. & 50. qui additi ad 15. hoc eſt 50. ad 15. & 10. ad 55. efficiunt 65.

Specioſâ methodo ſit 15 B, & 55 D. primus ſit A. ſecundus erit 5A. eritque B + 5A = D + A ſubtrahe 1 A utrinque, erit æquatio B + 4A = D. transfer B. per antitheſin erit 4A = D — B divide per 4. erit $A = \frac{D-B}{4}$. D autem erat 55. ſubtrahe B ſeu 15. reſtat 40. divide per 4 habebis A = 10.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Numerum quemcumque ut 78. ita dividere, ut minor pars contineat unam decimam tertiam majoris, & inſuper octo unitates.

Minor pars ſupponatur eſſe 1R. + 8. major erit 13 R. addantur, fietque ſumma 14R + 8. æqualis nempè numero 78. aufer utrinque 8. erit æquatio 14 R = 70. divide 70. per 14. erit 1R = 5. & conſequenter primus numerus erit 13. ſecundus 65.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Duos numeros reperire, qui ita ſe habeant, ut producto ex eorum ductu, per eorumdem differentiam diviſo, quotiens ſit 30.

Primus numerus quilibet eſſe poteſt, minor tamen numero 30. quare aſſumatur numerus 20. ſitque major 20 + 1R. ſitque differentia 1R. multiplicentur 20 + 1R. per 20. habebitur productus 400 + 20 R. quo diviſo per 1R, debet quotiens eſſe 30; quare ſi 30. multiplicet 1R. reſtituetur idem numerus. fiat talis multiplicatio habebitur æquatio 30 R. = 400 + 20 R. ſubtrahe utrinque 20 R. reſtabunt 10 R = 400. quare una radix erit 40.

Primus ergo numerus eſt 20. ſecundus 60. differentia 40.

Productus 1200. diviſus per 40. efficit quotientem 30.

Specioſâ methodo. 30 ponatur eſſe B. & primus numerus ſit D 20. minor quam B, ſit major D + A productus ex D in D + A. erit D 2 + D A. quo diviſo per A. fiet quotiens B, hoc eſt ducto A in B. fiet eadem quantitas; eſt ergo æquatio BA = D2 + DA. transfer DA per antitheſin fiet æquatio BA — D A = D 2. eſt igitur D 2 400. qui ſi dividatur per B — D habebitur A; ſed B eſt 30. ſubtrahe D ſeu 20. fit 10. divide 400 per 10. habebis differentiam 40.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Numerum invenire cujus quadratum multiplicatum per 20. efficiat numerum quintuplum cubi, ejuſdem numeri.

Numerus quæſitus ponatur 1R. cujus quadratus 1q. multiplicetur per 20. fietque 20 q. dicitur autem eſſe quintuplus unius cubi. Eruntque 4q = 1 c. & quia eadem eſt ratio radicis ad abſolutum, quæ cubi ad quadratum, erit 1R. = 4. revera quadratum radicis 4 eſt 16. qui multiplicatus per 20. efficit 320. quintuplum cubi 64.

Specioſa methodo ſit 20 B. & numerus quæſitus A. eritque A 2. multiplicatus per B. ſeu A 2 B quintuplus A 3. ergo habemus æquationem 5 A 3 = A 2 B. & omnibus diviſis per A2. erit 5 A = B. & diviſis per 5. erit æquatio $A = \frac{B}{5}$ erat autem B 20. divide per 5. habebis 4. pro valore unius A.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Numerum 80. ita dividere in duas partes, ut productus ex primâ in 26. ſuperet productum ex ſecundâ in 20, 6 unitatibus.

Ponatur prima pars numeri 80. 1R. erit ſecunda 80 — 1R. productus ex prima in 16 eſt 16 R. productus ex ſecunda ſeu 80 — 1R. in 20 eſt 1600 — 20 R. qui numerus ſuperatur 6 unitatibus à priori producto. Quare ſi illi addantur 6 unitates erit æquatio 1606 — 20 R. = 16R. adde 20 R. erit æquatio 1606 = 36 R. divide 1606. per 36. & habebis pro una radice $44\frac{11}{18}$.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Numerum quemcumque ut 90 ita dividere, ut partes cum ipſo ſint in proportione Arithmetica.

Sit prima pars minor 1R. & major 90 — 1R. ſunt ergo arithmeticè proportionales 90, 90 — 1R. 1R. quare aggregatum extremorum æquale erit medio bis ſumpto. Eſt ergo æquatio 90 + 1R = 180 — 2R. adde 2R fient 90 + 3R = 180. ſubtrahe 90. reſtabit 3R = 90. divide per 3. habebis 1R = 30; ſunt igitur in Arithmetica proportione 90. 60. 30.

Specioſâ methodo ſit numerus 90. idem quod B. ſit minor pars A erit major B — A. ſunt ergo Arithmeticè

Arithmeticè proportionales B. B — A. ergo B → A æquatur 2B — 2A & ablato B, erit æquatio A = B — 2A, & additis 2A. erit 3A = B & dividendo per 3 erit A = $\frac{B}{3}$. B erat 90. divide 90. per 3. fiet A = 30. ut priùs.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Invenire numeros, qui inter ſe multiplicati producant numerum decuplum minoris, & triplum majoris.

Ut vitentur fractiones ſit ille numerus productus 30 R. eritque minor 3R. & major 10 R. qui ſi multiplicentur producent 30 q. erit ergo æquatio inter 30 q = 30 R. ſeu inter 30 R & 30. ſunt enim collaterales, quare 1 R. eſt 1 & 3R eſt 3. & 10. R. eſt 10. quare numeri quæſiti ſunt 10 & 3.

Si productus ex multiplicatione duorum fuiſſet duplus majoris, & triplus minoris, factâ eâdem ſuppoſitione eſſet major 15R. & minor 10 R. & multiplicando unum per alium producerentur 150 q. eſt ergo æquatio 150 q = 30 R. ſeu quia ſunt collaterales 150 R = 30. & dividendo eſſet una radix $\frac{1}{5}$. quare eſſet minor $\frac{10}{5}$. ſeu 2. & major $\frac{15}{5}$. ſeu 3. productus 6 duplus majoris 3. & triplus minoris 2.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Numerum quemcumque ut 120. dividere ſi fieri poteſt in 6. numeros Arithmeticè proportionales qui ſe binario excedant.

Sit numerus 120. dividendus in 6. numeros Arithmeticè proportionales qui ſe binario excedant. Et primus ſeu minimus ponatur 1 R. Secundus erit 1 R. → 2. Tertius 1 R. → 4. Quartus 1 R. → 6. Quintus 1R. → 8. Sextus 1 R. → 10. ſumma omnium eſt 6R. → 30. quæ ſunt æquales numero 120. ſubtrahe utrinque 30. remanet æquatio 6 R = 90. divide 90. per 6. habebis 1 R = 15. Primus ergo eſt 15. Secundus 17. Tertius 19. Quartus 21. Quintus 23. Sextus 25. qui ſimul ſumpti efficiunt 120.

Specioſâ methodo ſit 120. idem quod B. ſitque 2. idem quod D. & primus ſeu minimus omnium A, ſecundus erit A → D. tertius A → 2D. quartus A → 3 D. quintus A → 4D. ſextus A → 5 D. colligantur in unam ſummam fient 6 A → 15 D = B transfer → 15 D per antitheſin fiet 6 A = B — 15 D. divide omnia per 6. fiet A = $\frac{B - 15D}{6}$ quare ſi ex B ſeu 120. ſubtrahas 15 D ſeu 30. & reliquum dividas per 6. habebis 15 pro uno A.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Numerum quemcumque ut 120. dividere in decem partes Arithmeticè proportionales ſi fieri poteſt, quorum primus ſit 12.

Sit differentia numerorum 1R. & cum primus ſupponatur 12. ſecundus erit 12 → 1 R. tertius 12 → 2R. quartus 12 → 3 R. quintus 12 → 4R. ſextus 12 → 5R. & ſic deinceps uſque ad decimum; ſumma omnium erit 20 → 45 R. qui numerus æqualis eſſe deberet numero 120. quod eſt impoſſibile. Quare concludes quæſtionem eſſe impoſſibilem.

Ponatur alius numerus ut 360. Invenies æquationem 45 R. → 120. = 360. ſubtrahe utrinque 120. habebis æquationem 45 R. = 240. divide per 45. habebis 1R. = 5 $\frac{1}{3}$. primus igitur numerus erit 12. ſecundus 17 $\frac{1}{3}$. Tertius 22 $\frac{2}{3}$. quartus 28. quintus 33 $\frac{1}{3}$. & ſic deinceps quorum ſumma adæquat numerum 360.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Duos numeros invenire in proportione tripla quorum majore ducto in 9 fiat productus excedens 140. unitatibus productum ex minore in 5.

Sit minor numerus 1 R. major conſequenter erit 3R. cum dicantur eſſe in proportione tripla, major ducatur in 9. fiet 27 R. & minor in 5. fiet 5 R. major ſuperat minorem 140. unitatibus; ergo ſi illæ addantur minori erit æqualitas, nempè 27 R = 5 R. → 140 ſubtrahe 5R. utrinque erit 22R. = 140. divide, habebis æquationem 1 R = 6 $\frac{4}{11}$ minor numerus, major 19 $\frac{1}{11}$. multiplica minorem per 5. fiet 31 $\frac{9}{11}$. & majorem per 9. fiet 171 $\frac{9}{11}$. excedens priorem 140 unitatibus.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Duos numeros in quintupla ratione invenire ut ſumma quadratorum ſit decupla ſumma numerorum.

Numeri quæſiti ſupponantur 1 R. & 5 R. erunt quadrata 1 q. & 25 q. ſumma quadratorum 26 q. ſumma numerorum 6R. quæ ut ſit æqualis ſummæ quadratorum multiplicari debet per 10. eritque æquatio 26 q = 60 R. & per hypobibaſmum 26 R. = 60. divide habebis 1R = 2 $\frac{4}{13}$. minor numerus; & major erit 11 $\frac{7}{13}$. ſumma 13 $\frac{11}{13}$. quadrata ſunt $\frac{900}{169}$. & $\frac{22500}{169}$. ſumma $\frac{23400}{169}$. quæ ſumma decupla eſt ſummæ 13 $\frac{11}{13}$. ſeu $\frac{2340}{169}$.

PROPO

Digitized by Google

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Duos numeros reperire in ratione quintupla ita ut minore ſubtracto ex 100. reliquum habeat rationem decuplam ad reliquum ſubtracto majore ex 60.

Erunt hi numeri 1R & 5R, ſubtrahe minorem ex 100. fiet 100 — 1R ſubtrahe majorem ex 60. fiet 60 — 5R. cujus prior eſt decuplus; quare poſterior multiplicetur per 10. ut fiat æqualis; erit ergo 100 — 1R = 600 — 50R. transfer per antitheſin 50R. ſeu adde 50R. fiet æquatio 100 + 49R. = 600; ſubtrahe 100, erit æquatio 49R = 500. divide, erit 1R = 10. $\frac{10}{49}$. Quare minor numerus eſt 10. $\frac{10}{49}$. major 51. $\frac{1}{49}$, ſubtrahe minorem ex 100. relinquetur 89. $\frac{39}{49}$; ſubtrahe majorem ex 60. relinquetur 8. $\frac{48}{49}$. hunc numerum multiplica per 10. fiet 89. $\frac{39}{49}$. quare prior eſt decuplus poſterioris.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Reperire tres numeros in proportione tripla continuâ, ita ut productus ex primo in ſecundum, tertio ſit æqualis.

Tres numeri quæſiti ſint 1R. 3R. 9R. requiritur præterea ut productus ex primo 1R. in ſecundum 3R. hoc eſt 3q æquetur tertio ſeu 9R. habemus ergo æquationem 3q = 9R. & per hypobibaſmum, erit 3R = 9. eſt ergo 1R = 3. ſunt igitur hi numeri 3. 9. 27. ut patet.

Debeat jam productus ex primo in tertium æquari medio, erit æquatio 9q = 3R. & per hypobibaſmum 9R. = 3 divide erit 1R. = $\frac{1}{3}$. ſunt igitur numeri $\frac{1}{3}$. 1. 3.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Datum numerum 100. in tres numeros partiri ut primus cum medio ſit triplus reliqui, tertius cum medio ſit quadruplus primi.

Sit primus 1R, tertius cum medio eſt quadruplus primi, ergo ſumma illorum eſt 4R, ſed eorum ſumma habetur etiam ſubtrahendo primum ex 100, ita ut fiat 100 — 1R. habemus ergo æquationem 4R = 100 — 1R; adde 1R. fiet æquatio 5R = 100, divide erit 1R = 20. primus ergo eſt 20. reliqui duo 80. Jam.

Sit tertius 1R. ſeu alia radix, eritque medius 80 — 1R. & primus cum medio erit 100 — 1R. hic autem eſt triplus tertii, ergo 100 — 1R. = 3R...... adde 1R. fiet æquatio 100 = 4R. divide erit 1R = 25. ergo tertius eſt 25. & cum primus ſit 20. medius erit 55. ſunt ergo numeri 20. 55. 25. primus cum medio efficit 75. triplum tertii 25. tertius cum medio efficit 80. quadruplum primi 20.

Methodo ſpecioſâ ſit 100. B. ſitque prima ejus pars A, ſecunda & tertia erunt 4A; habentur item ſi ſubducamus A ex B; habemus ergo æquationem 4A = B — A adde unum A. fiet æquatio 5A = B divide per 5 fiet A = $\frac{B}{5}$.

Sit item tertia pars E, & conſequenter ſecunda cum prima erit B — E; ſed prima cum ſecunda nempè B — E eſt tripla tertiæ E, eſt ergo æquatio B — E = 3E, adde unum E, fiet æquatio 4E = B & dividendo per 4. Erit E = $\frac{B}{4}$ quare prima erit quinta pars ipſius B nempè 20. & tertia erit quarta pars ejuſdem B, ſeu 25.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Tres numeros reperire qui ita ſe habeant ut ſumma primi, & ſecundi, ſuperet tertium 20 unitatibus, ſecundi & tertii ſumma ſuperet primum 30. unitatibus, ſumma tertij & primi ſuperet ſecundum 40. unitatibus.

Cùm primus & ſecundus ſuperent tertium 20 unitatibus; addatur utrinque tertius erit ſumma primi, ſecundi & tertii, major quam bis tertius 20. unitatibus. Ponatur hæc ſumma primi, ſecundi, tertii, eſſe 1R. tertius bis, erit 1R — 20. ergo tertius erit $\frac{1}{2}$ R — 10. ſi igitur auferas ex ſumma trium, nempè ex 1R. $\frac{1}{2}$ R — 10, reſtabit pro ſumma primi & ſecundi $\frac{1}{2}$ R + 10.

Secundò cum ſecundus & tertius ſuperent primum 30 unitatibus, ſi utrinque addatur primus erit ſumma trium, major primo bis 30 unitatibus, quare primus, bis + 30 æquabitur ſummæ trium ſeu 1R. Quare primus bis erit 1R — 30. & primus ſemel $\frac{1}{2}$. R. — 15.

3. Cum ſumma primi & tertii ſuperet ſecundum 40 unitatibus. Si addatur utrinque ſecundus, ſumma omnium erit æqualis ſecundo bis + 40. & conſequenter ſumma omnium ſeu 1R, minus 40. æqualis erit ſecundo bis, & ſecundus erit $\frac{1}{2}$. R — 20. habemus ergo primum $\frac{1}{2}$. R. — 15. ſecundum $\frac{1}{2}$. R — 20. tertium $\frac{1}{2}$. R — 10. fiat ſumma omnium erit 1. $\frac{1}{2}$. R — 45. Erat autem eadem ſumma 1R. habemus ergo æquationem 1. $\frac{1}{2}$ R. — 45. = 1R. adde 45. fiet æquatio 1. $\frac{1}{2}$ R = 1R + 45. aufer 1R. erit æquatio $\frac{1}{2}$. R. = 45. & 1R = 90.

Quare primus erit. 30. ſeu 45. — 15.
Secundus erit. 25. ſeu 45. — 20.
Tertius erit. 35. ſeu 45. — 10.

Summa primi & ſecundi eſt 55. major quam 35. 20. unitatibus.

Summa ſecundi & tertii eſt 60. ſuperat primum, unitatibus 30.

Summa tertii & primi eſt 65. ſuperans ſecundum unitatibus 40.

Specioſâ methodo, ſit B. 20. D. 30. F. 40. numeri quæſiti A. E. O.

Erit A + E = O + B.

Rurſus O + A = E + F. & E + O = A + D.
Ergo 2A + 2E + 2O = A + E + O + B + D + F.

Et abjecto utrinque A + E + O: erit A + E

+ O = B, + D + F, ſumma B + D + F ſit G; cum A + E = O + B addatur utrinque O erit A + E + O ſeu G æquale 2 O + B, quare $O + \frac{B}{2} = \frac{G}{2}$ & per antitheſim $O = \frac{G}{2} - \frac{B}{2}$. Deinde cum E + O = A + D, addatur utrinque A; erit A + E + O ſeu G æquale 2A + D, & dividendo per 2 erit $A + \frac{D}{2} = \frac{G}{2}$ & per antith. $A = \frac{G}{2} - \frac{D}{2}$.

Tertiò cum O + A = E + F, addatur utrinque E, erit A + E + O ſeu G æquale 2E + F, & dividendo per 2, erit $E + \frac{F}{2} = \frac{G}{2}$ & per antitheſin erit æquatio $E = \frac{G}{2} - \frac{F}{2}$.

Quare cum G ſit idem quod B + D + F ſeu 90 $\frac{G}{2}$ erit 45.

A erit 45 — $\frac{B}{2}$ ſeu minus 10. hoc eſt 35.

E erit 45 — $\frac{F}{2}$ ſeu minus 20. hoc eſt 25.

Et O erit 45 — $\frac{D}{2}$ ſeu minus 15. hoc eſt 30. quibus conveniunt recenſitæ proprietates.

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Tres numeros reperire tales ut ſi primus ſecundo det ſui tertiam partem, & ſecundus tertio quartam ſui partem, & tertius primo quintam ſui partem fiant æquales.

Ponatur primus 3R. ad vitandas fractiones, ſecundus aſſumatur quatuor unitatum ut habeat quartam partem, hic ſecundus det quartam partem tertio & accipiat tertiam primi, fiet 1R + 3 cui æqualis primus ubi quintam acceperit, & dederit tertiam: det tertiam erit 2R. quas ſi auferas ex 1R + 3. reſtabit 3 — 1R quinta pars tertii. ergo tertius erit 15 — 5R. & ubi dederit quintam partem erit 12—4R. & ubi acceperit unitatem, ſeu quartam partem ſecundi, erit 13—4R. æqualis ſecundo ubi dededit & acceperit eſt; ergo æquatio 13—4R. = 1R. + 3. ſubtrahe 3 fiet 10—4R = 1R. adde 4R fiet 10 = 5R. divide 10 per 5. fiet 1R = 2.

Primus igitur trium radicum erit 6. ſecundus 4. tertius 15—5R ſeu 15 — 10. erit 5. ſunt ergo numeri 6.4.5. ſi primus dederit tertiam ſeu 2. reſtabunt 4. & acceperit quintam tertii, erit 5. pariter quartus accipiens 2. à primo, & dans unum tertio fit 5. denique quintus accipiens 1. à ſecundo & dans 1. primo, fit etiam 5.

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Numerum invenire qui multiplicans duos numeros ut 200. & 5. efficiat quadratum & radicem ejus.

Numerus quæſitus ponatur 1.R. qui multiplicet numeros 200. & 5. fientque 200 R. & 5R. quadratum hujus poſterioris eſt 25q. dicitur etiam 200R. eſſe quadratum ejuſdem; quare habemus æquationem 25q. = 200 R. & per hypobibaſmum 25R. = 200. divide per 25 erit 1R. 8. quæ multiplicans 200. efficit quadratum 1600. & multiplicans 5. producit 40. radicem ejus.

Methodo ſpecioſâ ſit 200. idem quod B. & 5. idem quod D, ſitque numerus quæſitus A. qui multiplicans B. efficit AB. & multiplicans D facit AD; fiat quadratum AD, illud erit A2D2. quod æquale eſt AB. Divide omnia per A, erit æquatio B = AD2, divide omnia per D2 habebis æquationem $\frac{B}{D2}$ = A, divide ergo B ſeu 200. per D2 ſeu 25. & habebis 8.

Hæc exempla ſufficient ut percipiatur artificium regulæ algebræ, & præceptorum uſus addiſcatur. Alia tamen ſubjiciam quorum ſolutionem inveſtigabit Tyro, qui in iis ſe exercere volet.

VARIA PROBLEMATA.

1. Duos numeros invenire quorum ſumma 20, & exceſſus quadratorum 80. Invenies primum 8, ſecundum 12.

2. Duos numeros invenire in proportione tripla: ita ut ſumma quadratorum ad ſummam numerorum rationem habeat decuplam, ſi minor ponatur 1R. invenies æquationem 10q. = 40R. & per hypobibaſmum 10R, = 40. & 1R. = 4.

3. Numeros invenire in proportione tripla, ita ut exceſſus quadratorum, ſit duodecuplus exceſsûs numerorum, æquationem invenies 8q. = 24 R. ſeu 8 R. = 24 & 1R. = 3.

4. Duos numeros invenire in proportione quadrupla, ita ut productus ex eorum multiplicatione, ſit ſummæ eorum ſeptuplus, vel ſit eorum exceſsûs ſeptuplus. Invenies æquationem 4 q. = 35R. ſeu 4R. = 35. eritque 1R. = $8\frac{1}{4}$.

5. Numeros invenire in proportione tripla, ita ut quadratum majoris ſit ſeptuplum quadrati minoris. vel quadratum minoris ſit ſeptuplum majoris numeri.

6. Datis duobus numeris tertium invenire, ita ut duo quilibet ſimul additi, & per tertium ſeorſim multiplicati, faciant tres numeros arithmeticè proportionales.

7. Invenire duos numeros quorum exceſſus ſit 7. & exceſſus quadratorum ſit 100, major quam 7.

8. Invenire tres numeros ita ut primus cum numero 73. ſummæ reliquorum ſit duplus, ſecundus cum 73. ſummæ reliquorum ſit triplus, tertius cum 73. ſummæ reliquorum ſit quadruplus. Supponatur ſumma trium eſſe 1R. cum primus + 73. ſit duplus ſecundi & tertii addatur utrobique primus; erit primus ter + 73. duplus trium, ſeu æqualis 2R. quare primus + $24\frac{1}{3}$ = 1R. &c.

9. Tres numeros invenire, ita ut primus, cum media parte ſummæ reliquorum faciat 42. Secuncundus cum triente reliquorum faciat 36. & tertius cum duodecima parte primi, & ſecundi faciat 39. Sit primus 1R. &c.

10. Numerum quemlibet ut 30. dividere in duas partes, quarum prior ducta in 10. numerum efficiat 20. unitatibus majorem, producto ex ſecunda in 40.

11. Numerum quemlibet ut 50, ita ſecare ut genitus ex prima parte in 10. ſit triplus geniti, ex ſecunda parte in 30.

12. Tres numeros reperire in continua proportione ſeſquitertia, ita ut productus ex minore in medium ſit majoris quintuplus.

Numeri ponantur 9R. 12R. 16R.

13. Numerum quemcumque ut 80 in tres partes dividere, ita ut primâ ductâ in 4. & ſecundâ

in

Digitized by Google

in 3. & tertiâ in 7. producantur tres numeri in continuâ proportione quadruplâ.

14. Datum numerum ut 178. in tres partes dividere, ut divisâ primâ parte per 5. & ſecundâ multiplicatâ per 8. & tertiâ divisâ per 6. idem ſemper numerus proveniat.

15. Duos numeros in proportione tripla reperire; ita ut quadrans minoris in mediam partem majoris ductus, producat numerum 90.

16. Numerum invenire qui multiplicatus per quemcumque numerum ut 5. productum efficiat, per quem ſi dividas numerum 60. quotiens ad numerum inventum rationem habeat ſeſquialteram.

17. Tres numeros Arithmeticè proportionales reperire; ita ut numerus ex eorum continua multiplicatione productus, nempè ut primus in ſecundum, & productus in tertium ducatur, ſit eorum ſummæ quintuplus.

Poſitis numeris 1R, 2R. 3R. invenietur æquatio 1 c. = 5R. vel per hypobibaſmum 1q = 5: eſſet igitur 1R. radix quadrata numeri 5.

18. Numerum quadratum invenire, qui in ſuam radicem quadratam ductus faciat 64 Sit ille numerus 1q. ejus radix erit 1R. ducatur in ſuam radicem, productus erit 1c. ergo 1c = 64. educatur radix cubica nempè 4. cujus quadratum 16. ſatisfacit quæſtioni.

19. Numerum invenire cujus radix quadrata ad ejuſdem rādicem cubicam rationem habeat triplam. Ponatur numerus utramque radicem habens, nempè 1qc. ejus radix cubica erit 1q. & quadrata 1c. eſt ergo æquatio inter 1c. = 3q. & per hypobibaſmum 1R. = 3. cujus quadrato cubus 729. eſt numerus quæſitus radicem habens cubicam 9. quadratam 27.

20. Quinque numeros invenire, ita ut quatuor ſine primo, efficiant 127. & quatuor ſine ſecundo efficiant 119. & quatuor ſine tertio efficiant 104. & quatuor ſine quinto 97. Ponatur quintus qui & maximus 1R.

21. Duos numeros invenire in proportione tripla, ita ut unus in alterius quadratum ductus efficiat 192.

22. Quemcúmque numerum ut 30. in tres partes continuè proportionales dividere, ita ut productus ex prima in tertiam, ſit quadruplus producti ex primâ in ſecundam.

23. Invenire numerum qui ductus in 7. numerum efficiat, *cui ſi adduntur* 60. ſiat ſumma octupla, numeri inventi.

24. Datum numerum ut 10. dividere in duas partes quarum cubi efficiant 370. numerum majorem quartâ parte cubi ipſius 10.

25. Numerum reperire cujus cubus, ſit noncuplus quadrati ſui.

26. Duos numeros reperire in proportione quintupla, ita ut minore in quadratum majoris ducto, producatur 500.

27. Invenire numerum, qui cum ſuo quadrante ſuperet 100. eodem exceſſu quo 100. eumdem numerum ſuperat.

28. Progreſſionem Arithmeticam conſtituere, cujus primus ſit 5. ultimus 10. & ſumma omnium 105.

29. Progreſſionem Geometricam conſtituere in datâ proportione ut ſeſquialtera, cujus ultimus terminus datus ſit 19683. & ſumma 55593.

30. Progreſſionem Geometricam ut ſeſquialteram conſtituete, dato primo termino 1728. & ſummâ 55593.

31. Datum numerum ut 40. in duas partes dividere, ita ut ſumma quadratorum ſit 928. major quam 800. dimidium quadratum numeri 40. & minor quam 1600. quadratum ejuſdem numeri 40. Supponatur primus 20 + 1R. & alter 20 — 1R.

32. Invenire duos numeros in proportione quintupla, qui ſe ſuperent quocúmque exceſſu.

33. Invenire numerum à quo ſi ſubtrahas duos, verbi gratia 100. & 20. majus reſiduum, minoris ſit triplum.

34. Dare numerum quem ſi à duobus numeris, verbi gratiâ 100. & 20. ſubtrahas; majus reſiduum minoris ſit quadruplum.

35. Invenire duos numeros, ita ut prior acceptis à poſteriore 30 unitatibus, ſit reſidui duplus.

36. Invenire tres numeros, ut bini ſimul ſumti, faciant imperatos numeros: verbi gratiâ primus, & ſecundus efficiant 20. ſecundus & tertius 30. tertius & primus 40. ſit ſumma omnium 1R.

37. Quatuor numeros reperire, ut terni quique imperatos numeros efficiant.

38. Invenire duos numeros, qui tales ſint, ut intervallum ipſorum, & productus ex eorum multiplicatione numeros propoſitos efficiant.

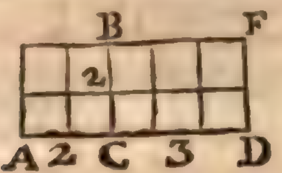
Digitized by Google

ALGEBRÆ

LIBER TERTIVS.

QVÆ hactenus explicuimus circa regulam algebræ communia, & faciliora fuerunt, utpote æquationibus ſimplicibus contenta; hoc eſt vel radicis cum numero abſoluto, vel alterius cujuſcumque poteſtatis, ſimplicis & nullo modo affectæ cum eodem numero abſoluto, cujus radicem extrahendam præcepimus. Idem etiam explicandum eſt in æquationibus compoſitis, cum enim communiter radix ſit in quæſtione, eam inquirimus, & extrahimus. Proponatur enim æquatio 1q. + 4R. = 12. *quæritur radix illius quadrati, quod auctum* 4. *radicibus æquale eſt numero* 12.

Dicuntur hæ æquationes quadraticæ affectæ ſub latere, & coëfficiente longitudine. Sit enim quadratum AB, cujus latus AC, aut BC. adjungatur linea CD, dicetur CD coëfficiens longitudo. Fietque 1q. + 3R. *ita ut CF ſit planum ſub coëfficiente CD,* 3. *& ſub latere CB,* 2. *Quare quadratum afficitur adjunctione plani, ſub latere BC, & coëfficiente CD, fitque* 1q + 3R *idem quod planum AF: ſed de his fuſiùs inferiùs; poſſunt autem eſſe tres affectiones quadrati.*



Primo poteſt affici adjunctione plani ſub coëfficiente, & ſub latere, ſeu radice, ut cum numerus radicum affirmatur de quadrato, ſicut in hoc exemplo.

Secundò poteſt affici quadratum mulcta, ſeu negatione plani ſub latere & coëfficiente ut 1q. — 3 R.

Tertiò poteſt quadratum negari de plano ſub coëfficiente, & ſub latere ut 3R. — 1 q.

Notandum item aliquos ſolum quadratum relinquere, & affectionem adjungere ipſi homogeneo comparationis; ut ſi proponatur hæc æquatio 1q. + 3R. = 10, *eſſet eadem virtualiter* 1q. = 10. — 3R. *nam per antitheſin* 3R. *tranſit ab una parte æquationis, in aliam ſub contrario ſigno. Pariter ſi proponatur hæc æquatio* 1q. — 3R = 4. *poteſt fieri alia* 1q. = 4 + 3R. *denique ſi ponatur hæc* 3R. — 1q. = 8. *poteſt mutari in hanc* 3R. = 8. + 1q. *& in hanc* 3R. — 8. = 1q. *ſeu* 1q. = 3R. — 8. *Et hoc modo illas concipiemus deinceps, ut* 1q. *maneat ſolum ex una parte comparationis: quærimus igitur regulam generalem ad inveniendam radicem quadratam quadrati ita affecti.*

PROPOSITIO I.

Problema.

Radix quadrata ſummæ quadrati ſemiſſis radicum, & numeri abſoluti vel reſidui ſubtracto numero abſoluto ex quadrato ſemiſſis radicum, aucta, vel mulctata eâdem ſemiſſe exhibet radicem quadratam æquationum quadraticarum.

Explicatur. Primò regula, ſi proponatur æquatio, in qua quadratum afficitur plano ſub radice & coëfficiente.

Primò adde vel ſubtrahe ex quadrato ſemiſſis radicum numerum abſolutum prout hic numerus abſolutus habuerit ſignum + aut —.

Hujus aggregati, aut reſidui extrahe radicem quadratam.

Tertiò huic radici adde, vel ſubtrahe ſemiſſem numeri radicum, prout numerus radicum affectus fuerit ſigno + aut ſigno —, hæc ſumma aut reſiduum erit radix quæſita.

In exemplo meliùs regula intelligetur. Proponatur hæc æquatio 1q. = 72. — 6R. ſemiſſis radicum eſt 3. cujus quadrato 9 adde 72. numerum abſolutum, cum virtualiter præferat ſignum +, fiet ſumma 81, ex qua educes radicem quadratam 9. Ex ea ſubtrahe 3. ſemiſſem radicum 6. cum radices præferant ſignum — & reſtabit 6 radix quæſita; nam illius quadratum 36. 6 radices ſunt etiam 36. Clarum autem eſt 72. — 36. ſeu 36. eſſe quadratum radicis 6.

Sit ſecundò 1q. = 6. R. + 72. adde pariter 72. quadrato 9. ſemiſſis radicum 3. Quia numerus abſolutus præfert ſignum + fitque ſumma 81 è qua extraho radicem quadratam 9. cui addo 3. ſemiſſem radicum, quia numerus radicum præfert ſignum +. dico quadratum numeri 12. eſſe æqualem numero 72, + plus 12 ſexies ſumpto.

Tertiò proponatur 1q. = 18 R. — 72. quadratum ſemiſſis radicum ſeu 9. eſt 81. à quo ſubtraho 72. Cum id indicet ſignum — relinquuntur 9. cujus radix quadrata 3. addatur ſemiſſi radicum 9. fit radix 12 ſatisfaciens quæſtioni.

Hæc tamen æquatio amphibola eſt duas habens radices ſatisfacientes quæſtioni. Si igitur radix extracta 3. auferatur ex ſemiſſe radicum 9. reſtabit 6. alia radix ſatisfaciens quæſtioni.

PROPO

Digitized by Google

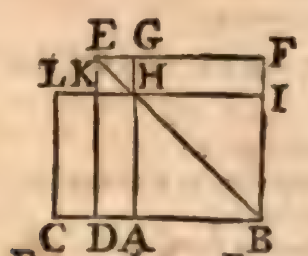
PROPOSITIO II.

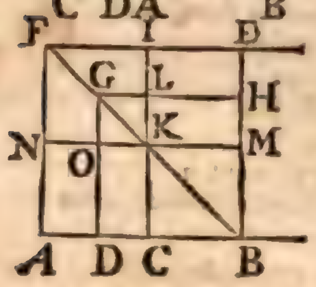
Theorema.

Demonſtratur prima praxis ſolvendæ æquationis quadraticæ.

Praxis prima verſabatur circa æquationem hujuſmodi 1q. $=$ 72. — 6R.

Sit linea AB æqualis lateri, ſeu radici quæ inquiritur, illi in directum adjiciatur AC 6 unitatum, ſeu æqualis numero radicum; hæc bifariàm ſecetur in D, eritque AD, trium unitatum ſemiſſis numeri radicum, excitetur ſupra lineam BD quadratum DF, ductaque diagonali EB, agantur AG, IK eruntque quadrata AI, DF (*per* 4.2.*Eucl.*) item rectangula DH, HF æqualia erunt; ſicut CK, DH.





Inveſtigo primò quadratum DF, hoc modo; dicitur quadratum AI, cujus latus quæritur eſſe 72. minus 6R. hoc eſt ſi intelligantur illi quadrato addi 6 R. erit 72; ſed 6 Radices ſunt rectangulum comprehenſum ſub AC quæ eſt 6. & ſub radice AH, ſeu rectangulum CH, aut rectangula DH, HF illi æqualia: habemus ergo Gnomonem DIG eſſe 72. cui ſi addatur KG quadratum ſemiſſis radicum AD, ſeu 9. habebitur totum quadratum DF eſſe 81. è quo ſi extrahas radicem quadratam 9. habebitur BD, & ſubtrahendo AD 3. reſtabit AB 6 unitatum, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

Theorema.

Demonſtratur ſecunda praxis ſolvendæ æquationis quadraticæ 1q. $=$ 6R. + 72.

Fuerat ſecundo loco propoſita hæc æquatio 1q. $=$ 6R. + 72.

Sit AB radix quæ inquiritur, & AC ponatur æqualis numero radicum, quæ bifariam dividatur in D. Tum ſuper AB deſcribatur quadratum AE, ductaque diagonali BF, ducantur perpendiculares DG, CI, & per puncta G & K parallelæ NM, GH inquiritur primò quadratum DH.

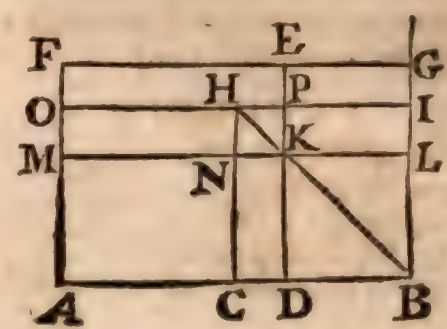
Demonſtratio. Dicitur in æquatione quadratum AE, eſſe æquale numero abſoluto + valore 6 Radicum, ſed rectangulum AI eſt valor 6 Radicum, cum ſit comprehenſum ſub AC numero radicum, & radice AF. ergo rectangulum CE erit numerus abſolutus 72. Si pro rectangulo LE ſubſtituas DK illi æquale, erit Gnomon LMCO æqualis numero 72; cui ſi addas quadratum OL 9. ſemiſſis numeri radicum DC, habebis totum quadratum DH 81. & extrahendo radicem cognoſcetur DB 9. cui addendo AD ſemiſſem numeri radicum cognoſcetur tota AB.

PROPOSITIO IV.

Theorema.

Demonſtratur tertia praxis æquationis quadraticæ 1q. $=$ 18*R.* — 72.

Tertium exemplum æquationis quadraticæ erat 1q. $=$ 18R — 72.



Sit AB æqualis numero radicum 18, quæ bifariàm dividatur in C, eruntque AC, CB ſingulæ 9. & quadratum CI erit 81. inquiratur AD. Radix quadrati AE, ſupponitur enim AE eſſe quadratum ſicut & CI; ductâ autem diagonali HB, & parallela LM, erunt rectangula PL, PG æqualia, ſunt enim lineæ DA, DE æquales, ſunt etiam æquales BC ſeu CA, & BI ſeu DP; quare EP & CD æquales erunt ſeu FP & PK.

Demonſtratio. Propoſita æquatio aſſerit quod ſi ex valore 18. radicum ſeu rectangulo AG comprehenſo ſub AB numero radicum & radice AF, ſi inquam ex tali rectangulo auferas 72. habebitur quadratum AE, eſt ergo DG, aut Gnomonem ſi ſubtrahas ex quadrato CI ſemiſſis radicum CB reſtabit quadratum NP. Quare jubemus in regula, ut numerus abſolutus ſubtrahatur ex quadrato ſemiſſis numeri radicum, ſcilicet ex 81. ſubtrahitur 72. reſtat 9. pro quadrato NP. extrahimus radicem quadratam habemuſque CD, cui ſi addamus ſemiſſem numeri radicum ſeu AC 9 fiet AD radix quadrati AE.

Oſtendo iiſdem poſitis quadratum DL ſatisfacere quæſtioni, nempe poſitâ AB pro numero radicum, erit rectangulum AL valor radicum, æquatio autem indicat ſi ſubtrahas 72. ex AL reſtabit quadratum DL, eſt igitur AK 72. AK autem componitur ex AN, & CK, pro AN ſubſtituo CL, & pro CK, rectangulum KI eritque Gnomon, PLDN æqualis 72. Quare ſi ex quadrato CI, ſemiſſis numeri radicum, auferas 72; habebis quadratum NP cujus radicem NK, aut CD, ſi ſubtrahas ex ſemiſſe radicum BC, habebitur BD radix quæſita.

PROPO

Digitized by Google

PROPOSITIO V.

Theorema.

Methodus Diophanti, explicandi æquationes quadrati affecti ſub latere & coëfficiente $5q + 10R = 175$.

Praxis Diophanti ferè cum ſuperioribus coincidit, quamvis prima fronte diverſa videatur, hanc in exemplo diverſitatem, & convenientiam aptiſſimè aperiam.

Proponatur hæc æquatio $5q + 10R = 175$. quæ cum iſta coincidit $5q = 175 - 10R$.

Primò multiplica numerum quadratorum 5. per numerum abſolutum 175, huic adde 25. quadratum ſemiſſis numeri radicum, ſumma erit 900. ex qua extrahes radicem quadratam 30; ex ea ſubſtrahe 5. ſemiſſem numeri radicum, reſtabit 25. valor quinque radicum; divide per 5. numerum quadratorum habebitur valor unius radicis.

Demonſtratio per comparationem praxis Diophanteæ cum vulgari inſtituetur.

COMMUNIS.

A. $5q + 10R = 175$.
B. $1q + 2R = 35$.
Seu $1q = 35 - 2R$.

C. q. ſemiſſis numeri radicum	1.	Adde
D. numerum abſolutum	35.	
E. Summa	36.	
F. Radix quadrata	6.	
G. Subtrahe ſemiſſem radicum	1.	

H. Reſtat 5. valor unius radicis.

DIOPHANTI.

K. $5q + 10R = 175$.
L. 175.
M. Per 5. numerum q. multiplica.
N. Productus 875.
O. Adde 25. q. ſemiſſis radicum.
P. Summa 900.
Q. Radix q. 30.
R. Subtrahe 5. ſemiſſem radicum.
S. Reſtat 25. valor quinque radicum.
T. Divide per 5. numerum quadr.
V. Reſtat 5. valor unius radicis.

Praxis communis primò jubet dividere ſingulos terminos æquationis A per 5. numerum quadratorum, ut fiat æquatio B, tum additur numero 35 quadratum dimidiarum radicum fitque numerus E è quo educitur radix quadrata.

Praxis Diophanti relinquit æquationem K, quod perinde eſt ac ſi æquatio B multiplicata eſſet per 5. tum multiplicatur numerus L 175. per 5. numerum quadratorum fitque numerus N 875. Eſt ergo D 35. ad 875. in duplicata ratione 1. ad 5, cum intervenerit duplex multiplicatio per 5: & cum quadratum C ad quadratum O ſit etiam in duplicata ratione (*per* 20. 6.) ſumma E ad ſummam P erit in duplicata ratione 1. ad 5. & cum radices ſint in ſubduplicata ratione quadratorum, erit radix F, ad radicem 30, ut 1 ad 5. Cum autem ſemiſſes radicum 1. & 5. ſint etiam in eadem ratione, factâ utrinque ſubtractione erit H ad S. ut 1 ad 5; quare ſi S dividatur per 5. numerum quadratorum, erunt H, & V æquales.

PROPOSITIO VI.

Theorema.

2. *Praxis Diophanti in explicandis æquationibus quadraticis* $4q - 16R = 660$.

Sit propoſita æquatio $4q - 16R = 660$. iſti æquivalens $4q = 16R + 660$, eſt ergo caſus ſecundus praxis communis.

COMMUNIS.

A 4 q. = 16 R. +	660.	
B 1 q. = 4R. +	165.	
C qu. ſemiſſis radicum	4.	Adde
D numerus abſol.	165.	
E Summa	169.	
F Radix qu.	13.	Adde
G Semiſſis Rad.	2.	
H Valor radicis	15.	

PRAXIS DIOPHANTI.

K. 4 q. — 16 R. =	660.	
L. Numerus abſol.	660.	
M. Per numerum q. 4. multiplica.		
N. Productus	2640.	Adde
O. Quadratum ſemiſ. R.	64.	
P. Aggregatum	2704.	
Q. Radix qu.	52.	Adde
R. Semiſſis Rad.	8.	
S. Summa	60.	
T. Divide per num. q.	4.	
V. Reſtabit unius radicis valor	15.	

Eodem modo demonſtratur hæc Diophanti praxis quo ſuperior; oſtendam enim ſimiliter rationem aggregati E, 169 ad aggregatum P 2704. eſſe duplicatam rationis 1 ad 4. & conſequenter radices F & q eſſe ut 1 ad 4. & additis G & R, quæ ſunt in eadem ratione H & S eſſe ut 1 ad 4. quare dividendo S per 4. numerum quadratorum fient H & V æquales.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

3. *Methodus Diophanti in explicandis æquationibus quadraticis in quibus quadratum negatur de radicibus* $56R - 4q = 192$. *vel* $4q = 56R - 192$.

COMMUNIS.

A. $4q = 56R - 192$.
B. $1q = 14R - 48$.

C. qu. ſemiſſis radicum	49.	
D. Numerus abſolutus	48.	Subtrahe
E. Reſiduum	1.	
F. Radix quadr.	1.	Adde
G. Semiſſis numeri Rad.	7.	
H. Valor unius radicis	8.	
Vel ex G ſemiſſe Num. radicum	7.	
F. Subtrahimus Radicem quadram	1.	
Reſtat K Radix minor	6.	

DIOPHAN

Digitized by Google

DIOPHANTI

A. 4 = 56R — 192.
B. Numerum abſolutum 192.
M. Per numerum qu. multipl. 4.
N. Productum Subtrahe 768.
O. Ex quadrato ſemiſſis R. 784.
P. Reſiduum 16.
Q. Reſidui Radix q. 4.
R. Semiſſis numeri Radicum 28. } Adde
S. Fit ſumma Rad. 32.
T. Divide per numerum q. 4.
V. Habebis valorem unius Radicis 8.
Vel ex ſemiſſe numeri Radicum 28.
Subtrahe radicem inventam q 4.
Reſtat valor 4 radicum 24.
Divide per numerum quadratorum. 4.
Reſtabit V valor unius radicis 6.

Eadem Demonſtratio huic methodo applicari poteſt.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Praxis reducendæ æquationis quadraticæ 1q. + 10R. = 96. *ſeu* 1q. = 96. — 10 R.

Proponatur æquatio 1q. + 10 R. = 96. ſolvenda nempe quæritur valor unius radicis. Sumatur latus quadrati nempe 1 R. cui addatur ſemiſſis numeri radicum, fietque 1 R. + 5. fac illius quadratum multiplicando 1 R. + 5. per 1R. + 5. fiet quadratum 1 q. + 10 R. + 25. quod quadratum majus eſt quam primò propoſitum quadratum 25 unitatibus. Addantur hæ 25. unitates fietque æquatio 1q. + 10 R. + 25 = 121. utriuſque hoc eſt 1q. + 10 R. + 25. & 121; extrahantur radices quadratæ, quæ erunt 1R. + 5. & 11. & quia quadrata ſunt æqualia, radices æquales erunt, quare erit æquatio 1R. + 5. = 11. & ſubtractis 5 unitatibus. Reſtat una radix æqualis 6.

Demonſtratio. Procedit quaſi per attentationem, quærimus enim radicem quæ multiplicata per ſeipſam faciat quadratum, affectum eodem modo quo in æquatione exhibetur; quare non debuit eſſe radix pura, ſed radix cum addito. Addimus igitur dimidium numeri radicum, ut idem numerus radicum proveniat. Quadratum autem quod producitur erit paulò majus quam ſit illud quod exhibetur, nempe 25 unitatibus: quare ſi addantur hæ 25. unitates homogeneo comparationis fiet æquatio inter duo illa quadrata, & conſequenter erit æquatio inter radices nempe 1R. + 5 = 11. Convertimus ergo æquationem quadraticam in quadraticam ſimplicem: & artificium in eo conſiſtit quod proponitur radix quæ ſatisfacere creditur quæſtioni.

Hæc praxis diligenter notanda eſt, poteſtque habere uſum, quoties occurrunt aliæ æquationes difficiliores.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Praxis reducendæ æquationis quadraticæ 1q. — 8R = 425. *vel* 1q. = 8R + 425.

Eadem methodo ſolvere poterimus hanc æquationem 1q — 8R. = 425. Aſſumatur latus 1R. — 4. ut ejus quadratum quam proximè accedat ad propoſitum, multiplica 1 R. — 4 per 1 R. — 4. ut habeas ejus quadratum, producetur 1q. — 8R. + 16. paulò majus quam requiratur; adde ergo homogeneo comparationis 16. fiet æquatio 1q. — 8R. + 16 = 441. utriuſque extrahatur radix. habemus 1 R. — & 21. habemus ergo æquationem 1R. — 4. = 21. adde utrinque 4. Habebimus æquationem 1R. = 25.

PROPOSITIO X.

Problema.

Praxis reducendæ æquationis quadraticæ 1q. + 75 = 20 R. *vel* 1q. = 20 R — 75.

Sit hæc æquatio 1 q. = 20 R. — 75. hanc nonnulli revocant ad hanc 1q. — 20 R. + 75 = 0. Aſſume pro radice 1R. — 10. hujus quadratum erit 1q. — 20 R. + 100. majus quam propoſitum 25 unitatibus. Habemus ergo æquationem 1 q. — 20 R. + 100 = 25 extrahantur radices quadratæ quæ æquales erunt; nempe 1 R. — 10 = 5. & additis 10. erit æquatio 1 R. = 15.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Methodus univerſalis Stevini in reducendis æquationibus.

Hæc methodus univerſaliſſima, non cenſebitur Geometrica, eò quòd per attentationem procedat: in eo igitur conſiſtit ut aſſumat numerum, quem ſatisfacere quæſtioni exiſtimat, eumque examinet ſecundùm quæſtionis circumſtantias, ut exemplo clariùs patebit.

Sit propoſita æquatio 1q + 75 = 20R. exiſtimetur 10. eſſe valor unius radicis eruntque 20R = 200. unum quadratum erit 100. cui addendo 75. fient 175. quadratum ergo deficit à radice. Augeatur valor radicis, & ponatur eſſe 15; quare 20 R. efficient 300. quadratum radicis 15. eſt 225. cui adde 75. fiet æqualitas inter 225. + 75. = 300.

Hæc praxis non eſt negligenda, poteſtque in inſolubilibus adhiberi.

Digitized by Google

PROPOSITIO XII.

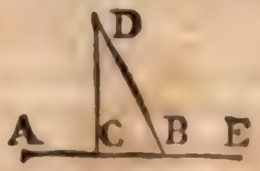
Problema.

Inveſtigatio Geometrica quadrati æqualis numero abſoluto — aliquibus radicibus ex Nonio.

Proponatur hic numerus 55 — 6R. quæritur radix illius quadrati, hoc eſt quæritur radix cujus quadratum æquale ſit 55 — 6R. proponitur ergo æquatio 1q. ═ 55. — 6 R. vel quod idem eſt 55 — 1q ═ 6R.

Supponatur recta A B pro numero radicum, ſecta bifariàm in C erigatur perpendicularis CD, quæ ſit radix numeri abſoluti 55. connectatur CD cui CE ſit æqualis: dico quadratum rectæ BE, cum rectangulo ſub AB, BE, eſſe æqualem numero 55. ſeu quadrato rectæ CD.

Demonſtratio. (*per* 47. 1.) quadratum rectæ BD ſeu CE; æquale eſt quadratis CB, CD; ſed



quadratum ex CE (*per* 4. 2.) æquale eſt quadratis ex CB, & BE, & rectangulo bis ſub CB & BE, hoc eſt rectangulo ſub AB, BE; ergo quadrata CD, CB, æqualia ſunt quadratis CB & BE, & rectangulo ſub AB, BE, & auferendo utrinque quadratum CB, erit quadratum CD, æquale quadrato BE, & rectangulo ſub AB, BE. Quod erat demonſtrandum.

Quare hæc æquatio facilè reducetur. Adde quadratum CB ſemiſſis numeri radicum, ad quadratum CD, ſeu numerum abſolutum, fit quadratum ex DB, ſeu CE; quare ſi ex hoc aggregato extrahas radicem quadratam, innoteſcet CE, ex qua ſi auferas BC ſemiſſem radicum, reſtabit radix BE, per quam divides 55, ſeu numerum abſolutum, ut habeat 6R. atque hic 1. caſus.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Inveſtigatio Geometrica quadrati æqualis numero abſoluto + aliquibus radicibus.

Proponatur ſecundus caſus 1q. ═ 6R. + 55. ſitque AB numerus radicum, CD radix numeri abſoluti 55. juncta pariter rectâ BD, cui æqualis ſit CE, dico quadratum rectæ AE æquale eſſe, quadrato CD + rectangulo ſub AB, AE.

Demonſtratio. (*Per* 2. 2.) quadratum ex AE, æquale eſt rectangulo ſub AE, AB, & rectangulo ſub AE, EB: adde utrinque quadratum BC, & pro quadrato BC & rectang. ſub AE, EB repone quadratum CE illis æquale (*per* 6. 2.) quare quadrata AE, BC æqualia ſunt rectangulo ſub AE, AB, & quadrato CE aut BD, pro quo repones quadrata BC, CD illi æqualia (*per* 47. 1.) & ablato utrinque BC. reſtat quadratum ex AE æquale eſſe rectangulo ſub AE, AB + quadrato ex CD.

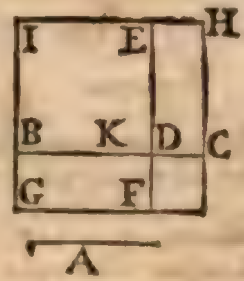
Quare ad inveniendam radicem. Adde numero abſoluto, ſeu quadrato ex CD, quadratum ex CB ſemiſſis radicum, ut habeas aggregatum; ſeu quadratum BD, aut CE cujus radix quadrata erit CE: huic addes AC ſemiſſem radicum, habebiſque AE, cujus nempe quadratum æquale eſt valori radicum + numero abſoluto ſeu quadrato ex CD. Atque hoc modo demonſtratur ſecundus caſus.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Inveſtigatio Geometrica quadrati æqualis aliquibus radicibus — numero abſoluto ex Nonio.

Proponatur hæc æquatio 1q. ═ 18 R. — 56. vel 1q. + 56. ═ 18R.



Sit linea A cujus quadratum æquale ſit numero 56. Sitque linea BC æqualis numero radicum 18. quæ ita ſecetur in D, ut linea A ſit media proportionalis inter ſegmenta BD, DC: hoc eſt, ita ſit BD ad A, ſicut A ad DC: ſint BE, CF quadrata ſegmentorum BD, DC. Dico ſatisfacere quæſtioni duo. Primò poſito valore unius radicis lineâ BD, quadratum ejus + quadrato lineæ A, ſeu numero 56. eſſe æquale valori radicum, ſeu rectangulo BH, comprehenſo, ſub numero radicum BC, & radice DE.

Demonſtratio. Cùm ita ſit BD, ſeu DE ad A, ſicut A ad DC. erit (*per* 16. 6.) quadratum ex A, ſeu numerus abſolutus 56. æqualis rectangulo ſub DE, DC. addatur commune quadratum BE, erunt quadrata ex A & B D æqualia rectangulo BH, comprehenſo ſub numero radicum BC, & radice BI ſeu BD. Ergo habemus quadratum BD. + quadrato ex A ſeu numero 56 æquale, valori radicum ſeu rectangulo BH.

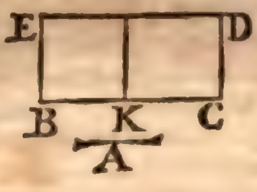
Ex qua demonſtratione ita ad praxin deſcendes; nempe ita cognoſces, ſeu inveſtigabis latus B D, aut D C. Dividatur numerus radicum BC. bifariam in K (*per* 5. 2.) erit rectangulum ſub BD, DC, ſeu numerus abſolutus, una cum quadrato DK, æquale quadrato KC, ſemiſſis numeri radicum; quare ex quadrato ſemiſſis numeri radicum, ſubtrahe numerum abſolutum 56. reſtant 25. pro quadrato ex KD. cujus radix quadrata KD erit 5. hæc addita ſemiſſi radicum BK, exhibet majus latus BD, & ſubtracta ex KC, ſemiſſe radicum exhibet minus latus DC.

Secundò latus DC, ſatisfacit quæſtioni; nam quadratum FC, + rectangulo DG. ſeu quadrato, ex A, id eſt numero abſoluto 56. æquale eſt rectangulo CG, comprehenſo ſub numero radicum AB, & radice BG, ſeu DC.

Denique

Digitized by Google

Denique ſi quadratum ex A, ſeu numerus abſolutus, æquale ſit quadrato ſemiſſis radicum



BK, hoc eſt linea A ſit æqualis lineæ BK, clarum eſt in tali caſu, quadratum ex BK + quadrato ex A, ſeu numero abſoluto, æquale eſſe rectangulo BD, comprehenſo, ſub numero radicum BC, & radice BE ſeu BK.

Si accidat ut numerus radicum major ſit quadrato ſemiſſis radicum, æquatio falſa erit, ſeu impoſſibilis.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Semiſſis Radicis quadrata, aggregati ex quadruplo numeri abſoluti, & quadrato numeri radicum, vel Reſidui ſubtracto quadruplo ejuſdem abſoluti, ex quadrato numeri radicum, aucta, aut mulctata numero radicum, eſt valor unius radicis in æquationibus quadraticis.

Hæc propoſitio eſt aptiſſima cum numerus radicum eſt impar: atque adeo dividi non poteſt bifariam. Sit extrahenda radix quadrata ex hoc numero 72 — 6 R. hoc eſt ſit propoſita hæc æquatio 1q. = 72. — 6R. Ad quadratum numeri radicum 36. adde quadruplum numeri abſoluti, cum numerus abſolutus habeat ſignum +; eſt autem hoc quadruplum 288. fit 324. cujus radix quadrata 18. ex qua ſubtrahes numerum radicum, cum ferat ſignum —. reſtabit 12. cujus ſemiſſis 6. eſt valor unius radicis.

Proponatur ſecundò hæc æquatio 1q. = 6R. + 72. quadratum radicum eſt 36. cui addes quadruplum numeri 72. ſeu 288. fit ſumma 324. cujus radix 18. huic addes numerum radicum 6. fiet 24. cujus ſemiſſis 12. eſt valor unius radicis.

Tertiò proponatur hæc æquatio 1q. = 18 R. — 72. ex quadrato numeri radicum 324. ſubtrahe quadruplum numeri abſoluti 72. ſeu 288. reſtat 36 cujus radici quadratæ 6. adde 18 numerum radicum fit 24. cujus ſemiſſis 12. eſt valor unius radicis. Vel eamdem radicem quadratam 6. ſubtrahe ex numero radicum 18. reliqui 12. ſemiſſis 6. eſt valor unius radicis.

Demonſtratio. Quadratum numeri radicum quadruplum eſt quadrati ſemiſſis numeri radicum: ergo ſi illi addas vel ſubtrahas quadruplum numeri abſoluti, generatur numerus quadruplus illius quem praxis vulgaris ſuperiùs explicata invenit. Quare ſi ex eo educatur radix quadrata, hæc erit dupla illius quæ per praxim ſuperiorem educitur: ſi igitur huic radici addas, vel ſubtrahas numerum, radicum relinquetur radix dupla, veræ radicis, quæ nempe educeretur per praxin communem.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

Alia omnes æquationes.

Quamvis inferiùs ſimus tradituri methodum reducendi omnes æquationes quantumlibet intricatas, quia tamen earum reductio, principiis ſpecioſæ nititur, quæ ad ſequentem librum pertinent, alias æquationes methodo vulgari, ſeu antiqua ſolubiles, in hac propoſitione aperiam.

Regula generalis eſto; quoties exponentes terminorum æquationis cujuſcumque ſunt Arithmeticè proportionales, toties æquatio ad quadraticam revocatur.

Proponatur primò æquatio in quâ termini, ſe conſequantur ſine interruptione, dico hanc æquationem ad quadraticam revocari poſſe. Ut ſi proponatur æquatio 1qq. = 30 c. + 10 q. dico per hypobibaſmum hanc reduci poſſe ad æquationem 1q. = 30R. + 10 ſic enim termini deſcendent ſinguli duobus gradibus, quod ſine detrimento æqualitatis fieri poſſe in hypobibaſmo probavimus; ſic pervenietur ad æquationem quadraticam 1q. = 30 R. + 10: quare quoties ſunt termini ſine interruptione toties in æquationem quadraticam deſinitur.

Secundò proponatur æquatio cujus termini ſint interrupti, ita tamen ut exponentes eodem intervallo ſe ſuperent, quomodocumque tandem diſponantur, ſeu quocumque ordine, in æquationem quadraticam fiet deſitio.

Sint exponentes 4. 2. 0. vel 2. 4. 0. termini æquationis, tantundem in progreſſione Geometricâ inter ſe diſtant: nam inter numerum abſolutum cujus exponens 0. & quadratum cujus exponens eſt 2. interjicitur radix: & inter quadratum cujus exponens 2. & qq cujus exponens 4 interjicitur cubus. Idem dicito de hac æquatione cujus exponentes eſſent 6 3 0. qui pariter proportionem Arithmeticam obſervant, id eſt quadrato cubi, cubi, & numeri abſoluti.

Proponatur igitur primò hæc æquatio 1 q q. = 18 q. + 648. adhibeatur regula communis æquationis quadraticæ, mutatâ priùs datâ æquatione in hanc 1q. = 18R. + 648. eritque valor unius radicis 36. hujus ſi extrahatur radix quadrata 6. erit 6 valor unius radicis.

Demonſtratio. Verè quadrato-quadratum eſt quadratum, cujus radix quadrata eſt quadratum: ergo licet ſub hac conſideratione inquirere ejus radicem quadratam, quam praxis communis exhibet: quia autem etiam hæc radix, ut dixi, eſt quadratum, debet illius radix quadrata educi, ſi vis radicem quadratam.

Idem dicito de quadrato cubo, cubo, & numero abſoluto, ſed ubi per praxin communem innotuerit valor primæ radicis quadratæ, educenda eſt radix cubica ut 1 q c. + 6 c. = N. demonſtratio eadem, nam verè quadrato cubus eſt quadratum, & cubus eſt radix quadrata quam per praxin communem inveſtigare poſſumus; quia verò hæc radix quadrata etiam cubus eſt, ejus radicem cubicam educere debemus, ut habeamus primam illius progreſſionis radicem.

Ex quibus colliges vi iſtius praxis eas tantum æquationes ſolvi poſſe quæ maximum numerum habeant, ex quadrato compoſitum, hoc eſt quarum ſumma poteſtas ſit numerus quadratus.

Notandum autem ſæpè occurrere numeros non quadratos, atque adeò qui verâ radice careant, cum tamen praxis jubeat educi radicem quadratam. Ex quo oriuntur numeri ſurdi de quibus inferius agendum eſt.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Reductio æquationis in qua quadratum afficitur adjunctione plani ſub radice, & ſub coëfficiente ad ſimplicem æquationem quadraticam.

Æquationes compoſitas voco eas, in quibus poteſtas quæ præcipuum in iis locum obtinet, afficitur parodicis gradibus, hoc eſt illi adjunguntur, aut negantur gradus inferiores. Has ad ſimpliciores revocare maximam afferre poteſt facilitatem; inter eas prima occurrit quadratica ut hæc 1 q. + 8 R = 20. quæ æquatio ſimplex non eſt, ſed quadratum quod primum in ea locum obtinet eſt affectum adjunctione plani, contenti ſub coëfficiente 8. & Radice. Hujuſmodi æquationes affectæ, ſeu compoſitæ reduci poſſunt ad ſimpliciores, & hæc reductio; vocatur expurgatio, ſitque adjunctione aliquarum partium coëfficientis, quas uncias vocant nonnulli. In quadraticis hæc expurgatio fit adjunctione medietatis coëfficientis: in cubicis trientis: in quadrato quadraticis quartæ partis, & ita conſequenter ſecundùm denominationem ab exponente cujuſlibet poteſtatis deſumptam.

Proponatur hæc æquatio 1 q. + 8 R. = 20. Intelligatur radix hujus æquationis eſſe 1 R. cui adjungatur 4. ſeu medietas numeri radicum, ſeu coëfficientis, ita ut fiat 1 R. + 4. ſupponatur alia quantitas radici ſic auctæ æqualis quæ ſit A, ita ut ſit æquatio 1 R. + 4. = A. & per antitheſin erit etiam 1 R. = A — 4. quare hujus quantitatis quadratum erit æquale quadrato unius radicis: igitur multiplicetur A — 4. per A — 4. ut fiat ejus quadratum habebimus A2 — 8A + 16. æquale uni quadrato præcedentis radicis. Multiplicetur item hæc quantitas A — 4. per 8. numerum radicũ, cum in æquatione præter unum quadratum inveniantur 8R. fientque + 8A. — 32 adde numeris jam inventis A2 — 8 A. + hos numeros + 8A. — 32. erit ſumma A2 — 16. quæ æqualis eſt 1 q. + 8R. præcedentis radicis, & conſequenter numero 20. Habemus ergo aliam æquationem 1 q. — 16. = 20. & per antitheſin 1 q. = 36. & extrahendo radicem quadratam, habemus hanc ſecundam radicem A eſſe 6; ſed ſuppoſuimus A — 4 æquari 1R nempe radici primæ æquationis ergo 6 — 4 = 1R ſubtrahe ego igitur 4. ex 6 habebis priorem radicem eſſe 2.

Proponatur ſecundò æquatio in qua quadratum afficiatur mulctâ plani ſub latere, & coëfficiente; ut 1q — 4R. = 12 ſupponatur radix imminuta medietate coëfficientis, ſicque imminutæ æqualis ſit quantitas A: erit ergo æquatio 1R. — 2 = A. & per antitheſin 1R. = A + 2. & cum ſit æqualitas in radicibus, in eorum quadratis erit etiam æqualitas quare A2. + 4A. + 4. æquabitur uni quadrato. Multiplicetur item hæc radix A + 2 per — 4, cum propoſita æquatio habeat negatas 4. radices fiet — 4A. — 8. addantur ſimul A2. + 4A. + 4. & — 4A — 8. fiet A2 — 4. æquale 1q. — 4R. & conſequenter erit nova æquatio 1q. — 4. = 12. & per antitheſin 1q. = 16. cujus radix quadrata 4. erat autem 1R. = A. + 2. eſt ergo æquatio 1R. = 4. + 2. ergo primæ æquationis radis erat 6.

Tertiò proponatur hæc æquatio 16 R — 1q = 48 ſupponatur 8 — A eſſe æqualia 1R. fiat quadratum hujus binomii 8 — A. illud erit 64 — 16 A. + A2. multiplica 8 — A per 16. fiet 128 — 16 A. ſubtrahe priùs quadratum ex hoc ultimo erit reſiduum 64 — A2. æquale 16R — 1q. præcedentis æquationis, atque adeò & comparationis homogeneo æquale erit. Habemus ergo æquationem 64 — 1q. = 48. & per antitheſin 64 = 48. + 1q. & auferendo 48. erit æquatio 1q. = 16. & extrahendo radicem erit radix A = 4. erat autem æquatio 8 — A = 1 R: Quare erit æquatio 8 — 4 = 1R eſt ergo una radix 4.

Ex his colliges omnes æquationes in quibus exponentes ſervant arithmeticam proportionem hoc artificio ſolvi poſſe, & reduci ad ſimplices. Ut ſi proponatur hæc, 1qq. + 8q. = 48. reducetur primò ad hanc 1q. + 8R. = 48. & expurgatione facta invenietur radix quadrata 4. cujus iterum educenda eſt radix quadrata ut fiat 2. Idem dicendum eſt in aliis omnibus.

Ex quibus vides hanc propoſitionem eſſe maximi momenti, cum hæc ſola poſſit ſupplere, & ſolvere omnes æquationes quadraticas, quas toto hoc libro explicuimus. Hæc methodus vocatur plaſma, ſeu fictio.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Reductio cuborum affectorum ſub quadrato ad cubos affectos ſub latere.

Affectio cubi ſub latere, cenſetur facilior, & minus intricata quam affectio ejuſdem cubi ſub quadrato; eò quòd quuadratum longius diſtet, ulteriuſque provehatur in progreſſione geometrica quàm radix. Facilis tamen erit reductio affectionis ſub quadrato ad affectionem ſub radice.

Proponatur æquatio 1 c. + 9q = 108. unciæ ut vocant coëfficientis 9. in cubicis æquationibus ſunt triens: unde hæc æquatio ita exprimetur methodo ſpecioſâ, A 3. + 3BA. = z ſol in quo vides ideo poni 3B ut ſignificetur in plaſmate ſeu fictione aſſumendum trientem coëfficientis.

Supponamus ergo veræ radici hujus æquationis 1c. + 9q. = 108. additum eſſe trientem coëfficientis, ita ut ſic aucta fiat 1R. + 3. huic aggregato ponatur æqualis alia quantitas A. ita ut ſit æquatio 1R. + 3. = A. & per antitheſin 1R. = A — 3. fiat hujus quantitatis cubus nem-

A — 3
A — 3
———
— 3A + 9
A2 — 3A

Digitized by Google

$$A2 - 6A + 9 \text{ quadratum}$$
$$A - 3$$

$$-3A2 + 18A - 27$$
$$A3 - 6A2 + 9A$$

$$A3 - 9A2 + 27A - 27 \text{ cubus}$$
$$+9A2 - 54A + 81$$

$$A3 \qquad -27A + 54$$

pe $A3 - 9A2 + 27A - 27$: hoc eſt $A - 3$ per ſeipſam multiplicetur, ut fiat ejus quadratum; tum ejus quadratum multiplicetur per eandem radicem $A - 3$ & habebis cubum.

Secundo multiplicetur $A2 - 6A + 9$. per 9. coëfficientem, cum in æquatione id feratur fiet $+9A2 - 54A + 81$. Adde hunc ultimum numerum priori cubo fiet $A3 - 27A + 54$ qui numerus æqualis eſt priori 1c. + 9q : atque adeo eidem homogeneo comparationis erit æquale. Habemus ergo æqualitatem $A3 - 27A + 54 = 108$. ſeu $1c. - 27R. + 54 = 108$. & transferendo $+54$ per antitheſin erit æquatio $1c. - 27R. = 54$. quare ſi ſciretur methodus extrahendi radicem, quam inferiùs trademus, inveniretur radix 6 è cujus cubo 216. ſi ſubtrahantur 27R. ſeu 162. reſtabit 54. ea tamen radix non eſt ea quæ quærebatur, ſed eſt A. A autem -3 erat 1R. ergo $6 - 3$ ſeu 3. eſt una radix.

Proponatur alia æquatio cubi affecti mulctâ quadratorum ut $1c. - 12q. = 1024$. ſupponatur radix hujus æquationis eſſe 1R. à qua ſubtrahatur 4. triens coëfficientis. fietque $1R. - 4$ huic radici ſic imminutæ, ſit æqualis quantitas A, ita ut ſit æquatio $1R. - 4 = A$ & per antitheſin $1R. = A + 4$. fiat cubus hujus quantitatis $A + 4$ eritque $A3 + 12A2 + 48A + 64$. quadratum ejuſdem quantitatis $A + 4$ erit $A2 + 8A. + 16$. multiplicetur per coëfficientem 12. habebis $12A2 + 96A + 192$ ſubtrahe unum ab alio id ferente ſigno — æquationis, reſtabit $A3 - 48A - 128. = 1024$ & per antitheſin $A3 - 48A = 1152$. inventæ tamen radici addere debebis 4. ut habeas veram radicem, ſeu radicem primæ æquationis propoſitæ.

Tertiò proponatur $12q. - 1c. = 256$ aſſumatur 4. triens coëfficientis à quo auferatur radix, ſitque $4 - 1R.$ cui æquale ſit A, erit ergo æqualitas $4 - 1R. = A$. & $4 = A + 1R.$ & $4 - A = 1R.$ fiat quadratum hujus binomii $4 - A$. quod multiplicetur per 12 : fiat ejuſdem binomii cubus, quem ex 129. ſubtrahes ; reſiduum æquale erit $129. - 1c.$

$$129. \quad 192 - 96A + 12A2$$
$$\text{Cubus } 64 - 48A + 12A2 - A3.$$

$$\text{reſid. } 128 - 48A \qquad + A3.$$

Habemus ergo æquationem $A3. - 48A. + 128. = 256$. ſubtrahe 128 habebis æquationem $A3 - 48A = 128$. Extrahendo deinde radicem cubicam per praxes inferius ponendas, radicem inventam ſubtrahes ex 4. habebiſque primæ æquationis radicem cubicam.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Reductio cuborum ſimul affectorum ſub quadrato & ſub latere, ad cubos affectos tantum ſub latere.

Proponatur æquatio in quâ cubus afficiatur ſimul ſub quadrato, & ſub latere, verbi gratiâ $1c. + 27q. + 130R. = 376$. Supponatur radix quæ quæritur eſſe 1R., cui addatur triens primi coefficientis, ſeu 9 : fiet igitur $1R. + 9$. huic ſit æqualis quantitas quæcúmque A. eſt ergo æquatio $1R. + 9. = A$. & per antitheſin $1R. = A - 9$. Primò hujus binomii fiat cubus. qui habetur infra; huic adde 27. quadrata ejuſdem, &

Cubus	$A3. - 27A2$	$+ 243A$	$- 729.$
quadrata	$+ 27A2$	$- 486A$	$+ 2187.$
130 radices		$+ 130A$	$- 1170.$
	$A3.$	$- 113A$	$+ 288.$

radicem $A - 9$. multiplicatam per 130 : adde hæc omnia & habebis $A3 - 113A + 288$. Habemus ergo æquationem $A3 - 113A + 288 = 376$. & per antitheſin $A3 - 113A = 88$. ſeu $1c. - 113R. = 88$. cujus radix A erit 11, & ſubtrahendo 9. ex ea reſtabit prima radix propoſita 2. Expurgavimus ergo propoſitam æquationem affectione ſub quadrato.

Sit alia æquatio $1c. + 12q. - 38R. = 420$. adde uni Radici, 4. trientem coefficientis quadratorum 12. fiet $1R. + 4$, cui ſupponatur æqualis quantitas A. erit ergo æquatio $1R. = A - 4$.

cubus binomii	$A3 - 12A2. + 48A. - 64.$		
12 quadrata	$+ 12A2. - 96A. + 192.$		
Summa	$A3$	$- 48A. + 128.$	
Subtrahe 38R.		$+ 38A. - 152.$	
Reſid.	$A3 - 86A + 280$		

Addantur ſimul cubus binomii $A - 9$. & 12 quadrata, & ex ſumma ſubtrahe 38 radices. reſtabit $A3. - 86A + 280 = 428$. & per antitheſin $1c. - 86R. = 140$. è cujus radice 10. ſubtrahe 4. & habebis primam radicem 6.

Tertiò ſit æquatio $1c. - 30q. + 330R. = 1575$. cujus quidem radix eſt 15. ſed ſupponatur incognita ponatúrque 1R. & minuatur tertiâ parte coefficientis quadratorum ſitque $1R. - 10$. cui æqualis ponatur A, eritque æquatio $1R. - 10. = A$. & per antitheſin $1R. = A. + 10$. fiat cubus iſtius binomii $A. + 10$. à quo ſubtrahes 30 quadrata, & addes reſiduo 330 R. invenies $A3 + 30A. + 1300$.

Cubus binomii.	$A3. + 30A2. + 300A. + 1000.$	
Subtrahe 30 quadr.	$+ 30A2. + 600A. - 3000.$	
Erit reſiduum	$A3.$	$- 300A. - 2000.$
Adde 330 Radices		$+ 330A. + 3300.$
	$A3.$	$+ 30A. + 1300.$

Quare habemus æquationem $1c. + 30R. +$

 1300.

Digitized by Google

1300. = 1575. & per antitheſin 1c. + 30R = 275. cujus radix A erit 5. & additis 10. ſuperior radix erit 15.

Quartò proponatur æquatio 96R. — 27 q. — 1c. = 76. ſupponatur radix eſſe 1R. quæ augeatur numero 9. triente coefficientis quadratorum eritque 1R. + 9. huic ſupponatur æqualis quantitas A. eritque æqu. 1R. + 9. = A. & per antitheſin 1R. = A — 9.

96 Radices erunt		96 A. — 864.
27 quadr. ſubtrahe		27A2. — 486A. + 2187.
reſid.		— 27A2. + 582A. — 3051.
ſubtr. cubum		A3. — 27A2. + 243A. — 729.
reſid.	— A3.	+ 339A. — 2322.

Ex 96 Radicibus ſubtrahe 27. quadrata tum unum cubum, reſtabit æquatio 339A — A3 — 2322 = 76. & per antitheſin 339R. — 1c = 2398.

In aliis ſimilibus caſibus æquationes difficillimas ob multiplicitatem affectionum ad alias faciliores reduces, quod quidem operoſum eſſe fateor, habebitur tamen ſolutio problematis inſolubilis alioquin.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

De Radicibus ſecundis.

In regula Algebræ numerus quæſitus communiter ſupponitur 1R. vel plures hoc eſt ſuppoſitæ progreſſionis Geometricæ, primus numerus. Sæpè tamen accidit ut numeri diſparati ſupponendi ſint, quorum quilibet ſit radix in ſua progreſſione Geometrica. Quare ſi pro primo numero ſcribitur 1R. pro ſecundo itidem una radix eſſet ſcribenda, intelligendo tamen radicem alterius progreſſionis Geometricæ, ne verò inter operando ſit confuſio, has ſecundas radices diverſas à primùm poſita ſolemus notare aliquibus litteris ut A, B, D, E, &c. ſcribentes 1A. 1B. 1D. 1E. in ſpecioſa quidem hujuſmodi radices incognitas notamus vocalibus A, E, I, O, V, Y.

Numeratio & algorithmus hujuſmodi radicum facilè intelligetur. ſi enim ita ſcribamus 1A, 1B, 1D. indicamus unam radicem diverſam ab ea, quam primò poſuimus.

2. Quando duos Alphabeti characteres, ſine ullis ſignis conjunctos ponimus, ſignificamus multiplicationem, ut A B ſignificat planum comprehenſum ſub A & B.

	R.	q.	c.	qq.	S.	qc.
R	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.
A	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.
B	1.	4.	16.	64.	256.	1024.	4096.
D	1.	5.	25.	125.	625.	3125.	15625.

Supponantur quatuor progreſſiones Geometricæ, quarum prima ſit ea, è qua primum poſita radix aſſumpta eſt 1 quare in illa ſuppoſitione quoties radicem nominabimus, ſumus intellecturi binarium; pro A intelligatur radix ſecundæ progreſſionis & ſignificet 3.

Pariter B ſignificabit radicem tertiæ progreſſionis nempè 4. & D indicabit 5. ſi ſcribam 3AB, intelligam tres radices A ſeu 9. multiplicatas per radicem B ſeu per 4. atque adeò 36. pariter BD ſignificat 4 in 5 ſeu 20. & ita in cæteris.

Secundò poſſunt addi notæ quadrati cubi, qqti, ut Bq. ſignificaret 16. melius tamen notari poſſunt B2. D3. ſeu B quadratum, D cubus.

Algorithmus ſecundarum facilè ex Algorithmo primarum intelligetur.

Additio ſecundarum radicum ejuſdem rationis, fit per additionem ſimplicem numerorum retento eodem charactere, ſic 3A & 7A. efficiunt 10A, ex 5B & 3B fiunt 8B.

Additio ſecundarum radicum diverſæ denominationis perficitur per ſignum + ut 4R. & 3A. ita adduntur 4R. + 3A.

Idem dicendum de ſubtractione, quæ communis eſt, ſi ſint quantitates ejuſdem denominationis obſervatis tamen ſignis + & —. Si quantitates fuerint diverſæ denominationis perficitur ſubtractio ope ſigni —.

Multiplicatio has habet regulas, ſi numerus radicis primæ, per numerum radicis ſecundæ fuerit multiplicandus, ut 3R per 4A. numeri inter ſe multiplicentur, fientque 12. ſcribatúrque 12R A. hoc eſt 12 radices multiplicandas eſſe per unum A: ſit enim radix 2. & conſequenter 3R. ſignificent 6. ſit unum A idem quod 3. & 4A ſint 12. quare 3R. in 4A. ſignificat 72. Sed multiplicando 3R. per 4A fiunt 12R A, hoc eſt 24 multiplicanda per 3. Quare ſive ipſi numeri abſoluti multiplicentur, ſive coſſici idem virtualiter numerus proveniet.

Secundò ſi numerus ſecundæ radicis per abſolutum fuerit multiplicandus, ducantur interſe numeri, idemque character coſſicus remaneat, ſint 4A, multiplicanda per 5 fient 20 A.

Tertiò Quandò numerus coſſicus ex prima radice ortus, multiplicatur per numerum ex ſecunda radice ortum, multiplicentur inter ſe numeri, quia tamen diſparatè ſe habent, uterque coſſicus character apponatur ut 3C. per 4 Aq. ſeu A2. fiet 12cA2. eſt autem ſenſus 12 cubos multiplicandos per A2.

Quartò ſi numerus compoſitus ex numero primæ, & ſecundæ radicis, multiplicetur per numerum, ſecundæ radicis, augeri debet character coſſicus ſecundæ radicis, ut 4R A multiplicandus ſit per radicem A. fiet productus 4R A2.

Quando vero ſecunda radix multiplicat numerum ortum ex ſecunda radice, obſervari debent regulæ multiplicationis coſſicorum; ita ſi A multiplicet A fit Aq. ſi A multiplicet A cubum fit A4. ſeu A qqtum.

Idem dicendum de diviſione, ſed de his ſufficienter diximus cum de ſpecioſa numeratione, in qua ſæpè diverſæ adſciſcuntur radices.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Numeratio irrationalium.

Numeri ſurdi, ſi tamen numeri ſunt dicendi, ſunt radices numerorum, qui non ſunt veri ſui generis figurati. Radix verbi gratia quadrata numeri non quadrati. Radix cubica numeri qui cubus

Digitized by Google

bus non eſt, & ita de reliquis: ſic radix quadrata numeri 20. eſt radix ſurda, ſeu irrationalis. Dicitur ſurda, quod audiri, numeriſque exprimi non poſſit. Proponatur quadratum verum, & reale, cujus area æqualis ſit 20 pedibus quadratis, verè datur, & Geometricè exhibetur linea quæ ſit latus, ſeu radix illius quadrati; ejus tamen longitudo numeris exprimi non poterit, manendo in ea ſuppoſitione pedum. Cum enim locuti ſimus de 20 pedibus, linea rationalis expoſita, cenſetur eſſe longa uno pede; quare quamdiu loquemur de numeris in hâc determinatione, de partibus aliquotis, unius pedis intelligendum erit. Cum ergo nullæ partes aliquotæ unius pedis poſſint hanc lineam exquiſitè repræſentare, utpote lineæ unius pedis incommenſurabilem, ideo hæc longitudo numeris non exprimetur ſi ſtrictè loquamur. An verò debeat dici numerus, vel non dici, eſt quæſtio de nomine: & nullius momenti.

Cum certum ſit hujuſmodi lineas, nec eſſe numeros integros, nec fractos, quia tamen aliquis numerus poteſt lineam exprimere, ita parum ab his lateribus ſurdis differentem, ut exceſſus unius ſupra aliam ſit quantum libuerit parvus; inſuper numeris addi, aut ſubtrahi, multiplicari, item & dividi poſſint, hæ quantitates, inter numeros recenſeri poterunt. Si quis tamen ſtrictè loqui velit, quantitates voces irrationales, radices ſurdas, numeros ſi velit irrationales, ſeu numeros non numeros, parum intererit modò quantitates hujuſmodi intelligamus.

Radices hujuſmodi multipliciter intelligi, & exprimi poſſunt; primò ſolitariè ut cum dicitur ℞ q 20. nempè Radix quadrata numeri 20. ℞ c. 30. radix cubica numeri 30. ℞qq 70. Radix quadrato quadrata numeri 70.

Aliquando tales radices ſurdæ exhibentur ut conjunctæ cum aliis numeris, ſive ejuſdem rationis ſive diverſæ, & hoc mediantibus ſignis + & —. ut ℞q9. + ℞ q4. ſignificat numerum 5. hoc eſt ternarium + binario. ℞q 7. — 2. Radix quadrata numeri 7. minus binario. ℞c. 100. — ℞q9. ſignificamus ex radice cubica 100. ſubtrahendas eſſe tres unitates.

Aliæ radices vocantur univerſales, quas nonnulli ligatas vocant: ſunque radices totius alicujus numeri coſſici compoſiti. ut ℞q.(12 + Rq9.) Radix quadrata numeri 12 + 3. hoc eſt numeri 25. ſeu 5. ℞q (11 + ℞q 12.) Radix quadrata numeri 11 aucti radice quadrata numeri 12.

℞q (12. + ℞q 25.) + ℞q (9. + ℞q 4) duas intelligimus radices, primam radicem quadratam numeri 12. aucti radice quadrata numeri 25. ſeu 5. & radicem quadratam, compoſiti ex radice quadrata numeri 9. & ex radice quadrata numeri 4. ſeu radicem quadratam numeri 5. In quo vides cur dicantur radices univerſales, nempè quòd cadant in numerum aliquem compoſitum integrum: dicuntur ligatæ, quod numerus cujus ſunt radices claudatur & ligetur intra parentheſin.

Notandum item non tantùm radices ſurdas, exprimi hoc modo, ſed ſæpè etiam rationales, ſeu radices numerorum verè ſui generis figuratorum ut ℞q 9. Radix quadrata numeri 9. quæ eſt 3.

Ortus hujuſmodi radicum procedit ex regulis Algebricis; cum enim ſæpè imperetur extractio radicis, ex numero non propriè figurato, ſui generis, cogimur has quantitates, non in ſeipſis indicare, cum ita exprimi non poſſint, ſed indicare per earum poteſtates, ut Radicem quadratam per ſuum quadratum.

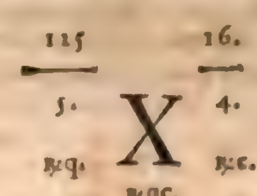
Differunt autem hæ radices ab iis quæ in progreſſione Geometrica conſiderantur; quòd iſtæ ut plurimum ſint irrationales, & ſurdæ, ſecundò quod exprimantur per numerum cujus ſunt radices, cum aliæ per ſeipſas adhibeantur.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Reductio Radicum ſimplicium ad eamdem denominationem.

Quamdiu radices ſunt diverſæ denominationis in unam ſummam colligi non poſſunt, niſi per ſignum +, nec ſubtrahi ab invicem, niſi per ſignum — eo modo quo numeri coſſici diverſæ denominationis. Si tamen ad eamdem denominationem revocentur, poterunt alia ratione ſimul addi, aut ab invicem ſubtrahi. Hæc reductio, non abſimilis eſt reductioni fractionum: priùs tamen notandum eſt, in qualibet progreſſione Geometrica, radicem eamdem comparatam cum quadrato dici radicem quadratam, cum cubo cubicam, cum quadratoquadrato quadratoquadratam: ut binarius eſt radix quadrata numeri 4. cubica numeri 8. quadrato quadrata numeri 16. ſurdeſolida numeri 32. quadrato cubica numeri 64. idem igitur numerus indicatur ſive dicatur ℞q 4. ſive Rc. 8. quibus poſitis.



Proponantur duæ radices diverſarum denominationum ℞q 5. ℞c. 4. ſcribantur eo ordine quo vides in figura: & primò numerus 5. cubicè multiplicetur propter ſignum ℞c. cui decuſſatim reſpondet: habebiſque productum 125. numerus 4. quadratè multiplicetur propter ſignum ℞q. cui reſpondet decuſſatim, fietque 16 ſcribendus. Habebis ergo duos numeros Rqc. 125. Rqc 16. quibus nempè præfigendus eſt numerus ex utraque denominatione conſtans.

Demonſtratio. Numerus 5. eſt quadratum radicis 5. quod cum ſeipſum cubicè multiplicet, orietur cubo quadratum, ut oſtendimus in generatione numerorum progreſſionis Geometricæ. Pariter cum numerus 4. ſupponatur eſſe cubus propoſitæ radicis, & ſeipſum quadratè multiplicet, orietur cuboquadratum, & cum in qualibet ſerie eadem ſit radix omnium poteſtatum, idem numerus indicabitur per Rqc. 125. qui ſignificabatur per radicem quadratam 5. ergo habemus eoſdem numeros ſub aliâ denominatione communi.

Secundò numerus abſolutus comparetur cum radice ad cujus denominationem revocari debeat, verbi gratiâ 6. & ℞qq. 12. multiplicetur numerus 6. quadratoquadratè hoc eſt fiat numeri 6. quadratoquadratum nempè 1296. dico numerum 6. ſignificari poſſe per ℞qq 1296. ergo numerus 6. revocatus eſt ad denominationem radicis.

Poſſunt item radicis ad eamdem denominationem

nem

Digitized by Google

nem reduci per extractionem radicis cubicæ, aut quadratæ quando extrahi poſſunt. ut ℞qq 25. & ℞c. 27. Extrahatur radix quadrata numeri 25. habebis 5. pro radice quæ tamen ſupponitur eſſe quadrata; quare ℞q. 5. eumdem numerum ſignificat ac ℞qq 25: pariter numeri 27. extrahatur radix cubica habebis 3. qui numerus per ſeipſum multiplicatus efficit 9. & conſequenter idem numerus ſignificatur per ℞q. 9. qui indicabatur per ℞c. 27. habemus ergo ℞q 5. & ℞q 9. eumdem numerum indicantes qui per propoſitas ſignificabatur.

Facillimè item reduci poſſunt duæ radices ſimplices ad eamdem denominationem mutando unius tantum characterem: ut ſi proponantur ℞qc. 6. & Rc. 2. multiplica numerum 2. quadratè fiet ℞qc. 4. ſupponebatur enim 2. eſſe cubus.

Pariter ſi proponantur hæ duæ radices ſimplices ℞qc. 8. ℞q 9. multiplica 9 cubicè. fient 729. habebis igitur ℞qc. 8. & ℞qc. 729.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Si Radices ejuſdem generis in ſe invicem ducta numerum producant, hic erit radix producti multiplicatione poteſtatum earum radicum.

Sint radices A & B, quæ multiplicatæ produxerint numerum C, ſintque harum radicum quadrata D & E, quæ multiplicata producant numerum F. dico numerum F eſſe quadratum radicis C, ſeu productum ex D in E, æquale eſſe quadrato numeri C.

	C		F	G.	
	6		36	216.	
2	3	4	9	8	27.
A	B	D	E	H	K.

Cum enim D & E ſint quadrata numerorum A, ex B; erit D ad E in duplicata ratione A ad B, (*per* 2.12.) ſed cum A multiplicando ſeipſum faciat D & multiplicando B faciat C, erit ut A ad B, ita D ad C; ergo ratio D ad E eſt duplicata rationis D ad C; & conſequenter C erit medium proportionale inter D & E; ergo (*per* 17.6.) quadratum medii C, æquabitur producto ex D in E, ſeu numero F. Quod erat demonſtrandum.

Sint item cubi H & K, qui ſe invicem multiplicent, faciantque G, dico G eſſe cubum radicis C.

Demonſtr. Cum enim A multiplicans B faciat C & multiplicans D faciat H, erit ut B ad D, ita C ad H. Pariter cum E multiplicans radicem B, faciat K, & multiplicans D faciat F, erit ut B ad D, ita K ad F. Quare ita erit C ad H, ſicut K ad F, & (*per* 16.6.) productum ex multiplicatione mediorum H & K, ſeu G, æquabitur producto ex C in F, hoc eſt producto radicis in quadratum ſuum, ſeu cubo radicis C.

Ex hoc habebimus methodum multiplicandi radices, licèt cognoſcamus tantum earum poteſtates, nam multiplicando poteſtates, generabitur poteſtas radicis productæ, ex multiplicatione radicum. Quod propoſitione ſequenti explicamus.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Multiplicatio, & diviſio radicum ſurdarum.

Proponantur duæ radices, multiplicandæ ad invicem ſintque ejuſdem denominationis; ſi enim non fuerint ejuſdem denominationis, ad eamdem denominationem primò reducantur; ſint ergo ℞q 7. & ℞q 10. quæ in ſe ducendæ ſunt, earum poteſtates, ſeu quadrata 7 & 10. in ſe ducantur, habebitur numerus 70. qui, per præcedentem, eſt quadratum radicis, quæ fieret ex ductu ℞q 7. in ℞q 10. quare ℞q 70. eſt illa quæ quæritur. ℞c. 24. multiplicata per ℞c. 10. producit ℞c. 240.

Idem dicendum de diviſione, ſi poteſtatem per poteſtatem dividas, proveniet poteſtas quotientis, qui oriretur ſi radicem per radicem divideres; quare, ſi quotienti invento præponas ſignum radicale, ut ſi ℞q. 36. dividenda ſit, per radicem quadratam 12. divide quadratum 36. per quadratum 12. habebis pro quotiente 3. quadratum ſcilicèt radicis quæſitæ: ergo habebis ℞q 3. quæ erit quotiens talis diviſionis.

Quando Radix quadrata multiplicanda eſt per ſeipſam delendum eſt ſignum radicale. ut ſi ℞q. 5. ſit multiplicanda per ſeipſam, ſcribatur 5. ratio clara eſt, quia radix multiplicando ſeipſam producit ſuum quadratum, ſed quadratum ejus eſt 5. Poſſet quidem ex regula communi multiplicari quadratum 5. per ſeipſum, ita ut producatur ℞q. 25. ſed primum facilius eſt.

Idem dicendum eſt ſi Radix cubica cubicè, eſſet multiplicanda, ſufficeret delere ſignum radicale, & exhibere ejus cubum, quia nempè radix cubicè multiplicata generat cubum.

Radix quadrata cubicè multiplicata generat radicem quadratam cubi ſui quadrati, ut ſi ℞q. 4. multiplicanda ſit cubicè: multiplicetur ejus quadratum 4. cubicè fiet 64. cui præponendum eſt idem ſignum radicale, ita ut fiat ℞q. 64. ratio eſt quia (*per propoſitionem præcedentem*) multiplicatio poteſtatis idem efficit, ac multiplicatio ipſius radicis.

Si Radix ſurda multiplicanda ſit per numerum abſolutum; multiplicari debet per poteſtatem numeri abſoluti. ut ſi ℞q. 8. multiplicare debeas per 2. ejus quadratum 8. multiplicari debet per quadratum numeri 2. id eſt per 4. ut fiat ℞q 32. Ratio eſt, quia numerus 2. idem eſt ac ℞q 4. Sed ſi proponeretur ℞q 8. multiplicanda per ℞q 4. multiplicandum eſſet quadratum 8. per quadratum 4. ſecundùm regulam præcedentem) ergo etiam dum proponitur ℞q 8. multiplicanda per 2. debet 8. multiplicari per 4. Ratio ulterior eſt quod ut duplicetur ℞q 8. non ſufficit ut ejus quadratum 8. ſit duplum, ſed debet fieri quadruplum, quia quadrata in duplicata ſunt ratione laterum, ſeu radicum.

℞c. 8. multiplicanda ſit per 3. debet cubus 8. multiplicari per 27. ſeu per cubum numeri 3. ita ut fiat cubus 216. cui præponi debet ſignum radicale ℞c. 216. Nam habetur cubus radicis cubicæ quæ oritur ex multiplicatione 2. per 3. ſi cubus primæ per cubum ſecundæ multiplicetur; & de facto cubus 216. eſt cubus radicis 6. quæſitæ; poſui autem exemplum in radicibus non ſurdis, ut clarior evaderet tota praxis.

Si

Si darentur plures Radices ſurdæ æquales, facilè earum ſummam exhibemus: ut ſi ſint tres ℞q 7. multiplica 7. per quadratum numeri 3. ſeu per 9. habebiſque ℞q 63 illis æquivalentem, quia nempe multiplicatio idem præſtat ac additio, eſtque additio virtualis.

Id omne quod de multiplicatione dicimus, de diviſione intelligendum eſt. Si enim radicem quadratam, per numerum abſolutum dividere volueris ejus quadratum, per quadratum numeri abſoluti divide.

Ex hac doctrina multiplicationis, & diviſionis facilè inveniemus an duæ radices ſurdæ, ſint inter ſe commenſurabiles: quamvis enim ſint irrationales hoc eſt incommenſurabiles, cum unitate, poſſunt tamen eſſe inter ſe commenſurabiles: ita enim duæ Radices ſurdæ æquales ſunt commenſurabiles, licèt ambæ ſint incommenſurabiles unitati.

Notandum autem quoties numerum per alium dividimus, quotientem exhibere rationem diviſi ad diviſorem, quam enim rationem habet quotiens ad unitatem, eamdem habet dividendus ad diviſorem; ut ſi dividas 12. per 4. quotiens 3. oſtendet ita eſſe 12 ad 4. ſicut 3 ad 1.

Notandum ſecundò in diviſione radicis per radicem, non propriè dividi radicem per radicem ſed poteſtatem per poteſtatem, ut quadratum per quadratum, atque adeò quotientem nempe quadratum oſtendere rationem quam habent poteſtates inter ſe, non autem radices. Divide ℞q 36. per ℞q 4. habebis ℞q 9. dico quotientem 9. non oſtendere rationem quam habet ℞q 36. ad ℞q 4. ſed quam rationem habeat quadratum 36. ad quadratum 4. ſcilicèt ut 9 ad 1. Radices autem ſunt in ſubduplicata ratione: quare ſi agatur de radicibus ſumenda erit media proportionalis inter 9. & 1. Certum eſt autem quod radix eſt media proportionalis inter unitatem & quadratum, ut oſtendimus in progreſſionibus Geometricis: quare ſi diviſâ unâ radice, per aliam quotiens habuerit veram radicem, radices ſurdæ commenſurabiles erunt. Proponatur ℞q 12 dividenda per ℞q 3. diviſo quadrato 12. per quadratum 3. quotiens eſt ℞q 4. numerus autem 4. habet veram radicem 2. igitur ℞q 12. ad ℞q 3. ſe habet ut 2 ad 1.

Si ex diviſione orietur numerus carens propria radice, erunt radices incommenſurabiles, ut ſi ℞q. 24. dividatur per ℞q 3. orietur ℞q 8. qui numerus 8. cum radice quadrata careat, dicendæ ſunt ℞q 24. & ℞q 3 incommenſurabiles. At ℞q 24. & ℞q 6. ſunt commenſurabiles, quia diviſione factâ oritur ℞q 4. ſignificans 2. cujus 4 eſt numerus quadratus. Idem dicendum eſt de cubis: ſi enim diviſâ radice cubicâ, per aliam oriatur numerus non cubus incommenſurabiles erunt radices cubicæ.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Additio radicum ſimplicium.

Proponantur primò plures Radices æquales, & ejuſdem ſpeciei hæ per multiplicationem ſimul addentur ut ſi quatuor ℞q 6. addendæ ſint quadratum multiplicetur per 16. quadratum ſcilicèt 4 habebis ℞q 96.

2. Si radices fuerint diverſæ denominationis, priùs quam ſimul addi poſſint debent ad eandem denominationem revocari.

3. Si ſint ejuſdem denominationis & inæquales, experiendum erit, an ſint inter ſe incommenſurabiles: nam ſi fuerint tales addentur per ſignum +, & ſubtrahentur ad invicem per ſignum —, exceptis tamen radicibus quadratis, quæ etiam adduntur alio modo, quamvis ſint inmenſurabiles, ut dicemus infrà.

4. Quando Radices invenientur commenſurabiles ita agendum erit. Proponantur duæ radices ℞q 12. & ℞q. 3 quæ ſunt commenſurabiles, nam diviſione facta, invenitur quotiens ℞q 4. cujus radix 2: ſe habet ergo, prima ad ſecundam, ut 2 ad 1. ergo componendo, prima ad aggregatū ſe habet ut 2 ad 3. fiat ergo ut ad 3. ita ℞q 12. ad quartum ſcilicet multplica Rq. 12 per 3. hoc eſt quadratum 12. per q 9. proveniet ℞q 108. quam divides per 2. hoc eſt quadratum 108. per quadratum 4. habebiſque ℞q 27.

Demonſtratio eſt clara; cum enim radix quotientis oſtendat rationem unius ad aliam componendo habebitur ratio majoris ad aggregatum; & per regulam proportionum ipſum aggregatum.

Proponantur item duæ radices ℞q 18. & ℞q 8. una dividatur per aliam, quotiens erit ℞q $2\frac{1}{4}$ extrahatur radix quadrata, hæc erit $1\frac{1}{2}$. ſeu $\frac{3}{2}$. eſt ergo una fractio ad aliam ſicut 3 ad 2. hoc eſt ut 3. ad unitatem diviſam in duas medietates; nam in fractionibus ſemper denominator pro unitate ſupponit. Ergo componendo ita erit ſumma radicum ad minorem ℞q 8. ut 5 ad 2. & ut 5 ad 1. ita eadem ſumma ad medietatem Radicis quadratæ 8 ut autem habeatur ejus medietas, dividi debet per 4. fietque ℞q 2. Eſt ergo ſumma radicum quintupla & ℞q 2 multiplicetur ergo per 25. quadratum numeri 5. & habebis ſummam eſſe ℞q 50.

Poteſt aliis modis haberi; cum enim ℞q 18. ad ℞q 8. ſe habeat ut 3 ad 2. erit componendo ut prima ad ſummam, ita 3. ad 5. fiat ergo ut 3 ad 5. ita ℞q 18. ad quartum hoc eſt ut 9 ad 25. ita 18. multiplica ergo 25. per 18. fiet 450. divide per 9. habebis 50. eſt ergo ſumma ℞q 50. facilius tamen id præſtabis per minorem, ne numeri, ita augeantur.

Poſſunt alia ratione addi radices commenſurabiles. Sit ℞q 147. & ℞q 12. cum ſint commenſurabiles maximam habebunt menſuram: ſit maxima eorum numerorum menſura ℞q 3, per quam uterque numerus dividatur, fietque 4. & 49. quorum radices 2. & 7. fiat eorum ſumma ſi additio inſtituitur fietque 9 ſeu ℞q 81. hæc multiplicetur per ℞q 3. communem menſuram, fietque 243. Habebimus ergo pro ſumma ℞q 243.

Ratio hujus praxis eſt; quod cum duæ radices dividuntur per communem diviſorem ſinguli quotientes ad unitatem eamdem rationem habent, ac ſingulæ radices ad diviſorem: ergo componendo ſumma radicum ad diviſorem, eandem rationem habet, ac ſumma quotientum ad unitatem. Quare quotientes ſeu radices quotientum, quæ ſunt propriè loquendo quotientes, adduntur ſimul, & exprimuntur per ſuum quadratum, quia operamur in poteſtatibus; deinde fit regula trium ut 1. ad quotientes, ita diviſor 3. ad ſummam: quare ſufficiet multiplicare per communem diviſorem 3. cum unitas nihil immutet.

Proponantur item tres ℞q 8. ℞q 50. ℞q 72 communis diviſor eſto 2. per quem diviſæ exhibent

Digitized by Google

bent ℞q 4. ℞q 25. ℞q 36. radices horum ſunt 2. 5. 6. quæ junctæ efficiunt 13. hujus quadratum erit 169. habemus ergo ℞q 169. quæ ſi multiplicetur per ℞q 2. habebimus ℞q 338.

Denique ſi accidat, ut dividi tantum poſſint duæ radices, per communem diviſorem, hoc eſt tertia radix non ſit commenſurabilis cum aliis, duæ commenſurabiles ſimul addantur; tertia addetur per ſignum +.

Quæ hactenus diximus tam conveniunt cubicis & aliis radicibus, quàm quadratis.

Radices tamen quadratæ etiam incommenſurabiles aliquo modo adduntur: hoc eſt exhibetur aliquis numerus verus cui additur pars aliqua irrationalis. Sint propoſitæ hæ radices ℞q11 ℞q6. addendæ; fiat ſumma quadratorum, habebiturque ſumma 17; multiplicentur item inter ſe numeri 11 & 6. fiet productus 66, cujus ℞q. ſeu ℞q. 66. duplicetur more radicum, hoc eſt multiplicetur per 4. fiet ℞q 264. eſt ergo ſumma harum radicum ℞q 254. eſt ergo ſumma harum radicum ℞q (17. + Rq 264.)

Demonſtratio petitur ex 4. 2. *Eucl.* nempe ſi linea ſecta ſit utcumque; erit quadratum totius æquale quadratis ſegmentorum + rectangulo bis comprehenſo ſub ſegmentis. Si ergo ſupponatur linea compoſita ex ℞q 11. & ℞q 6. illius quadratum erit æquale quadratis ſegmentorum nempe 11 & 6. ſeu 17. & rectangulo bis ſub ſegmentis, multiplicatæ autem Radices efficiunt ℞q 66. & hæc radix duplicata efficit ℞q 264. ergo quadratum 17. + ℞q. 164. erit quadratum totius lineæ ex ℞q. 11, & ex ℞q.6. compoſitæ; quare tota linea ſeu ſumma radicum, erit ℞q. (17 + ℞q.264.)

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Subtractio radicum ſurdarum ſimplicium.

Eâdem ferè methodo perficitur ſubtractio radicum, quâ additio abſolvitur: primò ſi radices fuerint incommenſurabiles, hoc eſt ſi dividendo majorem per minorem quotiens fuerit irrationalis, abſolvetur ſubtractio per ſignum —; radix tamen quadrata etiam incommenſurabilis ita ſubtrahetur.

Sit ℞q 12. ſubtrahenda ex ℞q 20. earum quadrata ſunt 12 & 20. quorum ſumma 32. rectangulum comprehenſum ſub radicibus eſt ℞q 240. ſed bis comprehenſum erit productum per 4. nempe ℞q 960. hoc ſubtrahatur ex ſumma quadratorum 32. quod fieri non poteſt niſi ſigno — hoc modo Rq (32 — Rq 960.)

Demonſtratio hujus praxis petitur (*ex* 7. 2. *Eucl.*) ſi enim ℞q 20. intelligatur ſecari una pars ſit ℞q 12, erit quadratum totius ſeu 20 + quadrato unius ſegmenti ſeu 12. æquale rectangulo bis comprehenſo ſub totâ, ſeu ℞q 20. & dicto ſegmento ℞q 12. + quadrato alterius ſegmenti; ergo ſi ex aggregato quadratorum auferatur rectangulum bis comprehenſum ſub tota linea, & uno ſegmento, reſtabit quadratum alterius ſegmenti, eſt ergo aliud ſegmentum ℞q (32 — Rq 960.)

Hæc methodus etiam uſurpari poteſt quando radices quadratæ ſunt commenſurabiles, atque adeò ſecundùm hanc praxin non erit opus dividere unam fractionem per aliam. Sed redeamus ad praxin generalem; quando fractiones ſunt commenſurabiles, major per minorem dividatur: tum quotienti ſi fuerit integer, ſupponatur unitas ut ex eo fiat fractio; aufer denominatorem, ſeu unitatem à numeratore: erit ut unitas ad hoc reliquum, ita radix minor ad reliquum quod quæritur; quare ſola multiplicatione opus erit. Si quotiens non habeat unitatem pro denominatore, erit unitas ad quotientem — ſuo denominatore, ut radix minor per prædictum denominatorem diviſa, ad majorem — minori.

Sit ſubtrahenda ℞q 8. ex ℞q 50. fiat diviſio majoris per minorem, quotiens erit ℞q $6\frac{1}{4}$. ſeu $\frac{25}{4}$ cujus radix quadrata $\frac{5}{2}$. ſubtrahe denominatorem 2. ex numeratore 5. relinquitur 3. fiat ut 1 ad 3. ita dimidia radix minor, ſeu ℞q2 ad reliquum: multiplica igitur ℞q 2 per 3. ſeu per ejus quadratum 9, & habebis ℞q 18.

Demonſtratio erit quòd diviſâ majore radice per minorem, erit ut major radix ad minorem, ita quotiens ad unitatem, quæ unitas in fractionibus eſt ſemper denominator, ergo in noſtro caſu in quo quotiens eſt $\frac{5}{2}$. erit ut major radix ad minorem, ita 5 ad 2, & dividendo, ſubtrahendo minorem ex majori, ita erit minor ad reliquum ut 2. ad 3. & dimidium minoris ad reliquum ut 1 ad 3. quare dimidium minoris ℞q 2. erit multiplicandum per 3. ſeu per 9. fietque ℞q 18. Totum igitur artificium hujus ſubtractionis conſiſtit in inventione quotientis, qui eo modo ſe habet ad unitatem, quo major radix ad minorem.

Quare variis modis inveſtigari poteſt radix quæ relinquitur. Ut ſubtrahenda ſit radix qq 3888, ex radice qq 19683. fit quotiens rationalis ℞qq $\frac{81}{16}$. cujus radix $\frac{3}{2}$. auferatur unitas ex fractione ſeu denominator ex numeratore, remanebit $\frac{1}{2}$. cujus ſi fiat qq præfigaturque ſigno Rqq. habebitur Rqq $\frac{1}{16}$. hæc multiplicata per ℞qq 3888. facit Rqq 243. Nam factâ diviſione, ita eſt major radix, ad minorem ut quotiens ad unitatem, & ſubtractâ unitate, ita eſt unitas ad reliquum, ſicut minor radix ad reſiduum.

Poteſt denique fieri ſubtractio hoc modo. Dividatur utraque radix per communem diviſorem, fient duo quotientes, quorum minorem ex majori ſubtrahes, & reliquum multiplicabis per communem illum diviſorem. Sit ſubtrahenda ℞q 27. ex ℞q 75. dividatur utraque radix per ℞q 3. fient quotientes ℞q 9. & ℞q 25. ſeu 3. & 5. unam ab alia ſubtrahe reſtabit 2. ſeu ℞q. quam multiplicabis per communem illum diviſorem fietque ℞q 12.

Demonſtratio erit quod factâ diviſione per communem diviſorem, quotientes eamdem rationem habeant ac radices diviſæ; ergo ſubtracto uno quotiente ab alio, id quod relinquitur eamdem rationem habebit ad quotientes, quam reſiduum radicum ad radices. Sed ſi hæc reſidua radix divideretur per communem diviſorem, hunc reſiduum quotientem faceret; ergo hic reſiduus quotiens multiplicatus per communem diviſorem, hanc reſiduam radicem producit: multiplicatio enim reſtituit id quod diviſio deſtruxerat.

PROPO

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Additio numerorum irrationalium compoſitorum.

Voco numeros irrationales compoſitos, in quibus, aut irrationales conjunguntur cum aliis irrationalibus, aut cum aliis quibuſcumque, per ſigna + aut —. Revocandæ autem ſunt regulæ ſignorum + & — nempè eadem ſigna, idem ſignum ſervare, niſi in ſubtractione præpoſtera, diverſa ſigna mutare ſpeciem operationis, & in additione quidem retineri ſignum majoris numeri, in ſubtractione verò retineri ſignum ſuperioris, à quo ſcilicet facta eſt ſubtractio, quæ omnia in primo libro explicata ſupponuntur.

A. 6 + ℞q 18.
B. 10 + ℞q 8.
———————
C. 16 + ℞q 8.

Proponantur numeri compoſiti A & B ſimul addendi; ſcribantur ita ut membra ejuſdem ſpeciei ſibi reſpondeant. Quia autem primum membrum conſtat numeris abſolutis fiet additio communis.

In ſecundo membro conſtante numeris irrationalibus ſeu ℞q fiat additio propria radicum. Nempè dividatur major radix per minorem, erit quotiens ℞q 2. $\frac{1}{4}$. ſeu ℞q $\frac{9}{4}$. quæ eſt $\frac{1}{2}$. adde ſimul 3. & 2. fiunt 5. ℞q. 25. qui numerus ſi multiplicetur per mediam partem minoris fractionis ſeu per ℞q 2. fit ℞q 50.

℞q 50 — 3.
℞q 32 + 5.
———————
℞q 172 + 2.

In ſecundo exemplo pro primo membro fit additio radicum ut ſuperiores regulæ jubent. In ſecundo membro quia ſunt ſigna diverſa mutatur operatio, hoc eſt vice additionis fit ſubtractio.

℞q 5 + 7.
℞q 6 — 2.
———————
℞q (11 + Rq. 120) + 5.

Neque aliud occurrit notandum circa additionem, niſi quod ſi numeri ſurdi ſint, ſeu incommenſurabiles; ſæpè fit radix univerſalis, ſeu ligata: ut in hoc ultimo exemplo, quia ℞q. 5. & q℞. 6. ſunt incommenſurabiles; recurrendum eſt ad praxin peculiarem radicum quadratarum.

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Subtractio numerorum irrationalium compoſitorum.

Subtractio numerorum irrationalium compoſitorum difficultatem peculiarem non continet: neque enim numeri irrationales, niſi ex numeris irrationalibus ejuſdem denominationis ſubtrahuntur, atque adeo ſingulorum membrorum ſubtractio perficitur eodem modo, quo ſubtrahuntur numeri irrationales ſimplices. Revocandæ ſunt regulæ ſubtractionis circa ſigna + & —.

PROPOSITIO XXIX.

Problema.

Numerorum irrationalium compoſitorum multiplicatio.

Revocandæ ſunt regulæ communes multiplicationis Coſſicorum, præcipuè verò duæ, nempè eadem ſigna ponunt ſignum, + diverſa ſigna reponunt ſignum —. Revocandum item eſt, multiplicationem radicum per abſolutos, inſtitui debere per poteſtates abſolutorum.

Tertiò, quoties occurrit numerus habens præciſam radicem, licitum eſſe ponere eam radicem ut ſi occurrat ℞q 25. licèt pro ea ſcribere 5. pro ℞c. 8. licèt ſcribere 2.

A. 6 — ℞q 20.
B. 8 — ℞q 45.
———————
C. 48. Rq. 1280 — ℞q. 1620 + ℞q. 900.
D. 48. — ℞q. 1280 — ℞q. 1620 + 30.

Proponatur numerus A multiplicandus, per numerum B. multiplico — ℞q 45. per — ℞q 20. producitur + ℞q 900. ſeu 30.

Secundò multiplico — ℞q 45. per + 6. ſeu + 36. fit — ℞q 1620. Tertiò multiplico + 8. ſeu + 64. per — ℞q 20. fit — ℞q 1280. Denique multiplicando 8. per 6. fit 48. Quare productus erit C. vel extrahendo radicem ex ultimo membro, fiet productus D. poſſet tentari additio numerorum — ℞q 1280. & — ℞q 1620.

E. ℞qq 288 — ℞qq 648.
F. ℞qq 128 — ℞qq 162.
———————
G. ℞qq 36864 — ℞qq 82944 — ℞qq 46656 + ℞qq 104976
H. ℞q 192 — ℞q 288 — ℞q 216 + 18.

Proponatur numerus E, multiplicandus per numerum F fiet numerus G: ſed ſi extrahantur radices quadratæ ut ad minores numeros revocentur; fiet numerus H. Nam ex ultimo membro numeri G extrahitur radix quadratoquadrata, ex aliis tantùm quadrata, cum quadratoquadrat4 careant.

Si Radices multiplicandæ diverſæ fuerint denominationis ad eamdem priùs revocentur.

V. 2 + Rq 16.
X. 2 — Rq 16.
———————
Y. 4. + ℞q64 — ℞q. 64 — 16.
Z. 4 — 16.

In hoc ultimo exemplo, in quo numerus V multiplicat numerum X cum ℞q 16. multiplicet ℞q 16. producitur abſolutus 16. & quia in producto Y ſecundum, & tertium membrum ſe invicem perimunt reſtabit numerus Z.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Numerorum irrationalium compoſitorum diviſio.

Notandum primò, quoties radix per numerum abſolutum dividitur, inſtituendam eſſe diviſionem, per ſimilem poteſtatem illius abſoluti. Sic enim abſolutus ad eamdem denominationem revocatur, pariter ſi altior poteſtas, per depreſſiorem dividenda ſit, depreſſior ad altioris poteſtatis denominationem revocetur, ut ſi dividendus eſſet hic numerus ℞ qq 8 — ℞ſ. 3. per ℞q. 2. Primò diviſor ℞q. 2. revocanda eſt ad eamdem denominationem, cum primo membro dividendi, nempe cum Rqq 8. quod facilè fiet multiplicando quadratum 2. per ſeipſum, ita enim pro Rq 2. fiet Rqq 4 per quam ſi dividas ℞qq. 8. quotiens proveniet ℞qq 2. Secundò numeri dividendi ſecundum membrum ℞ſ. 3. & diviſor ℞q 2. ad eamdem denominationem revocentur; revocabuntur autem ad denominationem qſ. fientque diviſor ℞qſ. 32. & dividendus ℞qſ. 9. divide unum per aliud fiet quotiens ℞qſ. 9/32 habemus ergo quotientem integrum ℞qq 2 — Rqſ. 9/32. Nulla eſt igitur difficultas peculiaris, quoties numerus compoſitus, per ſimplicem radicem dividitur; ſingula enim ejus membra per ſimplicem illum numerum, dividuntur, ad quod neceſſarium eſt ut idem diviſor revocetur ad ſingulorum membrorum denominationem.

Major erit difficultas quando diviſor eſt numerus compoſitus, quare revocandus erit ad ſimpliciorem: quod fiet ſi tam dividendus quam diviſor multiplicentur per communem multiplicatorem, ferè ſimilem diviſori, & ab eo differentem ſolummodo ſecundum ſigna + & — quod in exemplis rationalibus oſtendo, ut meliùs hujus praxis veritas appareat. Sit dividendus numerus 42. per ℞q. 25 + ℞q4. id eſt per 7, ſed ſuppono ignorari hunc numerum eſſe 7. & quotientem eſſe 6. Tam numerus dividendus 42. quam numerus diviſor ℞q 25 + ℞q4. multiplicentur per hunc numerum ſimillimum diviſori, nempè ℞q 25 — ℞q 4. differentem ſcilicet ab eo, in ſigno + mutato in ſignum — habebiſque poſt multiplicationem pro dividendo ℞q 44100 — ℞q 7056, & extractis radicibus habebis 210 — 84. ſeu 126: habebis item pro diviſore novo, ℞q. 625. + ℞q 100 — ℞q 16. & quia membra intermedia ſe invicem deſtruunt reſtabunt ℞q 625. — ℞q. 16 & extractis radicibus 25 — 4. ſeu 21. per quem numerum ſi dividas dividendum 126. habebis pro quotiente 6.

Demonſtratio hujus operationis fundatur in eo principio, quod numeri per eumdem multiplicati in eadem ſint ratione; atque adeo ſi unus per alium dividatur idem ſit futurus quotiens. Sint enim numeri 4. & 8. ſi 8. per 4. dividatur, quotiens erit 2, quæ enim eſt ratio 8. ad 4, eadem eſt 2. ad 1. multiplicentur 8. & 4. per eumdem verbi gratia per 10. fient 80. & 40. inſtituatur diviſio 80. per 40. cum eadem ſit ratio 80. ad 40. quæ erat 8. ad 4. idem etiam quotiens 2. eſſe debet, oſtendens rationem dividendi ad diviſorem. Quare artificium hujus praxis in eo conſiſtit ut multiplicator qui aſſumitur ſit ſimilimus diviſori, ab eoque tantum differat in ſigno + & — ſic enim dum inſtituetur multiplicatio exurgent membra ſe invicem elidentia: hæc praxis vocatur expurgatio.

Hæc praxis valet in radicibus omnibus. Sit dividendus numerus 10. per ℞qq 5 + ℞qq 3; aſſumatur communis multiplicator ℞qq5 — ℞qq3. eritque novus dividendus ℞qq 50000 — ℞qq 30000. & novus diviſor ℞qq 25 — Rqq9. ſeu ℞q 5 — ℞q 3. qui cum adhuc nec ſit rationalis, nec ſimplex, tam novum dividendum, quam novum diviſorem, multiplico per hunc ℞ q5 + ℞q3. mutato ſcilicèt diviſoris ſigno — in ſignum + & multiplicatione facta, fit novus dividendus ℞qq 1250000 — ℞qq 750000 + ℞qq 450000 — ℞qq 270000. & novus diviſor 5 — 3. ſeu 2. hoc eſt ℞qq 16. per quam ſi ultimum dividendum partiaris habebis quotientem ℞qq 78125 — ℞qq 46875 + ℞qq 28125 — ℞qq 16875. quem aſſero eſſe quotientem quæſitum quod probare poteris. Si enim eum multiplices per primum diviſorem ℞qq 5 + ℞qq 3. exurget numerus ℞qq 390625 — ℞qq 50625. & extractis radicibus 25 — 15 ſeu 10. numerus ſcilicèt primò propoſitus.

Si diviſor habuerit tria membra affecta ſigno + communis multiplicator aſſumendus erit ſimilis diviſori, & ab eo diſcrepans in ſigno + mutato in — ut ſi numerus 100. dividendus eſſet per diviſorem ℞q 3 + ℞q 5 + ℞q6. aſſumatur communis multiplicator Rq 3 + Rq 5 — Rq 6. ex multiplicatione diviſoris orietur diviſor bimembris ℞q 60 + 2. & novus dividendus erit ℞q 30000 + ℞q 50000 — ℞q 60000. & quia diviſor non eſt adhuc ſimplex nec rationalis, aſſumo novum multiplicatorem ℞q 60 — 2. & habebitur novus diviſor 56. & novus dividendus ℞q 1800000 + ℞q 3000000 + ℞ q 40000 — ℞q 120000 ℞q 3600000. qui numerus ſi dividatur per 56. eumdem quotientem exhibebit; ac ſi 100. divideretur per ℞q 3 + ℞q 5 + ℞q 6.

Quando diviſor conſtat duobus membris radicum cubicarum ut ℞c.5 + ℞c.3. inveniantur 3. numeri continuè proportinales in ratione 5. ad 3, quod facilè fiet ſi numerum 5 per ſeipſum multiplices ut fiat 25. & numerum 3 per 5. fiet 15. & numerum 3. per ſeipſum fiet 9. cum enim idem 5. & ſeipſum, & numerum 3. multiplicet, erunt producti 25. & 15. ut 5. ad 3. & pariter cum idem 3. multiplicet & 5. & ſeipſum, erunt producti 15. & 9. ut 5. ad 3. Adhibeantur hi tres numeri ℞c. 25 — ℞c. 15 + ℞c. 9. tanquam communis multiplicator & producetur diviſor ℞c. 125 + ℞c. 27. hoc eſt 5 + 3. ſeu 8. per hunc divide novum dividendum.

Eadem methodus eſt uſurpanda in diviſore compoſito cujus duo membra fuerint duæ radices qq aut ſurdeſolidæ, tot enim conſtituendi ſunt numeri continuè proportionales, quot ſunt unitates in exponente poteſtatis, & continuè proportionales alternatim ſignis + & — afficientur, fietque multiplicator.

Denique ſi diviſor compoſitus conſtet duobus membris radicum diverſarum revocentur hæ duæ radices diverſæ, ad eamdem denominationem.

PROPO

PROPOSITIO XXXI.

Problema.

Ortus & numeratio radicum univerſalium, ſeu ligatarum.

Radices univerſales ſeu ligatæ, ſunt illæ quæ cadunt in totum aliquem numerum compoſitum. Proponatur hic numerus 10 + ℞q 7. jubeamurque radicem quadratam eruere, quia exhiberi non poteſt radix quadrata numeri 7, non poteſt etiam ex totali eo numero educi præciſa radix quadrata. Quare huic proponimus ſignum radicale ℞q (10 + ℞q 7. quo ſignificamus radicem quadratam numeri compoſiti ex 10. & radice quadrata numeri 7.) ſic quia radix quadrata numeri 16. eſt 4, & Radix quadrata 64. eſt 8. Rq (10 + 4 + 3 + 8) ſignificat ℞q 25. ſeu 5. Rq. (℞c. 27 + ℞q 25) ſignificat radicem quadratam, numeri compoſiti, ex radice cubica numeri 27. quæ eſt 3, & radice quadrata 25. quæ eſt 5. indicare igitur volumus radicem cubicam numeri 8, quæ eſt 2. Idem binarius ſignificatur per iſtam Rc. (Rq 25, + Rq 9.) ſignificat enim radicem cubicam numeri 8.

Ex his innoteſcit & ſenſus & generatio iſtarum radicum: manifeſtum etiam eſt eundem numerum, characteribus, & notis in ſpeciem diverſis ſignificari poſſe.

PROPOSITIO XXXII.

Problema.

Multiplicatio radicum univerſalium.

Radices univerſales facilè multiplicari poſſunt, ſecundum propriam denominationem; hoc eſt radices quadratæ quadraticè, cubicæ cubicè, & ita de aliis, hæc enim multiplicatio perficitur delendo ſignum radicale.

Nam radicem quadratam v.g. multiplicamus, ſi exhibeamus, productum ex ejus multiplicatione, ejus ſcilicèt quadratum; cubicam in ſe ducimus ſcribendo ejus cubum. Unde ſi jubeamur quadraticè multiplicare ℞q (10 + Rq 25.) id præſtamus delendo primum ſignum Radicale, & exhibendo ejus quadratum ſcilicet 10 + ℞q 25.

Secundò multiplicamus Radicem univerſalem, per numerum abſolutum, ſi ejus poteſtatem multiplicemus per ſimilem poteſtatem numeri abſoluti, ut ſi proponatur ℞q (7 + ℞q3.) duplicanda, ejus quadratum 7 + ℞q 3. multiplicare debemus per 4 quadratum numeri 2. Ratio eſt quia tunc exhibemus quadratum radicis quadratæ multiplicatæ per 2. quadratum ergo 7 + ℞q 3. multiplicamus, multiplica ergo 7. per 4. fiunt 28. multiplica item ℞q3. per 4. & quia jam eſt radix quadrata, multiplicanda erit per 16. ita ut producatur ℞q 28. + ℞q48: ſi enim eſſet propoſita ℞q (7 + 3.) multiplicando per quadratum numeri 2. ſeu per 4 fieret ℞q (28 + 12) ſed in ultimo membro eſt ℞q3. quare debet multiplicari per quadratum ipſius 4 nempe 16. ut fiat Rq (28 + Rq48) quod eſt diligenter notandum. Ut meliùs innoteſcat veritas hujus praxis. Proponatur radix univerſalis non ſurda, ℞q (7 + ℞q4.) eſt autem ejus quadratum 7 + ℞q4, idem quod 9. cujus radix quadrata eſt 3: proponatur hæc radix duplicanda, aſſumo quadratum numeri 2. ſeu 4. per quod multiplico numerum 7. fitque 28. tum multiplico ℞q4 non per 4. ſed per quadratum numeri 4. nempe per 16. fitque Rq64. eſt ergo ℞q (28 + ℞q64) ſeu ℞q. (28 + 8.) ſeu ℞q36. cujus radix quadrata nempe 6. eſt dupla prioris 3.

Demonſtratio quoad ultimam partem eſt quod dum dicitur ℞q (℞q4) eſt idem ac Rqq4. quæ ut duplicetur, multiplicari debet per qqtum numeri 2. (ut nempe 2 ad eandem denominationem reducatur) ſeu multiplicari per 16.

Eamdem doctrinam cubicis radicibus applicare poſſumus. Ut ſi proponatur ℞c (℞c64 + ℞c.27.) multiplicanda per 2. multiplicanda eſt ℞c. 64. per cubum cubi numeri 2 nam 64 eſt cubocubus reſpectu radicis, quæ ſignificatur, eſt autem 8 cubus numeri 2 & 512 cubocubus: quare ſi fiat multiplicatio habeo ℞c. 32768. pariter multiplicari debet 27. per 512. fiuntque 13824. quare fiet ℞c. (℞c. 32768 + ℞c. 13824.)

Proponatur item ℞c (℞c 64 + ℞q 36 + 3.) multiplicanda per 5. primum membrum multiplicandum eſt per cubocubum numeri 5. nempe 1953125. producetúrque 125000000. ſecundum membrum multiplicandum eſt per quadratocubum numeri 5. ſeu per 15625. quia ſcilicèt dicitur ℞c ℞q. 36. & ex hac multiplicatione producetur 562500. denique ultimum membrum 3. multiplicari debet per cubum numeri 5. quia illi præponitur tantùm radix cubica, ex qua multiplicatione oritur 375. quare orietur hic productus ℞c (℞c. 125000000. + ℞q 562500. + 375.)

Tertiò proponatur multiplicanda ℞q (13 + ℞q9.) per ℞q (5 + ℞q16.) prima radix ſi explicetur, ſignificat numerum 4 ſeu ℞q (13 + 3) ſeu ℞q. 16, ſecunda ſignificat 3. ſeu radicem quadratam numeri 5 + 4. hoc eſt 9: ex multiplicatione autem numeri 4 per 3. oritur numerus 12. Videamus utrum praxis noſtra eumdem numerum repræſentet. Radices ergo proponuntur multiplicandæ, quarum quadrata ſunt 13 + ℞q9. & 5 + ℞q16. Primò multiplico ultimum membrum numeri A, per ultimum membrum numeri B, hoc eſt Rq9 per Rq 16. fitque Rq 144. tum multiplico 13. ſeu ejus quadratum per radicem quadratam 16. ſeu Rq 169. fiet ℞q 2704 multiplico item ſecundum membrum numeri A per primum numeri B. ſeu Rq 9. per 5. ſeu ejus quadratum 25. fitque ℞q 225. Denique multiplica 5 per 13. fit 65. habes igitur productum numerum C. Si extraho radices habebis numeros 65. 15. 52. 12. quorum ſumma 144. cujus radix quadrata 12.

A. 13 + Rq 9.
B. 5 + Rq 16.

C. Rq (65. + Rq 225 + Rq. 2704 + Rq 144.)
65. 15. 52. 12.

PROPOSITIO XXXIII.

Problema.

Radicum univerſalium diviſio.

In genere dicendum eſt, diviſionem radicum, abſolvi diviſione poteſtatum cujus ſunt radices, cum enim radices in ſeipſis non habeantur, ſed tantum in ſuis poteſtatibus appoſitè earum diviſio per poteſtatum diviſionem perficitur.

Proponatur hæc radix univerſalis ℞q (13 + ℞q7.) dividenda per ℞q5. prioris quadratum eſt 13 + Rq7. & ſecundæ quadratum eſt 5. divide 13. per 5. fit quotiens $2\frac{3}{5}$. divide item 7 per 5 ſeu per 25. fit quotiens $\frac{7}{25}$. habes igitur quotientem ℞q ($2\frac{3}{5}$ + ℞q $\frac{7}{25}$.

Secundò ſit hæc ℞q (432. + ℞q776) dividenda per 6. hanc divide per ℞q 36.

Major erit difficultas quando diviſor erit compoſitus, ſeu erit radix univerſalis, tunc autem aſſumendus eſt communis multiplicator, ut nempe fiat tam novus dividendus, quam novus diviſor ſed ſimplicior, res tota in exemplo manifeſta fiet.

Sit dividenda ℞q (588 + ℞q 34848.) per ℞q (12 + ℞q8.) diviſor ergo eſt quadratum 12 + ℞q8. aſſumo pro communi multiplicatore numerum ferè ſimilem diviſori; nempe 12 — ℞q8. ſic enim producentur membra ſe invicem elidentia — 1152. & + 1152. habebis ergo novum

12. + R q 8.
12. — R q 8.
———————
— 1152. — R q 64.
144. + 1152.
———————
144. —— 8.
———————
136.

diviſorem purum 136. ſi multiplices dividendum ℞q (588 + ℞q 34848.) per 12 — ℞q8. orietur novus dividendus ℞q (7056 + ℞q 5018112. — ℞q 2765952 — ℞q278784) qui numerus ad minorem reduci poteſt: nam ultimi membri Radix quadrata, eſt 528. quæ ſubtrahi poteſt ex primo membro; item radix quadrata tertii ſubduci poteſt ex radice quadrata ſecundi: ſitque numerus reductus ℞q (6528 + ℞ q.332928) qui ſi dividatur per novum diviſorem 136; exhibebit quotientem ℞q (48 + ℞q 18.)

Additio Radicum univerſalium, perficitur ſigno additorum +, ſicut & ſubtracto ſigno ſubtractorum — ideoque de illis nihil dicendum eſt.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema.

De Minutiis numerorum irrationalium.

Numeri irrationales ſuas etiam habent minutias, quarum ſenſus, & numeratio varia eſt, prout variè efformantur. Signum Radicale ante minutiam poſitum refertur ad totam minutiam, hoc eſt tam ad numeratorem, quam ad denominatorem ut ℞q $\frac{9}{16}$ ſignificat radicem quadratam novem decimarum ſextarum, ſeu ſignificat numerum qui in ſe productus efficiat hanc fractionem $\frac{9}{16}$. ſeu hunc numerum $\frac{3}{4}$. ſi enim aſſumas tres quadrantes trium quadrantum habebis $\frac{9}{16}$.

Si ante fractionem integer præponatur, poterit ad fractionem reduci ut Rc. 1 $\frac{67}{125}$. reduci poteſt ad hunc Rc $\frac{192}{125}$. ſignificat numerum qui in ſe cubicè productus, efficiat hanc fractionem $\frac{192}{125}$.

Ex quo concludes ſi idem numerus tam denominatorem fractionis, quàm numeratorem multiplicet, aut dividat; eamdem eſſe minutiam, & conſequenter eamdem radicem ℞q $\frac{9}{16}$. & ℞q. $\frac{18}{32}$. idem ſignificant.

Quando ſignum radicale adjungitur ſoli numeratori, aut ſoli denominatori fractionis, eum etiam tantùm afficit; ut $\frac{℞q\ 64}{2}$ ſignificat $\frac{8}{2}$. ſeu 4 pariter $\frac{8}{℞q\ 4}$ ſignificat 8 dividi per 2.

Additio fractionum irrationalium ſimilis eſt, additioni minutiarum vulgarium; debent enim reduci ad eundem denominatorem, quod methodo communi per multiplicationem in crucem perficitur, & reductione facta ſimul adduntur numeratores, ut ſi reductione factâ exhibeantur fractiones $\frac{℞q\ 4}{7}$ & $\frac{℞q\ 9}{7}$ adde unum numeratorem alteri; ſed additione propriâ radicum habebitur $\frac{℞q\ 25}{7}$ ſeu $\frac{5}{7}$.

$\frac{℞q\ 4.}{7}$ $\frac{℞q\ 9.}{7}$

Subtractio eâdem ferè ratione perficitur, ut ſi reductione factâ exhibeantur fractiones $\frac{℞q\ 4}{7}$ & $\frac{℞q\ 9}{7}$ quarum prima ex ſecunda ſubtrahenda ſit, ſubtrahe unum numeratorem ab alio, ſed ſubtractione propria radicum fiet $\frac{℞q\ 1}{7}$.

Pariter proponatur hæ duæ fractiones ℞q $\frac{16}{49}$. & ℞q $\frac{4}{9}$. diverſum habentes denominatorem. 9. & 49. multiplicentur denominatores inter ſe ut fiat communis denominator 441. & multiplicatis decuſſatim numeratoribus per denominatores, fient novi numeratores 144. & 196. extrahantur omnium radices, habebis fractiones ſimplices A & B. quarum additio, aut ſubtractio facilis erit, additis ſcilicet numeratoribus, aut ſubtracto uno numeratore ab alio.

℞q $\frac{16}{49}$ X ℞q $\frac{4}{9}$

℞q $\frac{144.}{441.}$ ℞q $\frac{196}{441}$

A $\frac{12}{21}$. B $\frac{14}{21}$.

$\frac{26}{21}$.

Sint Addendæ iſtæ minutiæ $\frac{℞q\ 4}{9}$ & $\frac{℞q\ 49}{9}$ cum eumdem habeant denominatorem, ſoli addendi ſunt numeratores, vel praxi communi additionis radicum vel ſequenti. Unum quadratum 4 per aliud 49 multiplica, fit productus 196. cujus radix quadrata 14. bis ſumpta erit 28. hæc juncta duobus quadratis 9 & 49. efficit ſummam 86. habemus ergo $\frac{℞q\ 86}{9}$.

Demonſtratio

Demonſtratio hujus praxis eſt quod (*per 4.2.*) quadratum totius lineæ æquale ſit rectangulo bis comprehenſo ſub ſegmentis, & duobus quadratis ſegmentorum; ſed radix producti ex quadratis eſt rectangulum ſub radicibus. Ergo duplicando radicem quadratam dicti producti, & eam addendo duobus quadratis, reſultat totale quadratum.

Quando numeratores ſunt incommenſurabiles additio fiet per ſignum + ſicut & ſubtractio per ſignum — ut ſi addendæ eſſent minutiæ ℞q $\frac{2}{3}$ & ℞q $\frac{1}{2}$ ita fieret additio ſcribendo ℞q $\frac{2}{3}$ + ℞q $\frac{1}{2}$.

Multiplicatio, & diviſio minutiarum irrationalium, peculiarem non continet difficultatem, ubi enim reductæ ſunt ad eadem ſigna radicalia; methodus communis, multiplicationis, aut diviſionis minutiarum uſurpatur.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema.

De Numeris coſſicis irrationalibus.

Si Numeris coſſicis præponatur ſignum radicale, communiter habentur pro irrationalibus, quamvis nonnunquam ſint realiter rationales, ut ſi numero coſſico 20 R præponas ſignum radicale ℞q 20 R; cujus ſenſus eſt ſumendam eſſe radicem quadratam 20 radicum. Radix autem quadrata 20 radicum cenſetur numerus irrationalis: quamvis aliquando ſit numerus rationalis: ſi enim una radix ſit 5. 20 radices efficient 100 numerum rationalem, aut potius cujus radix eſt 10 verus numerus, ſi verò radix fuerit 2. 20 radices erunt 40. numerus irrationalis. Ita dicere poſſumus ℞c. 20q. Radix cubica 20 quadratorum. Eodem modo adduntur aut ſubtrahuntur hi numeri, ac radices ſurdæ nullâ habita ratione ſigni ſubſequentis, ut ſi addendi eſſent hi numeri ℞q 8R. & ℞q 18R. eodem modo fit additio, ac ſi proponerentur hi duo Rq8 & Rq. 18. qui duo numeri ſunt commenſurabiles: nam dividendo 18 per 8. fit quotiens 2$\frac{1}{4}$. cujus radix, ſeu media proportionalis inter 1 & 2$\frac{1}{4}$. eſt 1$\frac{1}{2}$. cum autem latera quadratorum ſint in ſubdiplicata ratione quadratorum, erit radix 8. ad radicem 18, ut 1. ad 1. $\frac{1}{2}$. & componendo erit ut 1. ad 1. + 1. $\frac{1}{2}$. ſeu ad 2. $\frac{1}{2}$. ut radix 8. ad Radicem ſummæ.

Et factis tribus continuè proportionalibus 1. 2. $\frac{1}{2}$. 6. $\frac{1}{4}$. erit quadratum 8. ad quadratum ſummæ ut 1. ad 6. $\frac{1}{4}$. quare multiplicando 8. per 6. $\frac{1}{4}$. fit quadratum ſummæ 50. erit ergo ſumma ℞q 50. ſeu ℞q. 50 R.

Sed hæc probata ſunt ſatis fuſè ſuprà. Addito ergo ſigno coſſico, fiet ℞q 50 R. cum enim numeri cuilibet rei applicari poſſint, cum ℞q 50 hominum, æqualis ſit ℞q 18. hominum & ℞q 8 hominum, vel cujuſlibet alterius rei, quæ per unitatem intelligi poteſt: ſi pro unitate intelligere velim radicem, quadratum, aut cubum, aut aliam quamcumque quantitatem coſſicam eodem modo verificabitur regula.

Ex hoc ſequitur quoties numeri coſſici, ſecluſo charactere coſſico, radicem non habent, aut non ſunt commenſurabiles, additionem fieri non poſſe, niſi reſolvantur, hoc eſt niſi cognoſcatur valor radicis quadrati, aut cujuſcumque characteris coſſici.

Sequitur item neceſſarium eſſe, eos numeros revocare ad eamdem denominationem, antequam

℞qc 16q ℞qc 512c.

4R X 8R
℞c ℞q
3 6 2

multiplicari, aut dividi poſſint; ut proponantur Rc. 4R. & Rq 8R multiplicandi, ſcribantur numeri 4R. & 8R, quibus ſubſcribantur ſigna radicalia. Tum 4R quadraticè multiplicetur, fient 16q. Item 8R cubicè multiplicetur, fiet 512c. ſignum radicale componetur ex q & c fietque ℞qc. 16q. ℞qc. 512c.

Fiat igitur multiplicatio numeri 512. per 16. fiet 8192. & quia dum cubus multiplicat quadratum fit ſurdeſolidus, producetur ℞qc. 8192. Surd.

Si dividendus eſſet hic numerus ℞qc. 8192. Surd. per ℞qc. 16q. primò dividetur 8192. per 16. & quotiens erit 512, & quia dum quadratum dividit ſurdeſolidum generatur cubus, quotiens erit ℞qc. 512. c.

Ad hoc ut 3R. multiplicentur per ℞q 16. fiat quadratum hujus numeri 3R, ut nempè revocentur ad eamdem denominationem, habebiſque ℞q 9. quadratorum; multiplicetur hic numerus per ℞q 16, & quia numerus abſolutus multiplicando quadratum efficit quadratum fiet ℞q. 144q In reliquis eadem recurrunt præcepta, quæ ſuperius tradidimus.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

De æquationibus quæ numeris irrationalibus implicantur.

Multis modis æquationes numeris irrationalibus implicantur. Primus caſus erit, ſi homogeneum comparationis fuerit numerus irrationalis, ut ſi proponatur hæc æquatio 1q + 6R = ℞q 46656. cum ſit æqualitas inter hos terminos 1q + 6R ex una parte, & ℞q 46656. ex alia, erunt quadrata eorum æqualia, eſt autem quadratum homogenei comparationis 46656. habebitur autem facilè per multiplicationem quadratum hujus numeri 1q + 6R eritque 1qq + 12c. + 36q. = 46656.

Reductione ad ſimpliciorem opus erit nempè ut eam expurges numero cuborum, nempè ſi dividas numerum cuborum per exponentem quadratoquadrati, orietur quotiens 3. ſit radix hujus æquationis 1R aucta hoc numero 3, eritque ſic aucta 1R + 3. huic ſit æqualis A, erit ergo æquatio 1R + 3 = A. & per antitheſin 1R = A — 3. fiat primo iſtius radicis A — 3. quadratum, dabitur A2 — 6A + 9. & quia in æquatione notantur 36 q. fient + 36 A2 — 216 A + 324. fiat item cubus ejuſdem A — 3 is erit A3 — 9A2 + 27 A — 27. & multiplicando per 12 cubos habebis 12A3 — 108 A2 + 324 A — 324. fiat item qqtum ejuſdem radicis A — 3 is erit A4 — 12A3 + 54A2 — 108A + 81. addantur hæc omnia in unam

$$\begin{array}{llll} A4 - 12A3 & + 54A2 & - 108A & + 81. \\ \quad + 12A3 & - 108A2 & + 324A & - 324. \\ & + 36A2 & - 216A & + 324. \\ \hline A4 & - 18A2 & & + 81. \end{array}$$

ſummam, nempè ut fiat 1qq — 12c. + 36q. & habebimus 1qq — 18q + 81 = 46656. & ſubtrahendo 81. habebimus æquationem aliam nempè 1qq — 18q = 46575. explicabilem methodo vulgari, cui exponentes terminorum ſint 4. 2. 0. & dum inventa fuerit radix, tres unitates ſubtrahes, ut habeatur radix ſuperioris æquationis.

Secundus caſus erit. Si radix ſurda inveniatur in numero radicum, ut 1q + ℞q 36R = 520. & per antitheſin 520 — 1q = ℞q 36R. & cum in terminis ſit æqualitas; erit etiam in eorum quadratis, nempè ſi fiat quadratum 520 — 1q is erit 270400 — 1040q + 1qq = 36R. & per antitheſes 36R. + 1040q. — 1qq = 270400.

Notandum autem propoſitam æquationem 520 — 1q = Rq 36R. explicabilem fuiſſe immediatè extrahendo radicem quadratam numeri 36R. quæ erat 6R: atque adeo erat æquatio 520 — 1q = 6R. ideoque præcedens praxis tantùm adhibenda eſt, quando numerus radicum eſt irrationalis.

Tertiò proponatur hæc æquatio ℞q (1q + 2. $\frac{1}{12}$. R) = 13. cum termini ſint æquales, quadrata eorum æqualia erunt. Fiat igitur quadratum numeri 13. nempè 169. habebimus æquationem ſolubilem 1q + 2 $\frac{1}{12}$. R = 169. ſeu 1q + $\frac{25}{12}$ = 169: debet autem hæc fractio expurgari, ut ſupra diximus.

Quartò proponatur hæc æquatio ℞q(1q + 2R) = ℞q 168. erunt eorum quadrata æqualia nempè 1q + 2R = 168.

Hæc 1q + ℞q 4R + 2 R = 24 + ℞q 64. per antitheſin tranſlatis ℞q 4R fiet æquatio 1q + 2R = 24 + ℞q 64 — ℞q 4R. & extractis radicibus numerorum 64. & 4. erit æqu. 1q + 2R = 24. + 8 — 2R & 1q + 4R = 32.

Sit æquatio ℞q 10q = 20. fiat quadratum numeri 20. fiet alia æquatio 10q = 400. & 1q = 40. & valor unius radicis ℞q 40.

Proponatur hæc æquatio ℞c. 12q = 30. fiat cubus numeri 30. qui erit 27000, eſt autem cubus hujus radicis ℞c. 12. q. deleto ſigno radicali, 12q. ergo habemus æquationem 12 q. = 27000.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

De Binomiis, & Apotomis.

Authores communiter duos numeros coſſicos copulatos per ſignum + vocant binomium, duos verò copulatos ſigno — vocant apotomen; quæ appellatio ſi tribuatur numeris coſſicis ſimplicibus, quibus ſcilicet non præponitur ſignum radicale, legitima eſſe non poteſt in rigore geometrico, cum hujuſmodi numeri careant proprietatibus binomii, aut apotomes, prout ab Euclide definiuntur, binomium enim conſtat partibus inter ſe longitudine incommenſurabilibus, potentia tantum commenſurabilibus; omnis autem numerus, cui ſignum radicale non præponitur, longitudine, cum aliis omnibus commenſurabilis eſt; debet igitur neceſſariò binomium in ſtricta ſignificatione ſumptum ſignum radicale habere.

Sed neque omnis numerus coſſicus compoſitus, & præferens ſignum radicale erit binomium, aut apotome, ſeu reſiduum, ſed præterea requiritur ut partes illæ ſint inter ſe incommenſurabiles, & habeant ſua quadrata commenſurabilia; quare hic numerus 6 + ℞q 9. non eſt binomium in ſtricta ſignificatione, quia 6 & ℞q 9. quæ eſt 3. ſunt commenſurabiles, ſicut neque 6 — ℞q 9. eſt Apotome.

Requiritur igitur ut ſaltem una pars numeri compoſiti ſit irrationalis, ſi enim utraque ſit rationalis, exponique poſſit per numerum abſolutum, erunt commenſurabiles: numerus enim cum omni alio propriè dicto commenſurabilis eſt, cum habeat ſaltem unitatem aut partem aliquotam unitatis communem menſuram: quoties igitur una pars numeri coſſici compoſiti erit explicabilis numero abſoluto, alia verò non erit, toties binomium dicetur ut 6 + ℞q 20. & apotome 6 — ℞q 20.

Quando utraque pars numeri compoſiti erit radix ſurda, non tamen propterea erit ſemper binomium ut ℞q 40 + ℞q 10. ſunt enim hæ radices ſurdæ commenſurabiles, & ſe habent ut 1. ad 2, cum quadrata ſe habeant, ut 1. ad 4.

Debet igitur binomium conſtare partibus incommenſurabilibus longitudine, quarum quæ major eſt dicitur majus nomen, quæ minor minus nomen. Comparantur autem quadrata eorum nominum, & exceſſus unius ſupra aliud; qui quadratorum exceſſus intelligitur reduci ad quadratum; ita ut linea quæ eſt ejus latus ſeu radix, hoc eſt linea quæ poteſt hunc exceſſum, comparetur cum majori, vel cum minori nomine, & conſideretur utri ſit commenſurabilis, neque enim utrique commenſurabilis eſſe poteſt.

Primum binomium erit cujus majus nomen plus poteſt quam minus, quadrato lineæ majori nomini commenſurabilis, ita ut majus nomen ſit commenſurabile numero rationali expoſito. Hujus exemplum eſto 6 + ℞q 27: nam primò nomina ſunt inter ſe longitudine incõmenſurabilia, ſecundò quadratum majoris nominis ſeu 36. excedit quadratum minoris nominis 27 numero 9, cujus radix commenſurabilis eſt majori nomini 6. quod eſt rationale primo numero rationali expoſito; unitas enim in numeris ſupponitur ſemper ut expoſita.

Apotome illi reſpondens erit 6 — ℞q 27. eſt enim id quod relinquitur detracto minori nomine, ex majori, ut ſi ex numero 6. auferatur ℞q 27 relinquitur 6 — Rq 27. quæ dicitur Apotome prima.

Secundum binomium habet minus nomen commenſurabile numero rationali & lineã potens exceſſum quadratorum, eſt commenſurabilis majori nomini ut ℞q 48 + 6. minus nomen 6. eſt commenſurabile numero rationali cuicumque; cujus quadratum 36, ſuperatur à quadrato majoris nominis numero 12. ſed ℞q 48. & ℞q 12 ſunt commenſurabiles, cum ſe habeant ut 1. ad 2, & quadrata ut 1. ad 4. Apotome illi reſpondens erit ℞q 48 — 6.

Tertium binomium neutrum nomen habet rationale, ſed linea potens exceſſum quadratorum commenſurabilis eſt majori nomini; ut ℞q 24

24 + ℞q 18. exceſſus quadratorum eſt 6. ſed ℞q 6. eſt commenſurabilis majori nomini. ℞q 24. eſt enim ejus ſubdupla cum quadrata ſe habeant ut 1. ad 4.

Apotome illi reſpondens erit ℞q 24 — ℞q 18.

Quartum binomium habet majus nomen rationale, cui linea potens exceſſum quadratorum eſt incommenſurabilis ut 4 — ℞q 10, conſtat enim 4 eſſe numerum rationalem, & exceſſum quadratorum eſſe 6, linea autem illum potens ſeu ℞q 6. eſt incommenſurabilis majori nomini.

Apotome illi reſpondens erit 4 — ℞q 10.

Quintum binomium habet minus nomen rationale; & linea potens exceſſum quadratorum eſt incommenſurabilis majori nomini, ut ℞q 5. + 2. minus nomen 2. eſt rationale. Exceſſus quadratorum eſt 1. linea illum potens incommenſurabilis eſt cum primo nomine. Apotome ℞q 5 — 2.

Sextum binomium neutrum habet nomen rationale, & linea potens exceſſum quadratorum incommenſurabilis eſt majori nomini; ut ℞q 80 + ℞q 50. exceſſus quadratorum eſt 30. linea illum potens ℞q 30. eſt incommenſurabilis cum majori nomine. Nam diviſo numero 80 per 30. fit numerus $2.\frac{2}{3}$. numerus non quadratus. Apotome illi reſpondens ℞q 80 — ℞q 50.

Inventionem horum binomiorum facilè ex Euclidis decimo repetere poſſemus ſicut & inventiones aliarum linearum, ſed minus utiliter in rem noſtram; cum eadem ubique in omnibus binomiis etiam impropriis regnet methodus extrahendæ radicis quadratæ.

PROPOSITIO XXXVIII.

Problema.

Extrahere radicem quadratam ex binomio.

Sit æquatio 1q = 6 + ℞q 27. quæritur valor radicis illius quadrati, ſeu quæritur numerus qui per ſeipſum multiplicatus producat 6 + ℞q 27. Idem dico de Apotome, ut ſi proponeretur æquatio 1q = 6 — ℞q 27. quæritur latus illius quadrati, ſeu quæritur numerus qui per ſeipſum multiplicatus efficiat 6 — ℞q 27. Regula hæc erit. Radicem quadratam differentiæ quadratorum majori nomini adjice, ut fiat ſumma; & ab eodem ſubtrahe ut fiat reſiduum; ſemiſſis tam ſummæ, quàm reſidui: radices quadratas connecte ſigno + habebis radicem quadratam binomii, vel eaſdem radices connecte ſigno — exhibebitur radix quadrata Apotomes.

In Æquatione propoſita 1q. = 6 + ℞q 27. Exceſſus quadratorum 36. & 27. eſt 9. cujus radix quadrata 3. addatur majori nomini 6. fietque 9. & ab eodem auferatur, reſiduum erit 3. ſemiſumma eſt $4\frac{1}{2}$. ſemireſiduum erit $1\frac{1}{2}$. Radix quadrata utriúſque efficiet radicem binomii, nempè ℞q $4\frac{1}{2}$. + ℞q $1\frac{1}{2}$. & latus Apotomes erit ℞q $4\frac{1}{2}$. — ℞q $1\frac{1}{2}$. Examen harum radicum erit ſi multiplicando numerum ℞q $4\frac{1}{2}$. + ℞q $1\frac{1}{2}$. per ſeipſum reſtituatur idem binomium, & pariter multiplicando hunc numerum ℞q $4\frac{1}{2}$. — ℞q. $1\frac{1}{2}$. reſtituatur præcedens Apotome 6. — ℞q 27. multiplicatio autem id efficit ut in figura intueri licèt.

Rq $4\frac{1}{2}$. + Rq $1\frac{1}{2}$.
Rq $4\frac{1}{2}$. + Rq $1\frac{1}{2}$.

+ Rq $6\frac{1}{4}$. + $1\frac{1}{2}$.
$4\frac{1}{2}$. + Rq $6\frac{1}{4}$.

6. + Rq 27.

Hæc regula in pluribus exemplis fiet clarior. Proponatur binomium primum 23. + Rq 448. quadratum numeri 23. eſt 529. differentia inter quadrata 448. & 529. eſt 81. cujus radix quadrata 9. addita majori nomini 23. efficit ſummam 32. & detracta reſiduum 14. Semiſſes ſunt 16. & 7. Radices quadratæ, 4. & ℞q 7. quæ ſi conjungantur ſigno + exhibebunt radicem binomii nempè 4 + ℞q 7.

Hæc regula ita univerſalis eſt, ut non tantum binomiis propriè dictis conveniat, habentibus ſcilicèt eas conditiones, quas ſupra ex Euclide recenſuimus, ſed etiam cuilibet lineæ etiam diviſæ in partes longitudine commenſurabiles, ita ut ſupervacaneum videatur in ordine ad Algebram, totam incommenſurabilium doctrinam huc advocare. Quod ut experientiâ comprobemus proponatur æquatio 1q. = 5 + 4. quod binomium improprium eſt; cum habeat partes inter ſe commenſurabiles. Quadrata nominum ſunt 25. & 16. differentia eſt 9. cujus radix quadrata 3. addita majori nomini 5 efficit 8. & ſubtracta relinquit 2. ſemiſſes ſunt 4 & 1. radices quadratæ 2 & 1. quare radix quadrata hujus binomii 5 + 4. erit 2 + 1. ſeu 3. Antequam hæc praxis demonſtretur proponendum eſt Theorema cui innititur.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema.

Radix quadra differentiæ quadratorum binomii æqualis eſt differentiæ quadratorum ſegmentorum radicis.

Sit binomium quodcumque etiam improprium 5 + 4. dico radicem quadratam differentiæ quadratorum 25 & 16. eſſe æqualem differentiæ quæ eſt inter quadrata ſegmentorum radicis. Sit inventa (*per ſuperiorem praxin*) radix hujus binomii 5 + 4. quæ ſit 2 + 1. ſeu linea quæ per ſeipſam totam multiplicata producat binomium 5 + 4. quæ tamen linea ſit diviſa in 2 & 1. ſintque quadrata horum ſegmentorum 4 & 1. quorum differentia ſit 3. dico radicem quadratam differentiæ quadratorum 25 & 16. eſſe æqualem huic differentiæ quadratorum 4 & 1.

Demonſtratio. Sit radix quæcumque 2 + 1. certum eſt ejus quadratum æquale eſſe duobus quadratis ſegmentorum 2 + 1. & rectangulo bis ſub ſegmentis comprehenſo (*per* 4. 2.) Inſuper benè ponimus, pro primo nomine producti, ſummam quadratorum; pro ſecundo, rectangulum ſub ſegmentis bis comprehenſum. Rectangulum autem ſub ſegmentis medium proportionale eſt inter duo quadrata ſegmentorum: ergo bis poſitum medium proportionale eſt inter quadrata bis hinc inde poſita. Quare quadratum rectanguli bis comprehenſi, æquale eſt rectangulo

comprehenſo ſub duplo quadratorum, (*per* 16.6.) ſed quadratum ſummæ quadratorum, ſeu majoris nominis, æquale eſt rectangulo comprehenſo ſub duplo quadratorum, & quadrato differentiæ quadratorum. Nam ſupponatur AB, tot continere unitates quot ſunt in uno quadrato, & BC quot

——|——|——|
A D B C

ſunt in minori; abſcindaturque B D æqualis ipſi BC,erit AD differentia quadratorum ſed(*per* 7.2.) quadratum A C æquale eſt rectangulo quater ſub AB, BC, ſeu rectangulo bis ſub duplo AB, & duplo BC, & quadrato differentiæ AD. Ergo quadratum A D quæ eſt differentia inter quadrata ſegmentorum radicis binomii, erit differentia inter quadratum AC,majoris nominis ſeu aggregati quadratorum, & quadratum minoris nominis, ſeu rectanguli bis comprehenſi ſub ſegmentis radicis binomii. Et verò poſitâ radice 2 + 1 binomii 5 + 4. in quo 5. majus nomen eſt ſumma quadratorum, & 4. minus eſt rectangulum bis ſub ſegmentis, differentia quadratorum ſegmentorum radicis, erit 3. radix differentia inter quadrata nominum 5 & 4.

COROLLARIUM.

Ex hoc deducunt nonnulli methodum multiplicandi quadratè aliquod binomium: verbi gratiâ ſit binomium 2 + 1. multiplicandum quadratè, primum nomen erit aggregatum quadratorum nempè 5. ut habeatur ſecundum nomen, poſſet quidem fieri rectangulum bis ſub ſegmentis: poteſt tamen haberi aliter,nempè ſit differentia quadratorum, quæ eſt 3. tum ſit quadratum majoris nominis 5. ſeu 25. ex quo ſubtrahis 9. ſeu quadratum differentiæ,& reſtat 16. quadratum minoris nominis.

PROPOSITIO XL.

Theorema.

Demonſtratur eductio radicis ex binomio.

Sit binomium quodcumque 5 + 4. primò quadratorum differentiam inquirimus, quæ eſt 9. cujus radicem quadratam 3 eruimus: habemuſque differentiam inter quadrata ſegmentorum radicis per præcedentem, eſt autem majus nomen 5. aggregatum hujuſmodi quadratorum, ſi ſemiſummæ $2\frac{1}{2}$. addas ſemidifferentiam $1\frac{1}{2}$. habebis majus quadratum 4. ſi ab eadem ſemiſumma ſubtrahas habebis minus quadratum 1.

Vel ſi aggregato 5. auferas differentiam 3. reſtabit duplum minoris quadrati ſeu 2; ſi addas fiet duplum majoris quadrati ſeu 4.

Hanc regulam aliter nonnulli proponunt. procedunt enim per ſemiſſes:& loco differentiæ quadratorum ſegmentorum radicis; quærunt ſemiſſem hujuſmodi differentiæ hoc modo. Quæratur differentia inter quadrata ſemiſſium nominum; hujus differentiæ radix quadrata erit ſemidifferentia quadratorum radicis: quæ ſi addatur ſemiſſi majoris nominis, & ab eadem ſubtrahatur, habebuntur quadrata ſegmentorum radicis. Ut ſi proponatur binomium 5 + 4. quadrata radicum $2\frac{1}{2}$. & 2. ſunt $6\frac{1}{4}$. & 4 differentia $2\frac{1}{4}$. radix ejus $1\frac{1}{2}$. erit ſemidifferentia quadratorum radicis. Hæc addatur ſemiſſi majoris nominis, ſeu $2\frac{1}{2}$. fiet 4. majus quadratum, ſubtrahatur ab eadem reſtabit 1. minus quadratum.

Demonſtratio eadem eſt. nempe cum radix differentiæ quadratorum binomii ſit eadem cum differentiâ quadratorum radicis: radix differentiæ quadratorum ſemiſſium erit ſemidifferentia quadratorum radicis, cum quadrata ſint in duplicata ratione laterum; datâ autem ſemidifferentiâ quadratorum, & eorum aggregato ſeu majori nomine, facilè habentur quadrata, ſi nempe ſemiſſi aggregati addas ſemidifferentiam habebitur majus quadratum, ſi ab eâdem illam ſubtrahas habebitur minus. Ut ſi AB, BC ſint quadrata, abſciſſa AE æquali BC, erit E B differentia; ſi ſemidifferentiam DB addideris ſemiaggregato AD, habetur AB, ſi ex ſemiaggregato DC auferatur DB ſemidifferentia reſtat BC minus ſegmentum.

A E D B C
|—|—|—|—|

Eandem regulam aliter proponunt nonnulli; ſumunt enim radicem quadratam quartæ partis differentiæ quadratorum, ſeu quod idem eſt ſemiſſem radicis differentiæ quadratorum nominum, quam adjiciunt ſemiſſi majoris nominis & habent majus quadratum; eandem ſubtrahunt à ſemiſſe majoris nominis, & habent minus, quæ omnia eodem modo demonſtrantur per præcedentem propoſitionem.

Poſſumus ergo hac methodo inquirere radicem cujuſlibet binomii verbi gratia 5 + 4. quadrata efficimus nominum 5 & 4. quæ ſunt 25 & 16. unum ab alio ſubtrahimus, habemúſque differentiam 9. cujus extrahimus radicem quadratam 3. hanc majori nomini 5 addimus, fitque 8.cujus dimidium 4 eſt quadratum majoris ſegmenti radicis; eandem differentiam ſubtrahimus ex 4. reſtat minus quadratum 1.

Ex his propoſitâ quacumque radice binomia 2 + 1. ejus quadratum invenienus fiant quadrata 4 & 1. majus 4 duplicamus fiunt 8 ex eo differentiam quadratorum ſubtrahimus, relinquitur majus nomen 5. ex ejus quadrato 25. ſubtraho 9. quadratum differentiæ nominum, reſtat quadratum 16. minoris nominis 4. quæ omnia demonſtrantur *per præcedentem.*

PROPOSITIO XLI.

Problema.

Datum numerum ſecare in duas partes ut productus ex earum multiplicatione, ſit æqualis numero dato non excedenti quartam partem quadrati numeri propoſiti.

Hæc propoſitio ad ſequentem neceſſaria eſt. Sit datus numerus 20. dividendus in duas partes, quæ multiplicatæ producant numerum 75. minorem quam 100 quartam partem, numeri 400. quadrati numeri 20 primò propoſiti.

Præter methodum communem Algebræ.100. quadrato ſemiſſis numeri dati 20. ſubtraho 75. reſtat 25. cujus radix 5. ſubtracta ex ſemiſſe numeri radicum relinquit 5. minorem partem,& addita eidem dat 15 majorem.

Hanc

Hanc praxin quamvis ſupra demonſtratam, ita nonnulli demonſtrant. Sit AB numerus 20. divi-

|—|—|—|
A C D B

dendus in partes AD, DB quæ invicem multiplicatæ efficiant 75. dividatur AB biſariam in C. cum AB diviſa ſit biſariàm in C, & non biſariàm in D, erit rectang. AD, DB, unà cum quadrato ex C D, æquale quadrato ex CB. Quare ſi ex quadrato 100. ſeu ex quadrato lineæ CB 10 ſemiſſis 20. ſubtrahas rectangulum ex AD, DB ſeu 75. reſtat 25. quadratum ex CD. & per extractionem radicis C D, quæ ſubtracta ex C D ſemiſſe radicum relinquit DB. minorem radicem, & addita A C ſemiſſi radicum exhibet A D majus ſegmentum, ſed hoc jam probavimus aliàs.

PROPOSITIO XLII.

Problema.

Alia methodus inveniendi radicem cujuſlibet binomii.

Proponatur binomium quodcumque etiam improprium 20 + 16. cujus quæritur radix. Dividatur majus nomen 20. in duas partes, quæ multiplicatæ efficiant numerum æqualem quartæ parti quadrati minoris nominis, ſeu quadrato ſemiſſis minoris nominis ſeu 64. illæ partes erunt 16 & 4. harum radices copulatæ ſigno + ſunt radix binomii 20 + 16. & copulatæ ſigno — ſunt radix apotomes 20 — 16.

Demonſtr. Quadrata 16 & 4. adæquant majus nomen, quod ſuperioribus praxibus quadrat, in quibus dum radicem quadratam binomiam quadratè multiplicavimus, voluimus ut majus nomen eſſet ſumma quadratorum ſegmentorum radicis. Secundum nomen debet eſſe rectangulum comprehenſum bis ſub utraque parte radicis (*per* 4.2.) quod ſemel ſumptum medium proportionale eſt, inter quadrata ſegmẽtorum ejuſdem radicis, ideoque illius quadratum æquale eſt rectangulo comprehẽſo ſub quadratis: unde benè appoſuimus hanc conditionem ut ſegmenta in quæ dividitur majus nomen, in ſe ducta, efficerent rectangulum æquale quadrato ſemiſſis minoris nominis, ſic enim minus nomen integrum adæquabit rectangulum bis ſumptum.

Ex eo facilè quadrabimus radicem binomiam, ponendo pro primo nomine aggregatum quadratorum; pro ſecundo multiplicamus quadrata inter ſe, & producti radicem quadratam duplicamus, & exhibebitur ſecundum nomen binomii.

In his omnibus appoſui exempla binomiorum impropriorum, ut facilior eſſet demonſtratio: eam etiam in binomiis propriis conſiderabimus.

Sit hoc binomium 20 + Rq 300. quarta pars quadrati eſt 75. dividatur majus nomen 20 in duas partes, quæ in ſe ductæ producant numerum 75. Scilicet aufer 75 ex 100. quadrato ſemiſſis numeri 20. reſtat 25. cujus radix quadrata 5. addita ſemiſſi 10. efficit 15. & ſubtracta relinquit 5. Extrahe radices & habebis ℞q 15. + ℞q 5. pro radice binomii.

Proponatur item reſiduum ℞q 18 — 4. divide 18. in duas partes, quæ multiplicatæ efficiant 4 quadratum ſemiſſis minoris nominis. ſume $4\frac{1}{2}$. quartam partem quadrati 18. ex qua aufer quadratum 4. reſtabit $\frac{1}{2}$. cujus radix nempè ℞q $\frac{1}{2}$. addita ad ſemiſſin ℞q 18. nempè ad ℞q $\frac{18}{4}$. efficit ℞q $4\frac{1}{2}$. & ſubtracta efficit ℞q 2 habes igitur ℞q $4\frac{1}{2}$. — ℞q 2. ex quibus extrahendæ ſunt radices, & quia non poſſunt ita notabis, ℞qq $4\frac{1}{2}$ — ℞qq 2.

ALGEBRÆ
LIBER QVARTVS.

Varia problemata æquationum compoſitarum.

ANTEQVAM ulteriùs in tradendis præceptis progrediamur, æquum eſt ut jam tradita, ad uſum, & praxin revocemus; ſic enim melius hærebunt memoriæ, & quaſi conſequentur: viamque ad ulteriorem doctrinam ſternent. Exempla autem quæ proferimus ex Diophanto cæteriſque authoribus deſumentur; faciliora que reddentur quam in iis authoribus inveniantur.

PROPOSITIO I.

Problema.

Invenire duos numeros quorum differentia ſit 6. & cuborum differentia ſit 504.

Ponatur latus majoris cubi 1R. + 3. & minoris 1R — 3. ſic enim ſatisfit primæ conditioni ut eorum differentia ſit 6: fiat utriúſque cubus, ſi multiplices 1R. + 3. fiet quadratum 1q. + 6R. + 9. quem numerum ſi multiplices iterum per 1R. + 3. fiet 1c. + 9q. + 27R. + 27. & cubus minoris erit 1c — 9q. + 27 R. — 27. aufer minorem cubum ex majori. Primum membrum unius perimit primum alterius, ſicut & tertium: reſtat ergo differentia 18q. + 54. quam æqualem volumus numero 504. habemus ergo æquationem 18q. + 54 = 504. ſubtrahe 54. reſtabit 18q. = 450. & divi-

dendo per 18. 1q. = 25. & extrahendo radicem quadratam erit una radix 5. & cum major numerus ſit 1R. + 3. erit numerus 8. alter verò 5 — 3. ſeu 2. cubi 8. & 512. differentia 504.

Methodo ſpecioſâ. ſit 6 idem quod B. ſit minor pars A major A + B, erit cubus primæ A3. cubus ſecundæ A3. + 3A2B + 3AB2 + B3. differentia erit 3A2B, + 3AB2. + B3. quam volumus eſſe æqualem numero 504. qui exprimatur per D ſol. erit æquatio 3A2 + 3AB2 + B3 = D ſol. & per antitheſin 3A2B + 3AB2 = D ſol. — B3. divide omnia per B fiet æquatio 3A2 + 3AB = $\frac{D\ ſol}{B}$ B2.

D ſol. eſt 504. divide per B. ſeu 6. fiet 84. ſubtrahe 36. ſeu B2 reſtabit 48. æqualia 3A2 + 3AB, ſeu erit æquatio 3q. + 18R = 48. divide per 3. habebis 1q. + 6R. = 16. ſeu 1q = 16 — 6R. Adhibe methodum communem; ſcilicet quadrato 9. ſemiſſis radicum adde 16. fient 25. à cujus radice quadrata 5. ſubtrahe ſemiſſem radicum 3. reſtabit minor numerus 2. major erit 2 + 6. ſeu 8. Hæc ſecunda praxis non benè intelligetur donec tradita ſit generatio poteſtatum.

PROPOSITIO II.

Problema.

Numerum 10. dividere in duas partes, quarum cubi efficiant ſummam 370. majorem quarta parte cubi numeri 10.

Sit primum ſegmentum numeri 10. 1R. & conſequenter alterum 10 — 1R. cubus prioris erit 10. cubus poſterioris habebitur ſi multiplices 10 — 1R. bis per ſeipſum, fietque cubus ſecundæ partis 30q + 1000 — 300R. — 1c. adde primum cubum nempè + 1c. qui elidetur ab ultimo membro prioris, fietque 30q. + 1000. — 300R. = 370. transfer per antitheſin 300R. fiet alia æquatio 30q. + 1000. = 300R. + 370. aufer 370. erit æquatio 30q + 630 = 300R. divide per 30 fiet æquatio 1q + 21 = 10 R. & 1q. = 10R. — 21. quadratum ſemiſſis radicum 5. eſt 25. ab eo ſubtrahe 21. reſtant 4. cujus radici 2. adde 5. ſemiſſem radicum fit 1R. = 7. eſt ergo diviſus numerus 10. in 7 & 3. ſatisfacientes quæſtioni.

Numerus 10 ſit B. & 370 ſit D ſol. ſitque prima pars A. ſecunda erit B — A, cubus primæ erit A3. cubus ſecundæ fiet ſi B — A multiplicetur in ſe cubicè; erit ergo B3 — 3B2A + 3BA2 — A3. addatur cubus + A3 elidetur à — A3. eritque B3 — 3B2A + 3BA = D. divide omnia per B fiet B2 — 3BA + 3A2 = $\frac{D\ ſol}{B}$ & per antitheſes 3A2 + B2 — $\frac{D\ ſol}{B}$ = 3BA & diviſis omnibus per 3. habebis hanc æquationem A2 + $\frac{B2}{3}$ — $\frac{D\ ſol}{3B}$ = BA. eſt autem A2 1q; $\frac{B2}{3}$ 100 diviſum per 3. ſeu 33$\frac{1}{3}$ $\frac{D\ ſol}{3B}$ idem ac 370. diviſum per 30. eſt 12$\frac{1}{3}$. & BA eſt 10 R. ſubtrahe 12$\frac{1}{3}$. ex 33$\frac{1}{3}$. fiet 21. habebis æquationem 1q. + 21 = 10R. eamdem ac ſupra vel ſi velis transferre 1q. per antitheſin 10R. — 1q = 21. Hanc ſi velis ita expurgabis: ſit radix hujus A quæ ſubtrahatur ex 5. ſemiſſe numeri radicum: fietque 5 — A huic aggregato ſit æqualis E, ſitque æquatio 5 — A = E. & 5 — E = A. fiat quadratum 5 — E. is erit 25 — 10E + E2. fiant item 10 Radices hoc eſt multiplica 5 — E per 10. producentur 50 — 10E. ex quo numero ſubtrahe prius quadratum, fiet 25 — E2. habemus ergo aliam æquationem 25 — 1q = 21. transfer 1q. habebis æquationem 25 = 21. + 1q. & ſubtrahendo 21. reſtabit 4 = 1q & extrahendo radicem E erit 2. eſt ergo A = 5 — 2. ſeu 3 = 1R. quare diviſus eſt numerus 10 in 3 & 7. ut priùs.

PROPOSITIO III.

Problema.

Numerum invenire qui additus ad 20. efficiat ſummam æqualem ſuo quadrato.

Sit hic numerus 1R. qui additus ad 20. efficit ſummam 1R. + 20. hæc ſumma dicitur æqualis ſuo quadrato. nempè 1q. eſt ergo æquatio 1q. = 1R. + 20. quadratum ſemiſſis radicum $\frac{1}{2}$. eſt $\frac{1}{4}$. hoc addatur numero 20. fiunt 20 $\frac{1}{4}$. ſeu $\frac{81}{4}$. cujus Radix quadrata $\frac{9}{2}$. ſeu 4$\frac{1}{2}$. addatur ſemiſſi radicum ſeu $\frac{1}{2}$. fiet radix 5. quare numerus quæſitus eſt 5. qui additus ad 20 efficit 25. ſuum quadratum.

Methodo ſpecioſâ numerus 20 ſit B. & numerus quæſitus ſit A. cujus quadratum A2. eſt ergo æquatio A2 = A + B. pariter A2 — A. = B. ut hanc æquationem expurges ſit A — $\frac{1}{2}$. = E eritque A = E + $\frac{1}{2}$. fiat quadratum iſtius binomii E + $\frac{1}{2}$ fiet E2. + 1A + $\frac{1}{4}$. ſubtrahe ex hoc numero ſemel A ſeu E — $\frac{1}{2}$. cum id dicat æquatio, relinquetur æquatio E2 — $\frac{1}{4}$ = B ſeu 20. hoc eſt Eq = 20$\frac{1}{4}$. ſeu $\frac{81}{4}$. & extracta radice erit E $\frac{9}{2}$. ſeu 4$\frac{1}{2}$. eſt autem E + $\frac{1}{2}$. = A. ergo A erit 5.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Numerum invenire cujus quadratum additum numero 240. faciat ejuſdem qqtum.

Sit ille numerus 1R. ejus qtum eſt 1q. addatur numero 240. habebis ſummam 1q. + 240. quam volumus eſſe æqualem qqto. Eſt ergo æquatio 1qq. = 1q. + 240. & quia exponentes ſunt Arithmeticè proportionales, poterit aſſumi hæc 1q. = 1R. + 240. vel hæc 1q. — 1R. = 240. hanc ita expurgabis. Ex radice 1R. ſubtrahe ſemiſſem numeri radicum fiet 1R. — $\frac{1}{2}$ huic æqualis ſit A, erit 1R. = A + $\frac{1}{2}$. fiat ejus quadratum, illud erit Aq. + 1A. + $\frac{1}{4}$. ſubtrahe 1R. ſeu A + $\frac{1}{2}$. reſtabit Aq. — $\frac{1}{4}$ = 240. & Aq. = 240 + $\frac{1}{4}$. ſeu 1q. = $\frac{961}{4}$. cujus radix quadrata $\frac{31}{2}$. ſeu 15 $\frac{1}{2}$ eſt ergo A æqualis 15$\frac{1}{2}$. ſed A + $\frac{1}{2}$. eſt una radix, igitur propoſitæ æquationis radix erat 16. Quia tamen hæc radix eſt quadratum, ut habeatur ultima radix, debes aſſumere ejus radicem, eſt ergo 4 numerus quæſitus, cujus quadratum additum ad numerum 240. efficit 256 quadrato-quadratum, nam 16 eſt quadratum 64 cubus, & 256. quadrato quadratum.

Methodo ſpecioſâ ſit B 240. & numerus quæſitus A. cujus quadratum erit A2. & qqtum A4. eſt ergo æquatio A4. = A2. + B. poteſtque aſſumi A2. = A + B. ita autem expurgabitur, aſſumatur alia æquatio æquivalens A2 — A = B. ſitque radix A. à qua auferatur $\frac{1}{2}$. ſemiſſis numeri radicum fiet A — $\frac{1}{2}$. huic ſit æqualis E, erit A = E + $\frac{1}{2}$. fiat quadratum

quadratum hujus binomii id erit $E2 + E. + \frac{1}{4}$. ab ea quantitate ſubtrahe A. ſeu $E + \frac{1}{2}$ cum id dicat æquatio, & reſtabit $E2 - \frac{1}{4} = B$. & $E2 = B + \frac{1}{4}$. B erat 240. adde $\frac{1}{4}$ fit $240 + \frac{1}{4}$. ſeu $\frac{961}{4}$. cujus radix quadrata E eſt $\frac{31}{2}$. ſeu $15\frac{1}{2}$. eſt autem $E + \frac{1}{2}$. idem quod A; ergo A erat 16. & prima radix 4.

PROPOSITIO V.

Problema.

Numerum invenire cujus cubus additus numero 702. efficiat ejuſdem quadrato cubum.

Sit numerus quæſitus 1R. illius cubus eſt 1c. dicitur cubus additus numero 702. ſeu 1c.+702. eſſe æqualis quadrato cubo, habemus ergo æquationem $1qc. = 1c. + 702.$ cum autem exponentes Arithmeticè ſint proportionales: poteſt aſſumi hæc $1q. = 1.R. + 702.$ modò extrahatur radix cubica ex radice inventâ. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{1}{2}$. cujus quadratum $\frac{1}{4}$. addatur numero 702. fit $\frac{2809}{4}$ extrahatur radix quadrata $\frac{53}{2}$. ſeu $26\frac{1}{2}$. huic addatur $\frac{1}{2}$. ſemiſſis numeri radicum fiet 27. radix quæ adhuc cubus eſt, atque adeò, ex qua extrahenda radix cubica 3. eſt ergo valor unius radicis 3. cujus quadrato cubus eſt 729. æqualis numero 702. + 27 cubo ejuſdem.

Methodus ſpecioſa nihil habet peculiare.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Invenire duos numeros qui efficiant ſummam 30. & in ſe multiplicati efficiant 100.

Sit primus 1R. ſecundus erit 30 — 1R. cum eorum ſumma ſupponatur eſſe 30. multiplica 30 — 1R. per 1R. efficies productum 30R. — 1q. quæ ſumma dicitur eſſe æqualis numero 100; habemus ergo æquationem $30R. - 1q. = 100.$ addatur unum quadratum fiet $1q. + 100 = 30R.$ & per antitheſin ſubtrahendo 100. $1q = 30R. - 100.$ ſemiſſis numeri Radicum 15. quadratum eſt 225. à quo ſubtrahe 100. reſtat 125 carens Radice præciſâ, ideoque dices Rq. 125. cui addes 15. fietque valor unius radicis, 15 + Rq 125. ſeu paulò plus quam 26. ideoque reliqua pars erit paulò plus quam 26. ideoque reliqua pars erit paulò minor quam 4.

Sæpe occurrunt hujuſmodi numeri ſurdi, qui indicant non poſſe ſolvi quæſtionem per numeros propriè dictos.

Methodo ſpecioſâ ſit 30 B. & 100 D. ſitque primus numerus quæſitus A. alter erit B—A. cum ſupponatur eorum ſumma eſſe B, multiplica B—A per A fiet productus AB—A2. quem voluimus eſſe æqualem numero D. habemus ergo æquationem $AB - A2 = D$ ut expurgetur ex $\frac{B}{2}$ ſubtrahe A. ſitque $\frac{B}{2} - A$ cui æqualis ſit E, adde A per antitheſin fiet æquatio $\frac{B}{2} = E + A$, & rurſus per antitheſin $\frac{B}{2} - E = A$. multiplicetur hæc radix $\frac{B}{2} - E$. quæ pro A aſſumitur per B. quia in primo membro æquationis eſt AB. fiet $\frac{B2}{2} - EB$ qui numerus eſt idem ac AB, ex eo auferre debes A2. ſeu quadratum hujus radicis $\frac{B}{2} - E$ pro A poſitæ; eſt autem quadratum $\frac{B2}{4} - EB + E2$ quod ſubtractum ex $\frac{B2}{2} - EB$ relinquit $\frac{B2}{4} - E2 = D$, per antitheſes habebis æquationem $E2 = \frac{B2}{4} - D$ eſt autem B 30. B2 eſt 900. & $\frac{B2}{4}$ eſt 225. & — D 100. reſtat 125. quare E eſt ℞q 125. & conſequenter cum $\frac{B}{2} - E$ ſit A erit A idem quod 15 — ℞q125. quia verò ℞q125 eſt major quam 11. erit A paulò minor quam 4.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Numerum invenire cujus qqtum additum numero 125. ſummam efficiat quadrati ejus trigecuplam.

Sit numerus quæſitus 1R. erit ejus qqtum. 1qq. addatur numero 125, efficiet ſummam 1qq + 125. eſt item ejus quadratum 1q. hanc ſummam volumus eſſe quadrati trigecuplam, ergo 1q multiplicatum per 30. efficiet productum tali ſummæ æqualem. Habemus ergo æquationem $1qq + 125 = 30q.$ & quia exponentes terminorum ſunt Arithmeticè proportionales reduci poteſt ad hanc $1q + 125 = 30R.$ & per antitheſin ad hanc $1q = 30R. - 125.$ quadratum ſemiſſis numeri radicum 15. eſt 225 aufer 125. reſtat 100. cujus radix 10. hæc ſubtracta ex 15. numero radicum; dat 5 primam radicem; ex qua ulteriùs extrahenda eſt radix quadrata. Quare ℞q5 ſatisfacit quæſtioni: illius enim quadratum eſt 5. & quadratoquadratum eſt 25. quod additum ad 125. efficit ſummam quadrati 5 trigecuplam, nempe 150.

Aliter eadem radix quadrata 10 addita ad 15 ſemiſſem numeri radicum efficit 25. ex qua ulterius extrahenda eſt radix quadrata, quare numerus 5 ſatisfacit quæſtioni: nam illius quadratum eſt 25. & quadratoquadratum 625. quod additum ad 125. efficit ſummam 750. quadrati 25 trigecuplam.

Methodo ſpecioſâ ſit D 125. & B30. & numerus quæſitus A, eritque ut præfert propoſitio $BA2 = A4 + D$. vel quia exponentes ſunt Arithmeticè proportionales, habebis hanc æquationem $BA = A2 + D$. & per antitheſin $BA - A2 = D$. ut expurgetur; ſume dimidium coëfficientis B. eritque $\frac{1}{2}$ ex quo ſubtrahes radicem A fietque $\frac{1}{2}$. B — A. cui æqualis ponatur E, & per antitheſin $\frac{1}{2} B - E = A$ ut habeas BA primum membrum æquationis, multiplica binomium $\frac{1}{2} B - E$ per B. habebis $\frac{1}{2} B2 - BE$: ſecundum membrum æquationis ſeu — A2 dicit ex eo numero ſubtrahendum quadratum binomii $\frac{1}{2} B - E$. Eſt autem tale quadratum $\frac{1}{4} B2 - BE + E2$. quod ſubtractum ex $\frac{1}{2} B2 - BE$. relinquit $\frac{1}{4} B2 - E2$. habemus ergo aliam æquationem $\frac{1}{4} B2 - E2 = D$, & per antitheſin $\frac{1}{4} B2 - D = E2$. eſt autem B idem quod 30 & B2. erit 900, & $\frac{1}{4} B2$ erit 225. D eſt 125: quare $\frac{1}{4} B2 - D$ erit $100 = E2$. & & extrahendo radicem invenio 10. pro E. Eſt

autem $\frac{1}{2}$ B. ſeu 15 — E, ſeu minus 10, hoc eſt 5 idem cum A: ergo A eſt 5. ſed quia erat qqtum, ulterius extrahenda eſt radix quadrata: quare ℞q5 ſatisfacit quæſtioni.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Numerum invenire cujus qc additus ad 169344. ſit cubi ejuſdem millecuplus.

Numerus quæſitus ſit 1R hujus qc, eſt 1qc. additus ad numerum propoſitū facit 1qc. + 169344. quia eſt unius cubi millecuplus: ergo habemus æquationem 1qc. + 169544 = 1000 cubi, & quia exponentes ſunt Arithmeticè proportionales 6. 3. 0. reduci poteſt ad ſequentem, modo in fine extrahatur radix cubica 1q + 169344 = 1000R. vel per antitheſin 1q. = 1000R. — 169341. ſemiſſis numeri radicum eſt 500. è cujus quadrato 250000. ſubtrahe 169344. reſtabit 80656. cujus radix quadrata 284. quam ſubtrahere potes ex 500. ſemiſſe radicum ut habeas minorem radicem 216. ex qua ſi extrahas radicem cubicam 6 habebis valorem unius radicis, cujus qc. eſt 46656. qui additus ad 168344. facit numerum 216000. millecuplum cubi 216. & quia hæc æquatio eſt amphibola inventam radicem 284. adde ad 500. fiet 784. cujus radix cubica ℞c. 784. quadratocubus 614656. additus 169344 ſummam efficit 784000. cubi 784. millecuplam.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Numeros invenire quorum exceſſus 6. & productus ex eorum multiplicatione ſit 720.

Sit minor numerus 1R. major erit 1R. + 6. multiplicentur inter ſe, fiet productus 1q. + 6R. quem volumus æquari numero 720. habemus ergo æquationem 1q. + 6R. = 720. ut expurgetur, ſit 1R. cui adde 3, ſemiſſem coëfficientis fiet 1R. + 3. huic ſit æqualis A. erit ergo 1R = A — 3. fiat quadratum hujus binomii A — 3, is erit Aq. — 6A. + huic adde 6R. ſecundum membrum æquationis, ſeu 6A — 18. fiet ſumma Aq — 9. habemus ergo æquationem aliam 1q. — 9 = 720. adde 9. fiet 1q. = 729. extrahe radicem quadratam 27. eritque A = 27. ſed A — 3. æquatur uni radici, ergo 1R. eſt 24. habes igitur numeros 24 & 30. quorum exceſſus eſt 6. & multiplicati producunt 720.

PROPOSITIO X.

Problema.

Numerum invenire, cujus cubus junctus quadratocubo efficiat ſummam 4160.

Sit ille numerus 1R. ejus cubus 1c. ejus quadratoc. 1qc. habemus ergo æquationem 1qc. + 1c = 4160. & quia exponentes ſunt Arithmeticè proportionales 6. 3. 0. aſſumi poteſt hæc æquatio 1q + 1R. = 4160. & per antitheſin 1q = 4160 — 1R. Eſt ſemiſſis numeri radicum $\frac{1}{2}$ cujus quadrato $\frac{1}{4}$. adde 4160. fiet 4160$\frac{1}{4}$, ſeu $\frac{16641}{4}$. cujus radix quadrata $\frac{129}{2}$ ſeu 64$\frac{1}{2}$ è quo ſi auferas ſemiſſem radicum $\frac{1}{2}$. reſtat 64. cujus radix cubica 4. ſatisfacit quæſtioni, nam ejus cubus 64. & quadratocubus 4096. efficiunt ſummam propoſitam 4160.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Numerum invenire cujus qdtum mulctatum numero 264 ſit illius decuplum.

Sit numerus propoſitus 1R. cujus quadratum 1q. — 264. ſit illius decuplum id eſt ſit æquale 10 R.: eſt ergo æquatio 1q — 264 = 10R. & per antitheſin 1q. = 10R. + 264. quadratum ſemiſſis radicum 5 erit 25. cui adde 264. fiet 289. extrahatur radix, hæc erit 17 cui addes 5. ſemiſſem radicum fiet radix quæſita 22. ex illius quadrato 484. ſubtrahe 264. reſtabit 220. decuplus numeri. 22.

Methodo ſpecioſâ ſit 10. idem quod 2B. & 264. idem quod D. A numerus quæſitus: eritque A2 — D = 2BA. & per antitheſin A2 — 2BA = D. ut expurgetur, A mulctetur B, fiatque A — B, cui E ſit æquale eritque A = E + B. fiat quadratum iſtius E + B pro A2 eritque E2 + 2B + 2. è quo auferre debes 2AB, ſeu 2B in E + B. multiplica E + B per 2B fient 2BE + 2B2, quæ ſubtrahi debent ex priori quadrato reſtabit E2 — B2. habemus ergo æquationem E2 — B2 = D. & per antitheſin B2 + D. = E2. B autem eſt 5. B2. 25. D eſt 264. adde 25. fiunt E2 + = 289. extrahe radicem habebis 17. eſſe E, ſed E + B eſt A, ergo A eſt 17 + 5. ſeu 22.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Duos numeros invenire quorum quadrata, ſummam componant 180. duplam & ſeſqui alteram producti ex eorum multiplicatione.

Cum quadratorum ſumma ſit 180. & dicatur dupla & ſeſqui altera producti, ex eorum multiplicatione, is erit 72. Ponatur primus numerus 1R. per quem ſi dividas 72 habebis alium $\frac{72}{1R}$: cujus quadratum $\frac{5184}{1q}$. habemus autem ſummam quadratorum ſeu 1q. + $\frac{5184}{1q}$ = 180. addantur duo prima membra quod ut fieri poſſit reducantur ad

$$\begin{array}{ccc} \underline{1qq} & & \underline{5184.} \\ \frac{1q}{1} & \times & \frac{5184.}{1q} \\ & 1q & \end{array}$$

eundem denominatorem, per multiplicationem decuſſatam, fietque $\frac{1qq + 5184}{1q}$ = 180. & ut expurgetur fractio, 180, ſcribatur ad modum fractionis

ctionis $\frac{180}{1}$. reducaturque ad eandem denominationem cum priori, multiplicatione decuſſatâ, fietque alia æquatio $\frac{1qq + 5184}{1q} = \frac{180q}{1q}$ & abjecto communi denominatore fit æquatio 1qq.+5184.

$$\frac{1qq + 5184}{1q} \times \frac{180}{1}$$

$$\frac{1qq + 5184}{1q} \quad \frac{180q}{1q}$$

$=$180 q. & quia exponentes ſunt Arithmeticè proportionales reducetur ad hanc 1q. + 5184 $=$180 R. & iterum ad hanc 1 q. $=$ 180R.— 5184. Ex quadrato ſemiſſis radicum 90.8100.ſubtrahe 5184. reſtabit 2916. cujus radici quadratæ 54. adde 90 ſemiſſem numeri radicum, fiet 144. è quo ulterius eruenda eſt radix quadrata, quia inter æquationis terminos mediabat unus. Eritque 12 $=$ 1 R. & dividendo 72. per 12 habebis ſecundum numerum 6.

Et quia hæc æquatio amphibola eſt, ex 90 ſemiſſe radicum ſubtrahe 54. radicem primò inventam reſtant 36. cujus radis quadrata 6. eſt alter numerus.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Invenire numerum qui alium numerum excedat tribus unitatibus, & à tertio ſuperetur novem unitatibus, qui duo ultimi multiplicati producant 133.

Sit ille numerus 1 R. eritque ſecundus 1 R. —3. tertius 1R.+ 9. multiplica 1R.—3.per 1R. + 9 fiet 1q + 6R.— 27. quem numerum volumus eſſe æqualem, numero 133. eſt ergo æquatio 1q.+6R.—27 $=$ 133. addantur 27. fiet æquatio 1q. + 6R. $=$ 160 & per antitheſin 1q. $=$ 160 —6R. adde ad 160. numerum 9. quadratum ſcilicèt dimidiatum radicum, fiet 169. à cujus radice 13. ſubtrahe 3. numerum dimidiatum radicum; fit 10.eſt ergo 10. numerus, excedens 7 ternario. & ſuperatus à 19. novenario productus autem ex 7 in 19 eſt 133.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Numerum invenire, quem alij duo ſuperent 7 & 9. unitatibus & productus eorum multiplicatione 73 unitatibus ſuperet triplum quadrati primi numeri.

Sit primus numerus quæſitus 1R, cujus quadratum 1q, triplum quadrati 3q: ſecundus erit 1R. + 7. & tertius 1 R. + 19. hi duo ultimi multiplicentur inter ſe, fiet productus 1q.+ 26R. + 133. qui dicitur ſuperare 73 unitatibus triplum quadrati numeri primi: eſt ergo æquatio 3q + 73 $=$ 1q.+ 26R. + 133. ſubtrahe utrinque 1q. erit æquatio 2q. + 73 $=$ 26R.+133. ſubtrahe 73. erit æquatio 2q $=$ 26R. + 60. divide per 2 fiet 1q $=$ 13R. + 30. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{13}{2}$. quadratum $\frac{169}{4}$. adde 30. ſeu $\frac{120}{4}$. fiet $\frac{289}{4}$. cujus radici quadratæ $\frac{17}{2}$. ſeu 8 $\frac{1}{2}$. adde 6 $\frac{1}{2}$, dimidium radicum, fiet 15. valor unius radicis, cui adde 7. fit 22. & 19. fiet 34 ſunt ergo numeri 22. & 34 qui multiplicati producunt 748. qui numerus ſuperat 675. triplum quadrati 225. unitatibus 73.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Invenire numerum cujus quadruplus, cum ejuſdem quadrato efficiat ſummam 400.

Quæſitus numerus ſit 1R. ejus quadruplus erit 4R. quadratum ejus eſt 1q. quare 1q. + 4R $=$ 400. & per antitheſin 1q. $=$ 400—4R. quadratum numeri 2. ſeu 4. addatur numero 400. fit aggregatum 404. ex cujus radice quadratâ ℜq 404. ſubtrahe 2. fit Rq 404 — 2. valor unius radicis. Debet autem ejus quadruplus cum ejus quadrato, efficere 400, quare quadruplicetur ℜq 404 — 2. nempe multiplicetur ipſa per 16 quadratum numeri 4.ut ſolent radices multiplicari,fiet ℜq 6464. multiplica item—2. per 4. fit — 8: habemus ergo ℜq 6464 — 8. quadruplum unius R. quod additum quadrato ejuſdem R. nempe 404 — ℜq 6464+4.efficit ſummam 404.—4.id eſt 400. Notanda ſunt duo. Primum, ut fiat quadratum ℜq 404—2. multiplicatur —2 per — 2. & fit +4. exinde multiplicatur ℜq 404. per 4. ſeu per quadratum numeri 2. & hoc bis ita ut fiat bis ℜq 1616. ſecundum quod ut addantur duæ radices æquales, quadruplicari debet quadratum, ut docuimus ſuo loco, quare ℜq 1616. bis ſumpta efficit ℜ 6464. quæ innuiſſe juverit.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Duos numeros reperire qui inter ſe multiplicati generent 78. & ſumma quadratorum faciat 205.

Sit primus numerus 1R. per quem ſi dividas productum 78. erit quotiens alter numerus $\frac{78}{1R}$ quadratum unius Radicis eſt 1q. quadratum hujus numeri $\frac{78}{1R}$ eſt $\frac{6084}{1q}$ ut fiat additio $\frac{6084}{1q}$ & $\frac{1q}{1}$ reducantur ad eamdem denominationem fientque $\frac{1qq}{1q}$ $\frac{6084}{1q}$ adde numeratores ut fiant ſumma, habebebis ſummam $\frac{1qq + 6804}{1q} = \frac{205}{1}$. reducantur iterum ad eandem denominationem; abjectis denominatoribus relinquetur æquatio 1qq $=$ 205 q. — 6084 & quia exponentes ſunt Arithmeticè proportionales,erit æqu.1q $=$ 205R.—6084.ſemiſſis radicum eſt $\frac{205}{2}$. è cujus quadrato $\frac{42025}{4}$. ſubtrahe 6084. ſeu $\frac{24336}{4}$, reſtabunt $\frac{17689}{4}$. cujus radix quadrata $\frac{133}{2}$. cui adde ſemiſſem numeri radicum, nempe $\frac{205}{2}$. fiet $\frac{338}{2}$ ſeu 169. cujus iterum educenda radix quadrata 13. Ergo 13. eſt primus numerus

Digitized by Google

merus quæſitus, & dividendo 78 per 13. invenio 6 pro ſecundo. quare 6 in 13 producunt 78. Item quadrata 36. & 169. efficiunt ſummam 205.

Quia hæc æquatio eſt amphibola; ſubtracto homogeneo comparationis ex quadrato ſemiſſis radicum, & ex reliquo extracta radice quadrata, quæ eſt $\frac{133}{2}$. hæc poteſt ſubtrahi ex ſemiſſe numeri radicum nempe $\frac{205}{2}$. reſtatque $\frac{72}{2}$. ſeu 36. cujus iterum extrahenda radix quadrata 6. ſic invenitur immediate minor numerus.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Datum numerum 283. *in tres continuè proportionales partiri, quorum medius ſit* 78. *debet autem quadratum ejus non eſſe majus, quadrato numeri relicti ſubtrahendo* 78 *ex* 283. *ſeu* 205. *hoc eſt* 78. *debet eſſe minor mediatè numeri* 283.

Primus numerus ſit 1R. ſecundus ſupponitur 78. qui ſubtractus ex 283. relinquit 205. ſummam extremorum, & cum primus ſit 1R. ultimus erit 205 — 1R. cum autem ſupponantur Geometricè proportionales, erit rectang. ſub extremis æquale quadrato medij, (*per* 15. 6.) fiat quadratum 78. id erit 6084, fiat item rectang. ſub 205 — 1R. & ſub 1R. erit 205 R. — 1q == 6084 vel 1q == 205 R. — 6084. Semiſſis Radicum eſt $\frac{205}{2}$. ex cujus quadrato $\frac{42025}{4}$. ſubtrahe 6084 ſeu $\frac{24336}{4}$. reſtabit $\frac{17689}{4}$. cujus radis quadrata $\frac{133}{2}$. hanc adde ad ſemiſſem radicum $\frac{205}{2}$. & ſubtrahe ab eâdem, fient $\frac{338}{2}$. & $\frac{72}{2}$. ſeu 169. & 36. Sunt ergo tres numeri proportionales 169. 78. 36. efficientes ſummam 283. quorum medius eſt 78. Poſui autem, ut medius nempe 78. eſſet minor media parte ſummæ trium numerorum: quia alioqui ejus quadratum non poſſet eſſe æquale rectangulo facto ſub duobus reliquis.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Datum numerum 10. *dividere in duas partes quarum cubi, ſint æquales numero* 370. *majore quarta parte cubi numeri* 10.

Proponitur ergo numerus 10. ita dividendus. Sit prima pars 1R altera erit 10 — 1R. cubus primi ſegmenti erit 1c. cubus autem ſecundi fiet multiplicando numerum 10 — 1R cubicè: inveniturque 1000 — 300R. + 30q — 1c. ſi addas 1c. qui elidet ultimum membrum præcedentis 1000 — 300R. + 30q. == 370. adde 300R per antitheſin fiet æquatio 1000 + 30q == 300R. + 370 ſubtrahe 370. fiet æquatio 30q + 630 == 300 R vel 30q. == 300R. — 630. divide per 30. fiet æquatio 1q. == 10R. — 21. ſemiſſis radicum eſt 5. è cujus quadrato 25. ſubtrahe homogeneum comparationis 21, reſtat 4. cujus radici 2 adde 5. ſemiſſem radicum habebis 7. tum radicem 2 ſubtrahe ex 5. ſemiſſe radicum habebis 3. ſunt ergo duæ radices 7 & 3. eſt enim amphibola æquatio: cubus 7 eſt 343. cubus 3 eſt 27. ſumma eſt 370.

Methodo ſpecioſa ſit 10 B, ſitque primum ſegmentum ejus A, erit ſecundum B — A. fiat utriuſque cubus: erit cubus A. A3. cubus B — A fiet, ſi B — A. per B — A multiplicetur, fietque B2 — 2BA + A2 ejus quadratum, multiplicetur hoc quadratum per B — A. fiet B3 — 3B2A + 3BA2. — A3. adde priorem cubum + A3. elidetur ultimum membrum, reſtabitque B3 — 3B2A + 3BA2 == Z ſol. ponendo Z ſol. pro 370. & transferendo per Antitheſin ſecundum membrum, habebis æquationem B3 + 3BA2 == Z ſol. + 3B2A. vel transferendo Z ſol. habebis 3BA2 + B3 — Z ſol. == 3B2A. Divide omnia per B. habebis æquationem 3A2 + B2 — $\frac{Z\ sol}{B}$ == 3BA divide per 3. habebis A2 + $\frac{B2}{3}$ — $\frac{Z\ sol.}{3B}$ == BA: primum membrum A2 eſt 1q. ſecundum + $\frac{B2}{3}$ eſt $\frac{100}{3}$ ſeu 33 $\frac{1}{3}$. tertium — $\frac{Z\ solidum}{B3}$ eſt 370. diviſum per 30 ſeu 12 $\frac{1}{3}$. BA eſt 10. R. habemus ergo æquationem 1q. + 33 $\frac{1}{3}$. — 12 $\frac{1}{3}$ == 10R. ſubtrahe 12 $\frac{1}{3}$. ex 33 $\frac{1}{3}$. habebis æquationem 1q. + 21 == 10R. vel ut prius 1q == 10 R. — 21 cætera ſimiliter fient.

Ex quo vides praxin communem in pleriſque exemplis non eſſe ita intricatam.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Numerum 30. *ita dividere in duo ut quadrata totius, & partium ſint Arithmeticè propotionalia.*

Sit majus ſegmentum 1R. & minus 30. — 1R. quadratum 30 eſt 900. quadratum 1R. eſt 1q. quadratum 30 — 1R. eſt 900 — 60 R. + 1q. ſunt igitur Arithmeticè proportionalia 900. 1q. & 900 — 60 R. + 1q. ſuntque extremi æquales duplo medii. Habemus ergo æquationem 1800 — 60 R. + 1q == 2q. ſubtrahe 1q. habebimus æquationem 1800 — 60R. == 1q. ſemiſſis radicum 30. quadrato 900. adde 1800. fit ſumma 2700. cujus Radix quadrata ℞q 2700. ſubtrahe 30. ſemiſſem radicum reſtabit fere 22. nempe ℞q 2700 — 30. hæc detrahatur ex 30. fiet 60. — ℞q. 2700. quare minor pars erit 60. — ℞q. 2700. Quadratum primæ, ſcilicet ℞q 2700 — 30. eſt 2700 — ℞ 9720000 + 900: quadratum ultimæ 3600 — ℞q 38880000 + 2700. adde huic ultimæ quadratum numeri 30. ſeu 900 fiet ſumma 7200 — ℞q 38880000, quæ debet eſſe æqualis quadrato primæ duplicato ſeu 2700 — Rq 9720000 + 900. ſeu 3600 — Rq 9720000 duplicato: ſeu 7200 — ℞q 38880000 ut eſt reipſa: quare quadrata ſunt Arithmeticè proportionalia.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Numerum quemcumque ut 100 extremâ, & mediâ ratione ſecare.

Sit propoſitus numerus 100. extremâ, & mediâ ratione ſecandus; hoc eſt, ita ut numerus 100, majus ſegmentum, & minus ſegmentum, ſint continuè proportionalia: ſitque conſequenter rectangulum comprehenſum ſub numero 100, & minori ſegmento, æquale quadrato majoris ſegmenti. Sit majus ſegmentum 1R. erit minus ſegmentum 100 — 1R. eritque quadratum medii 1q. cui æquale eſſe debet rectang. ſub 100. & ſub 100 — 1R. nempè 10000 — 100 R. Habemus ergo æquationem 1q. ═ 10000 — 100 R. eritque quadratum ſemiſſis radicum 50. 2500. cui addatur homogeneum comparationis 10000. fietque ſumma 12500, extrahe radicem quadratam quæ erit ferè 112. ex quâ ſubtrahes 50. ſemiſſem numeri radicum, reſtabit ferè 62. ſeu erit majus ſegmentum ℞q 12500 — 50. hoc ſi ſubtrahas ex numero 100. reſtabit minus ſegmentum 150 — Rq 12500. ſeu paulò plus quam 38. Scilicet rectangulum ſub 100. & minori ſegmento erit 15000. — Rq 125000000: quadratum majoris ſegmenti ℞q. 12500 — 50 eſt 12500 — ℞q 125000000 + 2500. & addendo primum & ultimum membrum fiet 15000 — ℞q 125000000. eſt ergo ſatisfactum quæſtioni.

Alio item modo poteſt ſatisfieri quæſtioni (*per* 11.2. *Eucl.*) ad quadratum numeri 100. ſcilicet ad 10000. adjice ejuſdem quadrati quartam partem, ſeu quadratum ſemiſſis fiet 12500. ex cujus radice quadrata dematur ſemiſſis dati numeri 100, reſtabit majus ſegmentum.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Datum numerum ut 50. ita dividere ut quadratum majoris ſegmenti rationem habeat triplam, ad quadratum minoris.

Supponatur majus ſegmentum eſſe 1R. ejus quadratum erit 1q. minus ſegmentum in illa hypotheſi erit 50 — 1R. & ejus quadratum 2500 — 100R. + 1q. & triplicatum erit 7500 — 300 R. + 3q. habemus ergo æquationem 1q. ═ 7500 — 300R. + 3q. adde per antitheſin 300R. & ſubtrahe 7500 & 1q. fiet æquatio 2q. ═ 300 R. — 7500. divide per 2. habebis æquationem 1q. ═ 150R. — 3750. Semiſſis radicum eſt 75. è cujus quadrato 5625. ſubtrahe 3750 reſtabit 1875. cujus radix quadrata major quam 43. ſubducta ex 75. relinquit ferè 32. majus ſegmentum & 18. erit minus quorum quadrata 1024. & 324. ſunt ferè in ratione tripla. Si exactè velis erit majus ſegmentum 75 — ℞q 1875. & minus erit ℞q 1875 — 25. quorum quadrata ſi fiant prædictam habent rationem.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Numerum datum 30. dividere in duos numeros quorum radices quadratæ ſe excedant quinario.

Ponatur minoris ſegmenti radix 1R — $\frac{5}{2}$. & majoris 1R. + $\frac{5}{2}$. ſic enim ſe excedent quinario. Eorum quadrata erunt 1q. — 5R. + $\frac{25}{4}$. & 1q. + 5R. + $\frac{25}{4}$. Addantur ſimul hæc quadrata fiet ſumma 2q. + $\frac{50}{4}$ ═ 30. divide per 2. fiet 1q + $\frac{25}{4}$ ═ 15. ſubtrahe $\frac{25}{4}$. ex 15. ſeu $\frac{60}{4}$. reſtabit 1q. ═ $\frac{35}{4}$. ſeu extrahendo radicem quadratam habebis ℞q $\frac{35}{4}$. valorem unius radicis: poſitum autem erat minus ſegmentum 1R. — $\frac{5}{2}$. ſeu 1R. — 2$\frac{1}{2}$. erit ergo ℞q $\frac{35}{4}$. — 2$\frac{1}{2}$. ſeu ferè $\frac{6}{2}$ — 2$\frac{1}{2}$. ſeu 3 — 2$\frac{1}{2}$. hoc eſt $\frac{1}{2}$: majus ſegmentum eſt 1R. + 2$\frac{1}{2}$. ſeu ℞q $\frac{35}{4}$. + 2$\frac{1}{2}$. hoc eſt ferè 3 + 2$\frac{1}{2}$. ſeu ferè 5$\frac{1}{2}$. cujus quadratum eſt 30 + $\frac{1}{4}$. & quadratum alterius partis eſt $\frac{1}{4}$. eſſet igitur ſumma 30$\frac{1}{2}$. cum deberet eſſe tantum 30. ſi tamen procedatur per radices ſurdas, erit perfecta æquatio.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Invenire numerum quem quadratum ejus excedat numero 210.

Sit quæſitus numerus 1R. & quadratum ejus 1q illum excedens numero 210. eſt ergo 1A. + 210 ═ 1q. eſt autem ſemiſſis numeri radicum $\frac{1}{2}$ cujus quadrato $\frac{1}{4}$ adde 210 ſeu $\frac{840}{4}$. fiet ſumma $\frac{841}{4}$. cujus radix quadrata $\frac{29}{2}$ ſeu 14$\frac{1}{2}$. cui adde ſemiſſem radicum $\frac{1}{2}$. fit 15. radix quæſita, cujus quadratum 225. ſuperat radicem 15. numero 210. In pleriſque exemplis ſimilibus occurrent radices ſurdæ.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Invenire numerum quo addito ad 12. fiat ſumma quæ multiplicata per eundem efficiat numerum æqualem numero 189.

Sit ille numerus 1R. qui addatur ad 12. fietque ſumma 1R. + 12. hæc multiplicetur per 1R. producetur numerus 1q. + 12R, quem volumus eſſe æqualem numero 189. Habemus ergo æquationem 1q ═ 189 — 12R. Ad 36 quadratum numeri 6. ſemiſſis radicum, adde 189 fiet numerus 225; ex cujus radice quadratâ 15. ſubtrahe 6: reſtat 9 valor unius radicis, ſeu numerus ſatisfaciens quæſtioni: nam 9. additus ad 12. efficit 21. qui ductus in 9 producit 189.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Numerum datum ut 20. ita in duas partes ſecare, ut multiplicatæ productum efficiant, qui ductus in quadratum numeri 20. producat 14400.

Sit prima pars 1R. ſecunda 20 — 1R. multipli-

Digitized by Google

centur inter ſe, fiet productus 20R.—1q: multiplicetur per 400. ſeu per quadratum numeri 20. fiet 8000 R. —400q. quem numerum volumus eſſe æqualem numero 14400. habemus igitur æquationem 8000R.—400q.═14400.& addendo 400q habebitur 400q. + 14400═8000R. & ſubtrahendo 14400. erit 400q ═ 8000 R. — 14400. divide per 400. fiet æquatio 1q ═ 20R. —36 : quadratum ſemiſſis radicum eſt 100 : è quo ſi ſubtrahas 36. relinquitur 64. cujus radici quadratæ, adde 10 fit 18. vel ſubtrahe 8 ex 10. habebis 2. Sunt ergo numeri 2 & 18. ſatisfacientes quæſtioni:nam 2 in 18. efficiunt ſummam 36. quæ multiplicata per 400. producit numerum 14400.

Methodo ſpecioſa ſit 20.B. ſitque primum ſegmentum A, ſecundum erit B—A multiplicentur fiet ſumma AB—A2. multiplicentur per quadratum numeri B, ſeu per B2. fiet AB3. —A2B2. quam ſummam volumus eſſe æqualem numero 14400. ponatur hic numerus Z. habemus æquationem ſequentem AB3 — A2B2 ═ Z ſ. divide omnia per B2. fiet æquatio AB—A2 ═ $\frac{Z}{B2}$ & per antitheſin A2+ $\frac{Z}{B2}$═BA reſolve in numeros, & divide Z ſeu 14400. per 400. ſeu B2. habebis 36. eſt ergo æquatio 1q + 36 ═ 20 R. eadem quæ ſuperior.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Quærenti ſummam pecuniarum in crumena contentarum, reſpondi ſi pecunia quam habeo adderetur dimidium, triens & quadrans & è ſumma detraheretur $\frac{1}{12}$ primi numeri haberem aureos 600 : quæritur numerus aureorum in crumena contentorum.

Supponatur ille numerus 12R(ſeligitur numerus habens ſemiſſem trientem & quadrantem, ad vitandas fractiones,) addatur ſemiſſis ſeu 6. R. & triens ſeu 4R.& 3R. ſeu quadrans,fient 25R.ſubtrahe $\frac{1}{12}$. primi numeri, reſtat 24R : quem numerum volumus eſſe æqualem 600 aureis:ergo æquatio erit 24R. ═600 divide per 24. fiet quotiens 25. pro valore unius radicis, poſueram autem 12 radices; quare multiplica 25. per 12. & habebis numerum pecuniarum 300 aureorum, quibus ſi addas $\frac{1}{2}$. ſeu 150. & trientem ſeu 100.& quadrantem 75 fiet ſumma 625 : ſubtrahe $\frac{1}{12}$. primi numeri 300 ſeu 25, reſtabit numerus propoſitus 600.

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Viator ſingulis diebus peragrat 10 milliaria decemque diebus progreditur, alius undecimo die illum ſequitur perficiens in diem milliaria 15. quæritur intra quot dies ſit primum aſſecuturus.

Supponamus numerum dierum quibus ſecundus primum aſſequetur 1R. qui numerus multiplicandus eſt per 10 milliaria,& per 15.ita ut additis ad primum numerum 100 milliaribus fiant duæ ſummæ æquales;nam cum ſecundus primum aſſequetur,uterque æqualem milliariorum numerum confecerit. Multiplicata igitur 1R. per 10. fiunt 10R. quibus addere debes 100 milliaria confecta à primo, antequam ſecundus viam iniret : ſunt ergo 10R.+100 milliaria. Multiplicaetiam 1R.per 15. ut habeas totum iter ſecundi, & cum ſpatia ſint æqualia, quando ſecundus primum aſſequitur, habebimus æquationem 10R.+100═15R.& ſubtractis utrinque 10R.erit æquatio inter 100 & 5R. & diviſis omnibus per 5. erit æquat. 1R. ═20. quare intra 20 dies ſecundus aſſequitur primum; conficitque 300 milliaria intra hos dies, primus conficit, tantum 200.& 100 quæ confecerat, antequam ſecundus iter iniret efficiunt etiam 300.

Poſſet fieri quæſtio converſa prioris; ſuppoſito quod,primus viator ſingulis diebus 100. mill.conficiat, & fecerit 10 milliaria, antequam ſecundus viator iter inciperet, ut illum aſſequatur quinto die, quot milliaria ſingulis diebus perficere debet ſecundus. Ponamus hunc numerum eſſe 1R. perficiet intra 5 dies 5 Radices: alter verò perficiet 50 milliaria,quibus addi debent 100 milliaria; ita ut fiant 150. eſt ergo æquatio 5R. ═150. & dividendo per 5 fient 1R. ═30. hoc eſt intra diem perficienda eſſe 30 milliaria.

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Interrogatus de horâ reſpondit dimidia pars horarum à media nocte, addita tribus quadrantibus horarum reſiduarum ad mediam noctem ſequentem, exhibet horam præſentem; quæritur numerus horarum.

Numerus horarum ſit 1R. reſtant ad ſequentem mediam noctem 24—1R : media pars horarum elapſarum à mediâ nocte, eſt $\frac{1}{2}$R : horarum verò quæ reſtant ad ſequentem mediam noctem, tres quadrantes, ſunt 18. —$\frac{3}{4}$R. adde hæc ſimul, + $\frac{1}{2}$ R —$\frac{3}{4}$ R. efficiunt — $\frac{1}{4}$ R. habemus ergo æquationem 18—$\frac{1}{4}$R.═1R.adde$\frac{1}{4}$R. fiet æquatio 18.═$\frac{5}{4}$R. & reducendo 18 ad quadrantes$\frac{72}{4}$. ═$\frac{5}{4}$R. & abjectis denominatoribus fiet æquatio 72═5R.& diviſis per 5.fiet æquatio 14$\frac{2}{5}$═1R erat ergo hora ſecunda poſt meridiem cum$\frac{2}{5}$. ſeu 24 minutis.

PROPOSITIO XXIX.

Problema.

Duo viatores profecti ſunt ex civitatibus diſſitis ab invicem milliaribus 140 : horum unus ſingulis diebus perficit milliaria 8. alter verò 6. quæritur, intra quot dies ſibi occurrant.

Numerus dierum poſt quos ſibi occurrunt, ſit 1R. dierum; unus ergo eo tempore conficiet 8R. milliariorum, alter 6R. quæ efficiunt 14R. confecerunt autem totum ſpatium alioquin ſibi non occurrerent; eſt ergo æquatio 14R.═140.divide & habebis 1R.═10 : ergo intra 10 dies ſibi occurrent, & intra dies 10. unus confecerit 80, alter 60 milliaria; quæ ſumma adæquat 140.

PROPO

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Erant in dolio 20. menſura vini, erat valor cujuſlibet menſuræ francorum 12; infunditur aqua donec & pretium vini remaneat idem valor menſuræ vini ita mixti, ſit tantum 10 francorum; quæritur quot ſint in dolio menſuræ vini ita mixti.

Sit numerus menſurarum additarum 1 R. eritque numerus omnium menſurarum vini mixti 1R. + 20. valor autem 20 menſurarum vini, cum unius menſuræ pretium ſit 12 francorum, erat 240 francorum; quod pretium idem perſeverat; cum infuſio aquæ ſupponatur non augere pretium vini. Sed ſi valor unius menſuræ eſt 10, valor 20 menſurarum erit 200. quare valor unius radicis menſurarum erit 40. quibus diviſis per 10. fiunt 4: ſunt ergo additæ 4 menſuræ aquæ.

PROPOSITIO XXXI.

Problema.

Quidam permutat aureos 568. & recipit eundem numerum 4 monetarum diverſarum.
7. Ex prima, aureo æquivalent.
18. Ex ſecunda eumdem aureum efficiunt.
21. Ex tertia.
28. Ex quarta. Quæritur numerus ſingularum monetarum.

Supponatur ille numerus eſſe 1R. quare licèt ita argumentari ſi 7 monetæ efficiunt unum nummum aureum, 1R monetæ efficiet $\frac{1}{7}$ R. aureorum. & ſecunda faciet $\frac{1}{18}$ R. & tertia $\frac{1}{21}$ R. & quarta $\frac{1}{28}$ R aureorum. Addantur omnes iſtæ fractiones fiunt $\frac{71}{252}$ R aureorum, quarum ſumma æqualis eſt numero 568: quæritur valor unius radicis. Hanc ita habebimus. Si 71, dant 568. 252 dabunt 2016. pro numero cujuſlibet monetæ. Etenim 2016.

primæ efficiunt aureos	288
Et 2016. ſecundæ efficiunt aur.	112
Et 2016. tertiæ efficiunt aur.	96
Et 2016. quartæ efficiunt aur.	72
Eritque omnium ſumma	5‑8.

PROPOSITIO XXXII.

Problema.

Mercator emit 100 libras ceræ aureis 17. vult lucrari aureos 18. in 102. quæritur quot libras dare debeat pro uno numero, ſeu aureo.

Ut hic mercator lucretur 18 pro 102 nummis, 102 efficere debent 120. ut autem id habeas, fiat ut 102 ad 120. ita 17 ad 20. Igitur 100 libræ vendendæ ſunt 20 nummis, ſeu quinque libræ pro uno nummo. Vides igitur hoc problema ſine Algebra ſolvi poſſe.

PROPOSITIO XXXIII.

Problema.

Tres 455 nummos ita interſe dividunt, ut quoties primus recipit 2. ſecundus recipiat 3. & quoties ſecundus recipit 4. tertius recipiat 5. quæritur quot nummos unuſquiſque accipiat.

Ponamus primum recipere 20R. ſecundus 30R. recipiat: Pro tertio regulam auream inſtitues hoc modo. Si 4. dant 5. 30. quot dabunt, invenies $37\frac{1}{2}$ R. fitque ſumma $87\frac{1}{2}$ R. ſeu $\frac{175}{2}$ R. quæ æquantur 455 nummis, ſeu $\frac{455}{1}$. reduc terminos ad eandem denominationem, abjecto denominatore, erit æquatio 175R. $=$ 910. divide fiet 1R. $= 5\frac{1}{5}$. Multiplica $5\frac{1}{5}$ per 20 fiet 104. ſumma primi; multiplica per 30. fiet 156. ſumma ſecundi; & per $37\frac{1}{2}$ fiet 195. ſumma tertii. Qui numeri ſummam propoſitam 455 adæquant.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema.

Herus ita cum ſervo paciſcitur ut ſi laboret, det illi mercedem 7 aſſium; ſi otietur mulctetur 5 aſſibus; poſt 30 dies, nihil debetur, nec etiam ipſe debet: quæritur quot diebus laboraverit, & quot fuerit otiatus.

Pone numerum dierum laboris eſſe 1R. & conſequenter otii eſſe 30—1R. multiplica dies laboris per 7 aſſes, fiet productus 7R. multiplica item dies otii ſeu 30—1R. per 5. invenies 150—5R. ſupponitur autem fuiſſe æqualitas, cum nec illi aliquid debeatur, nec ipſe debeat: ergo habemus æquationem 7R. $=$ 150—5R. adde 5R. fiet 12R. $=$ 150. divide 150 per 12. fiet $12\frac{1}{2}$. pro una radice; laboravit ergo per dies $12\frac{1}{2}$. & otiatus eſt $17\frac{1}{2}$. Propterea multiplicando $12\frac{1}{2}$. per 7. herus debet $87\frac{1}{2}$ aſſes, & multiplicando $17\frac{1}{2}$. per 5. producitur idem numerus.

PROPOSITIO XXXV.

Problema.

Quidam dives habet 160 aureos, in duplici moneta ſpecie, quarum omnium ſumma eſt 560. monetæ autem una eſt $\frac{1}{3}$. aurei, alia $\frac{1}{4}$. quæritur quantum habeat in unaquaque.

Sit numerus primæ monetæ 1R. numerus ſecundæ erit 560—1R. eſtque 1R. primæ monetæ $\frac{1}{3}$R aureorum, cum moneta prima ſit tantum $\frac{1}{3}$ aurei: pariter 1R. ſecundæ erit $\frac{1}{4}$ R. aurei, pariter 560 monetæ ſecundæ eſt tantum 140 aurei, diviſis ſcilicet 560. per 4. Quare habebit in ſecunda moneta 140—$\frac{1}{4}$R: addantur hi numeri +$\frac{1}{3}$.R. & —$\frac{1}{4}$ R. + $\frac{4}{12}$ R. & —$\frac{3}{12}$ R. quia ſe elidunt + & — fiet $\frac{1}{12}$ R. Habemus ergo æquationem 140. + $\frac{1}{12}$ R. $=$160. aufer 140. reſtat $\frac{1}{12}$ R. $=$ 20. & multiplicando 12. per 20. ut fiat virtualiter regula trium 1R. $=$240. habet ergo in prima moneta 240 & in ſecunda 320. ſeu 80. aureos in quâlibet ſpecie.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema.

Quidam pauperibus ſingulis erogat ſeptenos aſſes, & ſuperſunt ei 24, ſi ſingulis dediſſet 9 deeſſent 32. quæritur numerus tam pauperum, quam aſſium.

Supponamus numerum pauperum eſſe 1 R. numerus aſſium fuit 7 R. + 24. & in ſecunda erogatione 9 R. — 32. qui duo numeri debent eſſe æquales, eſt igitur æquatio 7 R. + 24 = 9 R. — 32, ſubtrahe 7 R. & adde 32. fiet æquatio 56 = 2 R. & dividendo 1 R. = 28. erunt igitur 28 pauperes, quem numerum multiplicando per 7. & addendo 24 producet 220 Aſſes: quæ ſumma non ſufficiet ut 28. pauperibus erogentur 9. deberent enim eſſe 252. deſunt ergo 32.

PROPOSITIO XXXVII.

Problema.

Vlnæ 10 panni rubri cum 4 ulnis panni nigri venduntur 88 aureis, & eodem pretio, 2 ulnæ panni rubri cum 4 ulnis panni nigri veneunt aureis 32. quæritur pretium unius ulnæ tam panni rubri, quam panni nigri.

Supponatur pretium unius ulnæ panni rubri eſſe 1 R. erit pretium 10 ulnarum 10 R. quo pretio ſubducto ex 88 aureis, ſcilicet ex pretio tam 10 ulnarum panni rubri quam 4 ulnarum nigri: reſtabit 88 — 10 R. pretium 4 ulnarum panni nigri. Dicuntur autem in quæſtione eodem pretio vendi 2 ulnæ panni rubri, & 4 nigri: pretium duarum rubri eſt 2 R. & 4 nigri eſt 88 — 10 R. addantur ſimul, fit pretium 88 — 8 R. quod dicitur eſſe 32 aureorum: ergo occurrit æquatio 88 — 8 R. = 32: adde 8 R. & ſubtrahe 32 per antithesin duplicem, fit æquatio 8 R. = 56. & dividendo per 8. erit 1 R. = 7. pretium unius ulnæ panni rubri. Quare 70 nummi erunt pretium 10 ulnarum rubri, quibus ſubtractis, ex 88. reſtant 18 pro pretio 4 ulnarum nigri; quo numero 18. diviſo per 4 exurgit $4\frac{1}{2}$. pretium unius ulnæ panni nigri. In ſecunda venditione duæ ulnæ panni rubri efficient 14. & quatuor nigri 18 addantur, fiet pretium totale 32 aureorum.

PROPOSITIO XXXVIII.

Problema.

Sunt in exercitu Germani 25000. Hungari efficiunt mediam partem tam Germanorum quam Italorum, Itali octavam Germanorum & Hungarorum, quæritur numerus Italorum, & Hungarorum.

Supponatur numerus Hungarorum eſſe 1 R. & cum Hungari efficiant mediam partem Italorum, & Germanorum, erunt Itali ſimul cum Germanis 2 R. & Itali ſoli 2 R — 25000. ſubducendo ſcilicet numerum Germanorum. Sunt autem Itali $\frac{1}{8}$ Germanorum & Hungarorum ſeu $\frac{1}{8}$ R. + 3125. Habemus ergo æquationem 2 R. — 25000 = $\frac{1}{8}$ R. + 3125. ſubtrahe $\frac{1}{8}$ R. fiet æquatio $\frac{15}{8}$ R. — 25000 = 3125. adde 25000, fiet alia æquatio $\frac{15}{8}$ R. = $\frac{28125}{8}$ adhibe Iſomeriam & habebis æquationem 15. R. = 225000. divide per 15. habebis 1 R. = 15000. numerum Hungarorum; qui numerus cum ſit ſemiſſis aggregati ex Italis, & Germanis erit illud aggregatum 30000, & ſubductis 25000, erit numerus Italorum 5000.

PROPOSITIO XXXIX.

Problema.

Duo duces quorum unus pauciores habet milites 40. quam alter, uterque ſuis militibus diſtribuit 1200. aureos, acciditque, ut prioris ducis milites ſinguli haberent 5 aureos, pluſquam milites poſterioris, quæritur numerus militum utriuſque ducis.

Sit numerus militum ducis prioris 1 R. & conſequenter cum ſecundus 40 plures habeat, erit militum numerus 1 R. + 40. diſtribuantur utriſque aurei 1200: quilibet miles primi ducis habet aureorum $\frac{1200}{1R}$ & ſecundi $\frac{1200}{1R + 40}$ quod ſi augeatur numerus aureorum militum ſecundi ducis 5 aureis, eſſet æquatio. Ut autem quilibet habeat 5 aureos, debebit eſſe ſumma aureorum quintupla numeri militum quibus diſtribuitur: eſt autem numerus militum ſecundi ducis 1 R. + 40. multiplica hunc numerum per 5, fiet 5 R. + 200 quem numerum addere debes numeratori, ad hoc ut diſtribuatur denominatori fiet ergo fractio $\frac{5R + 1400}{1R + 40}$. habemus ergo duas fractiones æquales $\frac{1200}{1R} = \frac{5R + 1400}{1R + 40}$. Inſtituatur Iſomeria, & neglectis denominatoribus, habebimus æquationem, aſſumptis ſcilicet numeratoribus ſolis 5q + 1400 R. =

$$\frac{1200.}{1R.} \;\mathrm{X}\; \frac{5R. + 1400.}{1R. + 40.}$$

$$\frac{1200R. + 48000.}{1q. + 40R.} \quad \frac{5q + 1400R.}{1q + 40R.}$$

1200 R. + 48000: ſubtrahe 1200 R. reſtabit 5q + 200 R. = 48000: divide per 5. habebis æquationem 1q + 40 R = 9600. & 1q = 9600. — 40 R. Adde 9600 numero 400. quadrato ſemiſſis radicum fiet 10000, è cujus radice 100. ſubtrahe 20. ſemiſſem radicum habebis 80 = 1 R. Primus ergo dux habuit milites 80. ſecundus 120. quilibet miles primi habet aureos 15. & ſecundi 10. &c.

PROPOSITIO XL.

Problema.

Archimedis problema de corona.

Sint duæ moles, auri una, argenti altera; utraque 100 librarum; corona item 100 librarum. Prima moles in vas plenum aquâ immerſa ejecit 60 libras aquæ, ſecunda 90. & corona 65. quæritur quantum argenti contineat corona. Ponamus coronam continuiſſe argenti 1 R. librarum; eritque corona auri librarum 100 — 1 R. fiat

regula

Digitized by Google

regula trium ſi 100 libræ auri ejiciunt aquæ libras 60. auri libræ 100 — 1 R. ejicient $\frac{6000 - 60}{100}$ R. & reducta ad minores numeros libros 60 — $\frac{3}{5}$ R. Deinde ſi 100 libræ argenti ejiciunt 90 libras aquæ, 1 R. ejiciet $\frac{90\ R}{100}$ ſeu $\frac{9}{10}$ R. quem numerum addere debes priori — $\frac{3}{5}$ ut habeas quantitatem aquæ, quam ejicit corona; adde ergo — $\frac{3}{5}$ R. ad + $\frac{9}{10}$ ſcilicet reducantur ad eumdem denominatorem, nempe + $\frac{45}{50}$ R. & — $\frac{30}{50}$. additio fit ſubtrahendo propter + & — quare fiet $\frac{15\ R}{50}$ ſeu $\frac{3}{10}$ R. habemus ergo æquationem 60 + $\frac{3}{10}$ R. = 65; & ſubtractis 60. $\frac{3}{10}$ R. = 5. & 1 R. = 16 $\frac{2}{3}$ libras; erunt igitur argenti libræ 16 $\frac{2}{3}$. & auri libræ 83 $\frac{1}{3}$. Probabis autem an bene operatus ſis, ſi dicas. Si auri libræ 100. expellunt aquæ 60. 83 $\frac{1}{3}$ dabunt aquæ libras 50: pariter ſi argenti libræ 100. dant aquæ libras 90, argenti 16 $\frac{2}{3}$. dabunt aquæ 15. quæ junctæ ſuperioribus 60. dant 65.

ALGEBRÆ
LIBER QVINTVS.
Poteſtatum analyſis.

QVÆ hactenus de Algebra diximus vulgaria ſunt, & antiquis non incognita quæ hoc libro traduntur peculiaria erunt, & ex methodo Vietæ ſpecioſâ deſumpta, quæ hanc ſcientiam ultra conſuetos fines provehunt univerſaliſſimamque reddunt. Quia autem in poteſtatum omnium ſive ſimplicium, ſive affectarum reſolutione hæc pars præcipuè poſita eſt; ideò poteſtatum reſolutionem ſeu analyſim nominamus: in qua reſolutione potiùs numerandi methodum ſpecioſam adhibemus, quam vulgarem eò quòd in vulgari numeri confundantur, nec retineant ſuos characteres, quibus dignoſci poſſint ab invicem.

PROPOSITIO I.

Problema.

Propoſitis tribus magnitudinibus quartam proportionalem invenire.

SInt propoſitæ tres magnitudines A, B, D ſitque quarta proportionalis invenienda, multiplica B per D, ita ut fiat B in D ſeu BD productum, dividatur per A, ita ut fiat $\frac{BD}{A}$ dico hunc quotientem $\frac{BD}{A}$ eſſe quartum proportionalem. Cum enim A multiplicando hunc quotientem $\frac{BD}{A}$ reſtituat BD, erit planum ſub A & $\frac{BD}{A}$ æquale plano BD: ergo ita erit A ad B, ſicut D ad $\frac{DB}{A}$. Sola difficultas eſt in combinandis quantitatibus, ut ſi proponantur hæ quantitates $\frac{Aq}{D}$. B, G, quibus quarta proportionalis invenienda eſt, ducenda eſſet B in G & dividenda per $\frac{Aq}{D}$: dico autem idem eſſe ſi ſi BG multiplicetur per D & fiat BGD, & productum illud dividatur per Aq. fiatque $\frac{BGD}{Aq}$ quod ut demonſtrem. Sit Z quarta proportionalis quæſita $\frac{Aq}{D}$, B, C, Z erunt continuè proportionales; ergo $\frac{Z\,Aq}{D}$ = BC. & Z Aq. = BCD, & Z = $\frac{BCD}{Aq}$. Quare propoſitis tribus quantitatibus $\frac{Aq}{D}$, B & G, ut habeatur quarta proportionalis, duces B in G, ut fiat BG, & duces BG, in D ut fiat BGD quam divides per Aq. hoc modo $\frac{BGD}{Aq}$.

Sint item propoſitæ tres magnitudines $\frac{A\ cub.}{D\ pl.}$ $\frac{Bq}{Z}$ G quibus quarta proportionalis ſtatuenda eſt; multiplica Bq in G & & productum BqG multiplicabis per D pl. ita ut fiat Bq in G in D pl. hunc numerum divides per Z in A cubum. hoc modo $\frac{Bq\ in\ G\ in\ D}{Z\ in\ A\ cubum}$. Nam idem numerus producitur quocumque ordine multiplicentur, aut dividantur quantitates; atque adeo idem eſt dividere Bq per Z, & quotientem multiplicare per G, tum per D pl. & dividere per A cub: ac multiplicationes ſimul facere, nempe Bq in G in D pl. & hunc productum dividere per Z in A cub.

PROPOSITIO II.

Problema.

Propoſitis duabus magnitudinibus, tertiam, quartam, quintam continuè proportionales exhibere.

Proponantur duæ quantitates A & B quibus tertia,

tertia, quarta, quinta continuè proportionalis, quæritur. Multiplicetur B per B, ita ut fiat B2. quod dividatur per A hoc modo $\frac{B2}{A}$ dico $\frac{B2}{A}$ eſſe tertiam proportionalem: quia nempe ſi A multiplicet $\frac{B2}{A}$ producet B2; ergo planum ex A in $\frac{B2}{A}$ eſt æquale quadrato B. Quare (*per* 15.6.) ita erit A ad B ſicut B ad $\frac{B2}{A}$. Deinde multiplica $\frac{B2}{A}$ per B fiet $\frac{B3}{A}$ divide per A fiet $\frac{B3}{A2}$ pro quarta. Quia pariter planum ex A prima in $\frac{B3}{A2}$ efficit $\frac{B3}{A}$ ſeu productum ſub mediis B & $\frac{B2}{A}$ ergo ita eſt (*per* 16.6.) A ad B, ſicut $\frac{B2}{A}$ ad $\frac{B3}{A2}$ quinta erit $\frac{B4}{A3}$ & ita conſequenter augendo exponentes: nam cum $\frac{B3}{A2}$ multiplicatur per B, fit $\frac{B4}{A2}$ & cum ſit diviſio per A fit $\frac{B4}{A3}$ ergo ita erit A ad B ſicut $\frac{B3}{A2}$ ad $\frac{B4}{A3}$.

In numeris facilior eſſet operatio, & clarior ejus demonſtratio. Aſſueſcant igitur Tyrones numeros aptare litteris Alphabeti: hoc enim habet peculiare hæc methodus ſpecioſa.

COROLLARIUM.

Si ſint quantitates continuè proportionales; ut prima ad tertiam, ita erit quadratum è prima, ad quadratum è ſecunda; nam ſi ſint tres magnitudines A, B, $\frac{B2}{A}$ multiplicentur prima A & tertia $\frac{B2}{A}$ per A productæ ſunt in eadem ratione: quia æquemultiplices in eâdem ſunt ratione; ſed producti ſunt A2. & B2. ergo ita erit prima ad tertiam ut A2 ad B2.

Pariter ſi ſint quatuor continuè proportionales, & A eſt prima & $\frac{B3}{A2}$ eſt quarta, eas multiplica per A2 fiet A3 & B3, ergo ut A prima ad $\frac{B3}{A2}$ quartam, ita A cubus ad B cubum: ſi ſint quinque continuè proportionales erit A prima ad $\frac{A4}{B3}$ quintam, ut qqtum primæ ad qqtum ſecundæ. Multiplica utramque per A cubum, producti erunt in eadem ratione, ii autem ſunt A4 & B4: ergo ſi ſint quinque continuè proportionales, ut prima ad quintam, ita qqtum primæ ad qqtum ſecundæ.

PROPOSITIO III.

Problema.

Inter duo quadrata exhibere medium proportionale.

Sint quadrata A2. B2. inter quæ conſtituendum eſt medium proportionale. Dico planum AB illud eſſe.

Demonſtratio. Cum enim A, B & $\frac{B2}{A}$ ſint continuè proportionales, ſi hæ quantitates multiplicentur per eamdem A, producti erunt in eadem ratione, ſeu continuè proportionales; ſed illi ſunt A2. AB, B2; ergo A2. AB & B2. ſunt continuè proportionales.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Inter duos propoſitos cubos, duos medios continuè proportionales conſtituere.

Sint duo cubi A3. & B3. inter quæ oporteat, duas quantitates medias proportionales conſtituere. Dico illas eſſe A2B & AB2. ita ut ſint A3. A2B, AB2 & B3 continuè proportionales.

Demonſtratio. Exponatur ſeries quatuor continuè proportionalium A, B, $\frac{B2}{A}$ $\frac{B3}{A2}$. ſi hæ quantitates multiplicentur per eamdem quantitatem, producti in eadem erunt ratione, ac quantitates multiplicatæ, multiplicentur omnes per A2. erunt producti A3. A2B, AB2, B3. ergo iſtæ quantitates ſunt continuè proportionales. Non poteſt eſſe difficultas niſi in tertia, nempe dum $\frac{B2}{A}$ multiplicatur per A2. fit $\frac{A2\ B2}{A}$ & quia poteſt fieri diviſio A2B2 dividatur per A fiet AB2.

Ex his vides inter cubum & cubum, poſſe conſtitui duo continuè proportionalia, quia nempe inter cubum & numerum abſolutum ſunt duo gradus parodici nempe radix, & quadratum.

PROPOSITIO V.

Problema.

Inter duas lineas quotcumque medias proportionales conſtituere.

Inter lineas A & B ſint conſtituendæ, quotquot libuerit mediæ proportionales. Supponamus quatuor, aſſumatur poteſtas cujus exponens eſt 5. ſuperans unitate numerum mediarum proportionalium & intelligantur lineæ A & B elevari, ad hujuſmodi gradum nempe fieri ſuperſolida, quod ut fiat exponantur ſex continuè proportionales ſintque quantitates A, B, $\frac{B2}{A}$ $\frac{B3}{A2}$ $\frac{B4}{A3}$ $\frac{B5}{A4}$ multiplicentur omnes per A4. producti in eâdem erunt ratione erunt A5. A4B, A3B2. A2B3. AB4. B5. ſeu A ſuperſolidus.

A qq in B
A cubus in B quadratum
A quadr. in B cubum
A in B quadratoquadratum
B ſuperſolidus.

Quare habebimus ſex continuè proportionalia, in ea ratione quæ eſt ad B. extrahantur radices ſuperſolidæ, harum quantitatum, illæ erunt etiam proportionales. Quia nempe radices, ſunt in ſubquintupla ratione poteſtatum: ergo ſi ratio poteſtatum ſit continuè eadem, ratio radicum erit etiam eadem: radices autem ſunt

A.
℞ ſuperſolida A qqti in B
℞ ſuperſolida A cubi in B quadratum
℞ ſuperſolida A quadrati in B cubum
℞ ſuperſolida A in B qqtum
B. Ergo inter A & B quatuor medias proportionales conſtituimus.

PROPO

PROPOSITIO VI.

Theorema.

Aggregatum duarum quantitatum additum earumdem differentiæ, æquale eſt duplo majoris.

Sint duæ quantitates A major, B minor, fiatque earum aggregatum, cui etiam addatur, earumdem differentia, ſeu exceſſus majoris ſupra minorem, dico fieri ſummam duplam quantitatis majoris A. Cum enim B juncta differentiæ, æqualis fiat quantitati A: ſi jungatur adhuc quantitas A, fiet dupla quantitatis A.

Ut autem Algebricè operemur: Sit aggregatum duarum quantitatum A + B & differentia A — B ſi fiat — B additum ad + B illud perimit. Ergo reſtat 2A.

PROPOSITIO VII.

Theorema.

Si ab Aggregato duarum quantitatum earum differentia ſubtrahatur, reſtabit duplum minoris quantitatis.

Sint duæ quantitates A + B, & ex earum aggregato auferatur exceſſus majoris, ſupra minorem reſtabit duplum minoris. Si enim intacta minore hic exceſſus auferatur à majori, fiet æqualis minori: ergo erunt duæ quantitates æquales minori.

Algebricè ita demonſtratur propoſitio. Sit Aggregatum A + B. ex quo auferenda ſit differentia A — B, auferendo A ex A reſtat o auferendo — B ex + B ſecundùm regulas ſubtractionis fit 2B.

PROPOSITIO VIII.

Theorema.

Cum idem latus contrahitur inæquali decremento, differentia contractionum æqualis eſt differentiæ contractorum.

Senſus hujus propoſitionis eſt quod ſi ab eadem quantitate v. g. A, ſubtrahantur duæ quantitates inæquales B & E. fiantque reliquæ A—B, A—E, quod differentia iſtarum quantitatum reliquarum, æqualis erit differentiæ quæ eſt inter B & E. Nam ſubtrahendo A—E ex A—B, ſubtrahendo A ex A reſtat o. ſubtrahendo — E, ex — B fit E—B.

PROPOSITIO IX.

Theorema.

Si eadem quantitas inæquali cremento protrahitur, differentia protractionum æqualis erit differentiæ protractorum.

Senſus hujus propoſitionis barbarè ſub his vocibus explicatæ, eſt quod ſi eidem quantitati, addantur inæquales quantitates, fient ſummæ, quarum differentia æqualis erit differentiæ quantitatum additarum; ut ſi quantitati A addantur quantitates B & E ita ut fiant ſummæ A + B & A + E, earum differentia erit B — E.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Si idem latus protrahatur, & contrahatur inæquali cremento, & decremento, differentia contracti, protracti, æqualis erit aggregato contractionis, & protractionis.

Senſus eſt quod ſi eidem quantitati additur, alia quantitas, & eidem alia quantitas inæqualis ſubtrahitur, fiatque ſumma, & reſiduum; differentia illius ſummæ, & reſidui, æqualis erit aggregato quantitatum additæ & ſubtractæ. Ut ſi quantitati A addatur B & ſubtrahatur E, fiatque ſumma A + B, & reſiduum A—E, differentia inter ſummam A + B, & reſiduum A — E æqualis erit ſummæ B + E; ſi enim ex A + B, ſubtrahas A—E, reſtabit B + E.

PROPOSITIO XI.

Theorema.

Geneſis quadrati binomij. Quadratum binomia radicis, æquale eſt quadratis laterum, + duplo plano ſub lateribus.

Productio quadrati à latere ſimplici, nullam difficultatem continet, ſicut neque generatio cæterarum poteſtatum ex radicibus ſimplicibus: major eſt difficultas circa generationem poteſtatum, quæ ex radicibus compoſitis proveniunt.

Proponatur ergo primò latus quadrati compoſitum verbi gratiâ A + B. Dico quadratum totius aggregati A + B eſſe æquale quadrato lateris primi A, ſeu ſegmenti A & quadrato ſegmenti B + duplo plano ex A in B hoc demonſtratum eſt ab Euclide, in propoſitione 4. 2. libri.

$$\begin{array}{r} A + B \\ A + B \\ \hline + AB + B2 \\ A2 + AB \quad\quad \\ \hline A2 + 2AB + B2 \end{array}$$

Idem Algebricè demonſtratur hoc modo quadratum aggregati A + B conſtat iis omnibus partibus quæ producuntur ex multiplicatione A + B per A + B, ducatur primò A + B in B fiet AB + B2. ducatur idem A + B in A fient A2 + AB colligantur quantitates productæ erunt Aq + 2AB + Bq.

Digitized by Google

PROPOSITIO XII.

Theorema.

Planum ſub lateribus binomij, medium proportionale eſt inter quadrata laterum.

Sit ut priùs radix binomia $A + B$ ſitque quadratum lateris primi Aq, & lateris ſecundi Bq. dico planum AB eſſe medium proportionale inter Aq & Bq.

Demonſtratio. Cum idem A, multiplicando ſeipſum & B. faciat Aq & AB, erit Aq ad AB ut A ad B: pariter cum idem B multiplicando A & ſeipſum faciat AB, & Bq, ita erit AB ad Bq ut A ad B: ergo ita erit Aq ad AB, & AB ad Bq ut A ad B; ergo AB eſt medium proportionale, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIII.

Theorema.

Quadratum Apotomes æquale eſt quadratis laterum — duplo plano laterum.

Proponatur Apotome $A - B$, ſeu differentia inter A & B; dico ejus quadratum eſſe æquale quadratis laterum A & B, minus duplo plano ſub lateribus A & B. Multiplicetur $A - B$ per $A - B$ & colligantur omnes quantitates productæ, primo — ductum in — B efficit + Bq tum — B ductum in + A efficit — AB: pariter + A ductum in — B efficit — AB. + A ductum in + A producit Aq: ergo producitur $Aq - 2AB + Bq$ in numeris idem videbis ſit A, 3. & B, 2. differentia erit 1. cujus quadratum 1. quadrata ſunt 9. & 4. quorum ſumma 13. planum ſub lateribus eſt 6, & duplum erit 12, quod ſubtractum ex 13. relinquit 1. quadratum differentiæ.

$$\begin{array}{r} A - B \\ A - B \\ \hline - AB + Bq \\ Aq - AB \qquad \\ \hline Aq - 2AB + Bq \end{array}$$

PROPOSITIO XIV.

Theorema.

Quadratum Apotomes æquale eſt quadrato majoris lateris, — quadrato minoris & duplici plano ſub Apotome & minori latere.

Sit Apotome ſeu differentia laterum $A - B$; dico ſi ab Aq. auferatur Bq & duplum planum ſub B & ſub $A - B$ reſtabit quadratum Apotomes; nam differentia laterum $A - B$ & minus latus æquantur majori: ſi ergo ſumatur differentia pro primo latere, & minus latus pro ſecundo, erit (*per 11. hujus*) quadratum differentiæ + duplo plano ſub differentia, & minori latere quadrato minoris lateris, æquale quadrato majoris: ergo ſubtracto quadrato minoris lateris, cum duplo plano ſub differentia & minori latere, ex quadrato majoris reſtat quadratum Apotomes ſeu differentiæ.

PROPOSITIO XV.

Si ſint tria latera continuè proportionalia, erit quadratum aggregati ex maximo & minimo, æquale quadrato medij duplicati + quadrato differentia inter maximum & minimum.

Sint tria latera continuè proportionalia, A, B, C. ſitque D, ſumma maximi A & minimi C. & E differentia inter A & C. ſitque F medium duplicatum; dico quadratum ſummæ D, æquale, eſſe, quadrato quantitatis E & F.

A	B	C	D	E	F
16.	8.	4.	20.	12.	16.

Demonſtratio: intelligatur quantitas D, diviſa in A & C. erit quadratum aggregati $A + C$ ſeu quantitatis D, æquale quadrato differentiæ, & rectangulo quater comprehenſo ſub A & C. (*per 7. 2.*) ſed rectangulum ſub A & C, æquale eſt quadrato ex B. cum A, B, C ſint continuè proportionales; ergo quadratum ex D [æquale eſt quadrato differentiæ E, & quatuor quadratis ex B. ſeu quadrato quantitatis B duplicatæ; ergo quadratum ex D æquale eſt quadratis ex E, & B duplicati ſeu F, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVI.

Theorema.

In binomia radice, quadratum aggregati quadratorum utriuſque lateris, æquale eſt quadrato differentiæ quadratorum + quadrato dupli plani ſub lateribus.

Sit Binomia radix $A + B$ ſitque A_2 quadratum majoris lateris, & B_2 quadratum minoris, aggregatum utriuſque ſit $A_2 + B_2$ quadratum hujus aggregati (*per 12.*) erit $A_4 + 2A_2B_2 + B_4$. Erit autem differentia quadratorum $A_2 - B_2$ ejus quadratum $A_4 - 2A_2B_2 + B_4$: duplum planum ſub lateribus eſt 2AB, cujus quadratum $4A_2B_2$ ſi addas quadrato differentiæ, facies qtum $A_4 + 2A_2B_2 + B_4$ ſeu quadratum quantitatis $A_2 + B_2$.

PROPOSITIO XVII.

Theorema.

Extractio radicis quadratæ.

Ex dictis facilè demonſtrabimus totam generationem quadrati binomiæ radicis & conſequenter extractionem radicis quadratæ. Proponatur enim radix binomia 57. ſeu 50 + 7. ſcribatur 57

$$\begin{array}{r} 5. \;\; 7 \\ \hline 25. \quad \\ 70. \;\; \\ 49. \\ \hline 4249. \end{array}$$

ita ut inter utrumque numerum relinquatur ſpatium

tium unius characteris. Tum ſcribatur quadratum numeri 5, ſub numero 5, ita ut ultima ejus ciphra reſpondeat ſuæ radici 5. idem fiat pro ſecundo latere 7. fiat item duplum planum ex 5. in 7. erit nempe 70. qui numerus ita ſcribatur, ut ultimus ejus character reſpondeat ſpatio vacuo intermedio. Colligantur omnes iſti numeri fiet ſumma 3249. quadratum radicis 57. poſuimus enim quadratum lateris 50. & quadratum lateris 7. & duplum planum ſub lateribus.

Ex his demonſtrabimus methodum extrahendæ radicis quadratæ. Proponatur enim quadratum binomiæ radicis nempe $A2 + 2AB + B2$. primò quæro radicem primi membri $A2$. hæc erit A, quæ per ſe multiplicata producit $A2$, quo ſubtracto ex $A2$ nihil relinquitur: duplicetur radix inventa A, fitque $2A$, per $2A$, divide $2AB$ erit quotiens B, addendum etiam diviſori, ita ut fiat totus diviſor $2A + B$. quem multiplicabis per B, fietque $2AB + B2$, quibus ſubtractis ex $2AB + B2$ nihil relinquitur.

Proponatur alia quantitas ex qua eruenda radix quadrata: nempe $36A2 - 48A2 + 16A2$. Primò eruatur radix quadrata primi membri, hæc erit $6A$, quæ ſi per ſeipſam multiplicetur, efficiet $36A2$. quo ſubtracto ex primo membro nihil relinquetur. Duplicetur radix inventa fiet $+ 12A$, per hunc numerum divide $-48A2$: erit quotiens $-4A$ qui etiam addi debet ad diviſorem, fietque $12A - 4A$, quo multiplicato per quotientem inventum $-4A$, fit $-48A2 + 16A2$ quo ſubtracto ex numero propoſito nihil relinquitur, eſtque radix $6A - 4A$.

Tertiò proponatur $A2 + 2AB + B2 + 2BC + 2AC + C2$. è quo fit radix quadrata eruenda. Quæratur Primò radix quadrata quantitatis $A2$ invenitur que A, cujus quadratum $A2$ ſubtractum ex primo membro nihil relinquit. Duplicetur radix A, fietque diviſor $2A$, per quem numerum divide $2AB$, fit quotiens B addendus diviſori $2A$, fietque $2A + B$. multiplica $2A$ per B, fiet $2AB$, quem numerum ſubtrahes ex $2AB$. multiplica B per inventum quotientem B, producetur $B2$ quem ſubtrahes ex $B2$ & nihil relinquetur. Inventam radicem $A + B$ duplica, fiet $2A + 2B$, per quem divides duo prima membra reliqui, nempe $+ 2AC, + 2BC$. invenies quotientem C, addendum etiam diviſori $2A + 2B$ fietque $2A + 2B + C$. per hunc C multiplica totum diviſorem, fiet $2AC + 2BC. + C2$ quibus ſubtractis nihil relinquitur, erit ergo radix $A + B + C$.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema.

Cubus binomiæ radicis, æqualis eſt cubo primi lateris, plus triplo ſolido ex quadrato primi lateris in latus ſecundum, + triplo ſolido ex quadrato ſecundi in primum, + cubo ſecundi lateris.

Proponatur radix binomia $A + B$. dico ejus cubum eſſe æqualem, cubis laterum A & B, + triplo ſolido quod fit multiplicando Aq per B + triplo ſolido generato ductu B qti in A. ita ut cubus totalis coaleſcat ex octo partibus, nempe duobus cubis, & 6. aliis ſolidis.

Demonſtratio. Generatur cubus, dum quadratum radicis ducitur in radicem; proponatur ergo $A2 + 2AB + B2$ quadratum radicis $A + B$ quod multiplicetur per $A + B$, colligantur omnes quantitates per hanc multiplicationem productæ, & habebis propoſitas quantitates.

$$\begin{array}{r} A2 + 2AB + B2 \\ A + B \\ \hline A2B + 2AB2 + B3 \\ A3 + 2A2B + AB2 \quad\quad\; \\ \hline A3 + 3A2B + 3AB2 + B3 \end{array}$$

In numeris idem patebit ponatur A eſſe 3. & B2. erit cubus radicis 5. 125. erit A3. 27, 3A2B 54. erit item 3AB2 36. & B3. 8. eruntque omnia 27. 54. 36. 8. qui numeri adæquant cubum 125.

PROPOSITIO XIX.

Theorema.

Cubus primi lateris, ſolidum ex quadrato primi lateris in ſecundum latus, ſolidum ex quadrato ſecundi in primum latus, & cubus lateris ſecundi, ſunt quantitates continuè proportionales in ratione primi lateris ad ſecundum.

Sit radix binomia $A + B$ ſintque quantitates quibus conſtat cubus $A3. A2B, AB2, B3$. dico illas quantitates eſſe continuè proportionales in ratione A ad B.

Demonſtratio. (*Per 13. hujus*) hæ quantitates $A2, AB, B2$ ſunt continuè proportionales, in ratione A ad B, ergo ſi multiplicentur per eandem quantitatem A, productæ magnitudines $A3, A2B, AB2$, erunt continuè proportionales in eâdem ratione, A ad B. Pariter ſi B multiplicet $A2, AB$ & $B2$ fient quantitates $BA2\ AB2$, & $B3$ continuè proportionales in eâdem ratione A ad B: ergo quantitates $A3\ A2B, AB2$ & $B3$ ſunt continuè proportionales in ratione A ad B; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Ex hoc concludes $A3$ ad $B3$ eſſe in triplicata ratione A ad B.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Cubus Apotomes ſeu differentiæ æqualis eſt cubo primi lateris — triplo ſolido ex quadrato primi lateris in ſecundum + triplo ſolido ex quadrato ſecundi lateris in primum latus — cubo ſecundi lateris.

Sit Apotome ſeu differentia inter A & B, hoc eſt $A - B$; dico ejus cubum æqualem eſſe cubo primi lateris, — tribus ſolidis ex qto primi lateris in ſecundum, + tribus ſolidis ex quadrato ſecundi lateris in primum — cubo ſecundi lateris.

Demonſtratio. Cubus producitur ex multiplicatione quadrati per radicem; multiplicetur ergo quadratum differentiæ $A - B$, nempe $A2 - AB2$

$-2AB + B2$ per eamdem differentiam $A - B$, ex multiplicatione $+ B2$ per $- B$, fit $- B3$, ex ductu $- 2AB$ per $- B$ fit $+ 2AB2$, ex

$$\begin{array}{r} A2 - 2AB + B2 \\ A - B \\ \hline - A2B + 2AB2 - B3 \\ 3 - 2A2B + AB2 \\ \hline A3 - 3A2B + 3AB2 - B3 \end{array}$$

ductu $+ A2$ per $- B$ fit $- A2B$. multiplicetur idem quadratum per A, & habebis $A3 - 2A2B + AB2$ colligantur omnes quantitates, habebimus cubum Apotomes, ſeu differentiæ $A3 - 3A2B + 3A2B - B3$.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Compoſitio cubi.

Ex ſuperioribus propoſitionibus, facilè compoſitionem cubi binomiæ radicis concludemus. Proponamus binomiam radicem 57: hæc ſcribatur relictis duobus intervallis vacuis: ſcribatur ſub 5 cubus illius 125, ita ut ultima ejus cyphra reſpondeat radici 5, fiat quadratum radicis 5. eritque 25. qui multiplicetur per 7. eritque 175 multiplicetur per 3. ut fiant $3A2B$ habebiſque 525 ita ſcribendum, ut 2 reſpondeat 5 tertiò fiat $A2$ eritque 49. multiplicandus per A, eritque productus 245. multiplicetur per 3. ut fiant

$$\begin{array}{ll} A \quad\quad B & \\ 5 \cdot \cdot 7 & \\ \hline 125 & A3 \\ \ 525 & 3A2B \\ \ \ 735 & 3AB2 \\ \ \ \ 343. & B3 \\ \hline 185193. & \end{array}$$

$3AB2$ habebiſque 735. ita ſcribendum, ut primus character 7 reſpondeat radici 5. denique fiat cubus 7. ſeu 343. ita ſcribendus, ut ejus ultima cyphra reſpondeat radici 7. fiat omnium ſumma; habebiſque cubum totalem 185193. in quo vides cubum utriuſque radicis poni ſub ſua radice; $3A2B$, plus participare de A, quam de B, ideoque poni ita ut duæ ejus cyphræ reſpondeant radici A ſed $3AB2$ quia plus participat de B, quam de A ita collocatur, ut unus tantum ejus character reſpondeat radici A. Denique cubus B totus reſpondet radici B.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Extractio radicis cubicæ.

Proponatur cubus $A3 + 3A2B + 3AB2 + B3$ cujus extrahenda radix cubica, quæratur radix cubica prima membri, quæ invenietur eſſe A, cujus cubus $A3$. ſubtractus ex primo membro nihil relinquit. Fiat quadratum radicis inventæ, eritque $A2$. qui multiplicetur per 3. fiet $3A2$. per quam quantitatem ſi dividas $3A2B$, invenies quotientem B, per quem ſi multiplices $3A2$. fiet $3A2B$, quo ſubtracto ex ſecundo membro nihil relinquitur. Tum forma quadratum radicis B inventæ, multiplicandum per 3, ut fiat $3B2$. & multiplicandum per A, habebiſque $3AB2$. huic addes cubum ejuſdem B, ita habebis $3AB2 + 3B$. quibus ſubtractis ex numero propoſito nihil relinquitur.

$$\begin{array}{l} \quad\quad 60 \\ A. \ 185\ 193 \\ \quad\quad \cdot \quad \cdot \\ \quad 125 \\ \quad\ \ 75 \\ \hline \quad 525 \\ \quad\ \ 735 \\ \quad\quad 343 \qquad (57 \\ \hline \quad 60193 \end{array}$$

Hujus praxis artificium meliùs in numeris apparebit. Proponatur numerus A, ex quo ſit extrahenda radix cubica. Notatis punctis, ita ut inter ſingula duo characteres interponantur: quæratur maximus cubus, qui invenitur in 185. invenieſque 125. cujus radix 5 notetur in quotiente: ejus cubum 125. ſubtrahe ex 185. reſtant 60. Tum fiat triplum quadratum radicis inventæ quod erit 7500. cui adde ter ipſam radicem 50 ſeu 150. fiet 7650. Quære quoties 7 in 60: invenitur quidem octies 2 quia tamen, tot adhuc ſolida ſubtrahenda ſunt, ſcribantur 7. & primò per 7 multiplica 7500. fientque 52500. In ſuper fiat triplum quadratum radicis inventæ 7, eritque 147. multiplica per 50. primam radicem fietque 7350. denique fiat cubus radicis 7. ſeu 343. addantur hæc omnia & habebis 60193. quæ ſubtracta ex reliquo numeri A nihil relinquunt. Si plures quam duæ cyphræ invenirentur in radice, duæ inventæ ſeu 57. per modum unius aſſumendæ ſunt.

Proponatur aliud exemplum cubus $27A6 - 54A5 + 90A4 - 80A3 + 60A2 - 24A + 8$.

$$\begin{array}{l} + 90A4 - 80A3 + 60A2 - 24A + 8 \\ \ \ 36A4 - 8A3 \\ \hline + 54A4 - 72A3 + 60A2 - 24A + 8 \\ \hline \qquad\qquad (3A2 - 2A + 2 \\ \qquad + 36A2 - 24A + 8 \end{array}$$

Quæratur radix cubica primi membri hæc erit $3A2$. cujus cubus eſt $27A6$. quare ex primo membro nihil relinquitur. Quadratum radicis $3A2$. eſt $9A4$. Quod ter ſumptum dat diviſorem $26A4$. per quem ſi dividas ſecundum membrum invenies pro quotiente $- 2A$: multiplica diviſorem $27A4$ per $- 2A$. fiet $- 54A5$ quo ſubtracto ex ſecundo membro nihil relinquitur. Fiat inventi quotientis $- 2A$ quadratum, is erit $+ 4A2$, ter ſumptum erit $+ 12A2$. & multiplicatum per primam radicem $+ 3A2$. fiet $+ 36A4$. quo ſubtracto ex $+ 90A4$: relinquetur $+ 54A4$. fiat item cubus ſecundæ radicis inventæ, nempe $- 2A$, hic cubus erit $- 8A3$. quo ſubtracto ex quarto membro relinquitur $- 72A3$, adde reliquos numeros ſuperiores.

Radicis inventæ totius per modum unius ſeu $3A2 - 2A$. fiat quadr. id erit $9A4 - 12A3 + 4A2$. ter ſumatur fiet diviſor $27A4 - 36A3 + 12A2$. per

per quem numerum, ſi dividas reſiduum, invenies + 2. per quotientem inventum multiplica diviſorem habebis 54 A4 — 72 A3. + 24 A2 quibus ſubtractis ex primo, ſecundo & tertio membro relinquitur 36 A2: fiat quadratum numeri 2. id erit 4. ſumatur ter, fient 12. multiplicetur per primam radicem 3A2 — 2A fient 36 A2 — 24. A, quæ ſi ſubtrahantur ex duobus membris relinquitur nihil; denique fiat cubus numeri 2. ille erit 8. quo ſubtracto ex 8, nihil relinquitur.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Quadratoquadratum radicis binomia totalis, æquale eſt quadratoquadrato lateris primi.

+ Quadruplo planoplano à cubo lateris primi in latus ſecundum.

+ Sextuplo planoplano à quadrato lateris primi in quadratum ſecundi.

+ Quadruplo planoplano, à latere primo in cubum ſecundi.

+ Quadratoquadrato lateris ſecundi.

Sit binomia radiè A + B. dico ejus qqtum æquale eſſe ſequentibus quantitatibus A4 + 4 A3 B + 6 A2 B2 + 4AB3 + B4. Quoniam enim ſi latus multiplicet cubum generat qq. exponatur cubus radicis A + B qui multiplicetur per radicem

A3 + 3A 2B + 3A B2 + B3
A + B

A4 + 3A3B + 3A2B2 + AB3
A3B + 3A2B + 3AB3 + B4

A4 + 4A3B + 6A2B2 + 4AB3 + B4

dicem A + B colliganturque omnes producti, & invenies recenſitos in titulo propoſitionis.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema.

Quadrato quadratum lateris primi, productum ex cubo lateris primi in latus ſecundum productum ex quadrato lateris primi in quadratum lateris ſecundi, productum ex latere primo in cubum ſecundi, & quadrato quadratum lateris ſecundi, ſunt continuè proportionalia in ratione lateris primi ad ſecundum.

Sit binomia radix A + B dico recenſitas quantitates eſſe continuè proportionales in ratione quantitatis A ad B.

Demonſtratio. Oſtendimus (in 10.) cubum A3. ſolidum A2B, ſolidum AB2, & cubum B3. eſſe continuè proportionales in ratione A ad B. Multiplicentur hæ quantitates per eandem quantitatem A, producti erunt in eâdem ratione, hi autem erunt A4. A3B, A2 B2, AB3. pariter ſi eædem quantitates per B multiplicentur, producti in eâdem ratione erunt ac quantitates multiplicatæ, producti autem ſunt A3B, A2, B2, AB3. B4. ergo hæ quantitates A4, A3B, A2 B2, AB3, B4. ſunt continuè proportionales in ratione A ad B quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXV.

Theorema.

Quadratoquadratum Apotomes, æquale eſt qq majoris lateris, minus quadruplo plano à cubo majoris lateris in latus minus; + ſextuplo plano, à quadrato majoris in quadratum minoris — quadruplo plano à latere majore in cubum minoris + quadratoquadrato ſecundi lateris.

Proponatur radix binomia Apotome ſeu differentia A — B, dico ejus qq æquale eſſe A4 — 4A3B + 6A2B2 — 4AB3 + B4. cum enim

A3 — 3A2B + 3AB2 — B3
A — B

A4 — 3A3B + 3A2B2 — AB3
— A3B + 3A2B2 — 3AB3 + B4

A4 — 4A3B + 6A2B2 — 4AB3 + B4.

radicis A — B. qq producatur multiplicando cubum per radicem, & cubus ejus ſit A3 — 3A2B + 3AB2 — B3 ſi multiplicentur per radicem A — B fient propoſitæ quantitates.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Compoſitio quadratòquadrati.

Proponatur radix binomia 32. quæ ſcribatur relictis tribus ſedibus intermediis, ſub 3. ſcribe quadratoquadratum numeri 3. ſeu 81. Fiat cubus numeri 3. qui ſit 27. multiplicetur per latus ſecundum 2. fiet 54. ſumatur quater, fiet 216. Multiplica quadratum lateris 3. ſeu 9. per 4. quadratum lateris ſecundi 2, producetur 36. qui multiplicari debet per 6. fietque iterum 216. Cubus lateris B ſeu 2. hoc eſt 8. ducatur in 3. fient 24. ſumatur quater producentur 96. Sumatur ultimò quadrato-quadratum numeri 2. ſeu 16. ſcribantur eo ordine qui in figura videtur, prout magis, aut minus pertinent ad ſingula latera, quia enim 81. eſt cubus lateris A, totus ad A pertinet, ſequens membrum plus participat de primo latere, quam de ſecundo, tertium æqualiter de utroque &c.

A		B
3	. . .	2
81		A4
216		4A3B
216		6A2B2
96		4AB3
16		B4
10485 76		

PROPOSITIO XXVII.

Theorema.

Extractio radicis quadrato quadraticæ.

Quamvis radix quadrato-quadratica extrahi poſſit eâdem methodo, quâ ſupra cubicam extraximus, quia tamen qq non tantum producitur multiplicatione cubi per radicem quadratam; ſed etiam multiplicatione quadrati per ſeipſum, ſatius erit ex eo priùs extrahere radicem quadratam, & rurſus ex ea extrahere radicem quadratam. Quod ut melius concipiamus, optimum erit conſiderare quid producatur ex multiplicatione quadrati per

$$\begin{array}{l} A2 + 2AB + B2 \\ A2 + 2AB + B2 \\ \hline A4 + 2A3B + A2B2 \\ \quad 2A3B + 4A2B2 + 2AB3 \\ \quad\quad + A2B2 + 2AB3 + B4 \\ \hline A4 + 4A3B + 6A2B2 + 4AB3 + B4. \end{array}$$

ſeipſum. Producentur autem eædem omnes quantitates de quibus locuti ſumus, ſive radix in cubum ducatur, ſive quadratum in ſeipſum. ut apparet in figura.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema.

Surdeſolidus binomia radicis, æqualis eſt ſurdeſolido lateris primi
+ quintuplo ſolido à quadrato-quadrato lateris primi, in ſecundum latus.
+ decuplo ſolido à cubo lateris primi, in quadratum ſecundi.
+ decuplo ſolido à cubo lateris ſecundi in quadratum primi.
+ quintuplo ſolido à latere primo in quadrato-quadratum ſecundi.
+ ſurdeſolido lateris ſecundi.

Proponatur radix $A + B$. dico ſurdeſolidum totalem æqualem eſſe ſolido $A5 + 5A4B + 10A3 — B2 + 10A2B3. + 5AB4 + B5.$ cum enim ſurdeſolidus generetur multiplicatione quadrato quadrati per radicem $A + B$. exponatur qquadratum quod multiplicetur per radicem $A + B$ producentur omnes prædictæ quantitates.

$$\begin{array}{l} A4 + 4A3B + 6A2B2 + 4AB3 + B4. \\ \quad\quad\quad\quad A + B \\ \hline A5 + 4A4B + 6A3B2 + 4A2B3 + AB4 \\ \quad A4B + 4A3B2 + 6A2B3 + 4AB4 + B5 \\ \hline A5 + 5A4B + 10A3B2 + 10A2B3 + 5AB4 + B5. \end{array}$$

Non erit difficile oſtendere omnes prædictas quantitates eſſe continuè proportionales in ratione lateris primi ad ſecundum.

Secundò ſurdeſolidum Apotomes æqualem eſſe Surdeſolido primi lateris.
— Quintuplo ſolido à quadrato-quadrato lateris primi in ſecundum latus.
+ Decuplo ſolido à cubo lateris primi in quadratum ſecundi.
— Decuplo ſolido à quadrato primi in cubum ſecundi.
+ Quintuplo ſolido à latere primo in quadrato quadratum ſecundi.
— Surdeſolido lateris minoris.

PROPOSITIO XXIX.

Problema.

Compoſitio ſurdeſolidi.

Proponatur radix ſurdeſolida $A + B$ ſcribatur ita ut inter utramque cyphram ſint intermediæ 4 ſedes. Fiat ſurdeſolidum primæ 3. nempè

$$\begin{array}{lr} A & B. \\ 3. & 2. \\ \hline 243. & \\ \ 810. & \\ \ 1080. & \\ \quad 720. & \\ \quad\ 240. & \\ \quad\quad 32. & \\ \hline 33554432. & \end{array}$$

243. fiat A4B. A3 ſeu 81. multiplicatum per B ſeu 2. erit 162. ſumatur quinquies fiet 810. fiat 10 A3B2. eſt autem A3. 27. B2. 4. multiplica 27 per 4. fiet 108. ſume decies fiet 1080. fiat 10 A2B3. A2 eſt 9 multiplicatum per B3. ſeu 8 efficit 71. multiplicatum per 10. efficit 720. fiat 5AB4. B4 eſt 16. ductum in A, ſeu 3. efficit 48. ſumptum 5 efficit 240. ſurdeſolidus 2 eſt 32. addantur hæ quantitates fiet ſumma ſupra notata 33554432.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Extractio radicis ſurdeſolidæ.

Ex ſuperiùs dictis facilè methodum docebimus extrahendi radicem ſurdeſolidam in numeris. Proponatur numerus A, ex quo extrahenda radix ſurdeſolida, notetur punctum ſub ultimâ, exinde relinquantur quatuor ſedes vacuæ, notetúrque aliud

```
    11. 2.
    92. 7.
A 33554432   (32.
    .    .
B 243.....
    405....
    1080...
      720..
       240.
        32
```

punctum, & ita deinceps. Quæratur maximus ſurdeſolidus qui in primo membro 335. Invenitur & deprehenſo eſſe 243. ſurdeſolidus radicis 3. ſcribo in quotiente radicem 3. & ſubſcribo ſurdeſolidum B, quem ſubtraho, ex primo membro, & relinquitur

Digitized by Google

relinquitur 92. primus diviſor erit quinquies quadratoquadratum radicis inventæ; eſt autem illius qq 81, & quinquies ſumptum 405; quia autem invenitur bis in membro ſuperiori: ſcribatur in quotiente 2. tum multiplica diviſorem per 2. & productum aufer, ex numero ſuperiori reſtabitque 115. &c. inventis duobus characteribus debent adhuc ſubtrahi reliquæ quantitates, & primo 10 A3 B2. eſt autem cubus primi lateris 27. quadratum ſecundi 4. ducantur invicem fient 108, decies ſume habebis 1080. qui debet promoveri unâ ſede ad dextram, & ſubtrahi, ex ſuperiori, reſtabit 744. &c. debet item fieri 10 A2B3; A2 eſt 9. & B3. eſt 8. fiunt 72. decies ſumptus erit 720. ſubſcribendus, ſed unâ ſede promoveatur ad dexteram, intelligendo de ultimo charactere, fiat ſubtractio ex membro ſibi reſpondente, relinquetur 2432. fiat 5AB4 eſt autem B4. 16. ductus in A, ſeu 3. producit 48. quinquies 240, ſcribendus ita, ut promoveatur unâ ſede ad dexteram; fiat ſubtractio relinquetur 32. Denique fiat ſurdeſolidus numeri 2. erit 32, quo ſubtracto nihil relinquitur.

Notandum eſt, quòd licèt egerimus quaſi cyphra 3, in quotiente non ſignificaret 30, ſed tantum 3, id facilitatis tantùm gratiâ nos egiſſe; virtualiter enim eam æqualem fecimus numero 30. ita ut duæ partes noſtri quotientis eſſent 30, & 2. ut in primo diviſore. Surdeſolidus numeri 30. non eſt 243. ſed 24300000. atque adeò per ſimplicem collocationem numeri 243. idem præſtitimus, ac ſi ſurdeſolidum numeri 30. & non numeri 3. feciſſemus; quod in aliis omnibus experienti manifeſtum fiet.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema.

Quadratocubus radicis binomiæ æqualis eſt quadratocubo lateris primi.

+ Sextuplo ſolido à ſuperſolido lateris primi in latus ſecundum.

+ Decuquintuplo ſolido à qq. lateris primi in quadratum ſecundi.

+ Vigecuplo ſolido à cubo lateris primi, in cubum ſecundi.

+ Decuquintuplo ſolido à quadrato lateris primi in qq ſecundi.

+ Sextuplo ſolido à latere primo in ſuperſolidum ſecundi.

+ Qcubo lateris ſecundi.

Proponatur Radix binomia A + B dico ejus quadratocubum, (quem malè Renaldinus vocat cubocubum, hoc eſt poteſtatem cujus exponens eſt 6.) dico inquam illius quadratocubum eſſe æqualem A6 + 6A5B + 15 A4 B2 + 20 A3 — B3 + 15 A2 B4 + 6AB5 + B6.

Hæc propoſitio probatur eodem modo quo ſuperiores: facilè autem extrahitur radix hujus poteſtatis, debet enim prius extrahi radix quadrata; tum radix cubica, ut autem omnia oculis ſubjiciantur, poteſt poni hæc tabula oſtendens poteſtates radicum A + B, & A — B.

r.	2. ſeu qu.	3 cubus.	4 qq	5 ſ. ſuper.	6 qc.	r.	q	cubus	qq	Super	qc
A + B	A2	A3	A4	A5	A6	A — B	A2	A3	A4	A5	A6
	2AB	3A2B	4A3B	5A4B	6A 5B		— 2AB	— 3A2B	— 4A3B	— 5A4B	— 6A5 B
	B2	3AB2	6A2B2	10A3B2	15 A4B2		+ B2	+ 3AB2	+ 6A2B2	+ 10A3B2	+ 15A4B2
		B3	4AB3	10A2B3	20 A3B3			— B2	— 4AB3	— 10A2B3	— 20A3B3
			B4	5AB4	15 A2B4				+ B4	+ 5AB4	+ 15A2B4
				B5	6A B5					— B5	— 6A B5
					B6						+ B6

PROPOSITIO XXXII.

Theorema.

Quadratum aggregati duorum laterum + quadrato differentiæ eorumdem æquale eſt duplo aggregato quadratorum laterum ſingulorum.

Sint duo latera A + B & eorum differentia A—B, quadrato hujus aggregati A + B addatur quadratum differentiæ, dico fieri duplum quadratorum laterum A & B ſeu A2 + B2, erit enim quadratum aggregati A + B iſtud. A2 + 2AB + B2.

A2 + 2A B + B2
A2 — 2A B + B2

2A2 2B2

Erit item quadratum differentiæ A — B ſeu apotomes: A2 — 2AB + B2. fiat additio in quâ + 2AB & — 2AB ſe deſtruunt; ergo reſtabit additione factâ duplum quadratorum A & B.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema.

Quadratum aggregati laterum minus quadrato differentiæ eorumdem, æquale eſt quadruplo plano ſub lateribus.

Proponantur pariter latera A + B & eorum differentia A — B ſit pariter quadratum aggregati laterum A + B.

A2 + 2A B + B2
A2 — 2A B + B2

+ 4A B

A quo ſubtrahatur quadratum differentiæ, reſtabit factâ ſubtractione quadruplum planum ſub lateribus.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema.

Productum ex differentia duorum laterum in eorumdem aggregatum, æquale eſt differentia quadratorum laterum.

Sint propoſita latera $A + B$ ſitque differentia $A - B$ aggregatum laterum $A + B$, differentia quadratorum laterum $A2 - B2$. dico productum ex $A - B$ in $A + B$ æquale eſſe huic differentiæ quadratorum $A2 - B2$. Fiat enim multi-

$$A + B$$
$$A - B$$
$$A2 + AB$$
$$- AB - B2$$
$$A2 - B2$$

plicatio & primò multiplicetur $A + B$ per A, fiet $A2 + AB$; idem $A + B$, multiplicetur per $- B$ fiet $- AB - B2$; fiat additio cum $+ AB$ & $- AB$ ſe perimant, reſtabit $A2 - B2$ ſeu differentia quadratorum, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema.

Cubus aggregati duorum laterum + cubo differentiæ eorumdem, æqualis eſt duplo cubo majoris lateris, plus ſextuplo ſolido à latere majori, in lateris minoris quadratum.

Proponantur duo latera A & B, & A ſit majus, dico cubum $A + B$ additum cubo differentiæ eorum, nempè $A - B$ eſſe æqualem duplo cubo majoris lateris A, & ſextuplo ſolido facto, ex multiplicatione lateris majoris A, in quadratum

$$A3 + 3A2B + 3AB2 + B3.$$
$$A3 - 3A2B + 3AB2 - B3.$$
$$2A3 \qquad + 6AB2$$

minoris B. ſit enim cubus aggregati $A + B$, huic addatur cubus $A - B$ ſeu differentiæ, in additione ſecunda & quarta membra ſe perimunt.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema.

Si à cubo aggregati ſubtrahas cubum differentiæ, reſtabit ſextuplum ſolidum à latere minore in majoris quadratum plus duplo cubo lateris minoris.

Proponatur pariter cubus aggregati $A + B$

$$A3 + 3A2B + 3AB2 + B3.$$
$$A3 - 3A2B + 3AB2 - B3.$$
$$o. \quad + 6A2B \quad o. \quad + 2B3.$$

à quo ſubtrahe cubum differentiæ $A - B$ reliquum erit ſextuplum ſolidum &c.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema.

Qq Aggregati duorum laterum + quadrato differentiæ eorumdem, æquatur duplo aggregato quadratoquadratorum laterum, plus duodecuplo producto à quadrato majoris in quadratum minoris.

Sit aggregatum $A + B$ cujus qq addatur differentiæ $A - B$ qq in additione ſecunda & quarta

$$A4 + 4A3B + 6A2B2 + 4AB3 + B4$$
$$A4 - 4A3B + 6A2B2 - 4AB3 + B4$$
$$2A4 \qquad + 12A2B2 \qquad + 2B4$$

membra ſe perimunt, ideoque ſumma erit qualem propoſitio indicat.

PROPOSITIO XXXVIII.

Theorema.

Qq Aggregati duorum laterum — qqto differentiæ eorum, æquale eſt octuplo producto à cubo lateris majoris in latus minus, + octuplo producto à latere majori in cubum minoris.

Sit aggregatum laterum $A + B$ ex cujus qq

$$A4 + 4A3B + 6A2B2 + 4AB3 + B4$$
$$A4 - 4A3B + 6A2B2 - 4AB3 + B4$$
$$o \quad 8A3B \quad o \quad + 8AB3 \quad o$$

auferatur qq differentiæ $A - B$ dico reliquum eſſe æquale $8A3B + 8AB3$.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema.

Surdeſolidus aggregati laterum + ſurdeſolido differentia eorumdem æqualis eſt duplo ſurdeſolido majoris lateris + Vigecuplo producto à cubo majoris in q minoris + Decuplo producto ex latere majore in qq minoris.

Proponatur aggregatum laterum $A + B$, & differentia $A - B$ dico ſurdeſolidum aggregati auctum ſurdeſolido differentiæ æqualem eſſe $2A5$

$$A5 + 5A4B + 10A3B2 + 10A2B3 + 5AB4 + B5.$$
$$A5 - 5A4B + 10A3B2 - 10A2B3 + 5AB4 - B5.$$
$$2A5 \qquad + 20A3B2 \qquad + 10AB4.$$

$+ 20A3B2 + 10AB4$. quia in additione, membra, ſecunda, quarta, & ſexta ſe perimunt.

PROPO

PROPOSITIO XL.

Theorema.

Surdeſolidus aggregati duorum laterum
— Surdeſolido differentia eorumdem, æqualis eſt decuplo producto ex qq majoris in latus minus.
+ Vigecuplo producto ex q majoris in cubum minoris.
+ Duplo ſurdeſolido lateris minoris.

$$A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5.$$
$$A^5 - 5A^4B + 10A^3B^2 - 10A^2B^3 + 5AB^4 - B^5.$$
$$10A^4B \quad 0 \quad + 20A^2B^3 \quad 0 \quad + 2B^5.$$

Proponatur aggregati A + B ſuperſolidus, à quo ſubtrahatur differentiæ A — B ſuperſ. fietque reliquus idem qui habetur in titulo.

PROPOSITIO XLI.

Theorema.

Qc Aggregati duorum laterum auctus qcubo differentia eorumdem æqualis eſt duplo quadratocubo ipſorum laterum,
+ Trigecuplo producto à qq majoris lateris in q minoris.
+ Trigecuplo producto à q majoris in qq minoris.

$$A^6 + 6A^5B + 15A^4B^2 + 20A^3B^3 + 15A^2B^4 + 6AB^5 + B^6.$$
$$A^6 - 6A^5B + 15A^4B^2 - 20A^3B^3 + 15A^2B^4 - 6AB^5 + B^6.$$
$$2A^6 \quad 0 \quad + 30A^4B^2 \quad 0 \quad + 30A^2B^4 \quad 0 \quad + 2B^6.$$

Proponatur laterum A + B qcubus, ſit differentiæ A — B qc : fiat additio in qua ſecunda, quarta, & ſexta membra ſe perimunt, fietque ſumma, qualem propoſitio indicat.

PROPOSITIO XLII.

Theorema.

Qcubus aggregati duorum laterum, minus qcubo differentia eorumdem, æqualis eſt duodecuplo producto ex ſuperſolido lateris majoris in minus.
+ Quadragecuplo producto à cubo majoris in cubum minoris.
+ Duodecuplo producto ex latere majori in ſuperſolidum minoris.

$$A^6 + 6A^5B + 15A^4B^2 + 20A^3B^3 + 15A^2B^4 + 6AB^5 + B^6.$$
$$A^6 - 6A^5B + 15A^4B^2 - 20A^3B^3 + 15A^2B^4 - 6AB^5 + B^6.$$

Proponatur aggregati A + B qc. ex quo ſubtrahe differentiæ qc. eritque reliquum,

$$0 \quad 12A^5B \quad 0 \quad + 40A^3B^3 \quad 0 \quad + 12AB^5 \quad 0$$

PROPOSITIO XLIII.

Theorema.

Productum ex differentia laterum, in tria plana ſemel, quæ continentur in quadrato aggregati laterum æquale eſt differentia cuborum.

Diximus ſuprà quadratum aggregati conſtare duobus quadratis laterum, & plano ſub lateribus, ſuntque illæ partes $A^2 + AB + B^2$. quamvis intermedia bis inveniatur in quadrato : tria igitur plana multiplicentur per differentiam laterum ſeu

$$A^2 + AB + B^2.$$
$$A - B$$
$$A^3 + A^2B + AB^2$$
$$- A^2B - AB^2 - B^3.$$
$$3 \quad\text{———}\quad B^3$$

per A — B fietque productum $A^3 - B^3$ eſt autem $A^3 - B^3$ differentia cuborum.

COROL

COROLLARIUM.

Colliges ſi differentia cuborum applicetur, ſeu dividatur per differentiam laterum; quotiens erit tria ſingularia plana, quæ quadratum aggregati componunt.

Pariter ſi eamdem differentiam cuborum, per tria plana quæ componunt quadratum dividas, quotiens erit differentia laterum.

PROPOSITIO XLIV.

Theorema.

Productum ex aggregato laterum, in tria plana quibus conſtat q differentia laterum, æquale eſt aggregato cuborum.

Aggregatum laterum ſit A + B, plana quibus conſtat q differentiæ laterum A — B ſunt A2 — AB + B2. ſi hæc tria plana multiplices per

$$\begin{array}{l} A2 - AB + B2 \\ \quad A + B \\ \hline A3 - A2B + AB2 \\ \quad + A2B - AB2 + B3. \\ \hline A3 \quad + \quad B3 \end{array}$$

aggregatum laterum cum membra intermedia ſe periment fiet ſumma aggregatum cuborum.

COROLLARIUM.

Si aggregatum cuborum dividas per aggregatum laterum, quotiens erit plana quæ componunt quadratum differentiæ.

Et viciſſim ſi dividas aggregatum cuborum per plana quæ componunt quadratum differentiæ quotiens erit aggregatum laterum.

PROPOSITIO XLV.

Theorema.

Productum ex differentia duorum laterum in quatuor ſingularia ſolida, quæ componunt cubum aggregati laterum, æquale eſt differentiæ quadratoquadratorum.

Cubus aggregati duorum laterum componitur ex A3 + A2B + B3. multiplicentur hæc ſolida per differentiam laterum A — B. patet fieri productum ex tali ductu æqualem differentiæ quadratoquadratorum.

$$\begin{array}{l} A3 + A2B + AB2 + B3. \\ \quad A - B \\ \hline A4 + A3B + A2B2 + AB3. \\ \quad - A3B - A2B2 - AB3 - B4. \\ \hline A4 \quad - \quad B4. \end{array}$$

COROLLARIUM.

Si differentia qqtorum applicetur ad differentiam laterum, orientur pro quotiente quatuor ſolida quæ componunt cubum aggregati laterum.

PROPOSITIO XLVI.

Theorema.

Productum ex aggregato laterum, in quatuor ſolida, quæ componunt cubum differentiæ laterum ſemel ſumpta, æquale eſt differentiæ quadratoquadratorum.

Proponatur cubus radicis A — B & quatuor ſolida ſemel ſumpta quibus conſtat hic cubus. Hæc multiplicentur per A + B aggregatum: patet hac multiplicatione producendam differentiam

$$\begin{array}{l} A3 - A2B + AB2 - B3. \\ \quad A + B \\ \hline A4 - A3B + A2B2 - AB3. \\ \quad + A3B - A2B2 + AB3 - B4. \\ \hline A4 \quad - \quad B4. \end{array}$$

qqrorum, cum multiplicatione factâ, ſecunda, tertia & quarta membra ſe periment.

COROLLARIUM I.

Differentia cuborum diviſa per aggregatum laterum, dat pro quotiente quatuor ſolida quibus conſtat cubus differentiæ laterum, vel diviſa per ea 4. ſolida, dabit pro quotiente aggregatum laterum.

COROLLARIUM II.

Ut aggregatum laterum ad differentiam eorumdem, ita 4 ſolida quibus conſtat cubus aggregati, ad 4 ſolida quibus conſtat cubus differentiæ: cum enim idem numerus producatur ex multiplicatione primi & quarti, qui oritur ex ductu ſecundi in tertium; erit (*per* 16.6.*Eucl.*) eadem ratio primi ad ſecundum, quæ tertii ad quartum.

PROPOSITIO XLVII.

Theorema.

Productum ex differentia laterum in quinque quantitates quibus conſtat qq aggregati ſemel ſumptas, æquale eſt differentiæ ſuperſolidorum.

Proponatur qq aggregati laterum A + B quantitates quibus conſtat multiplicentur per A — B.

$$\begin{array}{l} A4 + 4A3B + 6A2B2 + 4AB3 + B4 \\ \hline A4 + A3B + A2B2 + AB3 + B4 \\ \quad A - B \\ \hline A5 + A4B + A3B2 + A2B3 + AB4 \\ \quad - A4B - A3B2 - A2B3 - AB4 - B5 \\ \hline A5 \quad - B5 \end{array}$$

Patet producendam ex tali multiplicatione differentiam ſuperſolidorum laterum.

Si Differentia ſuperſolidorum applicetur, ſeu dividatur per differentiam laterum quotiens erit quinque ſolida quibus conſtat qqtum aggregati, & viciſſim.

PROPO

PROPOSITIO XLVIII.

Theorema.

Productum ex aggregato duorum laterum in quinque quantitates ſemel ſumptas, quibus conſtat qqtum differentia cuborum, æquale eſt aggregato ſuperſolidorum laterum.

Sint quantitates quibus conſtat A—B qqtum multiplicandæ per aggregatum laterum: dico pro-

$$A_4 - A_3B + A_2B_2 - AB_3 + B_4$$
$$A + B$$

$$A_5 - A_4B + A_3B_3 - A_2B_2 + AB_4$$
$$+ A_4B - A_3B_2 + A_2B_3 - AB_4 + B_5$$

$$A_5 \qquad + B_5$$

ducendum aggregatum ſuperſolidorum, cum membra intermedia ſe invicem deſtruant.

Si aggregatum ſuperſolidorum, dividatur per aggregatum laterum, quotiens erit quinque plano plana, quibus conſtat qq differentiæ laterum ſemel ſumpta, & viciſſim.

PROPOSITIO XLIX.

Theorema.

Productum ex differentia laterum in 6. planoſolida, quibus conſtat ſuperſolidus aggregati laterum, æquale eſt differentiæ quadratocuborum laterum.

Proponatur ſuperſolidus aggregati A + B. & quantitates ex quibus componitur multiplicentur per A—B differentiam laterum.

$$A_5 + 5A_4B + 10A_3B_2 + 10A_2B_3 + 5AB_4 + B_5$$
$$A_5 + A_4B + A_3B_2 + A_2B_3 + AB_4 + B_5$$
$$A - B$$

$$A6 + A_5B + A_4B_2 + A_3B_3 + A_2B_4 + AB_5$$
$$- A_5B - A_4B_2 - A_3B_3 - A_2B_4 - AB_5 - B6$$

$$A6 \qquad - B6$$

Dico producendam hac multiplicatione differentiam quadratocuborum laterum.

COROLLARIUM.

Differentia quadratocuborum diviſa per differentiam laterum, dat pro quotiente 6 plano ſolida quibus conſtat ſuperſolidus aggregati laterum.

PROPOSITIO L.

Theorema.

Productum ex aggregato laterum in 6 planoſolida, quibus conſtat ſuperſolidus differentiæ æquale eſt differentiæ qcuborum laterum.

Fiat ſuperſolidus differentiæ A — B. habebis 6 planoſolida; ſeorſim ſumpta multiplicentur per A + B aggregatum, fietque differentia qcuborum laterum.

$$A_5 - 5A_4B + 10A_3B_2 + 10A_2B_3 + 5AB_4 + B_5$$
$$A_5 - A_4B + A_3B_2 - A_2B_3 + AB_4 - B_5$$
$$A + B$$

$$A_5 - A_5B + A_4B_2 - A_3B_3 + A_2B_4 - AB_5$$
$$+ A_5B - A_4B_2 + A_3B_3 - A_2B_4 + AB_5 - B6$$

$$A6 \qquad - B6$$

COROLLARIUM I.

Differentia quadratocuborum laterum diviſa per aggregatum laterum, dat quotientem 6 plano ſolida ſemel ſumpta quibus conſtat ſuperſolidus, & viciſſim.

COROLLARIUM II.

Eadem eſt ratio aggregati laterum, ad differentiam eorum, quæ 6 planoſolidorum, ex quibus conſtat ſuperſolidus aggregati, ad quinque planoſolida quibus conſtat ſuperſolidus differentiæ. Cum enim idem ſit productum ex primo in quartum, quod ex ſecundo in tertium ita erit primum ad ſecundum, ut tertium ad 4.

COROLLARIUM III.

Ita ſunt 6 planoſolida quibus conſtat ſuperſolidus aggregati, ad 6 planoſolida quibus conſtat ſuperſolidus differentiæ: ut 4 ſolida quibus conſtat cubus aggregati: ad 4 ſolida quibus conſtat cubus differentiæ, nempe vidimus ſupra hæc ultima ſe habere ut aggregatum laterum ad differentiam eorumdem.

Ex his aliquas conluſiones univerſales deducemus ſeu leges.

LEX I.

Productum ex differentia laterum, in ſingularia homogenea, ſeu in ſemel ſumptas quantitates quibus conſtat aliqua poteſtas, æquale eſt differentiæ poteſtatum immediatè majorum. Id enim vidimus in ſingulis accidere.

LEX II.

Differentia poteſtatum diviſa per differentiam laterum, dat ſingulares quantitates quibus conſtat poteſtas inferior aggregati laterum, & viciſſim.

LEX III.

Si differentia poteſtatum aggregati, dividatur per ſingularia homogenea quibus conſtat poteſtas inferior aggregati; exhibebit pro quotiente differentiam laterum.

LEX IV.

Productum ex aggregato laterum in ſingularia homogenea quibus conſtat poteſtas differentiæ laterum ſi ſint numero imparia, æquale eſt aggregato poteſtatum proximè majorum.

Productum verò ex aggregato laterum in ſingularia homogenea numero paria quibus conſtat poteſtas differentiæ laterum, æquale eſt differentiæ poteſtatum ordinis proximè majoris.

LEX V.

Si aggregatum, vel differentia poteſtatum dividatur per aggregatum laterum, dabit pro quotiente ſingularia homogenea poteſtatis inferioris, ſed differentiæ. Intellige de aggregato poteſta-

tum quarum exponens eſt par, & de differentia poteſtatum quarum exponens eſt impar.

LEX VI.

Si par fuerit numerus quantitatum quibus conſtat poteſtas aggregati laterum, aut differentiæ; erit ut differentia laterum ad aggregatum, eorum ita quantitates quibus conſtat differentiæ poteſtas, ad quantitates quibus conſtat aggregati poteſtas.

Poſſemus continuare ſuperiora Theoremata in ſequentibus poteſtatibus, ſed hæc modo ſufficiant.

PROPOSITIO LI.

Theorema.

Si fuerit radix binomia + longitudine ſublaterali coefficiente, quadratum lateris primi, + duplo plano à latere primo in ſecundum, + quadrato lateris ſecundi, + plano à latere primo in coefficientem + plano à latere ſecundo in coefficientem, æquatur quadrato aggregati laterum affecto adjunctione plani ſub dicto aggregato ſeu radice binomiâ in coefficientem.

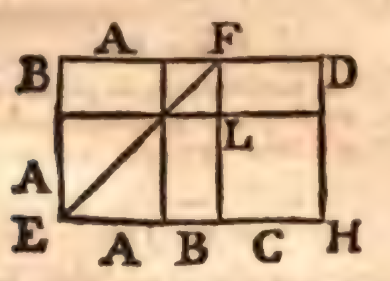
Proponatur radix binomia A + B, cui adjungatur coefficiens longitudo C, ita ut fiat A + B + C. dico quadratum aggregati A + B, ſimul

$$A + B + C$$
$$A + B$$

$$A2 + AB + AC.$$
$$AB \quad B2.\ BC$$

$$A2 + 2AB + B2. + AC. + BC$$

cum rectangulo ſub A + B ſub C. æquari omnibus his planis. Nam quadratum aggregati æquatur quadratis A & B & plano bis ſub A & B: rectan-



gulum ſub C, & A + B æquale eſt (*per* 1.2.) rectangulis ſub A & C. & ſub B & C, quæ omnia patent ex multiplicatione.

Poſſunt item probari hâc figurâ, quadrato AB adjungitur rectangulum FH, erit ergo totum rectangulum ED æquale A2 + 2AB + B2 + rectangulis HL, LD ſeu planis AC, BC.

COROLLARIUM.

Ex his facilè colliges quænam plana affectio addat, ſupra quadratum purum, addit enim planum ſub primo latere & coefficiente longitudine, & planum ſub latere ſecundo & coefficiente longitudine.

PROPOSITIO LII.

Theorema.

Si fuerit Radix binomia & coefficiens ſublaterale planum cubus lateris primi. + triplo ſolido à q. lateris primi in latus ſecundum + triplo ſolido à q. lateris ſecundi in latus primum + cubo lateris ſecundi. + ſolido à latere primo in coefficiens planum + ſolido à latere ſecundo in coefficiens planum æqualis eſt cubo aggregati affecto adjunctione ſolidi ſub aggregato laterum in planum coefficiens.

Cubus poteſt eſſe affectus, vel ſub radice, vel ſub quadrato; ut verbi gratiâ proponatur æquatio 1c. + 12 R = 608. dicitur ille cubus affectus adjunctione ſolidi ſub latere: ſeu radice binomiâ, & ſub numero 12. qui intelligitur tanquam planum, eò quòd generatio ipſa cubi, jam fiat quadrati in radicem. Ponatur radix 5 + 3. cujus quadratum 64. cubus 512. ſolidum ſub radice 8 & 12. eſt 96. dico affectionem iſtam addere cubo binomiæ radicis ſolidum ſub 12. & ſub 5. tum ſolidum ſub 12. & ſub 3.

$$A2 + 2AB + B2 + C\ pl.$$
$$A + B$$

$$A3 + 2A2\,B + AB2 + AC\ ſolidum$$
$$+ A2\,B + 2AB + B3. + BC\ ſol.$$

$$A3 + 3A2\,B + 3AB2 + B3. + AC\ ſol. + BC\ ſol.$$

Quæ omnia meliùs probari non poſſunt quam multiplicatione. Proponatur ergo quadratum binomiæ radicis, cui adjungatur C planum, quæ omnia per radicem binomiam multiplicentur & fient particularia ſolida, quæ ſuprà recenſita ſunt. Hoc eſt præter cubum binomiæ radicis, addentur duo ſolida nempè ſolidum ex primo latere in planum propoſitum, tum ſolidum ex latere ſecundo in idem planum, hoc eſt unicum ſolidum ex tota radice in planum propoſitum.

PROPOSITIO LIII.

Theorema.

Si cubus binomiæ radicis affectus ſit adjunctione ſolidi ſub quadrato adſcitâ congruenter ſubquadratica longitudine, ille æqualis erit cubo lateris primi + triplo ſolido ex quadrato primi lateris, in latus ſecundum + triplo ſolido à q. ſecundi in latus primum + cubo lateris ſecundi + ſolido à q. lateris primi in aſſumptam longitudinem + ſolido à q. lateris ſecundi in aſſumptam longitudinem, + duplo ſolido à plano ſublateribus in eamdem coefficientem longitudinem.

Proponatur radix binomia A + B. ſitque ejus cubus affectus adjunctione ſolidi ſub quadrato v.g. proponatur hæc æquatio 1c. + 10q. clarum eſt q. radicis binomiæ conſtare quadratis laterum, & duobus planis ſub lateribus, quæ omnia debent multiplicari per 10 longitudinem aſſumptam, quare hæc affectio præter cubum binomiæ radicis, addet

Digitized by Google

addet ſolidum ſub quadrato lateris primi, & ſub 10. + ſolidum ſub q lateris ſecundi, & ſub 10. + duplo ſolido ex plano ſub lateribus comprehen-

A2 + 2AB + B2
A + B + C

A3 + 2A2 B + AB2
A2B + 2AB2 + B3 CA2 + 2CAB + CB2

A3 + 3A2B + 3AB2 + B3 + CA2 + 2CAB + CB2

ſo in longitudinem 10. Proponatur ergo quadratum binomiæ radicis quod multiplicetur per radicem auctam longitudine C. producentur ſolida recenſita.

PROPOSITIO LIV.

Theorema.

Qq binomia radicis affectum adjunctione plano-plani ſub latere, & adſcito ſub laterali coefficiente ſolido; Præter ſolida ex quibus ipſe componitur, adjungit duo plano-plana unum ex latere primo in aſſumptum coefficiens ſolidum, alterum ex latere ſecundo in idem coefficiens ſolidum.

Proponitur qqtum binomiæ radicis, affectum ſub radice, ut ſi occurreret hæc æquatio 1qq + 20 —R. = &c. intelligitur autem in tali caſu numerus 20. adſcititius eſſe ſolidus, quia quantitates, quas multiplicavit radix, ut qq produceret erant ſolidæ: erant enim illæ omnes, quæ componunt cubum binomiæ radicis: ſi igitur cubo binomiæ radicis, addas ſolidum 20, pro quo pones C: & talem cubum & ſolidum, multiplices per radicem; producentur omnes quantitates quæ componunt

A3 + 3A2 B + 3AB2 + B3 + C
A + B

A4 + 3A3 B + 3A2B2 + AB3 + AC
A3 B + 3A2B2 + 3AB3 + B4 + CD

A4 + 4A3 B + 6A2B2 + 4AB3 + B4 + AC + BC

qq. & præterea duo plano-plana unum ex latere primo, in adjunctum ſolidum; aliud ex latere ſecundo, in idem adjunctum ſolidum.

PROPOSITIO LV.

Si quadratoquadratum binomiæ radicis affectum fuerit, ſub cubo affirmatè, illud ex tali affectione præter quantitates ex quibus ipſum componitur, adjunget totidem plano plana orta ex multiplicatione ſingularum partium cubi in adjunctam longitudinem.

Ut innoteſcat meliùs ſenſus hujus propoſitionis, quæ vix alioquin intelligetur, proponatur æquatio 1qq + 4c. = &c. numerus 4 intelligitur quaſi longitudo, quare ſi exponeretur cubus binomiæ radicis, multiplicari per radicem auctam numero 4: primò radix multiplicando cubum produceret qq. & numerus 4. multiplicando eumdem cubum produceret totidem plano plana, quot ſunt quantitates in cubo binomiæ radicis.

A3 + 3A2 B + 3A B2, + B3
A + B + C.

A4 + 3A3B + 3A2B2 + AB3
A3B + 3A2B2 + 3AB3 + B4.
CA3 + 3CA2B + 3CAB2 + CB3

A4 + 4A3B + 5A2B2 + 4AB3 + B4. | + CA3 + 3CA2B + 3CAB2 + CB3

PROPOSITIO LVI.

Theorema.

Si quadrato quadratum radicis binomiæ affectum fuerit duplici affectione, unâ ſub latere, alterâ ſub quadrato, adſcitis ſub laterali coefficiente ſolido, & ſubquadratico coefficiente plano; præter quantitates ex quibus quadrato quadratum componitur, ſequentes adjunget, plano planum à quadrato lateris primi in coefficiens planum + duplo plano plano, à plano ſub lateribus in planum coefficiens + plano-plano à quadrato lateris ſecundi in coefficiens planum + plano-plano à latere primo in coefficiens ſolidum, + plano-plano à latere ſecundo in coefficiens ſolidum.

Proponatur quadratoquadratum affectum duplici affectione, ut ſi occurrat æquatio 1qq + 10q + 3R. = &c. Primò quidem certum eſt quadrato quadratum binomiæ radicis ſeclusâ omni affectione, continere quantitates omnes ex quibus componitur; nempè A4 + 4A3B + 6A2B2, + 4AB3 + B4. Fiat quadratum binomiæ radicis cujus partes multiplicentur per D planum, fient DA2. + 2DAD + DB2; ponatur item radix binomia A & B quæ multiplicetur per 3. ſeu C, fient CA, CB: 3 autem ſeu C vocetur ſolidum, quia radix multiplicando peculiaria ſolida ex quibus conſtat cubus, generat quadratoquadratum, ut eadem radix intelligatur multiplicare numerum 3. dicitur 3 eſſe ſolidum.

PROPOSITIO LVII.

Theorema.

Superſolidus binomiæ radicis, affectus adjunctione plano plani ſub latere, præter quantitates ex quibus componitur, addit plano ſolidum ſub primo latere & plano ſolidum ſub ſecundo latere.

Proponatur 1. ſuperſ. + 5R. dico ſi intelligatur radix binomia multiplicare quantitates quibus conſtat qqtum, quibus adjunctum ſit plano planum 5. indicatum per C. ex hâc multiplicatione, producentur, non tantùm quantitates ex quibus conſtat ſuperſolidus; ſed etiam planoſolidus ſub A & C. & plano ſolidus ſub B & C. quæ omnia penetratis terminis difficultatem non habent.

PROPOSITIO LVIII.

Theorema.

Si ſuperſolidus affectus fuerit adjunctione cubi, adſcito ſubcubico coefficiente plano, ſuperſolidus præter quantitates proprias, ex tali affectione acquirit tot planoſolida, quot ſunt partes in cubo quæ multiplicantur per adjunctum planum.

Proponatur radicis binomiæ A + B ſuperſolidus affectus cubo, adjuncto coefficiente plano, dico præter quantitates ex quibus ſuperſolidus ipſe componitur; addi ex tali affectione planoſolida, quæ orientur ex multiplicatione partium cubi per tale planum adjunctum. Ut ſi proponeretur hæc æquatio 1 ſuperſol. + 5c. = &c. clarum eſt ex tali affectione omnes partes cubi multiplicandas eſſe per numerum qui ſignificatur per C. Quare habebimus A3 c pla. + 3A2B cpl. + 3AB2 C pl. + B3 C pl. dicetur autem C potius planum, quam ſolidum, quia cum ex cubo ad ſuperſolidum ſit unus gradus intermedius, ut fiant quantitates homogeneæ ſuperſolido; non debet fieri multiplicatio per ſimplicem longitudinem, ſed per planum: quod in aliis etiam obſervandum, & hæc obſervatio, quæ meo judicio non eſt magni momenti, totam hanc doctrinam implicat: quamvis authores in ea hujus doctrinæ myſterium reponere videantur.

PROPOSITIO LIX.

Theorema.

Quadratocubus affectus adjunctione ſublateralis plani ſolidi coefficientis, præter quantitates quibus ipſe conſtat, adjungit duo ſolido-ſolida, unum contentum ſub latere primo, & ſub adjuncto plano ſolido, alterum contentum ſub latere ſecundo & eodem plano-ſolido.

Proponatur hæc æquatio binomiæ radicis 1qc. + 10R. = &c. dicetur numerus 10 ſublaterale plano ſolidum, nempè ut multiplicatus per radicem efficiat aliquid quod ſit in eodem gradu cum quadrato-cubo: clarum autem eſt quod ſi radix binomia multiplicet numerum 10, qui intelligitur tanquam planoſolidum, orientur duo ſolidoſolida, unum contentum ſub latere primo, & numero 10. alterum contentum ſub latere ſecundo, & plano ſolido 10. Ergo conſtat propoſitio, nempè eam affectionem addere duo ſolida quantitatibus componentibus quadratocubum.

Geneſis poteſtatum affectarum negatè, ex radice binomia.

Poteſtas affecta negatè ea eſt, cui adjungitur aliquid quod de ipſa negatur, dicitur autem hæc negatio, mulcta.

PROPOSITIO LX.

Theorema.

Quadratum binomiæ radicis affectum mulctâ plani ſub latere, adſcitâ congruenter ſublaterali coefficiente longitudine, æquale eſt omnibus ſuis partibus — plano ex latere primo in coefficientem longitudinem — plano ex latere ſecundo in eamdem coefficientem longitudinem.

Sit 1q. — 5R. dico hanc multam detrahere ex uno quadrato: ſcilicet ex quadratis laterum, & rectangulo bis comprehenſo ſub lateribus, duo rectangula, unum comprehenſum ſub latere primo & 5; alterum comprehenſum ſub altero latere & eâdem longitudine 5. id autem quod generatur ex 5 in latus, eſt planum hoc eſt 5. intelligitur per modum longitudinis: ut cum radice efficiat aliquid homogeneum cum quadrato.

Erit igitur quadratum ita affectum æquale ſequentibus quantitatibus nempè ſi 5. denotetur littera C. A2 + 2AB + B2 — AC — BC.

Idem dicendum eſt de aliis poteſtatibus.

Ut ſi proponatur 1c. 3q. iſtud 3 intelligitur tanquam longitudo, quæ multiplicando quadratum binomiæ radicis producit ſolida nempè quatuor, unum comprehenſum ſub quadrato lateris primi & longitudine 3. alterum ſub quadrato lateris ſecundi & ſub longitudine 3. & duo alia ſub rectangulo laterum, & longitudine 3. ita ut ſi 3 longitudo coefficiens ſubquadratica, ſignificetur per literam C. fiat talis cubus A3 + 3A2B + 3AB2 + B3 — A2 C — 2ABC — B2C.

In iſta verò 1 c. — 3R. (τὸ 3) intelligitur ut planum ſublaterale, hoc eſt planum quod ſimul cum latere efficit aliquid homogeneum cubo; ſubtrahet autem hæc mulcta duo ſolida, unum ex A in C, & alterum ex B in C.

Aliæ poteſtates hoc modo conſiderari poſſunt, ut affectæ variis multis in quibus non eſt ulla difficultas, niſi quæ oritur ex implicatione terminorum.

Eodem modo ratiocinandum eſt, quoties poteſtas afficitur mixtim affirmatè & negatè, in quibus nulla eſt peculiaris difficultas.

PROPOSITIO LXI.

Theorema.

Geneſis poteſtatum avulſarum.

Dicuntur poteſtates avulſæ, quæ à quantitatibus adjunctis ſubtrahuntur: ut 10 R. — 1q. binomia radix ſit A + B & coefficiens C. ſitque ſuperior quantitas 10R — 1q. & C ſit 10. ita ſcribere poteris AC + BC — A2 — 2AB — B2.

Pariter ſi hæc proponeretur 10 R. — 2 c; & eſſet radix binomia A + B & 10 eſſet C: diceres AC pl. + BC pl. — 2A3 — 6A2B — 6AB2 — 2B3.

Digitized by Google

ALGEBRÆ
LIBER SEXTVS.
Extractio Radicum ex poteſtatibus affectis.

PRÆSVPPOSITIS iis quæ de poteſtatum generatione ſuperiori libro tradidimus, facilè methodum explicabimus educendi radices ex poteſtatibus quomodocumque affectis, quod toto hoc libro ſuſcipimus.

PROPOSITIO I.

Problema.

Eductio radicis ex quadrato affecto ſub latere.

PRoponatur hæc æquatio ſolvenda 1q. + 4R. == 96. cujus quæritur radix, certum autem eſt quod radix in tali caſu, non tantum ducitur in ſeipſam ut generet quadratum, ſed etiam ducitur in 4: nam quadratum, rectangulum comprehenſum ſub radice, & ſub 4. æqualia ſunt numero 96. Producitur autem hujuſmodi poteſtas affecta ſub latere, ſi radix multiplicet & ſeipſam, & adjunctam longitudinem, ut ſi radix ſit A + B, ponimus autem quaſi eſſet binomia radix cui adjungatur C: multiplicetur per ipſam radicem A + B producetur enim Aq + 2AB + Bq + AC, + BC, hoc eſt hæc affectio ſuperaddet partibus ex quibus conſtat quadratum, rectangulum ſub AC, & rectangulum ſub BC.

$$\begin{array}{l} A + B + C \\ \quad A + B \\ \hline + AB + B2 + BC \\ A2 + AB \qquad + AC \\ \hline A2 + 2AB + B2 + BC + AC \end{array}$$

Proponatur æquatio hujuſmodi ex qua extrahere debemus radicem quadratam, ſitque 1q. + 4R. == 1152. Proponatur homogeneum comparationis, nempe Z, ſeparatum, in quo ſignentur puncta, ut moris eſt in extractione radicis quadratæ: proponatur item æquatio ut moris eſt in methodo ſpecioſa A2 + 2AB + B2 + BC + AC == Z ſolidū, & per antitheſin habebimus 2AB + B2 + BC. == Z ſol. — A2 — AC. hæc autem ultima æquatio oſtendet praxin inveniendæ radicis. Signatis punctis in Z ſolido, quære maximum quadratum primi membri 11. is erit 9. cujus radix 3: habebis ergo 900 eſſe A2. & A eſſe 30 fiat AC, hoc eſt multiplica A ſeu 30. per coefficiens C ſeu 4. fit 120. qui numerus additus quadrato 900. efficit ſummam D 1020 nempe A2. & AC hæc ſubtrahenda eſt Z id ferentibus ſignis — nempe — A2 — AC qua ſunt in æquatione, reſtabit reliquum 132 quod æquale eſt 2AB + B2 + BC. quæritur B, ſecundùm ſcilicet latus, ſumatur bis A fiet 60 cui adde C. ſeu 4 fit 64 diviſor qui ſi dividat 132: invenio quotientem 2; fiat 2AB, B2 & BC. hoc eſt multiplica 2A ſeu 60 per B ſeu 2 fiunt 2AB 120. fiat quadratum quantitatis B ſeu 2. id erit 4 multiplica item C ſeu 4. per + ſeu 2. habebis 8. adde hæc omnia exurget ſumma 132. quæ ſi ſubtrahatur ex reliquo 132. nihil relinquitur, quare radix erit 32. præciſè.

Z.	1152	
D.	1020	
Reliquum	132	(32
Diviſor	64	A + C
2AB	120	
B2	4	
BC	8	
Summa	132	

Demonſtratio hujus praxis habetur in 51 præcedentis libri.

PROPOSITIO II.

Problema.

Extractio Radicis ex quadrato affecto multâ plani ſub radice, & coëfficiente.

Proponatur æquatio 1q — 4R == 896. eſt quadratum è quo ſi ſubtrahas planum ſub coëfficiente 4 & radice, reſtat aliquid æquale numero 896; quæritur radix hujus quadrati; oritur antem hæc poteſtas ita affecta, ſi binomia radix affecta mulctâ, multiplicetur per ſeipſam ut ſupra vidimus nempe ſi A + B — C multiplicetur per A + B. Supponatur ſuperior æquatio expreſſa hoc modo A2 + 2AB + B2 — AC — BC == Z ſol. & per antitheſin 2AB + B2 — BC == Z ſol. + AC — A2. ſic enim concepta dabit praxin facilem ad inveniendam radicem. Sit ergo ſuperior æquatio 1q — 4R == 896. ſitque homogeneum comparationis Z. quod ſignetur punctis ut moris eſt in extractione radicis quadratæ. Maximum quadratum quod repetitur in primo membro, eſt 4. cujus radix 2. quia tamen illi addi debet AC. ſumatur radix paulò major nempe 3 ſeu 30. fiatque AC ſeu 120 multiplicando 30 per coëfficiens 4. quod planum AC

addendum eſt in indicante ſigno +. fiat A2. ſeu quadratum radicis 30 illud erit 900. ſubtrahendum

Z	896	
AC	110	
Summa	1016	
— A2	900	(32
Reliquum	116	
Diviſor 2A — C	56	
2AB	120	
B2	4	
Summa	124	
Subtrahe BC	8	
Reſtat	116	

cum id dicat ſignum —, ſitque reliquum 116 == 2AB + B — BC. divide 2AB + B — BC per A2 — C. ſeu 56. & invenio ſecundùm latus B, eſſe 2 fiat 2AB 120. adde B2 ſeu 4. ſumma erit 124. ſubtrahe BC ſeu 8, reſtabit 116, qui numerus cum ſit æqualis reliquo ſuperiori erit radix præcisè 32.

Si homogeneum comparationis haberet radicem trium cyphrarum, quærenda primo eſſent hac methodo duo prima latera, tum hæc duo per modum unius aſſumenda ad quærendum tertium.

PROPOSITIO III.

Problema.

Extractio radicis quadratæ, ex plano ſub radice, & coefficiente, affecto multâ quadrati.

Proponatur æquatio 80R — 1q == 1344. ſit autem hujuſmodi affectio ſi longitudo — Radice multiplicetur per radicem, ut ſi C — A — B multiplicetur per A + B ſitque æquatio AC + BC. — A2 — 2AB — B2 == Z ſolidum & per antitheſin BC — 2AB — B2 == Z ſol. — AC + A2. cognoſcimus autem in hac æquatione Z ſol. ſeu 1344. & C ſeu 80. ſcribatur ſeparatim Z ſolidum quod

Z ſol.	1344	
— AC	1600	
Reliquum —	256	(24
+ A2 +	400	
Reſiduum	144	
C	80	
— 2A	40	
Diviſor	40	
AC	320	
— 2AB	160	
— B2	16	
Reſiduum	144	

ſignetur punctis ut moris eſt, ſitque maximum quadratum quod in ejus primo membro reperitur 900. quia tamen ſubtrahendum eſt AC. aſſumatur minor, nempe 400. cujus radix 2. ſeu 20. ſcribatur ſeparatim, eritque A == 20. & AC 1600. fiat ſubtractio reſtabit — 256. fiat A2. ſeu 400 addenda fietque 144. æquale BC — 2AB — B. fiat diviſor C — 2A, erit 40, qui quidem ter tantum invenitur in reſiduo 144. quia tamen minuetur, poteſt aſſumi 4. pro B fiat BC 320. Ex quo ſubtrahe 2AB ſeu 160. & B2. ſeu 16 & reſtabit 144. quod reſiduum cum æquale ſit reſiduo ſuperiori radix 24. erit exacta.

Totum artificium hujus praxis in eo poſitum eſt, ut quæratur numerus quadratus qui ſubtractus fuerat à duobus planis, ſub coëfficiente, & ſub duobus lateribus, à quo numero ubi innotuerit extrahitur radix, & additur homogeneo comparationis.

Methodus antiqua eſt quidem in hoc caſu facilior, hæc tamen viam aperit ad ſolvendas quæſtiones, alia methodo inſolubiles.

Notandum autem primò in hac ſpecie æquationis hoc modo ſolvendæ, incidere quam plurimas difficultates, quia quadratum quod ſubtractum, ex plano ſub coefficiente & ſub radice comprehenſo aliquando majus eſt homogeneo comparationis, nonnunquam minus ideoque per attentationem res peragenda.

Notandum ſecundò hujuſmodi æquationes duplicem habere radicem, quæ ſatisfaciat quæſtioni; quare ſi per radicem inventam dividas homogeneum comparationis; quotiens exhibebit aliam radicem; ut ſi dividas 1344. per 24 quotiens 56 ſatisfaciet etiam quæſtioni, ut ſuprà demonſtravimus eamdem radicem majorem habebimus, ſi minorem ex coefficiente ſubtraxerimus, ut ſubtractis 24 ex 80 remanet 56. quia duæ radices ſimul æquantur coefficienti.

DE CUBICIS Æquationibus.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Invenire radicem cubicam, cubi affecti adjunctione ſolidi ſub radice, & coefficiente plano.

Vidimus ſuperiori libro ſi proponatur æquatio 1c + 4R == 1776. hanc adjunctionem addere cubo binomiæ radicis, præter partes ex quibus componitur cubus, ſolidum ſub coefficiente 4. & ſub radice quæ cum ſit binomia, dividi poteſt hoc ſolidum in duo ſolida, nempe ſub ſingulis lateribus, & coefficiente comprehenſa, quod per multiplicationem manifeſtum eſt. Producitur autem hæc affectio, ſi quadratum binomiæ radicis auctum plano quocumque, ducatur in radicem. Ex quibus deducemus methodum extrahendi radicem cubicam ex cubo ita affecto. Sit ergo æquatio 1c + 4R. == 1776 expreſſa methodo ſpecioſâ A3 + 3A2B + 3AB2 + B3. + AC + BC == Z ſol. & per antitheſin habebitur 3A2B + 3AB2 + B3 + BC == Z ſol. — A3 — AC.

Proponatur homogeneum comparationis ſeu Z ſol. ſeparatum ſignatum punctis, ut ſolet in extractione radicis cubicæ. Quæratur cubus primi puncti, nempe 1. ſeu 100. cujus radix cubica eſt 1 ſeu 10. habemus ergo primum latus ſeu A eſſe 10 fiat A3. ſeu cubus 1000 ſubtrahendus; fiat item AC 40: ſubtrahe hæc omnia eritque reſiduum 736 æquale omnibus quantitatibus contrapoſitis in æquatione quæ poſſunt dividi per 3A2 + 3A + C ut inveniatur B, habebiſque diviſorem 334. qui invenitur bis in 736. quare erit B ſecundùm latus 2. fiant 3A2B ſeu 600. & 3AB2

Z ſol.

Digitized by Google

Z ſol.	1776.	
— A3	1000	
— AC	40	
Reſiduum	736	(12
+ 3 A2	300	
+ 3 A	30	
+ C	4	
Diviſor	334	
+ 3A2 B	600	
+ 3A B2	120	
+ B3	8	
+ BC	8	
Summa	736	

120. item B3 8.& BC 8 fitque ſummæ 736 æqualis reſiduo quare exacta eſt radix 12.

PROPOSITIO V.

Problema.

Radicem cubicam educere ex cubo affecto multa plani ſub radice.

Proponatur æquatio 1c — 6R = 13680. certum eſt cubum hunc, minui ex tali affectione duobus ſolidis ſub coefficiente, & ſub ſingulis lateribus; eſt ergo æquatio A3 + 3A2 B + 3AB2 — B3 — AC — BC = Z ſolidum & per antitheſin 3A2B + 3AB2 + B3 — BC = Z ſol. + AC — A3 Ex quâ æquatione facilè praxin educendæ radicis cubicæ eliciemus. Proponatur enim ſeparatim homogeneum comparationis; ſeu Z ſol. quod punctis notetur, ut moris eſt in eductione radicis cubicæ, ut in membra diſtinguatur.

Z ſol.	13680	
+ AC	120	
— A3	8000	
Reſiduum	5800	(24
+ 3A2	1200	
+ 3A	60	
— C	6	
Diviſor	1254	
+ 3A2 B	4800	
+ 3AB2	960	
+ B3	64	
— BC	24	
Summa	5800	

Maximus cubus primi membri eſt 8000 cujus radix 2 ſeu 20 ſcribatur, eritque A = 20 fiat AC ſeu 120. quod addatur, fiat & A3. 8000 qui cubus ſubtrahatur, & reſiduum erit 5800. æquale cæteris quantitatibus contrapoſitis, nempe 3A2 B + 3AB2 + B3 — BC. divide omnia per 3A2 + 3A — C ſeu 1254. per quem ſi dividas 5800. invenies 4 pro ſecundo latere, quo cognito efficies 3A2 B 4800.& 3AB2 960. & B3, 64. — BC 24. eritque ſumma 5800 æqualis reſiduo, bene ergo conſtituta eſt radix 24. cum nihil relinquat.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Radicem cubicam extrahere propoſito ſolido ſub coefficiente, & radice affecto multa cubi.

Sit æquatio 6468 R. — 1. cubus = 186192. certum eſt ſi radix ſit binomia à duobus ſolidis ſub lateribus, & ſub coefficiente comprehenſis, detrahi hujuſmodi abjunctione omnes partes quibus conſtat cubus, nempe duos cubos laterum tria A2B & tria AB2. Proponatur ergo æquatio ſecundùm ſpecioſam methodum AC + BC — A3 — 3A2B — 3AB2 — B3 = Z ſol. hæc autem oritur ſi C pl. — A2 — 2AB — B2 nempe minus quadrato binomiæ radicis multiplicetur per radicem A + B. hæc igitur æquatio per antitheſin mutetur in hanc BC — 3A2B — 3AB2 — B3 = Z ſol. + A3 — AC. ſic enim exhibet methodum extrahendæ radicis. Scribatur Z ſol.

Z ſol.	186192	
+ A3	27000	
Summa	213192	
— AC	194040	
Reſiduum	19152	(36
C	6468	
— 3A2	2700	
— 3A	90	
Diviſor	3678	
BC	38808	
— 3A2B	16200	
— 3AB2	3240	
— B3	216	
Reſiduum	19152	

ſeparatim, ſigneturque punctis ſecundum morem. Quæratur maximus cubus in primo membro 186 contentus; invenio quidem 125. cujus latus eſt 5. quia tamen ſubtrahendæ ſunt 6468. R. aſſumatur tantum 27. & ejus latus 3. & quia in eo videtur eſſe difficultas quod hujuſmodi æquationes ſint amphibolæ, homogeneum comparationis triplicatum dividatur per duplum coefficientis, orietur longitudo major minore radice, & minor majore; ut ſi homogeneum comparationis ſit 186192. & triplicatum 558576. ſi inquam dividatur per duplum coefficientis 6468 ſeu per 12936. erit quotiens 43. minor ergo radix erit minor quam 43.& major ſuperabit 43. Experiamur an pro primo latere aſſumere poſſimus 3 ſeu 30. cujus cubus A3. 27000 addendus eſt fiat AC, nempe multiplicando coefficientem ſeu numerum radicum 6468 per 30. erit AC 194040. ſubtrahendum, & habebimus reſiduum 19152. æquale quantitatibus contrapoſitis in æquatione nempe BC — 3A2 B — 3AB2 — B3. fiat ergo diviſor C — 3A2 — 3A. eritque 3678. per quem ſi dividas reſiduum 19152. erit quotiens 86. Cognito B, perfice quantitates BC — 3A2 B — 3AB2 — B3. ſi ex BC ſubtrahas reliquas, reſtabit idem reſiduum 19152. ergo benè aſſumpta eſt propoſita radix.

Quoties verò aggregatum ex cubo primi lateris, & comparationis homogeneo erit minus ſolido à coefficiente in primum latus, adhuc facilior erit operatio quæ in exemplo manifeſta fiet. Proponatur æquatio 10000 R. — 1c. = 383019. homogeneum

homogeneum triplicetur fiet 1149057. dividatur per 20000. duplum numeri radicum, erit quotiens 57. major minore radice & minor majore. Erit æquatio ut prius AC + BC — A3 — 3A2B — 3AB2 — B3 = Z ſol. poteſtque per antitheſes varias, ita, mutari AC — A3 — Z ſol. = 3A2B + 3AB2 + B3 — BC. ſcribatur Z ſol. ſeu comparationis homogeneum ſigneturque

AC	600000	
— Z ſol.	383019	
— A3	216000	
Reſiduum	981	(61
+ 3A2	10800	
+ 3A	180	
— C	10000	
diviſor	980	
+ 3A2B	10800	
+ 3AB2	180	
+ B3	1	
— C	10000	
Reſiduum	981	

punctis. Quæratur maximus cubus in primo membro contentus, invenio 216. ſeu 216000. cujus radix 60. ſcribenda fiat AC ſeu 600000. è quo ſubtrahe Z ſol. & A3. cum id dicant ſigna — erit reſiduum 981. æquale cæteris quantitatibus in æquatione poſitis nempe 3A2B + 3AB + B3 — BC. fiat diviſor 3A2 + 3A — C. ut invenias B eritque diviſor 980. per quem ſi dividas reſiduum 981. fit quotiens 1. fiat 3A2B 10800. + 3AB2 180. + B3 1. ſubtrahe C. 10000 reſtat reſiduum 981. æquale priori ergo radix erit 61.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Radicem cubicam extrahere ex cubo affecto ſub quadrato.

Proponatur hæc æquatio 1 c. + 10 q. = 21875. certum eſt hunc cubum continere omnes partes quibus conſtat cubus binomiæ radicis, & præterea ſolida comprehenſa ſub ſingulis partibus quibus conſtat quadratum binomiæ radicis, & ſub coefficiente. Generatur autem ſi quadratum

A2 + 2AB + B2
A + B + C
———————————
+ A2C + 2ABC + CB2
A2B + 2AB2 + B3
A3 + 2A2B + AB2

binomiæ radicis multiplicetur, per radicem auctam coefficienie longitudine; quare habebitur ſequens æquatio in qua Z ſol. eſt comparationis homogeneum Z ſol. = A3 + 3A2B + 3AB2 + B3 + A2C + 2ABC + CB2 & per antitheſin 3A3B + 3AB2 + B3 + 2ABC + CB2 = Z ſol. — A3 — A2C. ſcribatur homogeneum comparationis, notandum punctis ex quo auferatur maximus cubus primi membri, quærendo ejus radicem 20. cujus quadratum 400. multiplicatum per numerum quadratorum 10 efficit A2C 4000. Auferantur hæc omnia ex Z. reſtat reſiduum 9875 æquale quantitatibus contrapoſitis ut inveniatur B.

Z ſol.	21875	
— A3	8000	
— A2C	4000	
Reſiduum	9875	(25
3A2	1200	
+ 3A	60	
+ 2AC	400	
+ C	10	
Diviſor	1670	
+ 3A2B	6000	
+ 3AB2	1500	
+ B3	125	
+ 2ACB	2000	
+ CB2	250	
Summa	9875	

fiat diviſor 3A2 + 3A + 2AC + C invenieſque 1670, per quem ſi dividas reſiduum 9875. invenies quotientem 5. neque enim nimis magnum aſſumere debes propter quantitates addendas. Fiat 3A2B 6000, & 3AB2 1500. & B3 125. & 2ABC 2000 & CB2 250. ſumma omnium 9875. æqualis eſt reſiduo ſuperiori; ergo radix 25. eſt præciſa. Quod etiam probare poteris addendo cubum radicis 25, decem quadratis ejuſdem.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Radicem cubicam extrahere cubi affecti mulctâ ſolidi ſub quadrato, & coefficiente.

Proponatur æquatio 1 c — 4q = 10051. ſitque radix ejus binomia, certum eſt cubum ita affectum eſſe æqualem, cubo lateris primi &c. nempè omnibus partibus quibus conſtat cubus, minus ſolidis comprehenſis ſub coefficiente 4. & ſingulis partibus quibus conſtat quadratum binomiæ radicis. Generatur autem talis cubus, ſi quadratum

A2 + 2AB + B2
A + B — C
———————————
— A2C — 2ABC — CB2
+ A2B + 2AB2 + B3
A3 + 2A2B + AB2

radicis binomiæ multiplicetur per radicem imminutam aliqua longitudine, ut vides in exemplo. Habes ergo ſequentem æquationem A3 + 3A2B + 3AB2 + B3 — A2C — 2ABC — CB2 = Z ſolidum. & per antitheſin 3A2B + 3AB2 + B3 — 2ABC — CB2 = Z ſol. + A2C — A3. Scribatur homogeneum comparationis ſeparatim, & diſtinguatur punctis. Quæratur maximus cubus primi puncti 10. is erit 8. cujus radix 2. ſeu 20. invento hoc latere fiat A2C & addatur, & ſubtrahatur A3. erit reſiduum 3651. æquale quantitatibus contrapoſitis in æquatione, nempe 3A2B + 3AB2 + B3 — 2ABC — CB2 quæritur autem B. fiat

Z ſol.

Digitized by Google

Z ſol.	10051	
$+ A_2 C$	1600	
$- A_3$	8000	(23
Reſiduum	3651	
$+ 3A_2$	1200	
$+ 3A$	60	
$- 2AC$	160	
$- C$	4	
Diviſor	1096	
$+ 3A_2 B$	3600	
$+ 3A B_2$	540	
$+ B_3$	27	
$- 2ACB$	480	
$- CB_2$	36	
Summa	3651	

ergo diviſor $3A_2 + 3A - 2AC - C$ habebis diviſorem 1096, per quem ſi dividas reſiduum 3651, erit quotiens 3. nempè B quo cognito fiat $3A_2 B$ 3600 $+ 3AB_2$ 540 $+ B_3$ 27 $- 2ACB$ 480 $- CB_2$, 36. reſtabit 3651 æqualis priori reſiduo: ergo benè inventa eſt radix 23.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Educere latus cubi ex ſolido, ſub quadrato & coefficiente, affecto mulctâ cubi.

Proponatur hæc æquatio $100q - 1c = 69632$. clarum eſt quod ſi binomia ſit radix, 100 q ſeu omnes & ſingulæ partes quadrati binomiæ radicis centies ſumptæ minus omnibus partibus quibus conſtat cubus binomiæ radicis æquantur homogeneo comparationis. Generatur autem hæc affectio ſi quadratum binomiæ radicis multipli-

$$A_2 + 2AB + B_2$$
$$C - A - B$$

$$Z\ Sol. = CA_2 + 2ABC + CB_2 - A_3 - 3A_2B - 3AB_2 - B_3$$

cetur per coefficientem minus radice: habes igitur æquationem $CA_2 + 2ABC + CB_2 \quad A_3 - 3A_2 B - 3AB_2 - B_3 = Z\ S.$ & per antith. aliam $2ABC + CB_2 - 3A_2 B - 3AB_2 - B_3 = Z\ Sol. + A_3 - CA_2$. Scribatur ſeparatim homogeneum comparationis, diſtinctum punctis ex more, quæratur maximus cubus in 69, is quidem eſſet 64. ſed quia aliquid detrahendum eſt, poterit eſſe 27. ſeu 27000, cujus radix eſt 30. A. Fiat cubus A_3 is erit 27000, addendus, fiat CA_2 eſt autem Aq 900. & C eſt 100. igitur CA_2 erit 90000. ſubtrahendum; eritque reſiduum 6632. æquale cæteris quantitatibus, nempè $2ABC + CB_2 - 3A_2 B - 3AB_2 - B_3$. & quæritur B. fiat ergo diviſor $2AC + C - 3A_2 - 3A$ habebiſque diviſorem 3310 per quem ſi dividas reſiduum 6632. habebis 2. pro quotiente. Erit igitur B, 2. fiat $2ACB$ 12000 $+ CB_2$ 400. $- 3A_2 B$ 5400 $- 3AB_2$ 360 $-$ 8. fitque ſumma 6632. æqualis reſiduo; quare proba eſt radix 32.

Si plures eſſent, quàm duo characteres in radice, ad inveniendum tertium, duo priores per

Z Sol.	69632	
$+ A_3$	27000	
$- CA_2$	90000	(32
Reſiduum	6632	
$+ 2AC$	6000	
$+ C$	100	
$- 3A_2$	2700	
$- 3A$	90	
Diviſor	3310	
$2ACB$	12000	
$+ CB_2$	400	
$- 3A_2B$	5400	
$- 3AB_2$	360	
$- B_3$	8	
Summa	6632	

modum unius aſſumi deberent, & fieri primum latus repetitis iiſdem operationibus.

PROPOSITIO X.

Problema.

Radicem quadratoquadratam qqti affecti adjunctione plano plani ſub latere, & coefficiente invenire.

Proponatur æquatio $1\,qq + 30\,R = 3420091$; in qua nempè qqtum afficitur adjunctione planoplani, ſub latere, ſeu radice, & coefficiente ſolido nempè 30. quod dicitur eſſe ſolidum, ut ſit ejuſdem rationis, cum aliis quantitatibus, quæ multiplicatæ per radicem, componunt quadratoquadratum. Certum autem eſt quadratoquadratum binomiæ radicis ita affectum, habere omnes partes quibus conſtat quadratoquadratum, & inſuper ex tali affectione, habere duo ſolida ſub coefficiente, & ſub duobus nominibus radicis. Nempè ſi radix ſit $A + B$, & coefficiens ſit C. conſtabit hoc qdtoqdtum his partibus $A_4 + 4A_3B. + 6A_2 B_2 + 4AB_3 + B_4 + AC + BC$. Quare æquatio poterit eſſe $4A_3B + 6A_2B_2 + 4AB_3 + B_4 + BC = Z\ ſol. - A_4 - AC$ ideoque ſi ex comparationis homogeneo ſubtrahas A_4 & AC, reliquum erit æquale reliquis quantitatibus $4A_3 B + 6A_2B_2 + 4AB_3 + B_4 + BC$. & pro diviſore aſſumes eaſdem diviſas per B.

Ex quo vides praxin hanc eſſe univerſalem, & valere pro omnibus poteſtatibus quomodocumque affectis. Proponatur ergo homogeneum comparationis 3420091. è quo educenda radix qquadrata; ſcribatur tale homogeneum ſeparatim; tum punctis notetur, relictis tribus ſedibus vacuis, atque ita primi membri 342. quæratur maximum quadratoquadratum, id erit 256. cujus radix 40. ſcribatur in lineola.

Fiat lateris A ſeu 40. qqtum ſeu A_4, erit 2560000. ſubtrahendum; fiat item AC, multiplicando A ſeu 40. per coefficientem 30. eritque AC 1200. utrumque ſubtrahe propter ſigna $-$ eritque reſiduum 858891 æquale reliquis quantitatibus in æquatione poſitis, nempè $4A_3 B + 6A_2B_2 + 4AB_3 + B_4 + BC$. ſit diviſor $4A_3 + 6A_2 + 4A + C$, nempè aggregatum harum quantitatum diviſarum per B ſeu 265790. per

Z ppl.	3420091	
—A4	2560000	
—AC	1200	
Reſiduum	858891	
+ 4A3	256000	(43
+ 6A2	9600	
+ 4A	160	
+ C	30	
Diviſor	265790	
+ 4A3B	768000	
+ 6A2B2	86400	
+ 4AB3	4320	
+ B4	81	
+ CB	50	
Summa	858891	

quem numerum, ſi dividas reſiduum 858891. invenies B. quotientem ſeu 3.

Cognito latere ſecundo B, perfice propoſitas quantitates quales habes in figura, invenieſque ſummam æqualem propoſito reſiduo: quare concludes benè conſtitutam eſſe radicem 43.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Radicem quadratoquadratam eruere ex quadratoquadrato affecto multâ plani ſub coefficiente ſolido, & radice.

Sit æquatio 1 qq—50R=2416651. certum autem eſt qqdtum affectum hujuſmodi multâ habere omnes partes quibus conſtat qqdtum binomiæ radicis — duobus planoplanis ſub ſingulis lateribus radicis, & ſub coefficiente 50. Generatur autem talis affectio ſi cubus imminutus ſolido aliquo per radicem multiplicetur.

Habebitur enim æquatio A 4 + 4A3 B + 6A2B2 + 4AB3 + B4—AC—BC & per antitheſin 4A3B + 6A2B2 + 4AB3 + B4—BC=Z ppl. + AC—A4.

Z pp.	3416651	
+ AC	2000	
—A4	2560000	(43
Reſiduum	858651	
4A3	256000	
+ 6A2	9600	
+ 4A	160	
—C	50	
Diviſor	265710	
+ 4A3B	768000	
+ 6A2B2	86400	
+ 4AB3	4320	
+ B4	81	
— BC	150	
Summa	858651	

In hac æquatione fundabis praxin inveniendæ radicis, quære qqtum maximum primi membri 341. id erit 256, cujus radix 40. ſcribe 40 in lineola fiat A C multiplicando 40. per coefficientem 50. habebis 2000. addenda, propter ſignum + ſubtrahe A 4, 2560000. habebis reſiduum 858651. æquale reliquis quantitatibus in æquatione poſitis nempè 4A3B + 6A2B2 + 4AB3 + B4—BC eritque diviſor 4A3 + 6A2 + 4A—C ſeu 265710. per quem ſi reſiduum dividas; erit quotiens B, 3. quo cognito fiat 4A3 B 768000. + 6A2B2 86400 + 4AB3 4320 + B4 81 —BC 150. ſumma erit 858651. æqualis priori reſiduo: ergo legitima eſt radix 43. quam poteris examinare ſi nempè ex qqto numeri 43. ſubtrahas productum ex 43. in 50.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Invenire radicem quadratoquadratam, propoſito planoplano ſub radice binomia, & coefficiente affecto multâ quadratoquadrati ejuſdem radicis.

Sit æquatio 1000000 R — 1qq = 39581199. ſitque radix binomia. Certum eſt hoc planoplanum ſub coefficiente 1000000. & radice, multatum qqto ejuſdem radicis eſſe æquale duobus planoplanis comprehenſis ſub coefficiente 1000000. & ſub partibus propoſitæ radicis, minus partibus omnibus quadratoquadrati ejuſdem radicis. Habetur ergo æquatio poſito quod primum nomen radicis ſit A. ſecundum B. C coefficiens comparationis homogeneum Z ppl. erit æquatio AC + BC — A4 — 4A3 B — 6A2B2 — 4AB3 — B4 = Z ppl. vel per antitheſin BC — 4A3B — 6A2B2 — 4AB3 — B4 = Z ppl. + A4 —AC.

Z ppl.	39581199	
+ A3	2560000	
—AC	40000000	
Reſiduum	2141199	(43
+ C	1000000	
—4A3	256000	
—6A2	9600	
—4A	160	
Diviſor	734240	
+ CB	3000000	
—4A3 B	768000	
—6A2A2	86400	
—4AB3	4320	
— B4	81	
Summa	2141199	

Scribatur comparationis homogeneum ſeparatim ſignetur que punctis, quæratur maximum quadratoquadratum primi puncti 256000000. cujus radix 40. fiat item AC multiplicando primum latus 40. inventum per C coefficientem 1000000, adde A4 ſubtrahe AC habebis reſiduum 2141199. æquale reliquis quantitabus æquationis nempè B C — 4 A3 B — 6A2B2 — 4 A B3 — B 4 fiat diviſor B. C — 4 A3 — 6 A2 — 4 A eritque 734240. qui invenitur in reſiduo ter, ſcribe ter in quotiente habebiſque

que B eſſe 3. quare CB erit 3000000. — 4A3B 768000. — 6A2B2 86400 — 4AB3 4320 — B4 81. ſumma æqualis reſiduo; ergo benè conſtituta eſt radix 43.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Invenire Radicem quadrato-quadratam quadrato-quadrati affecti adjunctione plano plani ſub cubo, & coefficiente.

Proponatur æquatio 1qq + 10c = 436016. ſi ſit binomia radix, continentur propter hanc notam 1qq. in homogeneo comparationis omnes quantitates ex quibus conſtat binomiæ radicis qqtum. & propter hanc particulam + 10 c. continet omnes partes, quibus conſtat cubus binomiæ radicis multiplicatas per 10. ſcilicèt coefficiens: generatur autem tale qqtum ſi cubus multiplicetur per radicem auctam coefficiente. Sit unum nomèn Radicis A, ſecundum B, coefficiens C. habebitur hæc æquatio A4 + 4A3 B + 6A2 B2 + 4A23 + B4 + CA3 + 3CA2B + 3CAB2 + CB3 = Z ppl. per antitheſ. 4A3B + 6A2 B2 + 4AB3 + B4 + 3CA2 B + 3CAB2 + CB3 = Z ppl. — A4, — CA3.

Hàc æquatione educes facilè radicem quadratoquadratam.

Z ppl.	470016	
— CA3	80000	
— A4	160000	
Reſiduum	230016	(24
+ 4A3 —	32000	
+ 6A2	2400	
+ 4A	80	
+ 3CA2	12000	
+ 3CA	600	
+ C	10	
Diviſor	47090	
+ 4A3 B	128000	
+ 6A2 B2	38400	
+ 4AB3	5120	
+ 3CA2 B	48000	
+ 3CAB2	9600	
+ B4	256	
+ CB3	640	
Summa	230016	

Scribatur homogeneum, diſtinguatur punctis, quæratur maximum qquadratum primi puncti 47. multò tamen minor ſumatur, quia ſubtrahendum etiam eſt CA3. ſit ergo qqtum 160000. cujus radix 20. ſcribenda: fiat item CA3. A3 erit 8000. & cum coefficiens ſit 10. fiet CA3 80000. ſubtrahe utrumque propter ſigna — habebis reſiduum 230016. æquale cæteris quantitatibus 4A3B + 6A2 B2 + 4AB3 + B4 + 3CA2B + 3CAB2 + CB. Quæritur autem B, quare fiat diviſor 4A3 + 6A2 + 4A + 3CA2 + 3CA + C; habebiſque diviſorem 47090. per quem ſi dividas reſiduum 230016. habebis 4. pro quotiente, ſeu pro ſecundo latere B; quo cognito perfice cæteras quantitates 4A3 B + 6A2B2 + 4AB3 + B4 + 3CA2 B + 3CAB2 + CB. & fiet ſumma 230016. quæ cum ſit æqualis reſiduo Radix 24 eſt legitima.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Educere radicem qquadratam qqdti affecti multâ planoplani comprehenſi ſub cubo, & ſub coefficiente.

Proponatur æquatio. 1qq — 10 c. = 193536. quæritur valor radicis. eſt igitur 193536 qqdtum minus 10 cubis. hoc eſt ex quaddto ſi omnes partes cubi multiplicatas per 10. ſubtrahas, debet reſtare tale homogeneum. Producitur autem qqdtum ita affectum ſi cubus binomiæ radicis ducatur in radicem binomiam affectam multa; & facta multiplicatione habebitur æquatio ſequens A4 + 4A3 B + 6A2 B2 + 4AB3 + B4 — CA3 — 3CA2 B — 3CAB2 — CB3 = Z ppl. vel 4A3B + 6A2 B2 + 4AB3 + B4 — 3CA2 B — 3CAB2 — CB3 = Z ppl. + CA3 — A4.

Z ppl.	193536	
+ CA3	80000	
— A4	160000	
Reſiduum	113536	(24
+ 4A3	32000	
+ 6A2	2400	
+ 4A	80	
— 3CA2	12000	
— 3CA	600	
— C	10	
Diviſor	21870	

Scribatur homogeneum comparationis, & diſtinguatur punctis. Quæratur primum latus A, ſeu primus character eſt autem maximum qqdtum 16000, cujus latus 20. quo cognito latere, fiat CA3. nempè cubus lateris 20 qui eſt 8000. multiplicetur per coefficientem C ſeu 10. addatur CA3 propter ſignum + & ſubtrahatur A4. habebis reſiduum 113536. æquale cæteris quantitatibus in æquatione poſitis. Ut habeas ſecundum latus B. aſſume pro diviſore 4A3 + 6A2 + 4A — 3CA2 — 3CA — C; habebiſque diviſorem 21870. per quem ſi dividas 113536. erit quidem quotiens 5. ſed propter cæteras quantitates aſſumatur tantum 4. eritque B. 4.

Invento B perficiantur cæteræ quantitates in Æquatione poſitæ nempè 4A3B + 6A2 B2 + 4AB3 + B4 — 3CA2 B — 3CAB2 — CB3. fiet ſumma 113536. quæ cum ſit æqualis reſiduo erit radix 24 benè conſtituta.

+ 4A3 B	128000
+ 6A2B2	38400
+ 4AB3	5120
+ B4	256
— 3CA2 B	48000
— 3CAB2	9600
— CB3	640
Summa	113536

Digitized by Google

PROPOSITIO XV.

Problema.

Extrahere radicem qqdtam, propoſito planoplano ſub cubo & coefficiente, multato qqdto binomia radicis.

Sit propoſita æquatio $80.C - 1qq = 15852159$. ſitque homogeneum comparationis æquale 80. cubis $- 1.qq$, hoc eſt planoplanum ſub cubo & coefficiente 80. multatum qqdto; certum eſt tale planoplanum continere omnes partes cubi ductas in 80, minus omnibus partibus qqdti. Generatur autem tale planoplanum ſi cubus binomiæ radicis multiplicetur per coefficientem multatum radice binomia; quare factâ multiplicatione habetur hæc æquatio in qua C eſt coefficiens A & B partes radicis. $CA^3 + 3CA^2B + 3CAB^2 + CB^3 - A^4 - 4A^3B - 62AB^2 - 4AB^3 - B^4 = Z$ ppl. per antith. $3CA^2B + 3CAB^2 + CB^3 - 4A^3B - 6A^2B^2 - 4AB^3 - B^4 = Z$ ppl. $+ A^4 - CA^3$. Quare propoſito comparationis homogeneo, & punctis diſtincto, quæres primum latus radicis: ſeu A latus ſcilicèt maximi qqdti; addes autem A^4. ſeu maximum quadratoquadratum, & ſubtrahes CA^3, ſeu cubum lateris inventi ducti in coefficientem, habebiſque reſiduum æquale reliquis quantitatibus in æquatione poſitis. Ut invenias ſecundum latus B. debes inſtituere diviſionem reſidui, nempè $3CA^2 + 3CA - 4A^3 - 6A^2 - 4A$ per quem ſi dividas reſiduum, invenies quotientem B invento B perficies omnes quantitates æquationis, quæ ſimul ſumptæ adæquare debent reſiduum.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Qqtum affectum adjunctione quadrati reducitur ad æquationem quadrati affecti ſub radice & coefficiente.

Proponatur æquatio $1qq + 20q = 96$. dico hanc æquationem reduci ad hanc $1q + 20R = 96$. ita tamen ut numerus qui invenietur ſit quadratus, hoc eſt à radice inventa, ſit ulteriùs eruenda radix quadrata.

Nam cum quadratoquadrati radix ſit quadratum ipſum, verum erit quod ſi qqdtum conſideretur ut ſimplex quadratum, quadratum erit ejus radix: ergo verum eſt quod poſitâ hâc æquatione $1qq + 20q = 96$, erit hæc etiam vera $1q + 20R = 96$. intelligendo ſcilicèt non de radice, quæ eſt in quæſtione, ſed de radice quæ ſit quadratum radicis quæſitæ, ideoque addidi eruendam eſſe ulterius radicem quadratam. Ut ſi poſita R 2. verum eſt qqtum $16. + 20q$ ſeu vigeſies 4. æquari 96; verum etiam erit ſumendo 16. pro quadrato & quadratum 4. pro radice, quod 1q & 20 R. æquantur 96: ſed illa radix non eſt quæſita, ideoque ulteriùs dixi eruendam radicem.

Idem accidit in aliis caſibus ideoque hæc regula generalis dari poteſt: quoties termini æquationis ita ſe habent ut eorum exponentes ſint arithmeticè proportionales toties reſolutio quadratica locum habet ut in hoc exemplo exponentes ſunt 4. 2. 0. iſti etiam 6. 3. 0. Ut ſi detur hæc æquatio $1qc + 10c = 200$. ſi primus numerus pro ſimplici quadrato ſumatur, ejus radix erit cubus; ergo hæc æquatio legitima erit $1q + 10R = 200$. ſed ex radice ulteriùs eruenda erit radix cubica, hæc enim radix eſt cubus radicis quæſitæ.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Solutio omnium aliarum æquationum.

Ex ſuperiùs explicatis methodum colligere poſſumus extrahendi radices ex omnibus poteſtatibus quomodocumque affectis; poſſumus enim multiplicare radicem $A + B$ & habere omnes quantitates quibus conſtant hujuſmodi poteſtates, & conſequenter excogitare methodum extrahendi radices, quia autem poteſtates in infinitum augeri poſſunt, & uſum non habent, ulterius non immorabor.

Ut Tyrones ſe exerceant præcipuè in ſpecioſa nonnulla exempla ex Vietæ Zeteticis eorum captui accommodata trado.

ALGEBRÆ
LIBER SEPTIMUS.
Exempla ſecundum methodum ſpecioſæ Algebræ.

PROPOSITIO I.

Problema.

Datâ differentiâ & aggregata laterum, latera invenire.

SIt D 100. aggregatum laterum, B 40. eorum differentia, quæruntur latera ſeu quod idem eſt numerum 100, dividere in duos numeros, quorum differentia ſit 40, latus minus ſit A, latus majus erit $A + B$, & aggregatum erit $2A + B$ quod dicitur eſſe D, ergo habemus æquationem $2A + B = D$ & per antitheſin $2A = D - B$, & dividendo $A = \frac{1}{2}. D - \frac{1}{2}. B$ dimidium D eſt 50. dimidium B eſt 10. ſubtrahe 10. ex 50. reſtat A eſſe 30. & conſequenter majus latus eſſe 70.

PROPOSITIO II.

Problema.

Datâ differentiâ laterum, & ratione eorumdem, invenire latera.

Sit data differentia B. 12. ratio laterum ut R 2 ad S 3. invenienda ſint latera, ſeu quod idem eſt invenire numeros in ratione 2 ad 3, quorum differentia ſit 12.

Ponatur minor eſſe A, major erit $A + B$ quare A ad $+ B$ ſe habebit ut R ad S; quare rectangulum ſub mediis æquabitur rectangulo ſub extremis. Erit ergo $AS = AR + BR$; & per antitheſin erit æquatio $AS - AR = BR$. omnibus diviſis per $S - R$, erit æquatio $A = \frac{BR}{S-R}$ quare cum BR ſit 24. & $S - R$. ſit 1. dividendo 24. per 1. fit $24 = A$. minus latus, & cum majus ſit $A + B$ erit 36. quare 12. & 36. ſatisfaciunt quæſtioni.

Vel latus majus eſto E, latus minus erit $E - B$ eritque E ad $E - B$ ut S ad R & pariter erit æquatio $ER = SE - SB$. & per antitheſin $SB = SE - ER$. divide omnia per $S - R$. reſtabit $\frac{SB}{S-R} = E$. SB eſt 36 $S - R$ eſt 1. divide 36. per 1. reſtat 36. pro majori & pro minori $E - B$, ſubtrahe B 12. ex 36. reſtat 24.

PROPOSITIO III.

Problema.

Datâ ſummâ laterum, & eorumdem ratione latera invenire.

Sit G ſumma laterum ſeu 60; ſitque ratio R 2 ad S 3. invenienda ſint latera; ſeu quod idem eſt numerus 60, dividendus ſit in duos numeros quorum ratio ſit ut 2 ad 3.

Latus minus ſit A, majus erit $G - A$, ſed dicuntur ſe habere ut R ad S. ergo planum ſub extremis æquatur plano ſub medij, erit ergo $AS = GR - AR$. & per antitheſin $AS + AR = GR$. divide per $S + R$. erit æquatio $A = \frac{GR}{S+R}$ GR eſt 120. $S + R$ eſt 5. divide 120. per 5. erit A minus latus 24, majus $G - A$ $60 - 24$ ſeu 36.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Datis duobus lateribus deficientibus à juſto unà cum ratione defectuum, invenire latus juſtum, ſeu datis duobus numeris, invenire duos alios in data ratione, qui juncti prioribus eamdem ſummam faciant.

Sint data duo latera deficientia à juſto, hoc eſt ab eodem, ſintque B 76. & D. 4. ſitque ratio defectuum ut R, 1. ad S. 4. hoc eſt numeri illis addendi ſe habeant ut 1. ad 4. defectus primi ſit A, hoc eſt numerus addendus numero B, ut fiat ſumma quæſita, ſit A, eritque hæc ſumma $B + A$. Eſt autem ut R ad S, ita A ad defectum ſecundi ſeu ad numerum, qui addendus eſt ſecundo D, ut fiat eadem ſumma. Fiat ergo ut R ad S, ita A ad $\frac{SA}{R}$ quare $D + \frac{SA}{R} = B + A$ multiplica omnia per R. fiet $DR + SA = BR + RA$; transfer DR & RA erit $SA - RA = BR - DR$. divide utrumque per $S - R$, fiet $A = \frac{BR - DR}{S - R}$. divide ergo $BR - DR$. ſeu 72 per $S - R$ ſeu 3 habebiſque $24 = A$ & conſequenter $\frac{SA}{R} = 96$. & $B + A = 100$. ſicut $\frac{SA}{R} + D = 100$.

Vel ſit ſumma quæſita A erit $A - B$ defectus primi ſeu numerus addendus ad B ut fiat A. Pari-

Digitized by Google

ter $A - D$ erit defectus ſecundi, eſt ergo ut R ad S, ita $A - B$ ad $A - D$; ergo factum ſub extremis, æquatur facto ſub mediis, quare $SA - SB = AR - RD$. Transferatur SB, & AR, erit $SA - AR = SB - RD$. $S - R$ dividat omnia, erit æquatio $A = \frac{SB - RD}{S - R}$ eſt autem SB 304. RD 4 ergo $SB - RD$ 300, $SR -$ eſt 3. divide 300. per 3. erit A 100.

PROPOSITIO V.

Problema.

Datis duobus lateribus excedentibus juſtum & ratione exceſſuum, invenire latus juſtum, Seu è datis duobus numeris, duos numeros in data ratione ſe habentes ſubtrahere, ita ut eadem ſumma remaneat.

Sint data latera B 60. & D. 40. Ratio exceſſuum ſeu numerorum ſubtrahendorum ſit ut R. 3. S. 1. ſit exceſſus primi A. ergo $B - A$ erit ſumma illa quæ fiet ſubtracto illo exceſſu, ſeu erit latus juſtum, cum autem ut R ad S ita exceſſus primi A ad exceſſum ſecundi, is erit $\frac{AS}{R}$ qui ſi ſubtrahatur ex ſecundo, fiatque $D - \frac{AS}{R}$ habebitur eadem ſumma, habemus ergo æquationem $B - A, = D - \frac{AS}{R}$ ducantur omnia in R. fiet æquatio $RB - AR. = DR - AS$ & tranſlatis per antitheſin AR & DR; erit $RB - DR = AR - AS$ & dividendo utrumque per $R - S$ erit $A = \frac{RB - DR}{R - S}$. divide ergo $RB - DR$ ſeu 60 per $R - S$ ſeu 2, & habebis $A = 30$. & $\frac{AS}{R} = 10$. ita ut $B - A$ faciat 30, ſicut $D - \frac{AS}{R}$ facit 30 quod petebatur.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Datis duobus lateribus, uno deficiente à juſto, altero juſtum excedente, unâ cum ratione defectûs ad exceſſum, invenire latus juſtum.

Sint data duo latera B 60, deficiens à juſto, & D 180. excedens juſtum, ita ut ratio exceſsûs ad defectum ſit ut S. 5. ad R. 1. quæruntur ergo duo numeri in ratione 5. ad 1, quorum primus ſubtractus à 180, & ſecundus additus ad 60, eandem ſummam efficiant.

Defectus ſit A ergo $B + A$ erit ſumma quæ quæritur, eſt autem defectus ad exceſſum ut R ad S. fiat ergo ut R ad S. ita A ad $\frac{SA}{R}$ quo ſublato ex D, fiet $D - \frac{SA}{R} = B + A$, & omnibus ductis in R, fiet $RD - SA = BR + RA$ & tranſlatis per antitheſin SA & BR, fiet æquatio $DR. - BR = SA + RA$. cum autem duo plana $D - B$ in R & $S + R$ in A æqualia ſint, duæ primæ quantitates poterunt fieri mediæ, eritque $S + R$ ad R ſicut $D - B$ ad A. eſt autem S. 5. & R 1 $D - B$ 120. fiat ergo ut 6 ad 1. ita 120. ad A, eritque A 20. & exceſſus erit 100. ſi ergo ſubtrahas 100 ex 180. reſtabit 80. ſi ad 60 addas 20. fiet 80.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Datum latus ita ſecare, ut præfinita uncia unius ſegmenti, addita ad præfinitas uncias alterius ſegmenti, æquent ſummam præſcriptam.

Sit datum latus B ſeu 60 ita ſecandum, ut una tertia pars primi ſegmenti addita quintæ ſecundi ſegmenti faciat ſummam 14. ſeu H.

Sit tertia pars primi ſegmenti A. eritque quinta ſecundi $H - A$ eritque primum ſegmentum 3A, & ſecundùm $5H - 5A$, addantur hæc ſimul fiet totum $B = 5H - 2A$ & per antitheſin $2A + B = 5H$: & $2A = 5H - B$, eſt autem H 14. & 5H eſt 70, B eſt 60. erit $2A = 10$. ſeu $A = 5$. minus ergo ſegmentum erit 15. cujus tertia 5. una cum quinta majoris ſegmenti 45. quæ eſt 9. efficiunt 14.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Datum latus ita ſecare, ut præfinita uncia primi ſegmenti, multata præfinitis unciis ſecundi efficiant ſummam datam.

Sit latus B 84, ita ſecandum in duo ſegmenta, ut ſi tertiam partem primi ſubtrahas ex quarta ſecundi fiat H. ſit tertia pars primi ſegmenti A, & ipſum primum ſegmentum erit 3A. quarta ſecundi erit $H + A$, & ipſum ſecundum ſegmentum $4A + 4H$ addantur ſimul, fient $7A + 4H$ æquale B & $7A = B - 4H$ divide per 7. erit æquatio $A = \frac{B - 4H}{7}$ B autem eſt 84, minus 4H ſeu 28. ſit 56 divide per 7. fiet $A = 8$. nempe tertia pars primi, & primum 24. ſecundum 60. è cujus quarta parte 15, ſi auferas 8. tertiam partem primi reſtabunt 7.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Invenire dua latera, quorum differentia ſit ea quæ præſcribitur, & præfinita uncia unius, adjectæ præfinitis unciis alterius æquent ſummam præſcriptam.

Sit differentia laterum ſeu numerorum inveniendorum B 84. & tertia unius cum quadrante alterius efficiant H 98.

Sit tertia pars minoris numeri A, & ipſum 3A. eritque major $3A + B$. Erit tertia pars minoris A, & quarta majoris $H - A$, & major $4H - 4A$, ſed idem major erat $3A + B$ ergo erit æquatio $3A + B = 4H - 4A$. ſubtrahe 3A erit æquatio $B = 4H - 7A$ & $7A = 4H - B$. divide per 7 erit $A = \frac{4H - B}{7}$; multiplica 98. per 4. fient 392. ſubtrahe B ſeu 84. reſtabit 308, ſeu $4H - B$; divide per 7. fiet $A = 44$. fietque minor 132. cui ſi addas B 84. erit 216. major: minoris tertia eſt 44. majoris quadrans 54. ſumma erit 98.

PROPO

PROPOSITIO X.

Problema.

Invenire duo latera, ſeu duos numeros quorum differentia ſit data, & præfinita unciæ unius mulctata præfinitis unciis alterius, determinatam ſummam efficiant.

Sit B, 12. differentia duorum numerorum: ita ut tertia pars primi numeri mulctata quartâ parte ſecundi relinquat H9.

Sit tertia pars primi numeri A. eritque primus numerus 3A ſecundus numerus erit 3A — B ſi primus ſupponatur major numerus eritque quadrans ejus $\frac{3A - B}{4}$ mulctetur tertia pars primi, quartâ parte ſecundi fiet $A - \frac{3A - B}{4} = H$ multiplica omnia per 4. fiet æquatio $4A - 3A + B = 4H$. ſeu $A + B = 4H$ & $A = 4H - B$, ſed 4H eſt 36. aufer B12. reſtat $A = 24$: ergo erit primus numerus 72. ſecundus 3A — B erit 60. cujus quadrans 15. ſi ergo ex 24. triente primi, ſubtraxeris 15. quadrantem ſecundi reſtabit H ſeu 9.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Dato rectangulo ſub lateribus, & ratione laterum invenire latera, ſeu invenire duos numeros in data ratione qui in ſe ducti efficiant numerum propoſitum.

Sit B planum 20. cujus latera quæruntur, in ratione R 1. ad S. 5. ſit majus latus A, quia latera ſe habent ut R ad S. aut ſi majus ponatur primum ut S ad R, fiat ut S ad R. ita A. ad $\frac{AR}{S}$ erit ſecundum latus $\frac{AR}{S}$ multiplicetur per A, fiet $\frac{A2R}{S}$ planum æquale B eſt ergo æquatio $\frac{A2R}{S} = B$ multiplicentur per S. fiet $A2.R = BS$ (*& per* 16. 6.) poterit R eſſe prima, & A2 ultima eſt ergo ut R ad S, ita B ad A2 & quia R eſt 1. multiplica B 20 per S. ſeu 5. habebis A2 eſſe 100. cujus Radix quadrata 10. eſt A erit ergo aliud latus 2.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Dato rectangulo ſub lateribus, & aggregato quadratorum laterum invenire latera, ſeu invenire duos numeros qui multiplicati datum efficiant numerum, & quorum quadrata efficiant alium datum numerum.

Sit B 20. rectangulum ſub lateribus, 104. aggregatum quadratorum duplica 20. fit 40. hunc numerum adde numero 104. habebis 144 quadratum ſummæ laterum, quæ conſequenter erit 12. Subtrahe eumdem numerum 40, ex ſumma quadratorum, reſtabit 64, quadratum differentiæ quæ erit 8. ſemidifferentia 4. quæ addita ad 6 ſemiſummam exhibet majus latus 10, & ſubtracta dat 2. minus latus.

Demonſtratio pendet ex Geneſi quadrati, oſtendimus enim in binomia radice duplum planum ſub lateribus, additum ſummæ quadratorum efficere quadratum aggregati laterum, & ſubtractum relinquere quadratum differentiæ laterum.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Dato rectangulo ſub lateribus, & differentia laterum invenire latera.

Sit datum rectangulum ſub lateribus B 20. ſitque differentia laterum D8. multiplica B 20. per 4. fient 80. adde 64. quadratum differentiæ fiet 144. quadratum aggregati laterum cujus ℞ q eſt 12. ſumma laterum, oſtendimus enim ſupra q aggregati — quadrato differentiæ, æquari quadruplo plano ſub lateribus, atque adeo q aggregati eſſe æquale, quadruplo plano ſub lateribus + quadrato differentiæ.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Dato rectangulo ſub lateribus, & aggregato laterum invenire latera.

Sit datum rectangulum ſub lateribus B 20 ſitque datum aggregatum laterum D, 12. & invenienda ſint latera, fiat quadratum aggregati nempe 144. ex quo ſubtrahe 80 quadruplum planum ſub lateribus, reſtabit 64. quadratum differentiæ ergo dabitur differentia.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Datâ differentiâ laterum, & aggregato quadratorum, invenire latera. Seu invenire duos numeros quorum differentia ſit data, & quorum quadrata datam ſummam efficiant.

Proponatur duo numeri inveniendi, quorum differentia ſit 8, & aggregatum quadratorum ſit 104. aggregatum quadratorum duplicetur, eritquè 208, à quo ſubtrahatur quadratum differentiæ 8, ſeu 64. reſtabit 144. quadratum aggregati laterum ſeu 12. Nam oſtendimus duplum aggregatum quadratorum, æquari quadrato differentiæ, & quadrato aggregati, nam duplum aggregatum quadratorum eſt 2A2 + 2E2, quadratum aggregati eſt A2 + 2AE, + E2 quadratum differentiæ A2 — 2AE + E2. adde hæc ultima fiet 2A2 + 2E2.

PROPO

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Dato aggregato laterum, & aggregato quadratorum invenire latera.

Detur aggregatum laterum 12. aggregatum quadratorum 104, duplica aggregatum quadratorum, habebis 208, ſubtrahe 144. quadratum aggregati laterum, reſtabit quadratum differentiæ ſeu 64. & differentia erit 8.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Datâ differentiâ laterum, & differentiâ quadratorum invenire latera.

Sit differentia laterum 8. quadratorum 96. divide 96. per 8. habebitur 12. ſumma laterum. Sit enim differentia laterum $A - E$, differentia quadratorum $A2 - E2$. hic ultimus dividatur per primum, erit quotiens $A + E$ aggregatum laterum.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Datâ ſummâ laterum, & differentiâ quadratorum invenire latera.

Seu invenire duos numeros quorum ſumma data ſit & quadratorum differentia.

Sint inveniendi numeri quorum ſumma 12. differentia quadratorum 96. divide 96 per 12. & habebis 8. differentia numerorum, cum quâ, & ſummâ invenies numeros 10. & 2.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Dato rectangulo ſub lateribus, & differentiâ quadratorum, invenire latera. Seu invenire numeros, qui multiplicati efficiant datum numerum, ita ut differentia quadratorum ſit data.

Sit datum B 20 planum, ſub lateribus, ſeu productum ex multiplicatione numerorum quæſitorum, ſit etiam data differentia quadratorum D. 96. quæratur primo aggregatum quadratorum, ſitque illud A planum, eritque quadratum ſummæ laterum A pl. $+ 2B$. & quadratum differentiæ A pl. $- 2B$.

Vidimus ſupra quadratum differentiæ quadratorum, adjunctum quadrato dupli rectanguli ſub lateribus æquale eſſe quadrato aggregati quadratorum; ſed differentia quadratorum eſt D. Ergo quadratum D2. additum quadrato dupli rectanguli ſeu 4B2, æquale erit quadrato aggregati quadratorum. Eſt igitur 2B 40. cujus quadratum 1600. eſt D 96. cujus quadratum 9216. adjunctum numero 1600 efficit 10816. & extractâ radice quadratâ 104. habebitur ſumma quadratorum. Poſtea cum habeas ſummam quadratorum 104. & differentiam 96. habebis ſingula quadrata: nempe ſi ſemiſummæ 52. addas 48 ſemidifferentiam, fiet majus quadratum 100. & relinquetur minus ſeu 4.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Dato aggregato ex quadratis laterum, & rectangulo ſub lateribus, datoque uno latere, invenire reliquum. Seu dato quocumque numero, & aggregato quadrati illius, & quadrati alterius numeri & rectanguli ſub utroque numero, alium numerum invenire.

Sit datus numerus B2. & aggregatum ex quadrato numeri B, & quadrato alterius numeri, & rectanguli comprehenſi, ſub utroque quod aggregatum ſit 124. innvenire alium numerum.

Sit ille numerus A, eritque $B2 + AB, + A2. = D$ & per antitheſin $D - B2 = AB + A2.$ habemus ergo æquationem communem $A2 + AB = D - B2.$ nam habetur facilè ſimplex comparationis homogeneum.

Poterit alia via iniri, lateri quòd quæritur adjungatur $\frac{1}{2}$ B & ſic auctum ſit A, eritque latus ſeu numerus qui quæritur $A - \frac{1}{2} B$ fiat ejus quadratum illud erit $A2 - AB + \frac{1}{4} B2$; quadratum vero lateris B eſt B2: fiat item rectangulum ſub B & $A - \frac{1}{2} B$, illud erit $BA - \frac{1}{2} B$. addantur ſimul fient $A2 + \frac{1}{4} B2 = D$ & per antitheſin $A2 = D - \frac{1}{4}. B2.$ Sed D eſt 124, & $\frac{1}{4}$ B2, eſt 3. quare 121 eſt A2. eritque radix 11. ex qua ſubtrahere debes $\frac{1}{2}$ B ut habeas numerum quæſitum, qui erit 10.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Dato aggregato ex ſumma quadratorum, & rectangulo ſub lateribus, datâ item ſummâ laterum invenire latera.

Seu datâ ſummâ numerorum, & aggregato ex quadratis eorum & rectangulo ſub ipſis comprehenſo invenire numeros.

Sit B 12 ſumma laterum ſeu numerorum, ſit G 124 ſumma conſtans quadratis numerorum, & rectangulo ſub ipſis comprehenſo, quæruntur numeri. Supponatur rectangulum ſub numeris eſſe A, illud adjunctum aggregato ex quadratis numerorum, & rectangulo ſub numeris nempe G, efficiet quadratum ſummæ numerorum, quare A pl. $+ G$ æquatur B2 & $B2 - G = A$ pl. ſed B2 eſt 144. ſubtrahe G 124. reſtat 20 pro A plano. Habetur ergo rectangulum ſub numeris nempe 10. & ſumma laterum 12. quare (*per* 4. *hujus*) dabuntur numeri 2 & 10.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Datâ ſummâ ex quadratis laterum, & rectangulo ſub lateribus, dato item eo rectangulo invenire latera.

Sit data ſumma ex quadratis numerorum quæ ſit B 104. detur item rectangulum ſub lateribus, nempe D 20. Adde 2D ipſi B fiet quadratum aggregati

gregati laterum ſeu 144. & dabitur ſumma laterum 12. & (*per* 4.) latera ipſa 2 & 10.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Dato aggregato quadratorum, & eorumdem differentiâ invenire latera.

Sit aggregatum quadratorum B pl. 104. & eorumdem differentia 96. facilè dabuntur quadrata, ſi ſemiſummæ 52. addas ſemidifferentiam 48 fiet majus quadratum 100 ſi eamdem ſemidifferentiam ſubtrahas ex ſemiſumma 52. reſtat 4 quadratum minoris lateris.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Datâ ſummâ cuborum, & eorumdem differentiâ invenire latera.

Sit data ſumma cuborum B, ſolidum 370. & differentia eorumdem D ſol. 316. ex ſemiſumma 185. ſubtrahe ſemidifferentiam 158. reſtabit 27. pro minori cubo; adde eamdem fiet 343. pro minori; radices 3 & 7.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Datâ differentiâ cuborum, & rectangulo ſub lateribus invenire latera.

Sit differentia cuborum B 316. & rectangulum ſub lateribus D 21. quæruntur latera. Quadratum differentiæ cuborum, ſeu B2 adde ad quadruplum cubum rectanguli ſub lateribus, ita ut fiat ſumma B2 + 4D3. habebitur quadratum aggregati cuborum, cujus radix dabit aggregatum cuborum, & cum habeatur differentia, (*per præcedentem*) habebuntur cubi, & conſequenter latera.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Dato Aggregato cuborum, & rectangulo ſub lateribus invenire latera.

Sit aggregatum cuborum B 370. & rectangulum ſub lateribus D 21. ſubtrahe quadruplum cubum rectanguli ſeu 4D3. ex B2 reſtabit quadratum differentiæ cuborum, & conſequenter cubi.

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Datâ differentiâ laterum, & differentiâ cuborum invenire latera. Seu invenire numeros quorum differentia ſit data cum differentia cuborum.

Sit data differentia numerorum B6. & differentia cuborum ſit etiam data, nempe D ſolidum 504. Quæratur primò aggregatum laterum, ſeu ſumma numerorum; ſumma laterum ſit E, ergo E + B erit duplum majoris lateris, & E — B duplum minoris: fiat utriuſque cubus hoc eſt multiplica E + B per ſeipſum fiet E2 + 2EB + B2. & iterum multiplicando fiet E3 + 3E2 B + 3EB2 + B3. & cubus lateris E — B eſt E3 — 3E2 B + 3EB2 — B3. ſubtrahe unum ab alio ut habeas cuborum differentiam quæ erit 6E2 B + 2B3. & erit octupla D ſolidi, quia cubi erunt octupli eorum quorum D. eſt differentia, & dimidia ejus erit 3E2 B + B3 ſi autem dividas 3E2B per B oritur 3E2. ſed 3E eſt idem quod 4 D ſolidum — B3. quare $\frac{4D\ ſol. - B3}{3B}$. dabit E2. Quare ut ad praxin redeamus 4 D ſol. eſt 2016. & 3B eſt 18. B cubus eſt 216. quem ſubtrahes ex 2016. & 3B eſt 18. B cubus eſt 216. quem ſubtrahes ex 2016. reſtat 1800. divide per 3 B ſeu 18. reſtat 100 pro E2. & E 10. E + B erit 16 duplum majoris; eſt ergo majus latus 8. & E—B eſt 4. duplum minoris; eſt ergo minus latus 2. differentia laterum 6. & cuborum 504.

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Datâ ſumma laterum, & ſummâ cuborum diſtinguere latera.

Sit ſumma laterum, ſeu numerorum qui inquiruntur B 10. ſumma cuborum ſit D. 370. ſit laterum differentia E, ergo B + E eſt duplum majoris, & B—E duplum minoris. Fiat utriuſque cubus, eritque eorum ſumma 2B3 + 6BE2. & hæc ſumma æqualis 8 D: ſunt enim cubi in triplicata ratione laterum & 4D = 3BE2 + B3. & per antitheſin 4D — B3 = 3BE2. & dividendo omnia per 3B erit $\frac{4D - B3}{3B}$ = E2. Quare ut ad praxin redeamus cum 4D ſint 1480. & B3 ſit 1000. ſubtractione factâ reſtat 480. divide per 3B ſeu 30 reſtat 16. = E2, & E erit 4 erit B + E, 14 duplum latus majus atque adeo unus numerus 7. & B — E erit 6 duplum minoris, eritque minus 3.

PROPOSITIO XXIX.

Problema.

Datâ differentiâ laterum, & differentiâ cuborum invenire latera.

Sit B 4 differentia laterum, & differentia cuborum

borum ſit D 316. ſupponatur rectangulum ſub lateribus eſſe A. Clarum eſt autem poſitis lateribus E, & O ſi ab $E^3 - O^3$. quæ eſt differentia cuborum auferatur $E^3 - 3E^2O + 3EO^2 - O^3$. cubus differentiæ laterum relinquitur $3E^2O - 3EO^2$. nempe triplum ſolidum quod fit ex EO, rectangulo ſub lateribus in $E - O$ differentiam laterum Aufer ergo ex differentia cuborum D, cubum differentiæ laterum B^3. fiet $D - B^3$ triplum ſolidum quod fit ex rectangulo ſub lateribus in differentiam laterum, ſeu cum A ponatur rectangulum ſub lateribus, & B differentia laterum 3BA. eſt ergo æquatio $D - B^3 = 3BA$. ſed ſi dividas $\frac{3BA}{3B}$ quotiens erit A; ergo ſi dividas $\frac{D - B^3}{3B}$ relinquetur A rectangulum ſub lateribus, nempe 21. & (*per* 13.) latera 7 & 3.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Aliter. Dato aggregato laterum, & aggregato cuborum invenire latera.

Sit G 10 aggregatum laterum, & D 370 aggretum cuborum; oportet diſtinguere latera. Certum eſt quod ſi à cubo aggregati laterum, auferas duos cubos, ſeu aggregatum cuborum, relinquitur triplum ſolidum, quod fit ab aggregato laterum, in rectangulum ſub lateribus. Ut ſi detur cubus aggregati laterum $A^3 + 3A^2E + 3AE^2 + E^3$. ſubducto aggregato cuborum A^3. & E^3 reſtat $3A^2E + 3AE^2$. nempe triplum ſolidum quod fit ex AE rectangulo ſub lateribus in aggregatum laterum $A + E$. Si ergo A ponatur rectangulum ſub lateribus ſubtrahe ex G^3. D, fiet $G^3 - D$ illudque erit triplum ſolidum quod fit ex G aggregato laterum, in A rectangulum ſub lateribus. Quare divide $G^3 -$ per 3G reſtabit A; eſt ergo æquatio $\frac{G^3 - D}{3G} = A$. G^3 eſt 1000. ſubtrahe D 370. reſtat 630. divide per 3G, ſeu 30. fit 21. rectangulum ſub lateribus, & (*per* 14.) dantur latera 7 & 3.

PROPOSITIO XXXI.

Problema.

Datis duobus ſolidis, uno ex differentia laterum in differentiam quadratorum, altero quod fit ex aggregato laterum, in aggregatum quadratorum invenire lattera. Seu invenire duos numeros, qui ita ſe habeant, ut multiplicando eorum differentiam per differentiam quadratorum, fiat determinatus numerus, & ducendo ſummam numerorum in ſummam quadratorum fiat alius numerus.

Sit prior numerus B 32. & ſecundus D 272. ſupponantur latera E & O. erit differentia laterum $E - O$, differentia quadratorum $E^2 - O^2$. multiplica unum per aliud fiet $E^3 - EO^2 - E^2O + O^3$. qui numerus eſt æqualis B; divide hunc numerum per $E + O$. reſtabit $E^2 - 2EO + O^2$ ſeu quadratum differentiæ laterum. Fiat A aggregatum laterum, erit $\frac{B}{A}$ quadratum differentiæ laterum, & dividendo numerum D productum ex aggregato laterum, in ſummam quadratorum, per A aggregatum laterum, producetur $\frac{D}{A}$ aggregatum, quadratorum: ſed duplum aggregatum quadratorum minus quadrato differentiæ laterum efficit quadratum aggregati laterum; quare $\frac{2D - B}{A} = A^2$. omnia multiplicentur per A. fiet $2D - B = A^3$ ſed 2D eſt 544. aufer B ſeu 32. reſtant 512 cujus radix cubica 8. erit ſumma laterum, ex quibus (*per ſuperiores*) habebis latera.

PROPOSITIO XXXII.

Dato aggregato quadratorum, & ratione rectanguli ſub lateribus ad quadratum differentiæ laterum, invenire latera.

Sit B 20 aggregatum quadratorum, ratio autem rectanguli ſub lateribus, ad quadratum differentiæ ſit ut R 2 ad S. 1. quæruntur latera. Sit rectangulum ſub lateribus A, & quia eſt ut R ad S ita rectangulum ſub lateribus ſeu A ad quadratum differentiæ, erit quadratum differentiæ $\frac{SA}{R}$ cui adjungatur duplex planum ſub lateribus, fiet $\frac{SA + 2RA}{R}$ fietque aggregatum quadratorum B: fietque analogiſmus $S + 2R$ ad R, ita B ad A. Sic habebitur rectangulum ſub lateribus, ex quo & aliis habebuntur latera.

PROPOSITIO XXXIII.

Problema.

Datâ mediâ trium proportionalium, & differentia extremarum, invenire extremas.

Sit media 12. & differentia extremarum ſit 10. datâ mediâ 12. datur ejus quadratum 144. quod æquale eſt rectangulo ſub extremis, ſed dato rectangulo ſub extremis ſeu lateribus, & differentia laterum, (*per* 13. *hujus*) dantur latera ſeu extremæ, ergo dabuntur extremæ.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema.

Datâ mediâ trium proportionalium & aggregato extremarum, illas diſtinguere.

Datâ mediâ datur ejus quadratum, & conſequenter rectangulum ſub extremis, ſed ſuperiùs vidimus dato aggregato, & rectangulo ſub lateribus inveniri latera.

PROPOSITIO XXXV.

Problema.

Dato perpendiculo trianguli rectanguli, & differentia baſis, & hypothenuſæ, invenire baſin & hypothenuſam.

Hoc problema jam ſolutum eſt virtualiter; nam datâ

Digitized by Google

datâ differentiâ laterum, & differentiâ quadratorum, cognoſcuntur latera (*per 17. hujus*) ſed quadratum perpendiculi eſt differentia quadratorum baſis, & hypothenuſæ, & aliunde ſupponitur data differentia ejuſdem baſis & hypothenuſæ: unde ſi perpendiculum ſit D, differentia baſis, & hypothenuſæ ſit B. & A ſit ſumma baſis & hypothenuſæ $\frac{D2}{B} = A$ hoc eſt perpendiculum trianguli rectanguli, medium proportionale eſt inter differentiam baſis, & hypothenuſæ, & aggregatum baſis & hypothenuſæ.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema.

Dato perpendiculo, & aggregato baſis, & hypothenuſa diſtinguere baſin, & hypothenuſam.

Hoc problema non aliter ſolvitur ac ſuperius, & in eadem propoſitione fundatur.

PROPOSITIO XXXVII.

Problema.

Datâ hypothenuſâ trianguli rectanguli, & differentiâ laterum circa rectum, invenire latera circa rectum.

Hæc propoſitio coincidit cum iſta, datâ differentiâ laterum, & aggregato quadratorum invenire latera. Nam datâ hypothenuſâ, cognoſcitur ejus quadratum, quod æquale eſt aggregato quadratorum; ut ſi hypothenuſa ſit D, & B differentia laterum, ſitque ſumma laterum circa rectum A. quare ut vidimus $2D2 - B2 = A2$. Hoc eſt duplum quadratum hypothenuſæ—quadrato differentiæ laterum circa rectum æquatur quadrato ſummæ eorumdem.

PROPOSITIO XXXVIII.

Problema.

Datâ hypothenuſâ trianguli rectanguli, & ſummâ laterum circa rectum, invenire latera.

Hæc propoſitio eadem eſt ac dato aggregato quadratorum, & ſumma laterum invenire latera. Et vidimus duplum quadratum hypothenuſæ minus quadrato aggregati laterum circa rectum, æquari quadrato differentiæ.

PROPOSITIO XXXIX.

Problema.

Invenire in numeris tres proportionales.

Sint duo quaſi latera B & D. ſe habentia ut numerus ad numerum.

Ponatur ergo prima B, ſecunda D, tertia $\frac{D2}{B}$ multiplica omnia per B fient adhuc tres proportionales B2, BD, & D2. quod probavimus jam ſæpe: nempe rectangulum ſub lateribus eſſe medium proportionale inter quadrata laterum; ſit igitur B. 2. D. 3. tertia eſſet $\frac{9}{2}$. multiplica omnia per 2 fient 4. 6. 9.

PROPOSITIO XL.

Problema.

Triangulum rectangulum in numeris invenire.

Inventis tribus continuè proportionalibus in numeris, hypothenuſa fiat aggregatum extremarum, baſis differentia inter extremas, & perpendiculum media dupla. Ut ſi ſint tres proportionales 4. 6. 9. ſit hypotenuſa aggregatum ex primâ, & ultimâ, nempe, 13, baſis differentia inter 4 & 9. nempe 5. & perpendiculum media dupla 12. hoc totum demonſtratum eſt ſupra.

PROPOSITIO XLI.

Problema.

Aliter triangulum rectangulum in numeris conſtituere.

Idem præſtabis ſi datis duobus lateribus rationalibus B & D. facias tria proportionalia B2, BD & D2. eritque hypothenuſa B2 + D2. baſis B2 — D2. perpendiculum 2BD.

PROPOSITIO XLII.

Problema.

Dato aggregato quadratorum, trium continuè proportionalium, & unâ extrema, invenire aliam extremam.

Jam oſtendimus aggregatum trium quadratorum, mulctatum $\frac{3}{4}$ quadrati unius extremæ, relinquere quadratum compoſitæ ex ſemiſſe illius extremæ, & alia extrema. Ut ſi ſint tres proportionales 4. 6. 9. ex aggregato trium quadratorum ſeu 133. auferas 12. ſeu $\frac{3}{4}$ quadrati 16 primæ 4: relinquitur 121. quadratum radicis 11. compoſitæ ex 9. ſeu aliâ extremâ, & 2 ſemiſſe primæ.

PROPOSITIO XLIII.

Problema.

Dato aggregato quadratorum trium proportionalium & ſummâ extremarum, extremas diſtinguere.

Oſtendimus quadratum aggregati extremarum, mulctatum aggregato quadratorum trium proportionalium, æquale eſſe quadrato mediæ. Ut ſi poſitis tribus proportionalibus 1. 2. 4. detur aggregatum quadratorum nempe 21. detur item aggregatum extremarum 1 & 4 ſeu 5. ſi ex quadrato ejus 25. ſubtrahatur 21. ſumma trium quadratorum, reſtabit 4 quadratum mediæ. Datâ autem ſummâ extremarum, & mediâ dantur extremæ.

PROPOSITIO XLIV.

Problema.

Dato aggregato quadratorum trium proportionalium ac media, diſtinguere extremas.

Oſtendimus Aggregatum quadratorum trium proportionalium + quadrato mediæ æquale eſſe quadrato aggregati extremarum. Ut ſi aggregato quadratorum 21. addas 4 quadratum mediæ, exurget 25. quadratum aggregati extremarum nempè 5.

PROPOSITIO XLV.

Problema.

Datâ differentiâ extremarum, & differentiâ mediarum, in ſerie quatuor continuè proportionalium eas invenire.

Hoc problema coincidit cum eo, in quo datâ differentiâ cuborum, & datâ differentiâ laterum, latera invenimus.

Sit enim data differentia extremarum D 7. & differentia mediarum B2. ita quæruntur ipſæ quatuor quantitates continuè proportionales. Supponatur A eſſe aggregatum extremarum, cum D ſit earum differentia, A + D erit duplum minoris extremæ, A — D erit duplum minoris extremæ; multiplica A + D per A — D. fiet $A2 — D2$ rectangulum quater comprehenſum ſub extremis. Quare illud rectangulum comprehenſum ſub extremis erit $\frac{A2 - D2}{4}$. quod ſi multiplicetur per majorem extremam fiet cubus mediæ majoris; ſi multiplicetur, per extremam minorem, fiet cubus mediæ minoris, & multiplicatum per differentiam extremarum quæ eſt D, dat differentiam mediarum cuborum, ut facilè patebit, ſi pro quatuor proportionalibus ſumas A. $\frac{B2}{A}$. $\frac{B3}{A2}$. Ex tali multiplicatione ultimâ fit $\frac{DA2 - D3}{4}$ quæ quantitas æqualis eſt differentiæ cuborum à mediis, habetur autem differentia mediarum, quæ eſt 2. cujus ſi cubus B3. 8: auferatur ex differentia cuborum, relinquetur triplum ſolidum ex differentia laterum ſeu mediarum, in rectangulum ſub illis. Quare $\frac{DA2 - D3 - 4B3}{4}$ æquale eſt triplo ſolido, ex differentia mediarum, in rectangulum ſub mediis: ſed rectangulum ſub mediis, idem eſt ac rectangulum ſub extremis, nempè $\frac{A2 - D2}{4}$. hoc ter ſumptum multiplicetur per B, habebimus $\frac{3BA2 - 3BD2}{4}$. Habemus ergo æquationem $\frac{DA2 - D3 - 4B3}{4} = \frac{3BA2 - 3BD2}{4}$. & relicto denominatore erit etiam æquatio $DA2 - D3 - 4B3 = 3BA2 - 3BD2$ & tranſlatis per antitheſin fiet $DA2 = D3 + 4B3 + 3BA2 - 3BD2$: transferatur penultimum membrum per antitheſin fiet $DA2 - 3BA2 = D3 + 4B3 - 3BD2$. divide omnia per D — 3B. reſtat $A2 = \frac{D3 + 4B3 - 3BD2}{D - 3B}$; habebitur ergo A aggregatum extremarum, & cum habeatur differentia cognoſcentur extremæ.

Eſt autem D3, 343 & 4B3 32. fiat ſumma 375. à qua ſubtrahe 3BD2 294. reſtat 81. divide per D ſeu 7 — 3B. ſeu 6. hoc eſt per 1. reſtabit 81 pro A2. quare A aggregatum extremarum erit 9. cui ſi differentia 7 addatur, fiet 16 duplum majoris, ſi ſubtrahatur fiet 2 duplum minoris. ſunt ergo major extrema 8. & minor extrema 1. Pariter cum rectangulum contentum ſub mediis, æquale ſit rectangulo comprehenſo ſub extremis, habebimus 8 pro tali rectangulo: inveniendi igitur duo numeri, qui multiplicati efficiant 8. & quorum differentia ſit 2. quod eſt facilè.

PROPOSITIO XLVI.

Problema.

Dato aggregato extremarum, & aggregato mediarum in ſerie quatuor proportionalium eas invenire.

Hoc problema coincidit cum eo in quo priùs, dato aggregato laterum, & aggregato cuborum latera diſtinximus.

Sit D 9 aggregatum extremarum, & B 6 aggregatum mediarum: ſupponatur A eſſe differentia extremarum, eritque B + A duplum majoris extremæ, & D — A duplum minoris extremæ, & multiplicando unam per aliam fit rectangulum quater ſub extremis, eritque Dq — Aq, quare ſi tale rectangulum dividatur per 4. habebitur rectangulum ſub extremis nempè $\frac{Dq - Aq}{4}$. ſed vidimus quod ſi multiplicetur per extremam majorem fit cubus mediæ majoris; ſi per minorem extremam fit cubus mediæ minoris; ſi per ſummam extremarum, fit aggregatum cuborum mediarum, eſt autem tale aggregatum extremarum D. quare $\frac{D3 - DA2}{4}$ erit aggregatum cuborum mediarum; & cum habeatur aggregatum mediarum, habetur cubus aggregati mediarum, nempè B3. à quo ſi auferas aggregatum cuborum nempe $\frac{D3 - DA2}{4}$ reſtabit $\frac{4B3 - D3 + DA2}{4}$ quod æquabitur triplo ſolido, ex aggregato mediarum, in rectangulum ſub mediis, quod idem eſt cum rectangulo ſub extremis, nempè $\frac{D2 - A2}{4}$ quod ſi multiplices per B aggregatum mediarum ter ſumptum habebis idem ſolidum triplum $\frac{3BD2 - 3BA2}{4}$. Habemus ergo æquationem $\frac{4B3 - D3 + DA2}{4} = \frac{3BD2 - 3BA2}{4}$ & abjecto denominatore $4B3 - D3 + DA2 = 3BD2 - 3BA2$. & per antitheſin $DA2 + 3BA2 = 3BD2 + D3 - 4B3$. & dividendo omnia per D + 3B. erit æquatio $A2 = \frac{3BD2 + D3 - 4B3}{D + B}$ primum membrum eſt 1458. adde D3 ſeu 729. fiet 2187. ſubtrahe 4B3. ſeu 864. reſtat 1323. divide per D + 3B ſeu 27. invenies 49. pro A 2. atque adeò erit 7. differentia extremarum & erunt extremæ 1. & 8. reliquæ facilè ex his habebuntur.

ALGEBRÆ

ALGEBRÆ
LIBER OCTAVUS.
Diophanti Exempla.

VT meliùs in exemplis ſuperioris doctrinæ praxis appareat, exempla ipſa Diophanti quæ in eo authore non ſatis clara videntur, ob linguæ Græcæ ſtylum à noſtro communi modo loquendi nonnihil alienum, hic clarè propoſita, & præceptis ſupra explicatis accommodata ſolvenda ſuſcipimus; ſic enim ex ipſo quaſi fonte totam doctrinam hauriemus. Ejus igitur libros duos, & problemata in iis contenta perſtringemus: cætera ex his facilè ſolventur.

PROBLEMATA LIBRI PRIMI DIOPHANTI.

PROPOSITIO I.

Problema.

Propoſitum numerum in duos numeros partiri quorum data ſit differentia.

SIt numerus 100 dividendus in duos, quorum differentia ſit 40.

Ponatur minor 1 R. major erit 1 R + 40. major etiam erit 100 — 1R. ergo datur æquatio 1R + 40 = 100 — 1R. adde per antitheſin 1R. fiet æquatio 2R. + 40 = 100. ſubtrahe 40. fit 2R. = 60. divide per 2. fit æquatio 1R. = 30. eſt ergo minor 30. major 100 — 30. ſeu 70.

PROPOSITIO II.

Problema.

Numerum datum in duos partiri qui ſint in data ratione.

Sit numerus 60 dividendus in duos, qui ſint in ratione tripla. ſit minor 1R. major erit 3 R. & major erit etiam 60 — 1R. eſt ergo æquatio 3R. = 60 — 1R. adde 1R. fiet 4R. = 60. divide per 4. fit 1R. = 15. ſunt ergo numeri 15. & 45.

PROPOSITIO III.

Problema.

Propoſitum numerum dividere in duos quorum unus ad alium datam habeat rationem & inſuper certas unitates contineat.

Numerus 80 ſit dividendus in duos, quorum major ſit minoris triplus & inſuper contineat 4 unitates. Sit minor 1R. major erit 3 R. + 4. & erit etiam 80 — 1R. eſt ergo æquatio 80 — 1R. = 3R. + 4. adde 1 R. fit æquatio 80 = 4R. + 4. ſubtrahe 4 fit 76 = 4R. divide per 4. fit 19 = 1R: eſt ergo minor 19. major ejus triplus, & inſuper continens 4 unitates erit 61.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Invenire duos numeros in data ratione quorum differentia ſit data.

Sint duo numeri inveniendi, quorum major ſit quintuplus minoris. & eorum differentia ſit 20. ſit minor 1R. major 5R. differentia 4R. ſed differentia eſt etiam 20. ergo habemus æquationem 4R. = 20. divide per 4 fiet 1R. = 5. minor numerus, major 25. differentia eſt 20.

PROPOSITIO V.

Problema.

Propoſitum numerum in duos partiri ita ut unius tertia pars, & alterius quinta efficiat ſummam datam.

Sit numerus 100 ita dividendus in duos, ut primi tertia pars, & ſecundi quinta efficiant 30. Ponatur quinta pars ſecundi 1R. eritque ſecundus totus 5R. erit ergo tertia pars primi 30 — 1R. quæ ſi triplicetur habebitur primus 90 — 3 R. addantur ſimul ij numeri erit eorum ſumma 90 + 2R. ſed eorum ſumma eſt etiam 100. cum numerus 100. fuerit diviſus in illos numeros; ergo 90 + 2 R. = 100. auferantur 90. erit 2R. = 10. & 1 R. = 5. quinta pars ſecundi: ergo ſecundus eſt 25. tertia pars primi erit 30 — 1 R ſeu 25. eſt ergo primus 75. ſecundus 25. tertia pars primi 25. quinta pars ſecundi 5. quæ ſimul efficiunt 30.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Propoſitum numerum in duos dividere ut unius data pars, alterius datam partem ſuperet determinato numero.

Dividendus ſit numerus 100 in duos, ut prioris numeri quadrans ſextam partem poſterioris ſuperet 10 unitatibus.

Sit quadrans prioris 1R. erit ſextans poſterioris 1R. — 20. eritque primus 4R. poſterior 6R. — 120. fiat eorum ſumma, hæc erit 10R. — 120. quæ æqualis eſt numero 100. Cum ſupponatur numerus 100. diviſus in eos numeros: ergo 10R. — 120 = 100 adde 120. fiet 10R. = 220. divide per 10. erit 1R. = 22. eſt ergo quadrans primi numeri 22, ſextans poſterioris 22 — 20. ſeu 2: eritque prior numerus 88. poſterior 12.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Ab eodem numero auferre duos datos numeros, ut reſidui datam ſervent rationem.

Ab eodem numero qui quæritur, auferre jubeamur 100 & 20. ut majus reſiduum minoris ſit triplum. ſit numerus quæſitus 1R. eritque minus reſiduum 1R. — 100. & majus, quod triplum eſt, erit 3R. — 300. ſed majus reſiduum eſt etiam 1R. — 20. quare 3R. — 300. = 1R. — 20: adde 300. fiet æquatio 3R. = 1R. + 280: ſubtrahe 1R. fiet 2R. = 280. & dividendo 1R. = 140. Ex quo numero ſi auferas 20. reſtat 120. ſi auferas ex eodem 100. reſtat 40. eſt autem 120 triplus numeri 40.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Duobus datis, numerum eumdem addere, ita ut eorum ſummæ in data ſint ratione.

Jubeamus numeris 100. & 20. eumdem numerum addere, ut major ſumma minoris ſit tripla. Sit numerus addendus 1R. minor ſumma erit 1R. + 20. cujus major, utpote tripla erit 3R. + 60. ſed major ſumma eſt etiam 1R. + 100. quare 3R. + 60 = 1R. + 100. ſubtrahe 1R. & 60. fiet 2R. = 40. & 1R. = 20. fiuntque ſummæ 120. & 40. quarum major minoris eſt tripla.

PROPOSITIO IX.

Problema.

A datis duobus numeris ſubtrahere eumdem numerum, ut reſidui ad invicem datam habeat rationem.

A numeris 100 & 20. auferendus ſit idem numerus, ita ut major reſiduus ad minorem rationem habeat ſextuplam, majorem ſcilicèt quam ſit 100 ad 20. alioquin fiet impoſſibilis quæſtio. Sit numerus quæſitus 1R. eritque minor reſiduus 20 — 1R & major qui eſt ſextuplus 120 — 6R. ſed major reſiduus eſt etiam 100 — 1R: datur ergo æquatio nempe 120 — 6R. = 100 — 1R. adde 6R. & ſubtrahe 100. fiunt 20 = 5R. divide per 5. & orit 4 = 1R. eritque 100 — 4. ſeu 96. ſextuplus numeri 20 — 4. ſeu 16.

PROPOSITIO X.

Problema.

Eundem numerum quæſitum addere minori numero, & ſubtrahere ex majore, ut ſumma reſidui ſit quadrupla.

Sint dati numeri 100 & 20. ſitque quærendus numerus, qui additus ad 20. & ſubtractus ex 100. faciat ſummam reſidui quadruplam. Sit hic numerus 1R. eritque reſiduus 100 — 1R. cujus ſumma utpote quadrupla eſt 400 — 4R. ſed illa ſumma eſt etiam 20 + 1R. eſt ergo æquatio 400 — 4R = 20 + 1R: ſubtrahe 20. & adde 4R. fiet æquatio 380 = 5R: divide per 5. fiet 76 = 1R: adde 76 ad 20. fit ſumma 96. ſubtrahe 76 ex 100. erit reſiduus 24. eſt ergo ſumma reſidui quadrupla.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Ab eodem numero quæſito, unum numerum datum addere, alterum ſubtrahere, ut ſumma ad reſiduum datam habeat rationem.

Quæſito numero addendus eſt numerus 20. & ſubtrahendus 100. ita ut ſumma ſit reſidui tripla.

Sit numerus quæſitus 1R. à quo ſi auferas 100. fit reſiduus 1R. — 100: ſumma autem quæ fiet debet eſſe tripla; erit ergo 3R. — 300: ſed illa ſumma eſt 1R. + 20. eſt ergo æquatio 3R — 300. = 1R + 20: adde 300. & ſubtrahe 1R fiet æquatio 2R. = 320. & dividendo per 2. erit 1R = 160. cui numero ſi addas 20. fit ſumma 180. ſi ſubtrahas 100. erit reſiduus 60: eſt autem ſumma reſidui tripla.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Datum numerum bis in duos numeros dividere, ita ut primus primæ diviſionis, ad primum ſecundæ datam habeat rationem, & ſecundus ſecundæ diviſionis ad ſecundum primæ datam habeat rationem.

Numerus 100. dividendus ſit bis, ita ut major primæ diviſionis ſit duplus minoris ſecundæ diviſionis, major vero ſecundæ, minoris è prima ſit triplus. Sit minor ſecundæ diviſionis 1R. major primæ erit 2R. & minor primæ 100 — 2R. & major ſecundæ illius triplus 300 — 6R. ſed tam duo

duo primæ diviſionis quam duo ſecundæ adæquant numerum 100, habemus ergo æquationem duplicem addendo duos numeros primæ diviſionis, nempe 2R. & 100—1R. adde item numeros ſecundæ 300—6R. & 1R. fietque 300—5R $=$ 100. adde 5R. fiet 300 $=$ 5R. + 100: ſubtrahe 100, fiet 200 $=$ 5R: divide, 1R $=$ 40. eſt ergo minor ſecundæ 40. & major 60. major primæ 80 ſatisfacientes quæſtioni.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

Datum numerum ter in duos dividere ita ut unus è prima diviſione, ad unum è ſecunda datam habeat rationem, & reliquus è ſecunda ad unum è tertia datam habeat rationem, & reliquus è tertia, ad reliquum è prima datam habeat rationem.

Numerus 100. ſit ter dividendus in duos numeros, ita ut major è prima diviſione minoris è ſecunda ſit triplus, major è ſecunda minoris è tertia ſit duplus, major è tertia minoris è prima ſit quadruplus.

Incipiamus à minore è tertia qui ſit 1R major è ſecunda erit 2R. eritque minor è ſecunda 100 — 2R. nam ſemper in qualibet diviſione numerus 100. dividitur. eritque major à prima hujus triplus 300 — 6R. & minor ejuſdem diviſionis erit 6R. & minor ejuſdem diviſionis erit 6R — 200. cujus major tertiæ eſt quadruplus; eſt ergo 24 R. — 800; cui ſi addas minorem tertiæ jam primo ſuppoſitum ſeu 1R. fiet ſumma 25 R. — 800. æqualis 100: adde 800. fiet 25 R $=$ 900: divide fiet 36 $=$ 1R. eſt ergo minor tertiæ 36. major 64. minor primæ 16. major 84. minor ſecundæ 28. major 72. ſatisfacientes quæſtioni.

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Invenire duos numeros ita ut productus ex eorum multiplicatione ad eorum ſummam datam habeat rationem.

Quærantur duo numeri, ita ut productus ex eorum multiplicatione eorum ſummæ ſit triplus.

Primus numerus ſtatuatur 1R. ſecundus poteſt ſtatui quilibet major quam 3 denominator rationis propoſitæ. ponatur ſecundus eſſe 12 erit ſumma 1R. + 12. cujus, productus ex eorum multiplicatione triplus eſt; ille ergo erit 3R. + 36. ſed ille etiam eſt 12 R: eſt ergo æquatio 3R. + 36 $=$ 12 R: ſubtrahe 3R. fiet 36 $=$ 9R: divide fiet 1 R. $=$ 4. quare 4 & 12 ſatisfaciunt quæſtioni. ſumma enim eſt 16. productus illius triplus eſt 48.

Sed jam ponatur ſecundus eſſe 15. & primus 1R. erit ſumma 1 R. + 15. cujus productus eſt triplus, nempe 3R. + 45: ſed ille productus eſt etiam 15 R: eſt ergo æquatio 3R. + 45 $=$ 15 R: ſubtrahe 3R. fit 45 $=$ 12 R: divide fiet $3\frac{1}{4}$. ſunt ergo numeri ſatisfacientes quæſtioni 15 & $3\frac{1}{4}$. ſumma eſt $18\frac{1}{4}$. productus $56\frac{1}{4}$.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Duos numeros invenire, ita ut prior ab altero datum numerum accipiens, ad reſiduum datam habeat rationem & poſterior alium numerum accipiens ad reliquum datam habeat rationem.

Sint quærendi duo numeri qui ita ſe habeant, ut prior accipiens 30. unitates ſit reſidui duplus, & poſterior acceptis à priore 50. unitatibus ſit reſidui triplus.

Ponatur poſterior eſſe 1R. + 30. quare prior erit 2R. — 30. ſic enim acceptis 30 unitatibus à poſteriore, erit reſidui duplus: ſi prior det 50 unitates poſteriori, erit reliquus 2R. — 80. cujus poſterior eſt tribus 6R. — 240. Sed idem poſterior acceptis 50 eſt 1 R. + 80. eſt ergo æquatio 6R. — 240 $=$ 1R. + 80. ſubtrahe 1R. & adde 240. fit æquatio 5R. $=$ 320. divide per 5. fit 1R. $=$ 64. eritque poſterior 64 + 30 ſeu 94. & prior 128—30 ſeu 98. quare 98. acceptis 30. à poſteriore 94. erit 128. & reliquus 64. eſt ergo prior reliqui duplus.

Pariter ſecundus 94 acceptis 50 à priore 98. efficit 144. & reliquus 48. eſt ergo reliqui triplus.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Invenire tres numeros, ita ut bini quinque imperatos faciant numeros

Inveniendi ſint tres numeri, ita ut ſumma primi & ſecundi ſit 20. ſecundi & tertii 30. tertii & primi 40.

Supponatur primus eſſe A. ſecundus E, tertius O

$$\text{Eritque}\ \left.\begin{aligned} A + E &= 20 \\ O + E &= 30 \\ A + O &= 40 \end{aligned}\right\}$$

Eruntque omnes ſimul bis, 90. ergo ſumma erit 45. & quia A & E efficiunt 20. erit O reliquus 25. & cum A & O ſint 40 ablato O ſeu 25. erit A 15. & cum A + E ſint 20. erit E 5: ſunt ergo numeri A 15. E 5. O. 25. ſatisfacientes quæſtioni.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Invenire quatuor numeros, ita ut terni juncti efficiant imperatos numeros.

Sint inveniendi quatuor numeri, ita ut primorum trium ſumma ſit 20. ſecundi tertii, & quarti, ſumma ſit 22. tertii, quarti & primi 24 quarti primi & ſecundi 27. ſint ij numeri A, E, O, V.

$$\text{Proponatur ergo}\ \left.\begin{aligned} A + E + O &= 20 \\ E + O + V &= 22 \\ O + V + A &= 24 \\ V + A + E &= 27 \end{aligned}\right\}$$

Erit ergo tripla ſumma 93. & ipſa ſumma 31. cum ergo A + E + O ſint 20. iis ex ſumma 31.

ſubtractis

ſubtractis reſtat V 11. & cum E + O + V ſint 22. iis à 31 ſubtractis reſtabit à 9. & cum O + V + A ſit 24. ſubtractis V, 11. & A 9. ſeu 20. erit O, 4. & Cum AEO ſint 20 ſubtractis A 9. & O 4. ſeu 13 erit E 7. Habemus ergo A 9. E 7, O, 4. V. 11. ſatisfacientes quæſtioni.

Requiritur autem ut ſummæ triens major ſit quolibet numero, alioquin incidemus in quæſtionem impoſſibilem.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Invenire tres numeros, ut bini juncti ſuperent reliquum imperato numero.

Sint inveniendi tres numeri ita ut primus & ſecundus ſuperent tertium 20 unitatibus, ſecundus & tertius ſuperent primum unitatibus 30. tertius & primus ſuperent ſecundùm unitatibus 40.

Sint tres numeri A, E, O. Eſtque

$$A + E = O + 20$$
$$E + O = A + 30$$
$$O + A = E + 40$$

Erit æquatio 2A + 2E + 2O = A + E + O. + 80. & ablatis A + E + O. erit ſumma omnium 80. & cum A + E = O + 20. adde utrinque O. erit A + E + O = 2O + 20. ſubtrahe ergo ex ſumma 80. numerum 20 habebis 60 = 2O. ergo O eſt 30.

Pariter cum E + O = A + 30. adde A utrinque habebis A + E + O = 2A + 30. ſubtrahe ergo ex ſumma 80. numerum 30. reſtabit 50 = 2A. ſit ergo æquatio A = 25. denique cum O + A = E + 40. adde E fiet ſumma A + E + O = 2E + 40. ſubtrahe ex ſumma 80. numerum 40. reſtat 40. = 2E. & conſequenter 20 = E.

Alia praxi idem inveniri poteſt, ut problema 19 habet.

PROPOSITIO XIX.

Problema.

Invenire 4 numeros, ut terni juncti reliquum ſuperent dato exceſſu.

Quæruntur quatuor numeri, ita ut primus, ſecundus, & tertius ſuperent quartum 20 unitatibus; ſecundus tertius & quartus primum ſuperent 30 unitatibus; tertius quartus & primus ſecundum ſuperent unitatibus 40. quartus primus & ſecundus ſuperent tertium 50 unitatibus ſint quatuor numeri A, E, O, V.

Eritque æquatio
$$A + E + O = V + 20$$
$$E + O + V = A + 30$$
$$O + V + A = E + 40$$
$$V + A + E = O + 50$$

Eſt ergo æquatio 3A + 3E + 3O + 3V = + E + O + V + 140 ſubtrahe A + E, + O + V utrinque erit 2A + 2E + 2O + 2V = 140. & ſumma omnium eſt 70: quare cum A + E + O = V + 20. addito utrinque V, erit ſumma æqualis 2V + 20. hoc eſt ſumma 80 — 20 = 2V. Quare V eſt 30. pariter ſumma 80 — 30 = 2A eſt ergo A 25. ſumma 80 — 40 = 2E, ergo E = 20. ſumma 80 — 5 = 2O ergo O eſt 15.

Alio modo poteſt ſolvi ut problemate 21.

PROPOSITIO XX.

Problema.

Datum numerum ita partiri in tres numeros, ut ſumma extremi cum medio, ad alium extremum datam habeat rationem.

Proponatur numerus 100. ita dividendus in tres numeros, ut ſumma primi & ſecundi ſit tripla tertii, & ſumma ſecundi & tertii, ſit quadrupla primi. Tertius ſit 1 R. & cum ſumma primi & ſecundi ſit tertii tripla erit hæc ſumma 3R. quare tota ſumma trium erit 4R. ſed hæc eſt 100. ergo eſt æquatio 100 = 4R. eritque 1R = 25.

Sit primus A, erit ſumma ſecundi & tertii 4A, cum ſit quadrupla & tota ſumma 5 A. ſed tota ſumma eſt 100: quare 100 = 5 A. & A = 20. Primus ergo eſt 20. tertius 25. & conſequenter medius 55. Primi 20 & ſecundi 55. ſumma eſt 75 tripla tertii 25. pariter ſecundi 55, & tertii 25, ſumma 80, eſt quadrupla primi 20.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Invenire tres numeros quorum maximus medium ſuperet minimi parte determinatâ; medius minimum ſuperet maximi parte aſſignatâ; & minimus dato numero ſuperet datam medii partem.

Quæruntur tres numeri qui ita ſe habeant, ut maximus ſuperet medium tertia parte minimi, medius ſuperet minimum triente maximi; & minimus ſuperet trientem medii 10 unitatibus.

Ponatur minimus 1R. + 10. cum ſuperet 10 unitatibus trientem medii; eritque medii triens 1R. & medius 3R: medius autem ſuperat minimum triente maximi, ſuperat autem hoc exceſſu, 2R. — 10: quare maximus erit 6R — 30: ſed maximus ſuperat medium triente minimi, ſuperat autem medium 3R. — 30: igitur 3R. — 30 eſt triens minimi ergo minimus eſt 9 R. — 90. Sed erat 1R. + 10. eſt ergo æquatio 1 R. + 10 = 9R. — 90; adde 90. & ſubtrahe 1R, fiet 100 = 8R: divide erit 1R. = 12 $\frac{1}{2}$. Eſt ergo minimus 22 $\frac{1}{2}$. medius 37 $\frac{1}{2}$. maximus 6 R. — 30. erit 45.

Idem alio modo perficitur problemate 24.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Invenire tres numeros quorum ſi quilibet dederit imparatam ſui partem ſequenti reſtent æquales.

Quæruntur tres numeri, qui ita ſe habeant, ut ſi primus det ſecundo ſuam tertiam partem, & ſecundus tertio quadrantem ſuum, & tertius primo quintam reſtent æquales.

Primus ponatur 3R. ut habeat tertiam partem; ſecundus ponatur 4. unitatum ut habeat quadrantem. Si ergo medius det ſui quadrantem tertio, & accipiat trientem à primo, fiet 1R. + 3 cui primus

mus cum dederit ſuum quadrantem & acceperit quintam partem tertii fiet æqualis, eſt autem ubi dederit trientem 2R. Aufer ergo 2R ex 1R + 3. reſtabit 3 — 1R. pro quinta parte tertii; tertius ergo erat 15 — 5R & accipiens à ſecundo quartam partem ſeu unam unitatem, & dans primo ſuam quintam, erit 13 — 4R; erit ergo æqualitas inter hunc tertium 13 — 4R, & ſecundum 3 + 1R. adde 4 R. & ſubtrahe 3. fiet æquatio 10 = 5 R. divide, erit 1R = 2. quare primus eſt 6. ſecundus 4. tertius 5. ſatisfacientes quæſtioni.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Invenire quatuor numeros qui ita ſe habeant ut ſi quilibet det ſequenti imperatam partem fiant æquales.

Sit imperatum quatuor numeros invenire, qui ita ſe habeant, ut ſi primus ſecundo det trientem, ſecundus tertio quadrantem, tertius quarto quintam partem, quartus primo ſextam partem, poſt hanc mutuam contributionem fiant æquales.

Ponatur primus 3 R, ut habeat trientem, ſecundus 4. ut habeat quadrantem, ſecundus igitur det tertio quartam partem, reſtabit 3, accipiat à primo trientem fiet 1R + 3. illi autem eſt æqualis primus poſtquam dedit trientem & accepit ſextam partem quarti, eſt autem 2 R poſtquam dedit; ſi ergo 2R. ſubtrahas ex 1R + 3. reſtabit 3 — 1R pro ſexta parte quarti, eſt ergo quartus 18 — 6R. & dando ſextam partem primo reſtat 15 — 5R. augeri autem debet quinta parte tertii & tunc erit æqualis ſecundo 1R + 3. ſubtrahe 15 — 5R. ex 1R + 3 reſtabit 6R — 12 pro quinta parte tertii, eritque tertius integer 30 R — 60, & cum dederit quintam partem reſtabit 24 R — 48. & accipiendo quadrantem à ſecundo nempe à 4. erit 24R — 47. & tunc æqualis eſt ſecundo 1 R + 3. habemus ergo æquationem 1R + 3 = 24 R — 47. adde 47. ſubtrahe 1R. reſtabit 50 = 23R. erit ergo æquatio 1R = $\frac{50}{23}$. eritque primus $\frac{150}{23}$ ſecundus $\frac{92}{23}$. ſeu quatuor unitatum, tertius $\frac{120}{23}$. quartus $\frac{114}{23}$. & abjectis denominatoribus 150, 92. 120. & 114. ſatiſfaciunt quæſtioni.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Invenire tres numeros, ut quilibet à duobus reliquis conjunctis accipiendo imperatam partem remaneant æquales.

Sint inveniendi tres numeri, qui ita ſe habeant; ut ſi primo addatur triens reliquorum ſimul ſumptorum, ſecundo quadrans primi & tertii, tertio quinta pars primi, & ſecundi fiant æquales.

Primus numerus poteſt poni 1R. ſumma reliquorum, quæ primo dare debet trientem, ſupponatur eſſe 3. eritque omnium ſumma 1R + 3. primus poſtquam aſſumpſit trientem reliquorum 1R + 1. Secundus aſſumat quadrantem reliquorum, & tunc fiet æqualis huic numero 1R + 1: ergo 4R + 4 erit quater ſecundus cum primo & tertio: eſt autem primus 1R: quare erit quater ſecundus cum tertio 3 R. + 4. eſt autem ſecundus & tertius ſemel idem quod 3. quare ter ſecundus erit 3 R + 1. eſt ergo ſecundus 1R + $\frac{1}{3}$.

Debet item tertius aſſumptâ quintâ parte reliquorum fieri 1R + 3. eritque quinquies, tertius cum duobus reliquis ſemel 5R + 5. aufer ſummam ſecundi, & tertii nempe 3. eritque tertius quater cum primo 5R + 2. aufer primum 1R. erit tertius quater 4R + 2. & diviſo per 4 erit tertius 1R + $\frac{1}{2}$. Fiat ſumma omnium, eritque 3R + $\frac{10}{12}$. conjungantur tres numeri eruntque 1R + 3: eſt ergo æquatio 3R + $\frac{10}{12}$. = 1R + 3. ſubtrahe 1R fiet 2R + $\frac{10}{12}$. = 3. ſubtrahe $\frac{10}{12}$ fiet 2R = 2 $\frac{2}{12}$. & 1R = $\frac{13}{12}$. Quare primus erit $\frac{13}{12}$, ſecundus qui eſt 1R + $\frac{1}{3}$. erit $\frac{17}{12}$. & tertius $\frac{19}{12}$: & abjectis denominatoribus erunt numeri 13. 17. & 19. ſatiſfacientes quæſtioni.

Eodem modo quæri poſſunt quatuor numeri, quod fit Problemate 28.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Duobus datis numeris invenire tertium numerum, qui in utrumque ductus quadratum, & ejus radicem quadratam producat.

Proponatur numeri 200. & 5. ſitque inveniendus numerus, qui multiplicando utrumque, quadratum, & radicem ejuſdem producat. Sit quæſitus numerus 1R qui ſi multiplicet utrumque efficiat 200 R. & 5 R. eritque 5 R. radix quadrati 200 R. eſt autem ejus quadratum 25 q habemus ergo æquationem 25 q = 200 R: & quia ſunt collaterales fit æquatio 25 R = 200. divide per 25. fit 1 R = 8. quæ multiplicando 200. efficit 1600. & multiplicando 5. efficit ejus radicem 40.

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Invenire duos numeros, qui ita ſe habeant ut productus ex eorum multiplicatione, & ſumma ipſorum datos efficiant numeros.

Quæruntur duo numeri quorum ſumma ſit 20. productus 96. ſit differentia eorum 2R. fiat ſemiſumma, hæc erit 10. huic adde ſemidifferentiam & detrahe, fient numeri 10 + 1R. & 10 — 1 R. multiplica fiet productus 100 — 1 q. = 96. adde 1q. fiet 100 = 96 + 1q. ſubtrahe 96. fiet 4 = 1q. & 2 = 1R. ſuntque numeri 12. & 8.

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Invenire duos numeros, ut ſumma ipſorum & differentia quadratorum datos efficiant numeros.

Quæruntur duo numeri quorum ſumma ſit 20. & intervallum quadratorum ſi 80. Sit pariter numerorum differentia 2R. erit major 1R + 10 minor 10 — 1R. ſic enim eorum ſumma remanet 20 : fiat utriuſque partis quadratum eritque unius, 1q + 20 R + 100. & ſecundi 1q — 20 R + 100. differentia quadratorum eſt 40 R, quæ æqualis eſt 80 : quare 1R eſt 2. ſunt igitur numeri 12. & 8. quadrata ſunt 144. 64. differentia eorum 80.

PROPOSITIO XXVIII.

Problema.

Invenire duos numeros quorum differentia ſit data & productus eorum multiplicatione ſit etiam datus.

Sint inveniendi duo numeri, quorum differentia ſit 4. & productus eorum multiplicatione ſit 96. Ponatur eorum ſumma 2R. ſemiſumma 1R. eritque unus 1R + 2. & alter 1R — 2 multiplicentur fiet productus 1q — 4. eſt ergo æquatio 1q — 4 = 96. adde 4. fiet 1q = 100. extrahe radicem fiet 1R = 10. & major 12. minor 8.

PROPOSITIO XXIX.

Problema.

Invenire duos numeros in data ratione, ut ſumma quadratorum ad ipſorum ſummam datam habeat rationem.

Quæruntur duo numeri in ratione tripla, ita ut ſumma quadratorum ſit eorum ſummæ quintupla.

Sit minor 1 R. major 3R. ſumma 4R. & conſequenter ſumma quadratorum erit 20 R : ſed ſumma quadratorum eſt 10 q. Quare habemus æquationem 20 R = 10 q. & 20 = 10 R eſt ergo 1R = 2. minor numerus, major eſt 6. ſumma eſt 8, quadrata 36. & 4. ſumma 40. quintupla ſummæ 8.

Eodem modo invenies duos numeros in data ratione ita ut ſumma quadratorum ad eorum differentiam datam habeat rationem Probl. 36.

Aut differentia quadratorum ad differentiam ipſorum datam habeat rationem Probl. 37.

PROPOSITIO XXX.

Problema.

Invenire duos numeros in data ratione ita ut quadratum minoris ad majorem numerum datam habeat rationem.

Quæruntur numeri in ratione tripla, ita ut quadratum minoris, ad majorem, habeat rationem ſextuplam.

Sint numeri 1R, & 3R. eritque minoris quadratum 1 q. volumus autem illud eſſe ſextuplum majoris, ſeu æquari 18R. eſt ergo æquatio 1q = 18 R ſeu 1R = 18. eſt ergo minor 18. major 54.

Eodem modo invenies numeros in data ratione, ita ut quadratum minoris ad minorem datam habeat rationem; vel ad ſummam utriuſque; vel quadratum minoris ad eorum differentiam datam habeat rationem.

Quod præſtant Problem. 39. 40. 41. 42.

PROPOSITIO XXXI.

Problema.

Duobus datis numeris alium numerum invenire, ut bini quique conjuncti, & in reliquum multiplicati faciant tres numeros Arithmeticè proportionales.

Sint dati duo numeri 3. & 5. ſitque inveniendus tertius, ita ut horum trium bini ſimul juncti, & per alium multiplicati efficiant numeros arithmeticè proportionales. Sit quæſitus numerus 1R qui jungatur primo, fiet 1R + 3. multiplicetur per 5. fiet primus productus 5R + 15: adde eumdem numero 5. fiet 1R + 5. duc in 3, fiet ſecundus 3R + 15 : adde 3. & 5 fiet 8. multiplica per 1R. fiet tertius productus 8R. Habemus ergo 8R. 5R. + 15. & 3R. + 15. eſt autem in numeris arithmeticè proportionalibus ſumma extremorum æqualis medio duplicato : hoc eſt 11R + 15 = 10 R + 30. ſubtrahe 10 R. & 15. reſtat 1R = 15. quare ſunt numeri 3. 5. 15. adde 3. & 5. fiunt 8 multiplica per 15. fiunt 120. adde 5. & 15. fiunt 20. multiplica per 3. erunt 60. adde 3. & 15 erunt 18. multiplica per 5. fiunt 90. ſunt igitur numeri 60. 90. 120.

EX DIOPHANTI Libro ſecundo.

PROPOSITIO I.

Problema.

Invenire duos numeros ut ſumma ipſorum ad ſummam quadratorum datam habeat rationem.

Quæruntur duo numeri quorum ſumma ſit decima pars ſummæ quadratorum. Ponatur minor numerus 1R. major 2R. ſumma 3R. & ut ſit decima pars quadratorum erit ſumma quadratorum 30 R : ſed aliunde quadrata ſunt 1q. & 4q. & ſumma 5q eſt ergo æquatio 30 R. = 5q & 30 = 5 R. eſt ergo 1R = 6. minor eſt 6. major 12. ſatisfacientes quæſtioni.

PROPOSITIO II.

Problema.

Invenire duos numeros, quorum differentia ad differentiam quadratorum datam habeat rationem.

Sint duo numeri quærendi qui ita ſe habeant, ut

ut eorum differentia ſit ſexta pars differentiæ quadratorum, ſit minor 1R. major 2R differentia numerorum 1R, & conſequenter differentia quadratorum ſextupla erit 6R. Sed quadrata ſunt 1q. & 4q. differentia 3q; quare erit æquatio 3q = 6R. & 3R = 6. Eſt ergo 1R = 2 minor numerus, major 4. differentia numerorum 2. quadrata ſunt 16. & 4. differentia 12, prioris differentiæ ſextupla.

PROPOSITIO III.

Problema.

Invenire duos numeros, ut productum ex eorum multiplicatione ad ſummam ipſorum, vel ad differentiam datam habeat rationem.

Quærantur duo tales numeri ut productus ex eorum multiplicatione ad ſummam ipſorum rationem habeat ſextuplam. Ponantur ii numeri 1R & 2R; poſſent autem poni in quacumque ratione, erit productus ex eorum multiplicatione 2q ſumma 3R. & cum productus ſit ſextuplus, erit æquatio 2q = 18R ſeu 2R = 18. Erit igitur 1R. 9. & 2R. 18. numeri quæſiti ſumma 27. productus 162 ſummæ 27. ſextuplus. Eodem modo invenietur productus quamcumque rationem habens ad differentiam.

PROPOSITIO IV.

Problema.

Invenire duos numeros ita ut aggregatum quadratorum ad eorum differentiam datam habeant rationem.

Quærantur numeri, qui tales ſint, ut aggregatum quadratorum, ſit decuplum differentiæ eorum; poſſunt autem numeri eſſe in datâ ratione. Sint 1R. & 2R. eorum quadrata 1q & 4q. ſumma eſt 5q. differentia numerorum eſt 1R. cujus ſumma quadratorum eſt decupla. Eſt ergo æquatio 5q = 10R. & 5R = 10. & 1R = 2; ſunt ergo numeri 2 & 4. differentia 2, cujus ſumma quadratorum 16 & 4. ſeu 20. eſt decupla.

Eodem modo inveniuntur duo numeri, quorum intervallum quadratorum ſummæ numerorum ſit ſextuplum quod efficitur Problemate 5.

PROPOSITIO V.

Problema.

Invenire duos numeros quorum differentia ſit data, ita ut differentia quadratorum eam ſuperet dato numero.

Sint inveniendi duo numeri, quorum differentia ſit 2, & differentia quadratorum ſuperet hanc differentiam 2. viginti unitatibus. Sit minor 1R. major erit 1R. + 2. cum differentia ſit 2. quadrata ſunt 1q. & 1q + 4R + 4 differentia quadratorum 4R + 4. quæ æquatur 22, ut ſuperet differentiam 2, viginti unitatibus: datur ergo æquatio 4R + 4 = 22. & ſubtractis 4. 4R = 18. ſeu 1R. = 4 $\frac{1}{2}$. minor numerus, major 6 $\frac{1}{2}$.

PROPOSITIO VI.

Problema.

Invenire duos numeros qui tales ſint ut differentia quadratorum, ad numerorum differentiam ſit in data ratione, & ſuperaddat aliquas unitates.

Sint inveniendi duo numeri, qui ita ſe habeant, ut differentia quadratorum ſit tripla differentiæ numerorum, & inſuper addat 10. unitates. Sit intervallum numerorum 2. ſintque numeri 1R. & 1R + 2. quadrata 1q & 1q + 4R + 4. differentia 4R + 4. differentia numerorum 2. triplicetur fiet 6, addatur 10. fiet 16. Eſt ergo æquatio 4R + 4 = 16. ſubtrahe 4. fiet æquatio 4R = 12 & 1R = 3. ſunt ergo numeri 3. & 5. quadrata 9. & 25. differentia 16.

PROPOSITIO VII.

Problema.

Numerum quadratum in duos numeros quadratos dividere.

Sit numerus quadratus 16. dividendus in duos numeros quadratos, clarum eſt formari triangulum rectangulum, cum quadratum unius lateris fiat æquale duobus quadratis. Aſſumantur quæcumque duo quadrata uni æqualia verbi gratiâ 9. 16. 25. quorum latera ſunt 3. 4. 5. dico ſi fiat ut hypothenuſa 5. ad 3. ita hypothen. 4. ad $\frac{12}{5}$. ſeu 2 $\frac{2}{5}$. ſi fiat ut 5. ad 4. ita 4. latus quadrati 16. ad $\frac{16}{5}$. ſeu 3 $\frac{1}{5}$. erunt latera quadratorum quæſitorum $\frac{12}{5}$. & $\frac{16}{5}$. quorum quadrata $\frac{144}{25}$. & $\frac{256}{25}$. æquantur quadrato 16. ſeu $\frac{400}{25}$.

Idem alio modo præſtari poteſt Ponatur pro primo latere unius quadrati quæſiti 1R. pro ſecundo quilibet alius numerus, minus tot unitatibus quot ſunt in radice propoſiti quadrati, verbi gratiâ 2R. — 4. fiat utriuſque quadratum, habebuntur quadrata 1q. & 4q — 16R. + 16. addantur, ſimul fient 5q. — 16R. + 16. = 16. addantur 16R. fiet æquatio 5q. + 16. = 16R. + 16. & ablatis 16. erunt 5q. = 16 R. & 5R. = 16. divide erit 1R. = $\frac{16}{5}$. ſeu 3 $\frac{1}{5}$. & 2R. — 4. erit $\frac{32}{5}$. — 4. ſeu $\frac{12}{5}$ iidem numeri qui prius.

Experiamur an alio quovis exemplo idem ſuccedat. Ponantur radices duorum numerorum 1R. & 3 R. — 4. fiant quadrata, eruntque 9q. — 24R. + 16. & 1q. addantur ſimul fient 10q. — 24 R. + 16. quæ volumus æquari numero 16. Eſt ergo æquatio 16. = 10q. — 24R. + 16. adde 24R. fiet æquatio 24R. + 16. = 10q. + 16. & ablatis 16. 24R. = 10q. & 24. = 10R. & diviſis $\frac{24}{10}$. = 1R. ſeu $\frac{12}{5}$. & 3R. — 4. erunt $\frac{36}{5}$ — 4. ſeu $\frac{16}{5}$. ut prius.

Supponatur 5R. — 4. pro ſecundo cujus quadratum 25q. — 40R. + 16. fietque æquatio 26q. — 40R. + 16. = 16. adde 40R. fit æquat. 26q. = 40R. ſeu 1R. = $\frac{40}{26}$. ſeu 5R. erunt $\frac{200}{26}$. ex quo $\frac{200}{26}$. ſubtrahere debes 4 ſeu $\frac{104}{26}$. reſtantque $\frac{96}{26}$. ſunt autem numerorum $\frac{40}{26}$ & $\frac{96}{26}$. quadrata $\frac{1600}{676}$. & $\frac{9216}{676}$.

Digitized by Google

quæ ſimul efficiunt ſummam $\frac{10816}{676}$. ſeu 16. ſunt autem radices $\frac{96}{26}$ & $\frac{40}{26}$. ſeu $3\frac{18}{26}$. ſeu $3\frac{9}{13}$. & $1\frac{7}{13}$.

Totum autem Artificium Diophanti in eo conſiſtit, ut vitet radices ſurdas; ſi enim vitandæ non eſſent, quilibet numeri aſſumi poſſent in quos dividi poſſet numerus 16. certum eſt enim, quod numerus 16 æqualis ſit numero 9. & numero 7. nempe quadratis radicum 3. & Rq7. exurgunt autem iſtæ radices ſurdæ, cum ex numeris non quadratis educi debent radices quadratæ; quod vitavit egregie. Poſitis enim radicibus 1R. & 2R. — 4. quia — 4. multiplicando — 4. facit 16. debet autem comparari productus cum quadrato 16. fit æquatio inter quadratum 16. & productum 16. ideoque reſtat ſola æquatio inter numerum quadratorum, & numerum radicum; & quia numeri quadratorum & radicum ſunt collaterales, nulla eſt opus radicum extractione: ergo numeri qui provenient rationales erunt. Idem & eodem modo præſtat in problemate nono.

PROPOSITIO X.

Problema.

Datum numerum ex duobus quadratis compoſitum dividere in duos alios quadratos numeros.

Proponatur numerus 13. compoſitus ex duobus quadratis 4. & 9. dividendus in duos alios numeros quadratos, numerorum autem quadratorum 4. & 9. radices ſunt 2. & 3. ponatur radix primi quadrati quæſiti 1R. + 2 & ſecundi quicumque numerus radicum cum defectu radicis 3. ut 2R. — 3. fiat utriuſque quadratum, erit primum 1q. + 4R. + 4. & ſecundum 4q. — 12R. + 9. addantur fient 5q. — 8R. + 13. quæ æquari volumus numero 13. addantur 8R. fiet æqu. 5q. + 13. + 8R. ſubtrahe 13. erit 5q. = 8R & cum ſint collaterales 5R = 8. & 1R. = $\frac{8}{5}$. eſt igitur radix primi $2\frac{3}{5}$. radix ſecundi $\frac{16}{5}$. — 3. ſeu $\frac{1}{5}$. Sunt ergo radices $\frac{18}{5}$. & $\frac{1}{5}$. quadrata $\frac{324}{25}$. & $\frac{1}{25}$. ſeu ſimul $\frac{325}{25}$. ſeu 13.

Poteſt item fieri ut ſumatur utraque radix cum defectu hoc modo, 1R. — 2. & 2. R. — 3. primum quadr. erit 1q. — 4R. + 4. ſecundum 4q. — 12R. + 9. ſumma 5q. — 16R. + 13. quæ æquari volumus num. 13. eſt ergo æquatio 5q. — 16R. + 13. = 13. & additis 16R. & ſubtractis utrinque 13. erit æquatio 5q. = 16 R. & quia ſunt collaterales 5R. = 16. & diviſione facta erit 1R. = $\frac{16}{5}$. erat primi quadrati radix 1R. — 2: ergo erit $\frac{6}{5}$. & ſecundi 2R. — $3\frac{17}{5}$: ſunt autem quadrata $\frac{36}{25}$. & $\frac{289}{25}$. ſeu $\frac{325}{25}$. idem numerus qui prior, invenimus ergo alia duo quadrata.

Totum pariter artificium in eo poſitum eſt, ut fiat æquatio inter ſolas radices & numerum abſolutum, quod componendo radices ex lateribus priorum quadratorum, cum ſigno defectûs, egregiè præſtatur, quia ſemper adhæret numerus æqualis ſummæ quadratorum 13. Debet autem numerus radicum in quadratis eſſe cum nota defectûs, ut poſſit tranſire in aliam partem comparationis, ideoque vel major radix ponatur cum nota defectûs ut 2R. — 3. vel utraque.

PROPOSITIO XI.

Problema.

Invenire duo quadrata quorum differentia ſit data.

Sint inveniendi duo numeri quadrati quorum differentia ſit 60. primi quadrati latus ſit 1R. & ſecundi ſit quilibet numerus radicum cum adjunctione quotcumque unitatum, quarum tamen quadratum minus ſit propoſitâ differentiâ 60. Ponatur ergo 1R + 3. cujus quadratum 1q + 6R + 9. & primum quadratum erit 1q. differentia quadratorum eſt 6R + 9 quæ ſupponitur eſſe æqualis numero 60. Habemus ergo æquationem 6R. + 9 = 60. & ſubtractis utrinque 9 erit æquatio 6 R. = 51: & facta diviſione erit 1 R = $8\frac{1}{2}$ & 1 radix primi quadrati. $8\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{17}{2}$ Radix ſecundi $11\frac{1}{2}$. ſeu $\frac{23}{2}$. quadrata $\frac{529}{4}$. $\frac{289}{4}$. ſubtrahe unum ab alio ut habeas differentiam, hæc erit $\frac{240}{4}$ ſeu 60. unitates.

Artificium pariter hujus problematis in eo poſitum eſt, ut evitetur extractio radicum; evitatur autem ſi quadratorum factorum differentia contineat tantum radices, unitates, pauciores tamen propoſitâ differentiâ 60; ſic enim reſtabit æqualitas inter ſolas radices, & unitates & per diviſionem dabitur valor unius radicis.

PROPOSITIO XII.

Problema.

Datis duobus numeris invenire numerum qui ad utrumque additus, efficiat numeros quadratos.

Proponantur numeri 10. & 70. ſitque injunctum quærere unum numerum qui additus ad 10. & 70 efficiat numeros quadratos.

Datis numeris 10. & 70. cognoſcitur eorum differentia 60. quærantur per præcedentem duo numeri quadrati, quorum differentia ſit 60. ii ſunt $\frac{529}{4}$. $\frac{289}{4}$. ſeu $132\frac{1}{4}$. & $72\frac{1}{4}$. ſubtrahe 10. ex minori habebis $62\frac{1}{4}$. dico hunc numerum $62\frac{1}{4}$. eſſe quæſitum. Nempe ſi additur numero 10. efficit quadratum $72\frac{1}{4}$. ſi additur numero 70. efficit quadratum $132\frac{1}{4}$. cum enim duobus numeris idem additur, differentia ſummarum, æqualis eſt differentiæ numerorum; ſed differentia 70 & 10 eſt 60. ergo ſummæ differunt per 60. ſed prima eſt $72\frac{1}{4}$ ergo ſecunda erit $132\frac{1}{4}$ differens à primâ per 60.

PROPOSITIO XIII.

Problema.

A datis duobus numeris eumdem auferre, ita ut utrumque reſiduum quadratum ſit.

Sint propoſiti duo numeri 9. & 21. à quibus idem numerus auferendus ſit ea lege, ut uterque numerus reſiduus ſit quadratus, numerorum 9. & 21. differentia eſt 12. quærantur (*per* 11.) duo quadrata quorum differentia ſit 12. inveniunturque 4. & 16. ſubtrahe minorem à numero 9. relinquetur 5. dico numerum 5. eſſe numerum quæſitum; nempe qui ſi ex 9. detrahatur relinquit 4. ſi detrahatur ex 21 relinquit 16. eadem probatio adhiberi poteſt.

PROPO

PROPOSITIO XIV.

Problema.

Ab eodem quæſito numero, auferre duos datos numeros ita ut reſidui ſint quadrati.

Sint propoſiti duo numeri 5. & 12. ſubtrahendi ab eodem, eâ lege, ut reſidui ſunt quadrati. Quæritur igitur ille numerus. differentia propoſitorum numerorum, eſt 7. quærantur duo quadrata quorum differentia 7, invenientur eſſe (*per* 11.) 9. & 16. addatur minor numerus majori fiet 21: dico numerum 21. eſſe quæſitum. Si enim ab eo auferatur minor 5. clarum eſt reſtare majus quadratum ſcilicet 16. Pariter ſi ſubtrahatur major reſtabit numerus cujus differentia à majori quadrato erit æqualis differentiæ numerorum propoſitorum, ſed minus quadratum ita differt à majori: ergo reſtabit minus quadratum.

PROPOSITIO XV.

Problema.

Datum numerum in duas partes ita dividere ut addita eidem quadrato faciant duo quadrata.

Sit numerus 20. ita dividendus. Quærantur duo numeri, quorum quadrata ſimul ſumpta minora ſint numero 20. ſintque numeri 2 & 3. iis addatur 1R ita ut fiant 1R. + 2. & 1R. + 3. quadrata illorum ſunt 1q. + 4R. + 4. & 1q. + 6R. + 9. à quibus ſingulis ſi abſtulero 1q. reſtabunt quæſiti numeri 4R. + 4. & 6R. + 9. qui juncti ſunt æquales numero 20. juncti autem efficiunt ſummá, 10R. + 13. Habemus ergo æquationem 10R. + 13. = 20. ſeu 10R. = 7. ſeu 1R. = $\frac{7}{10}$. & cum una pars numeri 20 ſit 4R. + 4. erit 6 $\frac{8}{10}$ 6R. alia + 9. erit 13 $\frac{2}{10}$. ſeu $\frac{68}{10}$. & $\frac{133}{10}$. hoc eſt $\frac{680}{100}$. & $\frac{1330}{100}$. quæ junctæ $\frac{49}{100}$. efficiunt numeros $\frac{729}{100}$. & $\frac{1369}{100}$ quorum radices $\frac{27}{10}$. & $\frac{37}{10}$.

PROPOSITIO XVI.

Problema.

Numerum datum ita dividere in duos ut uterque à quadrato detractus, relinquat duo quadrata.

Sit idem numerus 20. ita dividendus, ut utraque pars à quadrato inveniendo detracta, relinquat duo quadrata. Proponatur 1R. cum tot unitatibus ut earum quadratum minus ſit numero 20: ponatur 2. unitates, ut ſit radix 1R. + 2. cujus quadratum 1q. + 4R. + 4. ſi auferas 4R. + 4 reſtabit quadratum ſeu 1q: Ab eodem quadrato 1q. + 4R. + 4 aufer 2R. + 3. relinquitur etiam quadratum 1q. + 2R. + 1. nempe quadratum hujus radicis 1R. + 1. Statuantur ergo iſtæ partes 4R. + 4. & 2R. + 3. quæ ſint partes numeri 20: addantur ſimul efficient 6R. + 3. = 20. eritque 1R. = $\frac{17}{6}$. & partes $\frac{92}{6}$. & $\frac{46}{6}$. quadrati radix erat 1R. + 2. ſeu $\frac{29}{6}$. cujus quadratum $\frac{841}{36}$. ſatisfacit quæſtioni.

PROPOSITIO XVII.

Problema.

Invenire numeros in data ratione qui additi dato numero quadrato faciant quadrata.

Major numerus debeat eſſe minoris triplus, & additi ad quadratum 9. facere debeant quadrata. Ponatur numerus reliquis quadratus ortus à quacumque radice auctâ numero 3. verbi gratiâ 1R. + 3. quadratum ejus erit 1q. + 6R. + 9. ab eo auſer 9. & 1q. + 6R. fit minor numerus quæſitus: & conſequenter major erit 3q. + 18R. cum ſit minoris triplus cui ſi addatur 9. debet fieri numerus quadratus, hoc eſt numerus 3q. + 18R. + 9. qui debet eſſe quadratus ut ſatisfaciat quæſtioni. Quod ut præſtare poſſimus, fingo quadr. à 2R. — 3. erit autem 4q. — 12R. + 9. qui ponatur æqualis num. 3q. + 18R. + 9 aufer 9. & 3q reſtat 18R. = 1q. — 12R. adde 12R. fiet æquatio 1q. = 30R ſeu 1R. = 30. cum ſint collaterales. Minor ergo numerus qui erat 1q. + 6R. erit 1080. major vero 3q. + 18R. erit 3240. quibus ſi addas 9. fient numeri quadrati 1089. & 3149 quorum radices 33. & 57.

PROPOSITIO XVIII.

Problema.

Invenire tres numeros, qui ita ſe habeant, ut ſi unuſquiſque ſequenti partem imperatam tribuat, & inſuper datum numerum, reſtent æquales.

Quærantur tres numeri, qui ita ſe habeant, ut 6 primus det ſecundo ſuam quintam partem, & prætereà 6 unitates: Secundus det tertio ſextam & 7. unitates; tertius det primo ſeptimam partem & 8. unitates, acceptis omnibus & datis fiat æqualitas.

Ponatur primus 5R. ut habeat quintam partem, & ſecundus ſit 6R. accipiens autem à primo quintam partem, & 6. unitates, fit 7R. + 6. & dans tertio ſextam partem & ſeptem unitates, reſtat 6R. — 1. & huic numero reliqui ſunt æquales. Primus poſtquam dedit ſecundo ſuam quintam + 6. 4R. — 6. deberet autem eſſe æqualis ſecundo, ſi nempe accipiat ſeptimam partem tertii & 8. unitates, ut fiat æqualis, deſunt illi 2R. + 5. quare 2R. + 5. ſunt ſeptima pars tertii, & præterea octo unitates; aufer ergo octo unitates habebis 2R. — 3. ſeptimam partem tertii. Eſt ergo tertius 14R. — 21: accipiat à medio 6R. ſextam partem & 7. unitates fiet 15R. — 14. det etiam ſeptimam partem & 8. unitates reſtabit 13R. — 19. qui æqualis eſſe debet numero 6R. — 1. habemus ergo æquationem 13R. — 19. = 6R. — 1. adde 19. fit æquatio 13R. = 6R. + 18. ſeu 7R = 18. ſeu 1R. = $\frac{18}{7}$. Primus ergo eſt $\frac{90}{7}$. ſecundus $\frac{108}{7}$. tertius $\frac{105}{7}$.

Eodem modo dividere poſſumus in tres numeros eaſdem conditiones habentes, quod præſtat problema 19.

Digitized by Google

PROPOSITIO XX.

Problema.

Invenire tria quadrata, ita ſe habentia ut differentia maximi & medii, ad differentiam minimi & medij datam habeat rationem.

Quæruntur tria quadrata, quæ ita ſe habeant, ut differentia maximi, & medii, ſit tripla differentiæ medii, & minimi.

Ponatur 1R. radix primi & conſequenter primum ſit 1q, ſecundi radix ponatur 1R. + 1. ſitque ejus quadratum 1q. + 2R. + 1. differentia inter utrumque quadratum erit 2R. + 1. Quare maximum quadratum erit 1q. + 8R. + 4. ut nempe differentia inter illud & medium, ſit tripla.

Fingatur quadratum quod maximè accedat ad hoc, v. g. quadratum 1q. + 6R. + 9 quod ſupponatur æquale quadrato maximo 1q. + 8R. + 4. = 1q. + 6R. + 9. aufer 1q. habebis 8R. + 4. = 6R. + 9. aufer 4. & 6R. habebis 2R. = 5. & 1R = 2 $\frac{1}{2}$: quare erit 1q. $\frac{25}{4}$ ſeu 6 $\frac{1}{4}$. item 8R. = 20. Erit igitur maximum quadratum 30 $\frac{1}{4}$. minimum 6 $\frac{1}{4}$. medium 12 $\frac{1}{4}$. differentia minimi & medii 6. medii & maximi 18.

PROPOSITIO XXI.

Problema.

Invenire duos numeros, quorum quilibet adjectus alterius quadrato faciat quadratum.

Sit primus 1R. ſi ſecundus ponatur 2R. + 1. certe additus prioris quadrato faciet quadratum. Summa enim 1q + 2R. + 1. eſt numerus quadratus cujus radix 1R. + 1. Supereſt ut quadratum ſecundi, cum primo faciat quadratum. Eſt autem quadratum ſecundi 4q + 4R. + 1. & adjecto primo 4q. + 5R. + 1. formo quadratum proximum nempe à 2R. — 2. ſcilicet 4q — 8R. + 4, quod volo eſſe æquale 4q. + 5R. + 1. = 4q — 8R. + 4. aufer 4.q. & 1. fiet æquatio 5R. = 3. — 8R: adde 8R: habebis 13R. = 3. & 1R. = $\frac{3}{13}$. cætera ſunt facilia.

PROPOSITIO XXII.

Problema.

Invenire duos numeros, quorum quilibet ab alterius quadrato ſubtractus, faciat quadratum.

Inveniendi ſint duo numeri, qui ita ſe habeant, ut dempto uno ab alterius quadrato, remaneat quadratum. Sit minor 1R. + 1 cujus quadratum 1q. + 2R. + 1. ſi ſecundus ponatur 2R. + 1. ſecundus ſubtractus ex quadrato primi relinquet quadratum nempe 1q. Nūc reſtat ut majoris quadratum dempto primo relinquat quadratum. Eſt autem ſecundi quadratum 4q. + 4R + 1. deme primum relinquitur 4q. + 3R. Fiat quodcumque quadr. v. g. à 3R erit 9q quod ſit æquale 4q + 3R. = 9q. ſubtrahe 4q. eritque 3R. = 5q. & 1R. = $\frac{3}{5}$. minor $\frac{8}{5}$. major $\frac{11}{5}$.

PROPOSITIO XXIII.

Problema.

Invenire duos numeros ut utriuſque quadratum additum illorum ſumma, faciat quadratum.

Quæruntur duo numeri, qui tales ſint, ut utriuſque quadratum additum eorum ſummæ quadratum efficiat. Ponatur primus 1R. & ſecundus 1R. + 1. ſic enim quadratum minoris additum ſummæ illorum quæ eſt 2R. + 1. quadratum efficiet 1q. + 2R. + 1. ſupereſt ut quadratum majoris 1q. + 2R. + 1, ſimul cum utroque numero, ſit quadratum: hoc eſt numerus 1q. + 4R. + 2 ſit quadratus: ut hoc fiat; formetur quadratum ex 1R. — 2. id erit 1q. — 4R. + 4. fiat æquatio 1q. + 4R. + 2. = 1q — 4R. + 4. ſubtrahe 1q. & 2. & adde 4R. fiet 8R. = 2. & 1R. = $\frac{2}{8}$. minor ergo erit $\frac{2}{8}$. major 1 $\frac{2}{8}$. ſeu $\frac{10}{8}$.

PROPOSITIO XXIV.

Problema.

Invenire duos numeros, à quorum quadratis ſubtracta ſumma faciat quadrata.

Sit minor 1R. & major 1R. + 1. ſic enim à majoris quadrato 1q + 2R. + 1. dempta eorum ſummâ, remanet 1q. reſtat ut ſubtracta numerorum ſummâ, ex minoris quadrato, reliquum fiat quadratum. Eſt autem minoris quadratum 1q. ex quo ſi ſubtrahas numerorum ſummam, fit 1q — 2R. — 1. qui quadratus eſſe debet. Formetur quadratum ab 1 R. — 3. fiet enim quadratum deficiens in radicibus, abundans in unitatibus, nempe 1q. — 6R. + 9. hoc ponamus eſſe æquale ſuperiori 1 q. — 2R. — 1. = 1 q. — 6R. + 9. ſubtrahe 1q. adde 6R. & 1. fiet æquatio 4R. = 10. & 1R. = $\frac{10}{4}$ ſeu 2 $\frac{1}{2}$ erit ergo minor 2 $\frac{1}{2}$ major 3 $\frac{1}{2}$.

PROPOSITIO XXV.

Problema.

Invenire duos numeros, quorum quilibet additus quadrato ſumma, quadratum efficiat.

Sit ſumma numerorum 1 R. ejus quadratum 1q. ſintque numeri 3 q. & 8 q. Sic enim additi ad quadratum ſummæ, quadratum efficiunt nempe 4q. & 9q. Sed ſi numeri ſint 8 q. & 5q. ſumma erit 11 q. & quadratum ejus 121 qq: ſed quadrratum ſummæ ponebatur 1q: ergo eſt æquatio 121 qq. & 1. q. & quia ſunt collaterales, erit æqu. 121 q. = 1 & diviſis omnibus per 121 erit 1q. = $\frac{1}{121}$ numeri $\frac{5}{121}$. $\frac{8}{121}$. quadratum ſummæ $\frac{121}{14641}$.

PROPO

PROPOSITIO XXVI.

Problema.

Invenire duos numeros quorum quilibet ſubtractus à quadrato ſumma, relinquat quadratum.

Primò ſubtrahantur duo numeri à quolibet quadrato, ita ut relinquantur duo quadrata; verbi gratiâ, proponatur numerus 9. à quo ſubtrahendo 5. relinquitur 4. & ſubtrahendo 8. relinquitur 1. Deinde ſupponatur ſumma numerorum 3R. ut fiat ejus qtum 9q. ſitque primus numerus 8q. & ſecundus 5q: ita enim fiet ut quolibet ſublato ex 9q. remaneat qtum. Habemus ergo ſummam numerorum 13q. cujus qqtum 169. qq. æquale eſt 9q. Quare 169qq. $=$ 9q. & quia ſunt poteſtates collaterales 169 q $=$ 9 & 1q. $= \frac{9}{169}$. Unde concludam primum numerum eſſe $\frac{72}{169}$ & ſecundum $\frac{45}{169}$, ſummam eorum $\frac{117}{169}$, & ſummæ qtum $\frac{13689}{28561}$.

PROPOSITIO XXVII.

Problema.

Invenire duos numeros ut productus ex eorum multiplicatione, addito quolibet eorum, faciat quadratum, & amborum quadratorum radices faciant datum numerum.

Quæruntur duo numeri, qui ſeorſim additi ad productum ex eorum multiplicatione faciant quadrata, & radices horum quadratorum efficiant datum numerum reg. 6.

A. B. C. D.
4. 15. 1. 60.

Primò opus eſt tali Lemmate; ſi dentur duo numeri A, & B. deſit autem unitas C numero B, ut ſit planus ſimilis numero A: dico productum ex A in B additum ipſi A. eſſe quadratum. Nam cum A & B + C, ſint plani ſimiles, productus ex A in B & C. eſt quadratus; hic autem productus æqualis eſt producto ex A in B & producto ex A in unitatem C (*per primam ſecundi*) ſeu ipſi A cum unitas nihil immutet; ergo productus ex A in B additus ipſi A eſt quadratus.

Ponamus ergo numerum minorem eſſe 1R. & majorem 4R. — 1. fiat productus eorum multiplicatione ille erit 4q. — 1R. cui ſi addas 1R. fiet quadratum 4q. Neceſſarium item eſt ut idem productus 4q. — 1R. addito majore 4R. — 1. hoc eſt 4q. + 3R. — 1. ſit quadratum cujus radix ſit 6 — latere prioris quadrati 4q. ſeu 6. — 2R. quadratum autem hujus radicis 6 — 2R. eſt 4q. — 24R. + 36. ergo habemus æquationem 4q. + 3R. — 1. $=$ 4q. — 24R. + 36: ſubtrahe 4q. adde 1. & 24R. fiet æquatio 27. R. $=$ 37. ergo 1R. $= \frac{37}{27}$. ideoque minor, major $\frac{121}{27}$.

Eodem artificio invenies duos numeros qui ita ſe habeant, ut detracti ex producto eorum multiplicatione relinquant duo quadrata: quorum duæ radices adæquent propoſitum numerum ut problemate 28.

Atque hæc ſufficiant ut Tyro ſe exercere poſſit, & intelligat Diophantum. Qui plura volet aſſumat ipſum Diophantum, quem ex præſuppoſitis fundamentis percurret facilè.

HYPOTHESIS CARTESIANÆ. REFVTATIO.

ELEMENTIS Mathematicarum diſciplinarum, Codicem principia Philoſophiæ præcipua continentem, inter Manuſcripta auctoris inventum, addendum cenſuimus. Mole quidem ille, at non item rebus exiguus eſt; in eo enim leve momentum eſſe non poteſt quod ſemen eſt. Quæ ſit certè principiorum vis ex eo Philoſophus intelligendum eſſe pronuntiat, quod quidquid in illis peccatur, utcumque tenuè initio viſum fuerit, in progreſſu apparet eſſe graviſſimum.

PROPOSITIO I.

Quid ex hac communi notione Ego cogito, *concludatur contra Carteſianam Philoſophiam.*

Non equidem ſingula Carteſianæ philoſophiæ placita examinanda ſuſcipio, ſolam ſcilicet phyſicam in hoc opere perpendens. Unum tamen aut alterum ex principiis cognitionis humanæ, à quibus omnem vult inchoari ſcientiam, prætერire non poſſum; ex quibus facilius mihi fuerit contraria principia ſtatuere, quam ipſi ſuam hypotheſin ſtabilire.

Vult ergo hanc ordine primam cognitionem eſſe, *Ego cogito, ergo ſum.* Cognitionis autem nomine illa omnia quæ nobis conſciis in nobis fiunt comprehendit, atque ita non modo intelligere, velle, imaginari, ſed etiam ſentire, idem eſſe hic quod cogitare aſſerit. Ex hac igitur propoſitione ego cogito, hanc unam concluſionem elicit, quam certiſſimam putat nempè *ergo ſum.* Ego verò alias multas de quibus æquè dubitare non poſſum, ab ejus tamen principiis alienas deduco.

Ego

Ego enim, cogito, & hoc determinatum cogitare meum, in mea eſt poteſtate, ita ut dum libuerit, alia atque alia cogitare liberam habeã poteſtatem: neque enim minus certus ſum quod cogitem in genere, quam quod modo hæc, modo alia ſuccedat cogitatio, quam pro libito, & aſſumo, & depono. Ex quo concludo, ergo hanc cogitationem meam, eo aut volitionem meam ego produco, & non tantum ab alio agente patior. Si enim nihil penitus ad meum cogitare conferrem, non magis in mea eſſet poteſtate, quam quod lignum ab igne comburatur, ſit in poteſtate ligni. Ex quibus ulterius concludo, ergo ens creatum aliquid de novo producit, nec à Deo ſolo, omnes effectus qui de novo fiunt, producuntur. Addo ulterius quod cum ipſe fateatur nullam extenſionem, nec figuram, nec motum localem, nec quid ſimile quod corpori ſit tribuendum, ad naturam noſtram pertinere, ſed ſolam cogitationem, quam à nobis eſſe jam oſtendi, neceſſariò ſequi aliquid à motu, figura extenſione diverſum ab aliquo agente creato produci. Quia verò hoc meum cogitare ita in me eſt, ut me afficiat, illudque ſentiam, & experiar, cum tamen aliquid à me diverſum ſit & ſeparabile; exurgit ergo idea ſubjecti, & formæ, de qua non magis dubitare poſſum, quam de cogitatione mea. Unde quamvis Carteſianæ philoſophiæ ſectatores, ita in formas, & ſubjecta invehantur, ut ne nominari quidem velint; in cognitione tamen veram formam, in mente humana verum ſubjectum, quod ita afficiat, ut vi illius formæ aliter ſe habeat, agnoſcere coguntur. De quibus omnibus nullus dubitandi locus relinquitur, cum cogitatio, volitio, cæteræque hujuſmodi affectiones, nobis conſciis in nobis, non aliunde, ſed à nobis producantur. Sed ulterius progrediamur, & ad reliqua entia creata gradum faciamus: Cum natura ſibi conſtet, iiſdemque veſtigiis ſemper inſiſtat, hoc eſt eundem & conſtantem modum agendi obſervet, jamque certus ſum dari aliquod ſubjectum, & aliquam formam in rerum natura, an non favet conjectura in reliquis etiam entibus eundem ordinem obſervari, nec eſſe diſſimile mutationum principium. Quidquid igitur contra formarum exiſtentiam objicies, id totum contra cogitationem humanam dictum exiſtima, quod tibi ſolvendum erit.

PROPOSITIO II.

Eſſentiam materiæ in extenſione in latum, longum, & profundum poſitam non eſſe.

Rerum materialium exiſtentiam ita demonſtrare conatur Carteſius. Quidquid ſentimus nobis advenit à re aliqua quæ à mente noſtra diverſa eſt, cum in noſtra poteſtate non ſit ut unum potius quam aliud ſentiamus; ſed hoc à re illa quæ ſenſus noſtros afficit planè pendet; A ſenſu autem impulſi percipimus materiam aliquam in longum, latum & profundum extenſam; ſed ſi Deus immediatè per ſeipſum iſtius materiæ ideam menti noſtræ adhiberet, vel tantum ſi efficeret, ut exhiberetur à re aliqua in qua nihil eſſet extenſionis, nec figuræ, nec motus, nulla ratio excogitari poſſet cur Deus deceptor non eſſet putandus. Hujus demonſtrationis vim non expendo, videtur enim ſuperioribus dictis repugnare; cum aſſeruerit interdum ſenſus errare, ideoque non eſſe fidendum iis qui nos vel ſemel deceperunt. Quæro an dum contigit ſenſus errare, Deus tunc deceptor fuerit, qui aut per ſe immediatè, vel per aliud effecerit ut falſa nobis idea ingeneraretur. Unde puto quod ipſi probandum fuerat, id quod ſenſus noſtros afficit non poſſe eſſe ens ſola cogitatione præditum, ſed extenſum in longum, latum, & profundum. Sed iſta ut levia non moror, ultróque illi concedo aliquod ens materiale dari; ſed non ita facilè illi concedam in ſola extenſione, ejus eſſentiam poſitam eſſe. Id autem probat argumento inefficaci, nempè quod natura materiæ non conſiſtat in eo quod ſit res dura, vel ponderoſa vel colorata. Si enim quotieſcumque manus noſtra movetur versùs aliquam partem, corpora omnia ibi recederent eadem celeritate, nullam unquam duritiem ſentiremus, corpora tamen, naturam corporum non amitterent. Unde ſequitur tantum in duritie, prout contra diſtinguitur à liquiditate, eſſentiam rei materialis, non eſſe poſitam. In duritie verò ſumpta pro ea facultate, qua corpus impulſum à manu mea ejicitur ex loco ſuo, nihil concludit penitus.

Quare dico in extenſione ſimpliciter ſumpta poſitam non eſſe naturam rei materialis. In eo enim conſiſtere non poteſt eſſentia rei corporeæ, quod etiam rei ſpirituali convenit, ſed eſſe extenſum ſimpliciter ſumendo ſine addito, rei ſpirituali convenit, aut ſaltem probari non poteſt non convenire: ergo extenſio ſimplex in longum, latum, & profundum, non eſt eſſentia rei corporeæ. Primò enim Deus immenſus eſt, præſenſque omnibus corporibus, non tantum per operationem, ut voluerunt pauci Theologi: cum res non ſit neceſſario in eodem loco in quo agit, corpora enim agentia ad extra non ſunt ubi agunt. Secundò angeli extenſi ſunt, immò, & ambulant, & moventur, habentque alia prædicata localia, quæ ſine extenſione explicari non poſſunt.

Anima rationalis coextenditur corpori quod animat. Et quamvis in toto corpore non reſideret, ut fert hæc nova philoſophia, ſed in ſola glande ſpinali; hæc tamen glans, diviſibilis eſt, majoremque locum in adulto, quam in puero occupat. Ex quo ſemper concludo animam rationalem, majori, & minori corpori coextendi.

Neque enim ex eo quod poſſim cogitare de ente cogitante, nulla extenſionis facta mentione, propterea ſequitur, quod ens cogitans nullius extenſionis ſit capax. Hanc enim rationem videtur innuere Carteſius, diſtinctionis quæ eſt inter res ſpirituales & corporeas, eaque utitur Rohaut dum dicit; quod dum quis ad ſuam cogitationem attendit, & ſe ut cogitantem intelligit, hujus idea nullam extenſionem involvit. Verum quidem eſt quod poteſt etiam haberi idea rei in longum, latum, & profundum extenſæ, quia tamen hæc rem cogitantem non continet, res cogitans, & res extenſa ſeu diſtinctæ realiter ab invicem, ex quibus concludit animam à corpore diſtingui.

Egregium videlicet argumentandi modum, ut ex diſtinctione rationis, ſeu per intellectum, diſtinctio realis concludatur, & quoties ſunt diverſæ Ideæ, diſtinctæ etiam credantur entitates. Anne quia dum cogito potentiam productivam caloris, non ſtatim habeo ideam cauſæ productivæ luminis, hæc duo principia realiter erunt diſtincta. In anima rationali multæ diſtinguuntur potentiæ in ordine ad conceptus noſtros de quibus ſeparatim cogitare

Digitized by Google

gitare licèt, quis tamen ex hac cogitationum diverſitate, potentiarum diſtinctionem realem unquam aſſeruit: quare non concluditur quod ens ſpirituale extenſum eſſe non poſſit.

Quod ſi non extenſionem ſimplicem, ſed eam tantum quâ partes extra partes ponuntur intelligas, jam non in ſimplici extenſione, ſed in extenſione juncta impenetrabilitati, rei materialis naturam dices. Sed oſtendo poſitivè in extenſione præcisè non eſſe ſtatuendam entis corporei naturam, ratione quæ apud hominem catholicum vim demonſtrationis obtinere debet.

Si extenſio præcisè in longum, latum & profundum eſſentiam materiæ conſtitueret, hæc numero extenſio, cum hac numero materia identificaretur: ſed falſum eſt quod hæc extenſio, cum hoc numero corpore identificetur, ergo eſſentia materiæ in extenſione non conſiſtit. Major videtur certa ex ſimili argumentandi modo in cæteris omnibus. Ideo enim hoc numero animal rationale cum hoc numero homine identificatur, quod eſſentia hominis, in animali rationali conſiſtat. Sed falſum eſt quod hoc numero corpus, cum hac numero extenſione identificetur. Alioquin idem corpus eandem ſemper haberet extenſionem, nec unquam majorem, aut minorem, quod dici non poteſt. Nam Corpus Chriſti in Euchariſtia, idem eſt numero quod eſt in cœlo, ſed Corpus Chriſti quod eſt in Euchariſtia non habet eandem extenſionem, quam habet in cœlis; ergo idem numero corpus modo majorem, modo minorem extenſionem habet. Aliquibus hujus philoſophiæ ſectatoribus, hoc argumentum propoſui, nec ab iis unquam aliquid reponi deprehendi, quod poſſet ab homine Catholico propugnari. Dicebat enim eorum aliquis quod Deus poſſet facere ut panis fieret Corpus Chriſti, quia illi anima Chriſti jungeretur. Sed præterquam quod non defineret eſſe panis, cujus eſſentia in ſola partium coordinatione poſita eſt, ſecundum hujus philoſophiæ placita, quæro an idem eſſe Corpus Chriſti, quod in cœlo eſt? hoc dicere non poſſunt, propter rationem allatam, quia inquam non eſt eadem numero, immò nec æqualis extenſio. Ergo ſequitur ex hac reſponſione, quod tot ſint Corpora Chriſti, etiam ſpecie diſtincta quot ſunt Hoſtiæ Conſecratæ, quod quam ſit à fide alienum nemo non videt.

Dices cum aliquibus, id eſt eſſentia alicujus rei, quod eſt primum quod in re concipitur, ſed extenſio, eſt primum quod in re concipitur, ergo eſt ejus eſſentia. Pr. minor, cætera quæ in corpore concipiuntur, ut eſſe diviſibile, eſſe impenetrabile, aliaque hujuſmodi intelligi non poſſunt, quin prius intelligatur corpus extendi, ergo extenſio eſt quid primum in corpore. Reſpondeo id quod primum in unaquaque re concipitur, ita ut illud conſtituat, & diſtinguat ab omni, alio eſſe ejus eſſentiam, non verò ea quæ licèt primò concipiantur, non tamen diſtinguunt, genera enim, & gradus ſuperiores, ſecundum ſubſiſtendi conſequentiam, primò in rebus quibuſlibet concipiuntur, non tamen propterea eſſentiam conſtituunt. Cum ergo ſpiritus extenſionem habeant & idem corpus ſaltem per miraculum, extenſionem mutare poſſit, in ea poſitam eſſe ejus eſſentiam aſſerere non poſſumus. Ego quidem, ut eſſentiam rei corporeæ, nulli obnoxiam diſputationi conſtituerem, non in diviſibilitate illam repoſui, cum plurimi Philoſophi velint dari corpora quæ indiviſibilia ſint; ita Divus Thomas perfectorum animalium formas, materiales, licet indiviſibiles cenſuit. Adde quod materiæ diviſibilitas, non ſit uſque adeò benè conſtituta, ut ſecluſa Ariſtotelis authoritate, majora non ſint in contrariam partem momenta, quare puto corporis prout à ſpiritu condiſtinguitur, naturam, in eo poſitam eſſe, ut extenſionem impenetrabilem tanquam primariam proprietatem phyſicam habeat.

PROPOSITIO III.

Rarefactionem per ſolam materiæ alienæ intromiſſionem malè probat Carteſius.

Quamvis hanc de rarefactione quæſtionem dirimere non ſit animus, quippe quæ in utramque partem in Peripatetica ſchola acerrimè agitetur, quam inania ſint nulliuſque momenti quæ ſuper ea materia à Carteſio proferantur, hîc aperire operæ pretium fuerit.

Dicit ergo quod quicumque ad cogitationes ſuas attendet, nihilque volet admittere quam quod clarè perceperit, non putabit in corporibus raris, & denſis contingere niſi figuræ mutationem: ut rara corpora illa ſint, inter quorum partes, multa intervalla exiſtunt, corporibus aliis repleta, & quod denſiora reddantur, quod eorum partes ad invicem accedentes intervalla iſta imminuant, aut etiam penitus tollant. Eo modo quo ſpongia, aqua turgens, non propterea ſecundum ſingulas partes magis extenſa eſt. Duplicem autem rationem afferre videtur cur hoc modo rarefactionem fieri exiſtimet, & omnem alium modum rejiciat. Prima quod aliud omnis modus videatur aliquid inintelligibile effingere, nempè majorem extenſionem, hic autem poros admittendo; quos corpora aliena ſubeant, nihil afferat quod non facilè mens noſtra aſſequatur licèt ſenſus non ſemper corpus hoc novum ſubingrediens percipiat. Neque enim ulla ratio nos cogit, ad credendum corpora omnia quæ exiſtunt debere ſenſus noſtros afficere. Secunda ratio videtur potentior, petita ſcilicet ex eo quod repugnet aliquid nova quantitate, vel nova extenſione augeri quin nova ſubſtantia extenſa, hoc eſt novum corpus ei accedat. Quippe quantitas inquit, à ſubſtantia extenſa in re non differt, ſed tantum ut numerus à re numerata, ita ut in re fieri non poſſit, ut vel minimum quid ex iſta quantitate, aut extenſione tollatur, quin tantumdem etiam de ſubſtantia detrahatur.

Addit item quod licèt fortè nonnulli aliquid dicant, non aliud de ea re percipiunt, & cum ſubſtantiam ab extenſione, aut quantitate diſtinguunt, vel nihil per nomen ſubſtantiæ intelligunt, vel confuſam tantum ſubſtantiæ incorporeæ ideam habent, quam falsò tribuunt corporeæ.

Dico igitur primò, præcipuè opinionis contrariæ momenta, allata non fuiſſe à Carteſio. Primum ſit iſtud, quod explicari non poſſit in hac opinione quid ſit corpus rarum & denſum, ſi enim corpus denſum illud eſt quod parum aut nihil habet materiæ alienæ, quare gravius eſt. Anne materia illa aliena, minoris eſt gravitatis, quam propria hujus corporis? immò cum juxta hujus

hujus novæ philoſophiæ placita, ſola in rebus diſtinctio, à figura, aut magnitudine petatur, lignum quod minus denſum eſt auro, æqualis gravitatis eſſe deberet. Materia enim quæ in poris ejus exiſtit, & quæ in unum cum illo globum coaleſcit, æquè gravitare deberet, ac aurum æqualis molis, ergo uterque globus æquè gravis eſſe deberet: quod tamen experientiæ repugnat, cum aurum pluſquam vigecuplo gravius ſit. Contendo autem hac raritate per ſolam corporum extraneorum intromiſſionem in Carthesiana hypotheſi explicari non poſſe, hanc primam corporis denſi proprietatem, nempè majorem in ſpecie ut vocant gravitatem, quæ cum opinione contraria ita benè congruit, ut nihil magis appoſitum ad explicandos effectus communes. Poſito enim quod denſitas nihil ſit aliud, quam multùm materiæ ſub minori extenſione, benè intelligitur quod gravitas quæ cum materia connexa eſt augeatur, cum plures ſunt materiæ partes. Multò etiam melius ſtatuitur quomodo per ſolam extenſionis mutationem, mutetur gravitas ſpecifica, immutata gravitate abſoluta. Cum enim aqua verbi gratia quæ prius ſub æquali mole cum aëre plures habebat partes materiæ, & gravitatis, majorem acquirit extenſionem, majuſque millecuplò ſpatium occupat, licèt eandem gravitatem abſolutam retineat: quia tamen in hoc novo ſtatu, dum deſcendit, æqualem ſibi in mole aërem, ipſaque graviorem extrudere deberet, id amplius non poteſt, ſed à majore vincitur, quæ prius minore vincere poterat. Quare eadem perſeverans in corpore rarefacto gravitas abſoluta, quæ prius erat in denſo, ut ſexcentis experientiis manifeſtum redditur, ſatis evincit eandem item ſub majori extenſione materiam perſeverare, nullamque rei gravis hoc eſt corporeæ fuiſſe factam acceſſionem.

Quod verò aſſerit intelligi non poſſe, addi novam extenſionem quin accedat nova materia, id uno ſenſu verum eſt, neque enim dicit ullus, dum materia rareſit, accedit nova extenſio, perſeverante priſtina, ſed fit novus rei ſtatus, ſeu novus exiſtendi modus deſtructo penitus priore, ex ſuppoſitione ſcilicet quod materia ſecundum omnes partes rareſiat.

Id quidem fateor eſſe intelligibile, ſi eſſentia rerum corporearum in extenſione conſiſtat; cum verò probatum ſit ſupra, aliam eſſe naturam rei corporeæ, id tam facilè aſſero à me concipi quam eadem anima, modo majori, nunc minori corpori coextendi intelligatur.

Quod ſi modum intelligibilem quærat, puto rarefactionem per vacuola factam, multò melius experientiis, & rationibus ſtatices reſpondere, quam ſubtilis materiæ intromiſſionem, multóque melius quid ſit rarum, & denſum, quid gravius in ſpecie, quid levius explicare.

Aſſero item effectuum communium, multò melius cauſam aſſignari, ſi rarefactio propriè dicta admittatur, quam ſi ad eam efficiendam materia ſubtilis ſit advocanda. Sæpè enim rarefactiones accidunt intra corpora compacta, omnem extraneæ materiæ aditum præcludentia; in quibus poros admittere, ita pervios; & crebros ut nullo negotio permeentur, ſit magna petitio, & cui non ita facilè ſenſus noſter acquieſcat.

Unum aut alterum rarefactionis exemplum proferam. Primum ſit pulveris pyrii qui ubi flammam concipit millecuplò majorem locum occupat, tantoque impetu globum emittit, aut impoſitas ſubſtructiones attollit, aut disjicit. Si enim hujus pulveris rarefactio, in ſola partium diſtractione conſiſteret, quæro à quo partes ejus tanta vi ſeparentur? Non ab ipſo pulvere, ſaltem ſecundum Carthesii principia; nullum enim corpus motum ſuum poteſt inchoare, ſed ab extrinſeco illum excipit? Non ab igne modico ipſius fomitis, qui cum parvam motus quantitatem habeat, nec poſſit majorem producere, hæc acervo pulveris communicata motum maximum tardum efficiet. Non etiam aliunde hæc partium diſtractio à materia ſubtili poteſt procedere, quæ cum multò melius moveri poſſit dum libera eſt, hoc eſt extra omne corpus, quam dum poros alienos ſubit, nulla eſt ratio cur tanta vi ſe in eos immergat. Addo ulterius quod hæc materia ſubtilis, cum in omnem partem moveatur, & non tantum in poros impingat, ſed etiam in partes ſolidas ejuſdem pulveris, tam illas comprimit contra ſe invicem, quam illas diſtrahit incurrendo in poros; unde non video, quid poſſit efficere, cum tam motui reſiſtat ex una parte, quam ex alia imprimit. Addo quod cum materia ſubtilis tam reſiſtat globo quem continuè verberat, & contra pulverem compingit, quam vim inferat pulveri ad ejus partes à ſe invicem diſtrahendas, nullam video ne umbram quidem rarefactionis ſecuturæ.

Alterum exemplum ſit aër magna vi in vas æneum immiſſus, qui laxato epiſtomio magna vi erumpit, ut centuplò majorem locum occupet, quæro à quonam tanta oriatur rarefactio, & partium aëris diſtractio? Non ab aëre ipſo, qui ſtatum obtinet multo magis connaturalem, dum partes ejus ſolæ ſunt, quam ſi interruptiones habeant. Non oritur item hæc partium ſeparatio à materia ſubtili ſe inſinuante, eò quòd tantum vim faciat in ipſas partes, ut eas adunet, quàm ut eas diſtrahat, & ſeparet.

Addo ulterius non omnem motum iſtius materiæ ſubtilis aptum eſſe ad hunc effectum præſtandum. Si enim quælibet particula in orbem moveatur, nec feratur in lineam rectam, nihil omnino ſequetur; ſi item ſummè liquida ſit hæc materia, nec habeat particulas in cuneum efformatas, ut poros ſubeant & aperiant, partes aëris non diſtrahentur.

Quod ſi dicas aërem conſtare partibus quaſi villoſis, & rigiditatem nonnullam habentibus, quæ ubi compreſſæ, & quaſi inflexæ fuerint, poſſint aſſurgere, & ſuam rectitudinem reaſſumere; contendo hanc rigiditatem partium, & vim elaſticam, ſine rarefactione, & condenſatione, propriè dicta, explicari non poſſe. Sed de hoc ultimo erit ſuus infra dicendi locus.

Ex quibus concludo Carteſium præcipuas difficultates hujus materiæ non attigiſſe, cum certum ſit opinionem communem de rarefactione propriè dicta; licèt nonnihil intellectu difficiliorem, melius tamen effectibus explicandis accommodatam eſſe, & contrariam ad principia multò minus credibilia confugere.

PROPO

Digitized by Google

PROPOSITIO IV.

Errores Carteſii circa ſpatium.

Multos eoſque graviſſimos, immò & periculoſos in fide errores, ab uno & fœdo illo quidem principio ortos exiſtimo, quod non ſatis adverterit Carteſius, non tantum circa rem exiſtentem, ſed etiam circa poſſibilem verſari poſſe cogitationem meam, nec ex eo concludi corpus in longum, latum, & profundum exiſtere, quod cogitatio mea tale corpus concipiat, cum æquè circa poſſibile, & exiſtens, immò, & circa impoſſibile verſari poſſit.

Primò enim ex hac rei exiſtentis, & poſſibilis indiſtinctione, malè concludit vacuum in quo nulla ſit ſubſtantia repugnare, ex eo quod extenſio ſpatii, ſeu loci ut vocat interni, non differat ab extenſione corporis; cum enim ex eo quod corpus ſit extenſum, in longum, latum, & profundum concludimus illud eſſe ſubſtantiam, idem etiam de ſpatio quod vacuum ſupponitur concludendum eſſe contendit, cum illud extenſum concipiamus.

Putat autem communem eſſe errorem quod non advertentes ullam eſſe inter vas & corpus in eo contentum neceſſariam connexionem, non putavimus quidquam obſtare quin Deus efficiat ut corpus quod vas aliquod replet inde auferatur, & nullum in ejus locum ſuccedat. Concedit quidem nullam eſſe connexionem inter vas, & hoc & illud corpus particulare, quod in eo continetur, ſed eſſe maximam ac omnino neceſſariam aſſerit inter vaſis figuram concavam, & extenſionem in genere ſumptam, quæ in ea cavitate debet contineri.

Ut ergo ejus rationi reſpondeam, hæc vaſis cavitas eſt extenſa in longum, latum, & profundum, ergo eſt corpus;diſtinguo majorem. Eſt extenſa realiter nego, eſt extenſa potentia concedo. hoc eſt inter latera vaſis interjici poteſt corpus extenſum concedo, interjicitur actu nego.

Neque propterea ſe tangunt latera vaſis licèt nihil inter illa mediet, ſed requireretur præterea ut nullum corpus interjici poſſet.

Abſurda autem quæ ex hac indiſtinctione extenſionis exiſtentis, & poſſibilis pullulant, innumera ſunt, immò & periculoſa, quis enim dicat ita connexa eſſe partes materiæ inter ſe, ut licèt ab invicem dependeant, nullam tamen Deus annihilare poſſit, quin totum mundum, & omnia corpora deſtruat. Ponamus enim deſtrui aërem qui in hoc cubiculo verſatur, vel alius in eum locum ſuccedet, vel parietes ad ſe invicem ſuccedent, & locum mutabunt; ſed cum omnia plena ſint, nec ulla admittatur rarefactio propriè dicta, alicubi deficiet corpus, neque enim minor materia occupare poteſt idem ſpatium, quod major materia occupabat: ergo neceſſariò erit ſpatium aliquod ſine corpore.

Aliud non minus abſurdum eſt, quod ſi Deus creaverit aliquod corpus, neceſſariò teneatur producere, quidquid materiæ poteſt producere, quia ubicumque illius corporis fines ſtatuamus, ſemper ulterius ultra ipſos aliqua ſpatia indefinitè extenſa non modo imaginamur, ſed & realia eſſe percipimus, ergo ibi corpus imaginamur. Unde concludit ibi corpus eſſe. Sed unica diſtinctione ruit totum ejus raciocinium. Spatia imaginamur realia, hoc eſt concipimus corpus eſſe poſſibile, & hanc extenſionis poſſibilitatem concipimus ad modum extenſionis concedo, & concipimus ibi de facto corpus eſſe nego.

Urgeri poſſet hæc ejus aſſertio, omnibus argumentis, quibus infinitum in extenſione communiter impugnamus, quæ cum paſſim apud Philoſophos inveniantur, non refero; quod enim mundum indefinitum vocet, & non infinitum, parum intereſt, cum verè admittat nullos eſſe ejus fines & terminos.

Sed pari jure ſequitur quod totum mundum deſtruere non poſſit Deus, cum deſtructis iis corporibus ex quibus conſtat ſpatium pariter infinitum, quod à mundo occupabatur, immò & ante mundi creationem idem ſpatium poſſim imaginari, ergo ibi jam erat corpus. Sequitur ergo ex ejus doctrina, mundum eſſe æternum, cum eo ſublato, non tamen ejus extenſionis tollatur idea.

Admittenda quidem eſt neceſſaria, immutabilis, & infinita extenſio, nempè Dei immenſitas, unde quid ultra mundum concipimus, nihil reale præter Deum, qui verè imenſus eſt & realiter extenſus. Admittere item poſſumus extra mundum poſſibilia eſſe alia corpora, & alios mundos, quos quidem concipimus ſecundum ideam quam à rebus exiſtentibus hauſimus, non tamen propterea ſequitur eos exiſtere.

Ex quibus ſic argumentari licèt: Si ex eo quod habeam alicujus rei ideam, liceret concludere rem illam ibi exiſtere, ſequeretur quod ubi conciperem hominem eſſe poſſibilem, ille homo exiſteret, neque enim alia eſt idea & imago hominis exiſtentis & poſſibilis.

Ut autem oſtendam à pari hujus raciocinii defectum. Nonne datur rerum aliqua duratio, quæ ſuo modo extenſionem habet, nonne dato mundi verbi gratia initio poſſum cogitare quod ante centum annis exiſtere poſſit; anne bona eſſet conſequentia quod toto illo tempore de facto exiſtit, cum hæc mundi duratio poſſibilis concipiatur per modum durationis extenſæ in ordine ad tempus. Non ergo revocari debent omnia ad ideas noſtras, nec ex eò quòd concipiatur aliqua extenſio, licèt ejus exiſtentiam concludere. Dum igitur vacuitatem inter latera vaſis contentam concipio, ut extenſam, nullum ibi corpus eſſe dico, ſed tantum ita ſita eſſe latera vaſis, ut inter ea corpus poſſit collocari. Simili vitio laborat ratio quâ diviſibilitatem materiæ in infinitum conatur adſtruere, cum enim inquit ſi quæ ſint partes, neceſſariò debeant eſſe extenſæ, quantumvis parvæ fingantur, poſſumus adhuc unamquamque ex ipſis, in duas, aut plures minores cogitatione dividere ac proinde agnoſcere eſſe diviſibiles. Nihil enim poſſumus inquit cogitatione dividere, quin hoc ipſo cognoſcamus eſſe diviſibile, atque ideo ſi judicaremus id ipſum eſſe indiviſibile judicium noſtrum à cogitatione diſſentiret.

Multa in hac doctrina reprehendere licèt. Primò quod à diviſione intellectuali ad realem procedat. Angelum enim & animam rationalem extenſam concipimus, & cogitatione dividimus, non

non tamen propterea, realiter diviſibiles eſſe aſſerimus. Quamvis ergo quamlibet partem materiæ extenſam cogitem, non propterea ſequitur eam in duas partes realiter eſſe diviſibilem, ſi unica ſit entitas. Eſto minor dari poſſit.

Addo quod longè efficacioribus argumentis contra Zenonem agendum ſit, qui ſoli materiæ totali ait convenire ut ſit extenſa in longum, latum, & profundum, cuilibet autem parti extenſionem indiviſibilem omnium minimam convenire, atque adeo ne mente quidem diviſibilem. Quod notare volui, ut probationum iſtarum inefficacitatem oſtenderem, quæ ne leviter quidem iſtas atomos perſtringunt, ſed ſupponunt id quod probandum fuerat.

PROPOSITIO V.

Errores Carthesii circa definitionem motûs.

Occurrit primò definitio motus, quæ ita proponitur. Motus eſt tranſlatio unius partis materiæ, ſive unius corporis ex vicinia eorum corporum, quæ illud immediatè contingunt, & tanquam quieſcentia ſpectantur, in viciniam aliorum.

Contendo hujuſmodi definitione non explicari naturam motus. Primò quia licèt corpora vicina ſimul moveantur, non deſinit eodem modo moveri corpus, ſed ſecundum hanc definitionem non moveretur corpus, ergo hæc definitio non eſt bona. Cum enim motus ſecundum ipſum ſit modus mobili intrinſecus, idem erit modus intrinſecus, ſive corpus vicinum ſimili modo afficiatur, ſive non; ergo modus hic omnino intrinſecus, & à vicinis corporibus independens, per reſpectum ad illa definiri non poteſt. Secundò ſequeretur ſolam ſuperficiem extimam corporis alicujus moveri, ſola enim transferretur ex vicinia eorum corporum, quæ illam immediatè contingunt, in viciniam aliorum. Deinde ſecundum hanc definitionem idem eſſet navigium transferri à littoribus in altum mare, ac immoto navigio littora ab eo removeri, nec eſſet potior ratio cur littora immota conciperem, quam navim. Si enim in re motus nihil eſt aliud quam tranſlatio à vicinia, unius corporis quod concipitur immobile in viciniam aliorum, quæro utrum mihi liceat utrumlibet corpus concipere ut immobile. Cum enim tranſlatio omnis à vicinia ſit reciproca, quæro cum hoc modo corpus A transfertur à vicinia corporis B ſibi vicini, ad viciniam aliorum, cui ſit tribuendus motus, & quænam ſit potior ratio, cur unum ut immobile ſpectetur quam aliud. Verè in motu aliquid eſſe debet, propter quod unum potius corpus moveri dicatur quam aliud; quod non eſt ſemper à cogitatione noſtra deſumendum, quæ ſæpè cum motus in ſe non conſideret, ſed reſpectivè ad corpora vicina, motum unius alteri tribuit. Quæ omnia ab hoc authore ſunt ita confuſa, ut videatur dicere piſcem ſecundo fluvio deſcendentem nullum motum habere, quod quidem verum eſt de motu reſpectivo in ordine ad aquam, hoc eſt quo ab aqua fluvii recedat, falſum tamen ſi de motu abſoluto ſit ſermo. Quare contendo naturam & definitionem motus non fuiſſe benè explicatam, cum hæc mihi liberum relinquat, cuilibet corpori voluero motum tribuere.

Secundò contendo malè à Carthefio aſſumi tanquam indubitatum, motum ſemel inchoatum ſine ulla nova actione, per ſolam Dei concurſum conſervativum, continuandum eſſe; quod an benè cum ea quam de motu ideam propoſuit congruat, hîc examinandum nobis eſt. Hanc autem ſuam aſſertionem ut ſtabiliat, dicit non plus actionis requiri ad motum, quam ad quietem; putatque contrariam opinionem ex præjudicio ortam eſſe, nempè quod corpus noſtrum à noſtra voluntate, cujus optimè conſcii ſumus moveri ſoleat, & quieſcere ex hoc ſolo quod terræ adhæreat per gravitatem, cujus vim non ſentimus, & quia gravitas aliæque cauſæ membris noſtris reſiſtunt, efficiuntque ut defatigemur, ideo majore opus eſſe actione ad motum ciendum quam ad illum ſiſtendum. Videtur autem hoc ratiocinium laborare in æquivoco, nempè probare contendit non plus actionis requiri, ad continuandum motum, quam ad conſervandam quietem, ex eo quod tantumdem requiratur actionis ſæpè ad ſiſtendum motum, & efficiendam quietem, quantum requiritur ad deſtruendam quietem, & efficiendum motum. Videtur tamen conſequentia non eſſe legitima, ex eo quod non poſſim impedire quominus cauſa quæ producit motum illum producat, quin ponam aliquid contrarii, nempè motum contrarium ad quem efficiendum requiritur aliqua vis, quies autem nihil dicit niſi negationem motus, atque adeo ad illam conſervandam nulla eſt opus actione; motus autem ſucceſſio, ut oſtendam infrà, impedit quominus ejus continuatio dici poſſit conſervatio.

Hæc ratio facilè impugnatur: Deus plus quietis modo producit quam initio; ergo mutatur. Pr. Ant. Initio Deus nullam quietem produxit cum omnes partes materiæ motæ ſint, modo aliquam producit: quies autem tam eſt aliquid poſitivum quam motus, tantaque ſecundum ipſum requiritur virtus ad quieſcendum, quam ad motum. Hoc argumentum demonſtrativum eſt contra Carthefium.

Secunda ratio videtur peti ab immutabilitate Dei, vi cujus non ſolum immutabilis eſt in ſe ipſo ſed etiam quod modo quam maximè conſtanti, & immutabili operetur, ne quæ inde inconſtantia in ipſo arguatur; unde ſequitur quod ex eo ſolo quod Deus diverſimodè moverit partes materiæ, eum etiam tantumdem motus in ipſa ſemper conſervare.

Sed hoc ab immutabilitate Dei petitum argumentum planè nullum, & ridiculum eſt.

Nam non magis eſſet contra immutabilitatem, quod non conſervet in materia eandem motus quantitatem, quam in materia initio ſupponitur produxiſſe, quàm ſit contra immutabilitatem Dei, quod cum per totam æternitatem mundum non produxerit, cum poſtea produxerit, aut quod in mundo eundem non conſervet numerum hominum, pecudum, herbarum, aut aliarum rerum. Item quod quæ partes in motu erant, quieſcant, aliæ velocius moveantur quam initio, cæteræque hujuſmodi mutationes; vel oſtendant aliquam peculiarem hujus quantitatis motus cum immutabilitate Dei connexionem,

quam

Digitized by Google

quam hujus numeri hominum, vel alterius cujuſque rei.

Oſtendo autem poſitivè hanc hypotheſin ſubſiſtere non poſſe. Quia ad hoc ut hæc hypotheſis ſubſiſtat deberet neceſſariò ſequi, nullum mobile poſſe inchoare motum; quin ab extrinſeco illud communicatum habeat, ita ut tantum decedat motus in motore; quantum in mobili producitur. Sed experientia compertum eſt, quod non omnis motus ab extrinſeco communicatur, ſed de novo producitur, abſque eo quod ſequatur neceſſariò ulla quies in alio corpore. Nam primò certum eſt quod animalia inchoant ſuum motum, nec illud recipiunt ab extrinſeco, eodem enim modo animalia moventur iiſdemque adminiculis, & mediis quibus homines moventur; ſed certum eſt quod homines non recipiunt motum ſuum ab extrinſeco. Si enim ab extrinſeco reciperent, motus illorum liber non eſſet, ſed conſcii ſumus, nos moveri quotieſcumque volumus, quod ſi motum ab extrinſeco reciperemus non liberè moveremur.

Neque enim concipi poteſt, quomodo actio meæ voluntatis determinare poſſit agens extrinſecum, ad imprimendum in me motum, ex quo concludo principium hujus motus non eſſe ab extrinſeco.

Quamvis enim ſpiritus animales ad motum progreſſivum ſint neceſſarii, ab iis tamen pes meus illum non excipit, cum inexplicabile ſit, quomodo voluntas mea, per hos ſpiritus potius in unam partem pedem adducat quam in aliam. Aſſignari item non poſſunt quænam corpora ſiſtantur dum moveor, ne ſit major quantitas motus. Nam ſi dicatur Deus alicujus corporis motum ſiſtere, ne ſit major illa quantitas motus, peto cujus corporis, an omnium, an alicujus peculiaris; non alicujus peculiaris quia non eſt potior ratio unius, quam alterius. Non etiam omnium. Deinde hic modus philoſophandi; quod ex eo quod homo verbi gratia incipiat ſe movere, Deus deſinat conſervare motum ita velocem in omnibus mobilibus, eſt à recto philoſophandi modo omnino alienus.

Secundò multa ſunt alia agentia quæ ſimiliter moveri incipiunt, nec tamen ab extrinſeco motore ſuum motum habent. Ita pulvis accenſus incipit habere motum vehementiſſimum, eumque imprimit globo, nullus tamen aſſignari poteſt motor extrinſecus à quo talem motum participet, & cui tantumdem motus decedat, quantum pulveri accedit, ſed de hac materia jam dixi ſupra.

Repugnant item indubitatæ regulæ motus, quæ ſunt longè diverſæ ab iis quas hic author aſſignat ut oſtendam propoſitionibus ſequentibus.

Oſtendo nunc poſitivè ſecundùm hujus authoris principia, majorem requiri vim ad motum continuandum, quam ad quietem conſervandam. Motus definitur ab hoc authore, Tranſlatio corporis à vicinia corporum vicinorum, in viciniam aliorum; ergo alia eſt tranſlatio corporis qua acceditur ad corpus aliquod, & alia qua ab ea receditur; ea enim diſtinguntur quæ non exiſtunt eodem tempore, ſed tranſlatio qua acceditur ad corpus A, non eſt eo tempore, quo eſt tranſlatio qua ab eodem corpore A receditur; cum mobile non poſſit ſimul eodem tempore accedere ad corpus A & ab eo recedere. Ergo ſecundum hanc motûs definitionem motus ſunt diverſi, quo accedo ad corpus A, & quo ab eo recedo: ergo motus habet partes ſibi invicem ſuccedentes. Ergo continuatio motus quo poſtquam mobile acceſſit ad terminum A, ulterius pergit, ulterius procedit, eumque deſerit, conſervatio dici non poteſt; ſed nova productio. Ad hoc ut eſſet conſervatio deberet eadem numero produci entitas motus, dum mobile recedit à termino A, quæ producebatur dum ad illud accedebat. Sed non eſt eadem. Si enim eſſet eadem, accederet dum recederet, & viciſſim, tunc enim receditur cũ eſt id quo formaliter receditur; ſed ſi eodem motu recederem, & accederem, dum accederem eſſet id totum quo formaliter receditur. Quare ſi ſiſtamus præciſè in definitione allata, videtur motus eſſentialiter eſſe ſucceſſivus, & conſtare partibus, quarum una deſinat cum alia exiſtit. Ex quibus concludo quod ſicut prima pars ſeipſam primò producere non poteſt, ſed indiget cauſa eam producente, ita etiam ſecunda ſimili influxu indigeat. Et ſicut productio primæ partis motûs non procedebat à ſolo Dei concurſu conſervativo, eò quòd primò tunc exiſteret, ita etiam ſecunda. Immò puto implicare motûs conſervationem, ſecundum hanc motus notionem; cum enim ſecundum hanc eſſentialiter ſit ſucceſſivus, implicet autem partes eas conſervari quæ ubi primum exiſtunt deſinunt eſſe, implicat ergo motum eundem numero conſervari, & conſequenter non minus egere in decurſu actuali influxu motoris, quam in ipſo initio.

Ut autem melius appareat hujus hypotheſis infirmitas, quæ ſoli modo loquendi innititur, quo dicimus eamdem eſſe motûs quantitatem, dum æqualem ſignificare volumus. Certum eſt aliquod corpus moveri quod prius quieſcebat, atque adeo hunc numero motum nunquam extitiſſe, nec illi ab extrinſeco ita communicatum eſſe, ut idem in corpore verbi gratiâ percutiente fuerit, qui in percuſſo deprehenditur: non ergo per ſimplicem concurſum conſervativum æqualis motus quantitas perſeverat in materia; ſed quærenda eſt ſingulorum motuum qui de novo exurgunt aliqua cauſa verè productiva, diſtincta à Deo. Nam dicere quod dum corpus in aliud occurrens illi imprimit motum, quod inquam Deus ſolus operatur, ſiſtitque motum percutientis, & incipit percuſſum movere, hoc inquam eſt confugere ad cauſam primam ſine neceſſitate; quod apud omnes tanquam inſcitiæ perfugium ſemper habitum fuit, & à recto philophandi modo penitus alienum.

Eſt igitur maxima inter motum, & quietem differentia. Quod ut quies perſeveret nulla ſit opus nova entitate, atque à Deo ubi primum eſt quies, ſolus influxus conſervativus, neceſſarius ſit, quo res in eodem ſtatu vero, & phyſico permaneat. At verò continuatio motus non dicit eundem ſtatum præciſè, ſed tantum per quandam ſimilitudinem, & æquivalentiam, cum enim novæ partes motus exurgant quæ à ſe ipſis produci non poſſunt, hæ omnes ſemper produci debent. Neque verò eſt magis idem ſtatus, quam foret idem ſtatus mundi ſi Deus decerneret in eo eundem hominum numerum conſervare.

Quæ omnia aſſero conſequenter ad hanc motus

tus definitionem ; non dubito enim quin alia proponi poſſet, quâ diceretur motus eſſe modus aliquis permanens,cujus eſſentia in eo conſiſteret.

PROPOSITIO VI.

Omnis motus eſt impoſſibilis ſecundum Cartheſium.

Manifeſtæ inconſequentiæ hypotheſin Cartheſianam arguo in hac propoſitione, & contendo ſequi ex ea omnem motum eſſe impoſſibilem Suppono autem ut eadem perſeveret in mundo motûs quantitas neceſſarium eſſe, ut mobile tantumdem motus deperdat, quantum alteri communicat. Suppono item omnia plena eſſe, & materiam ejuſdem eſſe ſpeciei, ita ut nulla ſit diverſitas, quam quæ in diverſis motibus poſita eſt. Ex quibus concludo nullum corpus moveri.

Supponamus enim corpori cuilibet, verbi gratia lapidi, à Deo certam quantitatem motus imprimi, demonſtro illud moveri non poſſe. Illud corpus quod moveri non poteſt quin totum ſuum motum amittat, immobile cenſeri debet; ſed lapis ille moveri non poteſt, quin motum æqualem in aëre ſibi vicino producat, & tantum amittit de ſuo motu quantum producit, ergo dum movetur totum ſuum motum amittit. Probatur minor, nullum corpus moveri poteſt, quin ſaltem aër ipſi æqualis in mole, æquali velocitate moveatur, ſed in aëre ipſi æquali in mole, & æquè velociter moto, eſt æqualis quantitas motûs, ergo lapis moveri non poteſt, quin æqualem in aëre motus quantitatem producat,ergo quin totum ſuum motum amittat. Neque enim dicere potes, in aëre utpotè rariori, licèt æquè velociter moto,minorem eſſe quantitatem motus.Cum enim ſecundum Cartheſium tot ſint in corpore rariori, quot in duriori partes materiæ, licèt minutiores, & quantitas motus oriatur dum partes materiæ per velocitatem multiplicantur, eadem utrinque ex multiplicatione orietur quantitas motus, ergo totum amittet lapis ſuum motum : cum alium ipſi æqualem debeat producere. Hoc quidem argumentum nullum eſſet in opinione communi, quia dicerem aërem æqualem in mole ipſi lapidi, non milleſimam partem materiæ continere, illius quæ eſt in lapide,atque adeo licèt in utroque ſit æqualis velocitas, inæqualem tamen eſſe motus quantitatem. Sed hâc reſponſione uti non poteſt Cartheſius, qui raritatem explicat per intromiſſionem alienæ ſubſtantiæ, quæ etiam moveri debet dum ejus locum occupat lapis : ergo ut habeatur quantitas motus producendi à lapide moto,debet haberi ratio, non tantum partium aëris, ſed etiam totius materiæ permixtæ, quæ lapidi locum facere debet. Ergo quicumque imprimatur motus, is totus ceſſare debet,cum alius ipſi æqualis producendus ſit.

PROPOSITIO VII.

Falſa ſunt Regulæ motus à Cartheſio aſſignatæ.

Plurimas affert motus regulas Cartheſius, quas cum ad ſuam de æquali quantitate motus in mundo conſervata accommodat, ut plurimum contrarias experientiis, & inintelligibiles profert. Prima ſit hæc, quod motus motui non ſit contrarius, ſed tantum quieti; hoc eſt quod motus, motum non deſtruat, ſed tantum quies, quam regulam omnino falſam eſſe contendo, & experientiis repugnantem. Volo igitur ut motus quieti privatione opponatur,& motus motui opponatur contrario, ſicut negatio caloris calori.

Experientia conſtat quod ſi duo corpora æqualia, non elaſtica ſibi motibus invicem ex adverſo occurrant,ceſſabit eorum omnis motus, ergo motus motui contrarius. Si enim motus motui contrarius non eſſet, deberent ambo corpora regredi eadem velocitate, quâ prius ferebantur : ſed nulla ferè ſunt corpora quæ eadem præciſè velocitate regrediantur, niſi quæ ſunt elaterii capacia, & prout aufertur ea vis elaſtica, eò minus regrediuntur, quod ſi nullam omnino habeant, ut ſi fiant globuli è molliori gleba,nullo modo regredientur. Ex quibus concludo vi percuſſionis quæ accidit in ipſo corporum æqualium & æquali velocitate delatorum occurſu, verè amitti utriuſque motum directum, ſed à virtute elaterii, ſe in connaturalem figuram reſtituentis motus novos produci. Quod verè res ita ſe habeat, ad experientiam provoco, ſecundum omnes partes, nempè primò quod ſi duo globi verbi gratia Calybei, antequam temperentur, ſibi occurrant parum admodum regrediantur, ſi verò temperaturâ vim elaſticam acquirant, regreſſum habebunt velociorem. Globi lignei ſibi occurrentes, ſi ex buxo aut alia materia elaterium promptum & vividum habente fuerint, magis regredientur, quam ſi ex molliori conſtent, plumbei globi, qui ſingulis ictibus complanantur non multùm movebuntur. Sed ſi motus motui non eſſet contrarius, regredi deberent omnia corpora, etiam non elaſtica, ergo verè motus motui contrarius eſt. Ponamus enim duo corpora non elaſtica per occurſum mutare figuram, & alia duo,ſed elaſtica, mutare figuram, ſed hæc poſteriora, ſe reſtituendo in priſtinum ſtatum, motum producere. Cur priora duo omnem motum amittunt, poſteriora non amittunt, nihil video quod ſatis probabiliter dici poſſit.

Hæc ratio explicandi regreſſum corporum per vim elaſticam phyſica eſt & intelligibilis, & in ea explicantur optimè omnes effectus.Explicatio autem Cartheſii de iſtis determinationibus non ſatis intelligitur, neque ſcio quid ſit motu eodem perſeverante determinatio in unam, aut alteram lineam : quæro enim utrum ſit aliquis modus ſuperadditus ipſi motui, & quæro à quo producatur talis modus. Jam motus erat aliquis modus ſeu ſtatus corporis, cui alius modus ſupervenit, quæ tanta entitatum multiplicatio, in philoſophia præſertim, quæ maximè parcitati ſtudet. Fateor igitur me non concipere quid ſit iſta determinatio verſus unam partem, quæ ſi ſumatur ut à motu diſtincta nihil continet niſi verba. Ego ita rem ſtatuo quod motus determinatio nihil ſit à motu diſtinctum, & quod ſæpè multa poſſint concurrere ad motum producendum verſus unam partem, unde ratione tantum differt determinatio motus, ab ipſo motu, & implicat ut idem motus numero determinetur ad lineas oppoſitas. Quidquid tamen ſit de his determinationibus contendo per vim elaſticam benè rem explicari, incurrit globus ſolidus in funem laxum

Digitized by Google

laxum non regreditur, ſinis tenditur, & quia tunc ſe reſtituit globus regredietur.

Quia verò ſemel peccatum eſt initio omnes ferè regulæ motus ab eo propoſitæ falſæ ſunt. Prima quidem falſa eſt, in uno caſu. Nempè ille indifferenter proponit quod ſi duo corpora æqualia ſibi occurrant velocitatibus æqualibus, regredientur æquali velocitate. Contendo autem quod ſi fuerint corpora non elaſtica, ceſſabit omnis motus, & ad experientiam provoco. Ideo exiſtimo etiam corpora duriſſima, ſi talia haberentur non elaſtica ceſſatura ab omni motu.

Secunda ita habet ſi corpora A & B ſibi mutuò occurrerent, eſſetque B paulò majus quam A, tunc ſolum A reflecteretur, & utrumque verſus eamdem partem eadem celeritate progrederetur. Hæc regula falſiſſima eſt in omnibus caſibus. Primò quidem ſi fuerint corpora mollia falſum eſt quod eadem velocitate ferantur qua prius, ſed cum corpora ſupponantur, ferri eadem velocitate, ſitque B paulò majus, majorem habebit motus quantitatem quam A. Dico poſt occurſum ſolum exceſſum motus corporis B ſupra A, reſtare, qui corporibus communicatus motum tardiſſimum efficiet, & quo ad hoc ad experientias non tantum meas, ſed etiam Domini Mariotte provoco, quæ omnes ab hac regula diſſentiunt, ita ut in nullo occurſu corporum mollium eadem reſtet motus quantitas, aut eadem velocitas.

Secundò ſi fuerint duo corpora elaſtica in pleriſque caſibus, utrumque regredietur, ſed B minus quam A, & miror regulas ita ab experientiis alienas tam audacter proferri.

Tertia pariter regula falſa eſt: Vult enim quod ſi duo corpora A & B mole æqualia ſibi occurrant cum velocitatibus inæqualibus, nempè ſi B delatum ad orientem habeat 6 gradus celeritatis, & A delatum ad occidentem habeat tantum 4. quod poſt concurſum utrumque tendat ad orientem celeritate ut 6. dico quod ſi corpora ſine elaterio fuerint, ferentur ad orientem velocitate ut unum, quod eſt conforme experientiis. Nam quatuor gradus celeritatis, hinc inde ſe invicé perimunt, reſtatque ſolus exceſſus velocitatis, qui utrique corpori communicatus velocitatem ut unum efficit. Si verò fuerint Elaſtica cum ſecluſo elaterio, ferantur vi directi motus ad orientem velocitate unius gradus & elaterium vim ſuam exerat æqualiter habeatque vim majorem, quam quæ producat velocitatem ut unum, mobile A feretur ad orientem velocitate ſaltem ut tria, & mobile B regredietur velocitate ut duo, quæ modo non expendo exactè, quod præſtiti in tractatu peculiari.

Quarta regula evidenter repugnat experientiis, ita ut nihil potuerit dici in hac materia magis abſonum. Habet autem quod ſi corpus A quieſcat fueritque paulò majus quam B quacumque celeritate feratur B in A, nunquam ipſum A moveret, ſed ab eo repelleretur in contrariam partem, quia inquit corpus quieſcens magis reſiſtit magnæ celeritati, quam parvæ, idque pro ratione exceſſus unius ſupra aliam, & ideirco ſemper major eſſet vis in A ad reſiſtendum quam in B ad impellendum.

Hæc regula in omni caſu falſa eſt, & primò quidem ſi corpora fuerint elaterii incapacia dum corpus B in corpus A majus & quietum incurrit, poſt incurſum ambo procedunt velocitate, quæ ſe habeat ad priorem, ut corpus B ad aggregatum ex A & B, & in tali caſu reſtat eadem motus quantitas, atque adeo tota quæ erat in B dividi debet per aggregatum ut habeatur velocitas nova.

Secundò ſi corpora fuerint elaſtica, dico quod corpus quieſcens dimovebitur loco à minore in ipſum incurrente. Neque enim in tudiculari ludo dum globus unus nonnihil alio minor eſt, eſt propterea irrita omnis ejus percuſſio, ſed verè commovet, eſt autem ita obvia cuilibet hæc experientia, ut contrarium ne ſomniari quidem potuerit. Ratio autem quam affert à me concipi non potuit, dicit enim quod corpus quieſcens magis reſiſtat magnæ celeritati quam parvæ, quod nullum pati poteſt bonum ſenſum.

In Quinta vult ut corpus B percutiens ſit majus corpore A quieto & percuſſo, aſſeritque ut poſt percuſſionem ambo ſimul moveantur, ita ut ſi B eſſet duplò majus quam A, transferret ipſi tertiam partem ſui motus, quæ tam celeriter movet corpus A quam reliquæ duæ moveant corpus B. Quod propterea moveatur tardius tertia parte. Hæc quidem regula vera eſt in corporibus non elaſticis, falſa ſi elaterium habeant, nam poſt concurſum corpus A quieſcens longè majori velocitate feretur, quam ſit ea quâ corpus B in ipſum incurrerit, corpus autem idem B promovebitur quidem, ſed velocitate minima.

Sexta ſupponit corpora æqualia eſſe & dicit quod ſi corpus B, in corpus A æquale & quietum incurrat cum quatuor gradibus velocitatis communicaret illi unum gradum, & regrederetur cum tribus. Hæc regula falſa eſt in non elaſticis, certum eſt enim quod poſt percuſſionem progredientur ambo ſimul verſus eandem partem, velocitate quæ ſit prioris ſubdupla. Si verò fuerint elaſtica, corpus B incurrens omnino quieſcet, & corpus B velocitatem ejus accipiet, nam vi percuſſionis ſecluſo elaterio ambo ſimul procedere deberent velocitate ut duo, elaterium autem repellens corpus B uno gradu celeritatis, in eo omnem omnino motum deſtruit, Idem elaterium impellens corpus A, jam delatum in eaſdem partes cum duobus gradibus, illi duos ſuperaddit gradus, quæ ita cum experientiis congruunt, ut modo de iis dubitare, ut de demonſtratis nefas ſit.

Septima ſi corpora A & B verſus eandem partem moveantur, ita ut A quod celerius movetur & attingit corpus B, ſit minus, ita ut exceſſus celeritatis in A ſit major quam exceſſus magnitudinis in B dicit indeterminatè quod corpus A transferret tantum de ſuo motu in corpus B, ita ut ambo æquè celeriter in eaſdem partes moveantur. Si autem exceſſus celeritatis in A, minor eſſet exceſſu magnitudinis in B, A in contrariam partem moveretur, & motum omnem ſuum retineret. Dico hanc regulam falſam eſſe, vel enim loquitur de corporibus non elaſticis, vel de elaſticis; ſi de primis, quomodocumque ſe habeant poſt concurſum ſimul procedent, ſi verò elaterium habeant verum, non eſt quod æquè celeriter poſt percuſſionem moveantur, ſed neceſſariò corpus A celerius procedet.

Ex his concludo cum hujus hypotheſis tota in motu locali poſita ſit, quo nempè omnium rerum diſtinctiones & differentias explicare nititur, quid

quid tandem boni ab ea ſperandum eſt, quæ in regulis motus tam graviter offendit, ut vix una rectè procedat.

Colligo ex his omnino falſam eſſe aſſertionem quâ vult eandem motus quantitatem in mundo perſeverare. Certum eſt enim, dari corpora non elaſtica ſive id oriatur ex ſumma mollitie, vi cujus extraneam quidem figuram aſſumunt, ſed priſtinam non recuperant, ſive id oriatur ex ſumma duritie, impediente omnem figuræ mutationem. Quare tota materia ſubtilis in hac hypotheſi, elaterio caret, globuli item videntur ſummè inflexibiles, experientia autem indubitata conſtat quod quoties corpora non elaſtica & æqualia ex adverſo cum velocitatibus æqualibus incurrunt, toties ceſſat omnis motus. Ergo cum partes materiæ ſubtilis ſæpiſſimè hoc modo in ſe invicem ferantur, multos motus in mundo periiſſe neceſſe eſt.

PROPOSITIO VIII.

Fluiditas in motu non conſiſtit.

Ut hic author fluiditatem in motu poſitam eſſe probet, ſupponit primam fluidi notionem, nempè quod partes fluidi facilè recedant ex locis ſuis, & manibus noſtris verſus illas ſe moventibus non reſiſtant, at verò durorum partes ita ſibi cohæreant ut non ſine vi ſejungi poſſint. Probat igitur hoc argumento fluiditatem in motu conſiſtere. Ea quæ ſunt in motu non impediunt ne loca quæ ſponte deſerunt ab aliis occupentur, ſed ea quæ quieſcunt non ſine aliqua vi ex locis ſuis extruduntur; ergo corpora diviſa in multas exiguas particulas motibus diverſis agitatas eſſe fluida, ea verò quorum partes juxta ſe mutuò poſitæ quieſcunt eſſe dura. Ego quidem facilè conceſſo antecedente nego conſequentiam. Nam verum eſſe fateor ea corpora non reſiſtere motui manus quæ in eamdem partem moventur, ſpatiumque ſponte deſerunt à manu mea occupandum. Sed nego poſſe ex eo concludere corpora quæ moveventur in partes adverſas non reſiſtere, immò verò aſſero majorem eſſe reſiſtentiam, corporum motorum motu contrario, quam corporum immotorum, & provoco ad experientiam. Nam difficilior eſt navigatio adverſo fluvio, quam in aqua ſtagnante, duplóque major requiritur virtus, ut impingenti corpori motum in oppoſitas partes imprimam, quam ſi immotum eſſet, ſive producatur novus motus, ſive nova determinatio parum intereſt, id puto à nemine negari poſſe, cum omnes experientiæ id demonſtrent. Quare etiam ſi concederem partes liquidi ita agitari, ut tot ſint quæ in unam partem moveantur, quot in aliam, nego tamen hunc motum partium aliquid conferre ad facilitatem motus corporis duri in eo liquido peragendi. Cum enim movendum eſt corpus durum ad dexteram, cum media pars liquidi moveatur ad ſiniſtram, contraria in iis determinatio producenda erit: ergo dupla impendenda erit virtus ad hanc determinationem producendam, quam ſi hæ partes immotæ eſſent. Neque verò ad id præſtandum adjuvari poſſum à partibus in eandem plagam motis, illæ enim in ſuo motu perſeverare debent: ergo nihil motus ſui aliis communicant, tantumdem enim deperderent. Ergo dupla virtus requiretur ad repellendas partes, quam quæ neceſſaria eſſet ſi immotæ eſſent, ſed ſi omnes immotæ eſſent, dupla virtus omnes in eandem plagam moveret: ergo tanta requiritur virtus ad movendum corpus durum in liquido cujus partes moventur, quæ requireretur, ſi immotæ eſſent; ergo motus liquidi nihil confert ad motum corporis duri, nec facilitatem ullam tribuit.

Secundò quæro utrum partes aliquæ vicinæ in eamdem plagam moveantur an nullæ. Si primum, ergo illæ duræ erunt, & unitæ, & non diviſæ quæ enim ſimul moventur, tam ſunt unita, quam quæ juxta ſe poſita quieſcunt; alioquin dum globus æneus movetur deſinerent ejus partes eſſe unitæ, ſolus igitur motus diverſus, ſeu in diverſas plagas disjunctionem efficit. Ulterius urgeo; an illæ duæ partes quæ ſimul hoc modo moventur aliquando ſeparentur ab invicem dum motus corporis duri id exigit, vel dum replendæ ſunt anguſtiæ aliquæ, ſeu accommodari debent terminis alienis? ſi facilius ſeparentur ab invicem hæ partes quam particulæ corporis duri, quæro in quo ſit poſita talis facilitas, in eo enim ſitam eſſe liquiditatem aſſeram. Quod ſi ſeparari non poſſint hæ particulæ, ergo non omnia plena erunt, nec dabitur materia ſummè liquida, qualis requiritur, ut ſumma facilitate, ſe accommodet terminis alienis, omneſque anguſtias ſubeundo, nihil omnino vacui relinquat. Quod ſi dicas nullas duas partes ſimul moveri, ergo dabitur actualis diviſio materiæ in omnes partes in quas indiviſibilis eſt, ita ut nulla ſit tam exigua, quæ in alias minores actualiter non ſit diviſa, quod quidem nullus adhuc philoſophorum dixit, utpotè inintelligibile eſſet, nam materia diviſa quantum diviſibilis eſt erit redacta ad indiviſibilia. Quamvis enim benè intelligatur & admittatur materia diviſibilis in infinitum in partes minores, & minoris, ita ut nulla ſit aſſignabilis quæ in alias non ſit diviſibilis, nullus tamen dixit quod actualiter ſit diviſa, ſed tantum quod diviſiones actuales ſemper ſint finitæ, poſſibiles verò infinitæ, atque adeo erunt diviſiones finitæ in infinitum. Quod verò de facto tales actualiter dentur, & quod aliqua materia ſit actualiter diviſa, quantum diviſibilis eſt, & non redacta ad indiviſibilia nec ad partes omnium minimas, hoc porro ſuperat captum meum, eſt enim redacta ad partes omnium minimas, ſi ad minores reduci non poſſit. Sed ad minores reduci non poteſt, niſi poſſit fieri aliqua diviſio quæ non eſt adhuc, quod ſi in minimas partes diviſa ſit, ergo dantur partes omnium minimæ. Quare hæc diſtinctio inter corpus durum, & liquidum, quæ eam conſtituit in ſeparatione partium inter ſe, à motu orta, eſt difficilior intellectu, quam quæcumque opinio excogitari poteſt. Si enim quælibet pars moveatur motu diverſo à motu ſibi vicinæ partis, ne dicantur eſſe unitæ, hæc pars quantumvis minima movebitur infinitis motibus diverſis, ita ut nullam liceat aſſignare quæ non ſecundum ſingulas ſuas partes diverſimodè non moveatur, & ſingulæ adhuc aliis infinitis motibus.

Secundò quæro an materia hunc motum ex ſe habeat, vel illi à ab alio communicetur, non poteſt habere ex ſe, cum omnis motus ab alio communicetur, nec etiam ab alio, deberet enim illud quod talem motum ipſi imprimeret, eſſe diviſum

uſque

Digitized by Google

uſque ad ultimas minutias, ſi enim diviſum non eſſet dum huic materiæ motum imprimeret, quælibet ejus pars certæ utique magnitudinis, aliquam partem liquidi determinatam & ſibi æqualem attingeret, nec ei diverſos motus tribueret, ſed eum ſolum quo ipſa movetur.

Tertiò partes materiæ liquidæ quæ diverſimodè moventur, habent multos motus oppoſitos, & in ſe invicem incurrunt, & aliunde ſunt incapaces elaterii, cum ſint omnino molles; ergo idem iis accidet ac dum corpora mollia inter ſe incurrunt, ſed dum corpora mollia in ſe invicem incurrunt, eliditur, & perit omnis motus, ergo partes illæ poſt aliquos motus tandem quieſcent.

Quartò corpora ſolida ſe tangunt, & quieta ſunt ſæpiſſimè, nec tamen ſunt unita, ergo unio invehit aliquid aliud quam eorumdem corporum quietem. Antecedens per ſe patet, nam duo globi eburnei ſupra menſam poſiti quieſcunt, & tam ſunt juxta ſe poſiti, illi tamen globi uniti non ſunt, ergo ipſorum quies non illos ſufficienter unit. Nam unio duorum corporum dicit præterea quod unum ab alio facilè divelli non poſſit, ſed neceſſarium ſit, ut ſi uni motus imprimatur ſequatur etiam motus alterius, quæ omnia ex ſenſu communi patent. Quod ſi dicas inter corpora dura ſe tangentia intercurrere materiam ſubtilem quæ ea disjungat. Sed contra verè corpora dura poſſunt immediatè ſe tangere, ita tamen ut non ſint unita, ſed ſi immediatè ſe tangunt nulla materia ſubtilis inter illa prætetfluit, alioquin immediata non eſſent, ergo præcisè unio non poteſt in quiete, & contiguitate conſiſtere. Video enim aliqua contigua quæ ſine difficultate divelli non poſſunt, alia verò, quæ huic ſeparationi non reſiſtunt, quæro quid ſit in unis quod in aliis non reperitur.

Ratio autem quam affert Cartheſius, ut probet nullam dari aliam unionem quam quietem corporum, nullius eſt momenti. Quærit enim an ſit ſubſtantia, an modus? reſpondeo eſſe modum; ad id quod vult nullum modum magis adverſari motui per quem iſtæ particulæ ſeparentur quam quietem. Reſpondeo quietem adverſari ſeparationi locali, ſeu quæ dicit negationem immediationis, nego tamen quietem adverſari disjunctioni: & aſſero aliqua duo quieta non eſſe unita. Unio enim reſiſtit ſeparationi, ponitque duas particulas in tali ſtatu, ut nullus poſſit produci motus in una, quin producatur in alia, ita ut major requiratur virtus ad unam ſeorſim ponendam, quam quæ requiritur ſimpliciter ad eam movendam. Nam ſunt aliqua corpora juxta ſe poſita, quæ avelli non poſſunt, & licèt haberem eas vires quæ neceſſariæ ſunt ad movendum quodlibet eorum, non tamen ſufficiunt ad ea ſeparanda, & ſunt alia quæ ita ſe habent, ut nulla requiratur major virtus ad ea ſeparanda quam quæ ſufficit ad unum ſeorſum movendum, ſunt tamen utraque juxta ſe poſita, & in quiete, ergo eſt aliquid in unis, quod in aliis non reperitur, hoc porro voco unionem, ergo datur aliqua unio.

Addo inſuper quod ipſe Cartheſius aliam etiam unionem agnoſcat, aſſerit enim ramenta ſeu partes materiæ inæquabiliter figuratæ, dum concurrunt, ita intricari, & inter ſe cohærere ut avelli facilè non poſſint, ſed intricatio, & implicatio partium eſt aliquid aliud præter juxta poſitionem cum quiete.

Objicit ſibi Cartheſius, quod nulla ratio daretur cur corpora manibus noſtris minora tam firmiter ſibi adhæreant, ut nulla earum vi ſejungi poſſint; ſi enim inquit eorum partes nullo alio glutine ſibi adhæreant, quam quod eorum partes juxta ſe poſitæ quieſcant, cum omne corpus ab alio majori ſe loco moveri poſſit, non appareret ulla ratio cur clavus verbi gratia ferreus à manibus noſtris divelli non poſſit. Reſpondet autem id ex mollitie manuum noſtrarum oriri, nempè quod pars manus proximè tangens clavum ſit minor clavo, eſt autem minor clavo, quia ſejungitur à reliquis eo quod à reliquis propter mollitiem ſejungi poſſit: immò ſi velit ſejuncta ſit aliquo modo, quæ dicta ſunt ſecundum regulam motus ſupra conſtitutam, quâ vult ut quodcumque corpus à minori ſe loco dimoveri non poſſit.

Collige ex hac reſponſione quod materia ſubtilis nullam in ullum corpus durum impreſſionem facere poſſit, cum enim pars quælibet corporis duri, ſit major parte materiæ ſubtilis ipſam tangente & impellente, ab ea loco dimoveri non poterit. Si enim omnes partes manus non faciunt unum totum reſpectu clavi frangendi, eo quod propter mollitiem ſeparentur ab invicem, ſic multò minus materia liquida reducta ſcilicet, ad partes qualibet aſſignabili minores, impreſſionem facient ſecundum illam partem quæ immediatè tangit, cum qua ſcilicet reliquæ unum totale agens efficere non poſſunt, utpotè motibus omnino diverſis affectæ. Quare materia ſubtilis nullam omnino impreſſionem faciet, quod eſt diligenter notandum, ea enim utar in pluribus caſibus ratione.

Neſcio quomodo iſta ſe habeant, ſed ſcio quod ſi toto pugno percutiar excipio impreſſionem totius pugni, & non tantum partis illius quæ immediatè me tangit, quamvis propter mollitiem, quæ aliquid habet liquiditatis, dicatur à reliquis partibus ſeparata.

Neque verò ſolvit difficultatem, nam etiam adhibito corpore duro, verbi gratia, malleo certum eſt quod centuplò major vis requiretur ad divellendam unam partem clavi ab alia, quam quæ neceſſaria eſt non tantum ad deſtruendam ſimplicem ejus quietem, propè aliam, ſed etiam ad movendum totum clavum, ergo adhæſio illius partis eſt aliquid aliud præter quietem juxta aliam partem.

Sic ergo puto rem conſtituendam, puto aliquorum corporum fluiditatem conſiſtere in diviſione in minutiſſimas partes, Sic videmus, quod ſi in acervum millii manum inſeras facilè ejus partes ceſſuras motui manus. Sic videmus nonnunquam cineres aliquos ita ſubtiles eſſe, ut videantur liquiditatem habere, præcipuè ſi eorum particulæ fuerint globoſæ, ſeu ſphæricæ. Sic partes metallorum ſeparatæ ab invicem, & quaſi in liquido, nempè in igne natantes liquiditatem habent, quæ rurſus amoto liquido intricantur, & ſibi invicem rurſus adhærent, Ita charta madida liquiditatem facilemque diviſibilitatem habet, quæ exſiccata rurſus fit dura: atque hæc videtur eſſe liquiditas impropria, aut non perfecta, ſeu ut ita dicam participata, videtur enim hæc corpora eſſe permixta cum aliquo liquido perfectiori.

Quare ſi omnia ſint plena, cum nolimus in hoc abſurdum incidere, quod materia liquidorum dicatur diviſa actualiter in infinitum, ſeu quantum

diviſibilis eſt, multò minus quod dicamus diviſionem actualem in motu poſitam eſſe. Ideò benè aſſerere poſſumus quod liquiditas conſiſtat in diviſis diviſibilitate facili. Cum enim experiamur corpora eſſe alia aliis duriora, hoc eſt partes aliquorum corporum minus firmiter inter ſe adhærere quam aliorum, in quocumque tandem conſtituamus hanc adhæſionem, multiplicem & diverſam cogitare poſſumus, unamque alia perfectiorem.

Arguo item Carthesium quod non ſatis conſequenter loquatur. Pluribus enim locis aſſerit partes materiæ ramoſas intricari, & in ea intricatione duritiem conſiſtere; ergo durities in quiete poſita non eſt : quæ quies tam benè concipitur in globoſis partibus, ac in ramoſis, aut inæqualibus. Addo ulterius quod ut concipiantur partes ramoſæ, debet jam intelligi aliqua unio, inter particulas ex quibus illæ componuntur, atque adeo jam aliqua durities; ergo ea in intricatione partium tota conſiſtere non poteſt.

Scio ab aliquibus rem ita conſtitui ut dicant aliquas partes materiæ, licèt de potentia Dei abſoluta diviſibiles, naturaliter ſeu ab agentibus naturalibus ſeparari non poſſe, eò quòd habeant peculiarem modum exiſtendi, vi cujus ſeparationi reſiſtant, hoc eſt reſiſtant illi motui, quo una pars ab alia ſeparatim moveretur, quæ reſiſtentia major eſt, quam ſit in ea parte ſimpliciter quieſcente, & has partes vocant nonnulli minima naturalia, ex quorum ſcilicèt adhæſione & intricatione majores partes exurgunt; debet item dari alia ſpecies particularum, non quidem ita mobilium ut omnes diverſimodè moveantur, & per hos motus ſint diviſæ, quantum dividi poſſunt, ſed quæ facilè dividi poſſint, & infirmam unionem habeant. Alia multa dici poſſunt in hac materia quibus non immoror.

PROPOSITIO IX.

Suppoſitio materiæ à Deo creatæ, diviſæ & motæ, apertè ſe deſtruit.

Supponit Carthesius omnium mundi corporum unam & eandem eſſe materiam, fuiſſeque à Deo diviſam in partes proximè æquales, quæ quidem initio ſphæricæ eſſe non potuerunt, quia, inquit, plures globuli ſimul juncti ſpatium continuum non replent; cujuſcumque tandem figuræ fuerint, non potuerunt ſucceſſu temporis non fieri rotundæ, eò quòd varios habeant motus circulares, eò quòd per motum eorum anguli atterantur. Vult item quod dum partium quæ fiunt rotundæ anguli atteruntur, id quod ex ipſis eraditur eſt adeò minutum, & tantam celeritatem acquirit, ut ſola vi ſui motûs, in ramenta innumerabilia dividatur. Quo enim minutiora ſunt iſta ramenta eo facilius moventur, & dividuntur, & quod majorem habeant ſuperficiem pro ratione ſuæ molis, & occurrunt aliis corporibus ſecundum ſuperficiem, & dividuntur ſecundum molem. Atque ita aliqua materiæ portio celerrimè movebitur, ac in partes reipſa indefinitas dividetur, ut in ea motus omnes peragi poſſint. Atque ita duo genera materiæ valdè diverſa habemus. Nempè materiam illam ſubtilem, quæ tantam vim agitationis habet ut aliis corporibus incurrendo in minutias indefinitæ parvitatis dividatur, & figuras ſuas ad omnes angulorum ab iis relictorum anguſtias implendas accommodet. Alterum eſt ſphærarum illarum.

Dico, in hac doctrina multas contradictiones reperiri. Prima ſit hæc, quod materia dividatur in partes non ſphæricas, vel enim dividitur priuſquam moveatur, vel per ipſum motum. Non antequam moveatur, quia nulla diviſio niſi per varietatem motuum cogitari poteſt ſecundùm hunc authorem, vel quod materia liquida inter corpora intercurrat; ſed nulla adhuc materia ſubtilis ſupponitur, quippè quæ ex ſolo diuturno partium attritu oriatur. Ergo reſtat ut per motum ipſum talis fiat diviſio: oſtendo autem omnem motum impoſſibilem eſſe.

Nullus motus particularum cubicarum poſſibilis eſt, quin ipſæ ab invicem recedant, ut nempè angulis in ſe invicem incurrentibus fiat locus; ſed particulæ cubicæ recedere non poſſunt, cum omnia ſint plena, ergo impoſſibilis eſt omnis talis motus, niſi jam ab initio ſphæricam figuram habeant, quam tamen decurſu tantùm temporis, & poſt innumeras circulationes acquirere dicuntur.

Secundò nullus eſt poſſibilis motus, niſi detur materia liquida, quæ repleat ſpatia ea anguſta, quæ neceſſariò reſultant ex motu circulari cuborum; ſed dum primum his particulis cubicis imprimitur motus, nulla talis materia liquida adhuc exiſtit, ergo nullus poſſibilis eſt motus. Major eſt certa. Supponantur duo cubi moveri circulariter circa ſua centra, aliquando accidet ut anguli angulis directè reſpondeant, aliquando anguli ſuperficies tangent prout ſors tulerit, ſed in tali caſu exurget aliquod ſpatium inter cubum & cubũ ſicut dum anguli vicini à ſe invicẽ recedent.

Quod verè motus ſit impoſſibilis niſi detur materia ſubtilis facilè probatur. Si exurgerent hujuſmodi ſpatia, nec ulla ſupponeretur materia ſubtilis, daretur neceſſariò vacuum; ſed nullum vacuum poſſibile eſt, ergo nullus motus dari poteſt, quo anguli vicini duorum cuborum ſe tangentium recedant ab invicem, & moveantur circulariter, quin ſupponitur materia ſubtilis multò minor quam ſint cubi illi. Spatia enim quæ fiunt, anguſtiora ſunt quam ut capiant cubos ubi paulatim augentur & minuuntur, ergo neceſſariò ſupponitur materia liquida, quæ hujuſmodi ſpatiorum figuram induat. Quod verò nulla adhuc talis ſit materia ſubtilis, probatur. Quod enim non ſit, niſi poſt diuturnum attritum, & incurſum partium, non eſt dum primum ſit motus; ſed ex mente hujus authoris materia ſubtilis non ſit niſi per diuturnum attritum partium. Angulos enim vult paulatim atteri, ergo hinc materiam ſubtilem paulatim generari, ergo non ab initio tota fuit.

Tertiò materia ex qua fit pulviſculus ille, eſt materia dura, ſed ex materia dura per ſolum attritum fieri non poteſt materia liquida, ergo per hunc attritum fieri non poteſt. Sumatur enim quælibet materia quæ minutiſſimè conteratur, experientia conſtat, quod non propterea fiat liquida, ergo idem eveniet in hoc caſu. Quod multò magis verum eſt ſecundum notionem liquiditatis ſuperius ab hoc authore allatam; nam non poteſt attritus liquiditatem conferre, niſi conferat illi diviſionem

diviſionem actualem in partes indefinitas, ſeu in partes qualibet aſſignabili minores, ſed non poteſt illi conferri talis diviſio, ergo illi conferri non poteſt liquiditas. Hæc diviſio conferri non poteſt ab ullo quod durum ſit, nec ab alia parte jam liquida; ergo à nullo conferri poteſt. Non à parte dura, nam ad hoc ut liquiditas alicui parti, à corpore duro conferretur, deberent motus illi varii, & infinitè diverſi conferri illi parti liquidæ, ſed non poſſunt conferri, ſeu communicari tales motus, ergo nec liquiditas. Major videtur manifeſta cum iis conſiſtat liquiditas. Ponamus ſimul unam partem materiæ non adhuc liquidam incurrere in partem duram, impoſſibile erit, ut diverſos motus ipſi conferat, quin in diverſas ejus partes diverſimodè incurrat, ſed nunquam fieri poterit ut ita diverſimodè incurrat, ut infinitos motus ipſi imprimat. Cum enim hanc partem in ſe incurrentem tangat ſemper ſecundum totam ejus ſuperficiem, nulla erit ratio, cur uni parti, motum ad dexteram, alteri motum ad ſiniſtram tribuat, ſic enim deberet modis infinitis & diverſis eam incurrere. Contendo igitur motum illum infinitè diverſum, nempè quo nulla ſit pars, quæ ſimul cum alia procedat, ſed diverſimodè agitetur, à nullo agente communicari poſſe; quia cum globuli iſti ſolidi ſuam retineant magnitudinem, impoſſibile erit ut communicent alicui motus infinitè diverſos.

Addo inſuper quod ſi aliquod tempus requiratur ut per attritum, in certo gradu tribuatur his ramentis diviſio, infinitum tempus requiretur ut tribuatur infinita.

Quod verò huic materiæ ſubtili motum velociſſimum tribuat, ex eò quòd inter anguſtias globulorum coarctetur, deſumpta ſcilicet ſimilitudine à folle quod licèt lentè admodum claudatur, magno impetu aërem emittat, vim non habet: Ideo enim exilit ventus dum hoc modo in anguſtias cogitur, quia elaterii, & compreſſionis eſt capax. Contendo enim, nunquam ab aliquo agente alicui mobili, minuto licèt, tribui poſſe velocitatem majorem ea quam habet agens, niſi intercedat elaterium; ubi enim nullum eſt tale elaterium, ſimul procedent impellens & impulſum. Jam ſupra attuli experientias ejus rei manifeſtiſſimas, & in exemplo ab iis allato clariſſimum eſt intercedere elaterium, nam aër ſi quod aliud corpus habet elaterium. Sed materia ſubtilis nullum habet elaterium nec comprimitur preſſione propriè dicta, ergo exilire non debet majore vi. Quod notare volui ut oſtenderem pleraſque rationes, & exempla ab iis allata in præcipuis circumſtantiis deficere.

Vult item certas particulas hujus materiæ ſubtilis ita irregulariter dividi, ut potius ramoſæ evadant, ſintque propterea non ita ad motum accommodatæ, atque ita intricentur variè, & quieſcant, eſtque tertium elementum atque, ex his tribus elementis, nempè materia ſubtili ſeu primo, globuli illis, ſeu ſecundo, & ramoſis illis partibus ſeu tertio, totum hunc mundum componi aſſerit.

Multa hîc video minus conſequenter dicta, ſed præcipuè, quod materia ſubtilis ſemel diviſa rurſus uniri non poſſit, niſi amittat ſuum motum. Videtur autem non poſſe illum amittere, eò quòd dum incurrit in corpora dura, ſecundum Cartheſium, determinetur ad contrarium motum priori æqualem peragendum, & nihil in ea efficiat, quia corpus durum impellit, partes minores quam ſint partes durorum, non tantum materiæ ſubtilis quantitas augebitur, ſed tota materia in materiam ſubtilem abibit, quæ quidem forſitan tardius movebitur, ſufficienter tamen ad liquiditatem conſervandam.

PROPOSITIO X.

Rejectio rationum quibus nonnulli ſuadere nituntur liquiditatem in motu conſiſtere.

Cum notio liquiditatis in motu conſtitutæ, inter præcipua hujus novæ philoſophiæ placita locum habeat, operæ pretium fuerit, ſi ejus rationes ab aliquibus allatas & præcipuè à Rohaut expendamus.

Hic primò impugnat nonnullorum Peripateticorum ſententiam, liquiditatem in raritate, duritiem in denſitate conſtituentium; impugnat autem præcipuè exemplo aquæ congelatæ, quæ licèt liquiditatem amittat & duritiem acquirat, eſt tamen rarior quam antea, & ſupernatat aquæ non congelatæ, majoremque molem habet quam antea, ut experientia ſatis evincit.

Hæc tamen ratio nihil efficit; cum enim aquæ congelatio non fiat ex ſolo frigore, niſi aliquid cum aqua permiſceatur, quod habeat rationem coaguli, nempè aliquis vaporoſus aër qui etiam apparet in glacie, poſſet moles totius aggregati eſſe major, ſingulæ tamen partes aquæ eſſe denſiores. Debuiſſet autem explicare, quomodo per congelationem aquæ partes ſuum amitterent motum, quod difficillimum puto in corpore liquido, diviſo per motum in partes actu infinitas, ſeu ut vocat Cartheſius indefinitas, à quo enim ſiſterentur.

Ita autem poſitivè ſuam opinionem probat: Durities eſt contineri propriis terminis, fluiditas eſt non poſſe contineri propriis terminis; ſed contineri propriis terminis, eſt non moveri ad terminos alienos; non contineri terminis alienis eſt moveri ad terminos alienos, ergo liquiditas in motu, durities in quiete conſiſtit. Hoc eſt argumentum præcipuum hujus ſententiæ. Cui facillimè reſpondeo. Durities eſt contineri terminis propriis, & difficillimè alienis, concedo majorem; ſed hoc in ſimplici quiete conſiſtit nego majorem, ſed in aliqua reſiſtentia ad motum, majore quam in quiete conſiſtat. Nam ſcimus quænam requiratur virtus ad movendam unam libram dum ſimpliciter quieſcit, & quam ut ita dicam reſiſtentiam facit quies, ſed dum una libra conjuncta eſt alteri corpori ea ſpecie unionis quæ duritiem efficit, centuplo major virtus requiretur, ergo ea durities in ſimplici quiete non conſiſtit.

Pariter liquiditas conſiſtit in eo ut corpus facillimè aſſumat terminos alienos, concedo, ſed hoc dicit ut moveatur, nego, ut poſſit moveri, motu ad terminos alienos occupandos neceſſario, motu illo irrequieto, etiam dum occupat terminos alienos nego.

Neque verò explicantur propterea proprietates corporis duri. Nam ſi durities in ſola quiete conſiſteret, nullam majorem reſiſtentiam ſentirem dum digitum corpori duro admoveo, quam quæ in dimovenda loco ea parte quam tango, reperitur, & quam etiam in liquidis loco dimovendis experior

experior; ſed ſentio millecuplò majorem, ergo eſt aliquid aliud. Neque verò minorem in corpore liquido experiri debeo; cum enim partes ejus in omnem partem moveantur, multæ habebunt motum contrarium ei quem produco, ergo dupla difficultas erit in mutanda ea directione, quam ſi illæ partes eſſent quietæ.

Diſſolutio autem corporum nonnullorum verbi gratia ſalis, ſaccari, & reliquorum, non ab eo liquidorum motu oritur. Quæro enim cur aër qui liquidior eſt, & conſequenter mobilior quàm aqua, ſaccarum tamen, reliquaque hujuſmodi corpora non dividit in minutiſſimas, partes ſeu non diſſolvit, aqua verò id efficit. Fateor quidem aquam ſe inſinuare per poros, eo modo quo aſcēdit ſupra libellam in capillaribus tubis, & hoc modo hæc corpora dividere, non tamen per motum illum irrequietum, qui in materia ad motum, & quietem indifferente ſubitò ceſſare deberet, partibus liquidis & elaterii incapacibus in ſe mutuò incurrentibus, & motum ſuum elidentibus. Si enim motus corporis duri in liquido ſenſim deficit, quidni motus partium liquidi idem patietur.

Addo quod nullius corporis duri partes, à particulis liquidi dimoveri poſſent loco, ex Carthesio, cum majores à minoribus nihil patiantur, ſed partes liquidi ſemper minores ſunt partibus corporis duri. Ergo nullum durum à liquido diſſolvi poſſet.

Fateor quidem aliqua corpora liquida habere aliquem motum in ſe, non tamen eum in quo formaliter eorum conſiſtat liquiditas, qui ineptus eſſet ad corpora dividenda, ſed alium non communicatum ab extrinſeco, ſed à principiis intrinſecis illorum corporum ortum, & conſervatum. Ita ut licèt ubi corpora in ſe invicem incurrunt hic motus elidatur, poſſit continuò reparari ab intrinſeco, ab eorum natura, quæ non eſt principium tantum receptivum, ſed etiam effectivum motus, ſecundùm mentem Ariſtotelis. Addo inſuper quod communiter hi motus qui in nonnullis liquidis obſervantur, non ab ipſis oriantur, ſed à ſalibus permixtis, qui ubi ab humido ſubingrediente dividuntur, vim habent ſe movendi & inchoãdi motum; neque enim puto id quod quieſcit, unquam movendum, niſi ab extrinſeco hunc motum recipiat, ſufficit enim quod auferantur impedimenta. Sic lapis decidit ſublatis fulcris. Pariter licèt aqua placidè quieſceret ad ſenſum, ubi injicitur calx, ſpiritus ignei liberi à materia terreſtri cum aqua conjungebantur, agitant ſe, non motu liquidi quatenus liquidum eſt, ſed motu proprio. In iis igitur ſalibus præcipuam vim diſſolventium poſitam eſſe exiſtimo, ita ut corpus liquidum in quo natant, ſit tantum quaſi vehiculum; habent autem aliquam duritiem neceſſariam ad hoc ut aliorum corporum poros ſubeant, & partes loco dimoveant.

Hæc hypotheſis melius explicat omnia phænomena diſſolventium, quam quæ liquiditatem in motu conſtituit.

Sic benè explicari poteſt cur nonnulli liquores in aliqua corpora nullam vim habeant, in alia verò aliquid efficiant; aqua communis nihil efficit in æs, ferrum, aliaque, ea tamen dividet ſi injiciatur ſal nitratum, ſal commune aliaque ſalſedinem mordicantem habentia, quæ omnia liquida non ſunt, indigent tamen liquido ut in eo ſuos motus peragant. Hæc diſſolventia habent minutas partes valdè duras, quæ agitantur, non quidem motu ad liquiditatem neceſſario, qui ineptus eſſet ad corpora dividenda, cum nulla ſit pars corporis duri quæ ſimul undique per hunc motum non impetatur, atque adeo moveri non debeat.

Benè explico cur aqua communis ſaturetur ſale, nempè excipiat in poris ſuis particulas ſalis, & quomodo ubi in omnibus eas exceperit, nihil poſſit amplius ex ſale decerpere. In hypotheſi autem Carthesiana cum aqua ſale ſaturata adhuc liquida ſit, & conſequenter adhuc moveatur, nulla eſſet ratio, cur ex ſale nihil amplius acciperet. Excipiet autem à quocumque ſale alterius rationis, quia ubi ſal commune impleverit omnes poros ſuæ figuræ conformes, poterit ſal alterius ſpeciei nanciſci alios poros alterius figuræ, & magnitudinis quos ſubeat.

Hic motus irrequietus ſalis & implicatio quam cum partibus aquæ habet, impedit quominus fundum petat quamvis ſit aqua nonnihil gravior, ſed exceſſu modico.

Benè explicatur cryſtalliſatio ut vocant, nempè cum aqua impregnata aliquo ſale, ubi vi caloris ſit rarior, & abit in fumum, ſe extricet à partibus ſalis eaſque deſerat, quæ in alias incurrentes, & adhærentes non inconcinnè, ſed certò ordine, rurſus figuras ſuæ naturæ proprias efforment.

Præcipitatio autem meliùs in opinione noſtra explicatur, primò quidem ſi liquido ſaturato particulis alicujus corporis duri ejuſdum ferè gravitatis ſpecificæ injiciatur aliud liquidum multò levius, quod cum priori permiſceatur, tunc gravitas particularum corporis duri majori exceſſu ſuperabit gravitatem ſpecificam aggregati horum liquidorum, quam ſuperaret gravitatem ſpecificam prioris, ideoque facilius in hoc aggregato deſcendet. Sic argentum in aqua forti ſolutum, admixto oleo tartari ut vocant, fundum petit.

Coagula item melius in opinione communi, quam in Carthesiana intelliguntur. Cum enim illi liquores coagulentur, quos conſtat ſummam liquiditatem non habere, cogitare poſſumus quod partes minutæ non ſint diviſibiles ſemper ulterius, ſed quod aliquatenus duræ ſint. Si verò alius liquor non perfectè etiam liquidus earum intervalla ita ſubeat, ut mobilitatem omnem adimat, duritiem aliquam contrahent.

Fit item alia coagulatio per ſeparationem partium liquidarum, ita in lacte dum coagulatur videmus excerni ſeroſitatem, in qua nempè partes craſſiores, & pinguiores innatabant.

Videtur eſſe peculiaris difficultas in gypſo qui infuſa aqua indureſcit in lapidem, cum tamen aqua infuſa reliqua corpora mollia reddat. Certum autem eſt quod, ſi major fuerit copia aquæ, hoc eſt tanta ut partes gypſi diviſæ pro ut ab aqua dividi poſſunt, non amplius ſe tangant ſed innatent in aqua, nulla erit durities. Si verò aqua mediocriter infuſa fuerit quæ vacuitates ab aëre mobiliori prius occupatas repleat, melius intricantur partes duræ quam antea, atque adeò cum aqua ſit pauciſſima, & in poris tantum partium intercepta, nullam confert liquiditatem.

PROPOSITIO XI.

Quæ reprehendi debeant in conſtitutione mundi à Carteſio facta.

Fabulam hîc examinandam ſuſcipio, nomine enim ſui commenti mundi hujus fabricam à ſe prolatam frequenter appellabat Carthesius, immeritò tamen cum ea veriſimilitudine careat, quæ præcipua cenſetur dos earum narrationum, quas nomine Romanorum ſolemus intelligere. Contẽdit igitur hic author conſtitutis à ſe motuum legibus, ex materia in partes diviſa, emerſurum eſſe mundum qualem nunc ſpectamus. Exploſa jam diu fuit hæc ſententia quæ ex atomorum fortuitò concurſu eum coaluiſſe aſſerebat; hanc non abſimilem ſimiliter explodendam aſſero ſi quis fundamenta quibus innititur perpenderit.

Ridicula eſt, ſi quæ unquam ratio, quæ ab immutabilitate Dei eandem in mundo motus quantitatem ſtabilire conatur; quaſi verò Deus magis mutetur, ſi modo minorem, modo majorem producat creaturarũ numerũ qui cum per totam æternitatem nihil produxerit, in tempore vero mundum hũc creaverit. Anne magis mutabitur Deus ſi dum globus in globum incurrit, uterque ſiſteretur, & quieſceret, quam ſi percutiente immoto ſolus percuſſus moveretur. Ponamus enim agens immutabile, ut eſt Deus, debere ſemper eodem modo operari, ſequeretur quod ut ſemper eodem modo operetur, eoſdem debeat ſemper effectus producere, hoc eſt, eoſdem motus: non producit autem eoſdem motus, ſi quæ corpora movebantur quieſcant, & quæ quieſcebant moveantur. Nam dicere quod ut agat eodem modo, ſufficiat, quod ſit eadem motus quantitas, eſt ludere in æquivoco facilè ſolubili, nempe in hac voce (*eadem*) quæ identitatem ſignificare videtur, cum tamen in caſu propoſito, non poſſit aliud niſi æqualitatem innuere. Neque enim motus eſt aliquod ens abſolutum, quod poſſit variis ſubjectis accommodari, ſed neceſſariò affixus eſt ſuo; non eſt ergo idem motus qui fuit antea, unde ſi mutaretur Deus, dum produceret majorem motus quantitatem, mutaretur etiam dum produceret aliam motus quantitatem licet priori æqualem. Mutaretur quidem Deus ſi decreviſſet ſemper producere æqualem motus quantitatem, & poſtea vellet producere minorem, ſed ſi decreviſſet uno tempore producere certam, & alio producere aliam, nulla eſſet propterea in Deo mutatio timenda. Sicut qui ab initio diei plurimas, & varias ſibi imponit actiones faciendas, non propterea dicitur mutationi obnoxius, quod eas ſucceſſivè aſſumat, eò quòd omnes ſimul etiam cum ſua ſucceſſione habuit in mente. Quæ voluntas eadem perſeverat.

Jam oſtendi ſupra nec eſſe verum quod res immota non moveatur niſi ab extrinſeco, nam datur in natura principium productivum motus, ut in nobis ipſis experimur, in quorum poteſtate poſitum eſt ut moveamur, vel non moveamur.

Demonſtravi item certis & indubitatis experimentis quotieſcumque corpora non elaſtica ſibi invicem occurrunt, toties eorum motus elidi, & perire, atque adeo nullo modo conſtare ſibi poſſe hanc hypotheſin, de æquali motûs quantitate perſeverante ſemper.

Sed data & non conceſſa tali hypotheſi, contendo, non poſſe ex fortuito concurſu, & inconcinno hujus materiæ motu produci hunc mundum, cujus perfectiones tantæ ſunt, ut opus ſummæ ſapientiæ, & non caſus alicujus fortuiti haberi debeat. Debiles ſunt admodum, nulliuſque momenti eæ rationes quæ ad commentum hujuſmodi ſtatuendum ab hoc authore proferuntur.

Nam capite octavo tractatus hujuſmodi in quo præſertim mundi generationem explicat, tam multa dicit inter ſe pugnantia, & aſſertioni quam ſtabilire conatur adverſantia, ut nihil cohærere videatur.

Primò igitur aſſerit, quod quamcumque inæqualitatem motus, aut partium materiæ Deus creaverit, & quantumlibet confusè eas permiſcuerit, ſtatutis motus ſeu naturæ legibus, fore ut omnes ad mediocrem motum, & magnitudinem redactæ ſint, & conſequenter formam ſecundi elementi induerint. Hoc enim verò minimè ſequi poteſt. Ponamus enim aliquas partes aliis longè majores creatas fuiſſe, quamvis per aliarum occurſum deterantur earum anguli, non video tamen quare ſuum exceſſum ſupra alias minores non retineant, atque à Deo erunt particulæ aliæ millecuplò majores. Quod ſi hæc inæqualitas in mole admittatur, non video quòd motus mediocris in omnibus ſequi debeat, nam ſi majoribus motus major tribuitur, dum illæ incurrent in alias minores, iis motum majorem tribuent, ſecundum regulas Carthesii.

Addit ulterius quòd quia in hoc mundo nullum eſt vacuum, nullus etiam motus in lineam rectam perfici poſſit; ideoque convenire debuerunt quamplurimæ ut in orbem ſeu circulariter moverentur. Quia verò ſupponuntur diverſimodè moveri, non circa unum centrum omnes motæ ſunt, ſed circa plurima centra.

Hanc conſiderationem puto ejus principiis omnino eſſe contrariam; ſi enim particulæ hoc modo conveniunt ut circa idem centrum moveantur, ſi cubicæ creatæ ſunt, non propterea fient ſphæricæ aut producetur ulla materia ſubtilis. Vel enim Deus initio partibus omnibus materiæ motum indidit circularem quo ſingulæ circa ſuum centrum moverentur, vel tantum circularem quo circa commune aliquod centrum. Si primum, non video quomodo hi particulares motus coaleſcere poſſint ad unum vorticem conſtituendum, ſi enim motus liquidorum, quo particulæ ſeparatim moventur, non mutatur in motum circularem communem, neque hi particulares motus communem aliquem producent. Quod ſi ab initio motus ille circularis productus eſt, nullus erit partium & angulorum attritus. Ex quo concludo motum inconcinnum & confuſum partium, qualis in partibus aquæ ſtagnantis ab eodem authore admittitur, nunquam in vorticem mutari poſſe.

Adde quod quia in mundo hoc pleno motus rectus ſit impoſſibilis, ſed neceſſariò in circularem mutetur, non propterea magnus aliquis vortex producetur, qualem circa ſolem conſiderat hic author, ſed tantum peculiares aliqui valdè parvi, puta unius aut alterius exapedæ, qualem producimus dum movetur, aliquod projectum, in aëre, ſic enim facilius partes materiæ concurrent.

Ordo item partium iſtarum omnino ficticius eſt, imò contradictoria complectens, nam ex eo quod omnis motus ſit ad lineam rectam, & quod ſingulæ partes propterea recedere conentur à centro, concludit quod majores, ſeu quæ majores vires habent, aut quæ ſunt magis agitatæ, debeant potius circumferentiam vorticis petere, nempe deſcribere arcus majores, minuſque à linea recta deficientes. Concludit tamen poſtea quod majores ſint centro viciniores.

In genere tamen, ex eo quod omnis motus rectus ſit ex natura ſua, nulluſque exerceri poſſit niſi circulariter, concludo nullum motum diuturnum eſſe poſſe, niſi detur principium productivum motus. Nam primò nullum violentum ex natura ſua durabile eſt, ſed omnis motus circularis violentus eſt, & contra inclinationem naturalem partium, quâ recedere conantur à centro. Sed quoties motui fit violentia, ita ut cogatur deflectere à linea propria ad quam dirigitur, toties retardatur motus; ergo omnis motus circularis retardatur. Probatur minor. Ideo motus penduli tardior eſt quam motus perpendicularis ejuſdem corporis ſoluti, quia funis cui annexum eſt tale corpus, eum deflectere cogit à linea directionis; ergo omnis motus hoc modo retardabitur. Pariter motus in plano inclinato tardior eſt, ſecundum majorem, aut minorem plani inclinationem. Quæ retardatio non provenit tantum ex eo quod alteri corpori communicetur motus. Nam dum virga ferrea circa clavum immobilẽ circulariter movetur, motũ tardiorem habet, quam ſi moveretur recta deorſum, ſed in tali caſu nullus clavo motus communicatur nec alteri corpori. Pariter in motu circulari alicujus vorticis cum partes mediæ quantum poſſunt recedant à centro, affectentque quantum poſſunt partes exteriores ipſis ſuum motum communicabunt amittentque ſuum, quare tandem ſiſtetur ille vortex, fietque in medio corpus quieſcens, quod ſenſim augebitur. Neque verò partes exteriores impellent interiores, quia ſemper quantum poſſunt recedunt à centro; ergo nunquam ad centrum feruntur. Ex quibus concludo dari principium creatum conſervativum & productivum iſtius motûs, nempe forma ſubſtantialis materiæ æthereæ, quæ tam ſit determinata ad motum, quam forma ignis aut alia quælibet.

Sine ratione dicuntur aliquæ partes vel majores, vel irregulares coaluiſſe ad formandos cometas, ſi enim particulæ cubicæ ita franguntur, ut angulos amittant, quæcumque aliæ etiam irregularis figuræ ſi moveantur frangentur etiam, atque adeo nulla reſtabit ad formandos cometas idonea. Quamvis autem dici poſſet quod ſtatim amittant ſuum motum, quia moveri non poſſunt quin multis aliis ſuum motum communicent, dico quod aliæ multæ moveri non poſſunt quin in iſtas incurrant, eiſque ſuum etiam motum communicent.

Circa materiam ſubtilem præter illa quæ ſuperius dicta ſunt, tria hîc reprehendo. Primum eſt, quod dicat eam materiam quæ ab angulis abraſa eſt debuiſſe acquirere motum multò majorem, quam ſit motus partium. Contendo autem, nullum corpus alteri motum majorem & velociorem quam habeat communicare poſſe, niſi interveniat elaterium. Cum autem hæc materia ſubtilis ſicut & globuli ſecundi elementi tali elaterio careant, impoſſibile erit ut motum majorem communicent quam habeant. Cum enim uni parti communicatur motus, ideò quia impellitur, impellitur autem quia impedit motum alterius, non impedit autem ſi æqualiter moveatur.

Quod verò hæc materia ſubtilis debeat acquirere facilitatem ad hoc ut dividatur, & mutet ſingulis inſtantibus figuram, nempe ut ſe accommodet figuræ alienorum corporum, quæro quid ſit iſta facilitas, anne motus, an diviſio actualis? non motus, poſſunt enim corpora etiam dura quolibet motu incitatiſſimo moveri; non actualis diviſio in infinitum, quæ tempus infinitum requireret. Quod ſi facilitas illa ut dividatur ſit aliquid aliud, quæro quid ſit, & in eoque aſſeram conſtitutam eſſe liquiditatem.

De Formatione ſolis.

Admittit item quod hujus materiæ ſubtilis major ſit copia quam quæ requiritur ad replendum illa vacuola quæ inter globulos ſecundi elementi interjiciuntur, quæ materia debet concurrere ad centrum, ibique circumvolvi aſſiduè, ita ut corpus, ſeu quaſi vorticis nucleus hujuſmodi materia conſtans, ſolem componat. Dico hanc aſſertionem & experientiis & principiis hujus philoſophiæ repugnare. Nam in omni vortice partes viciniores centro aliis remotioribus, & mobilioribus, ſunt craſſiores, nam in particulari telluris vortice ita ſe res habet ut tellus ſit craſſior, exinde diſponatur aqua, tum aër; ergo etiam in magno vortice ſubtilior materia non erit in centro, ſed circa circumferentiam æquabiliter fundetur. Probo autem paritatem eſſe omnimodam, ideo enim in telluris vortice hæc ita diſponuntur, quia particulæ minores mobiliores ſunt, ejiciunturque longius, quam partes craſſiores; ergo ſi ſol conſtet materia ſubtiliſſima hæc longius ejicietur ab illa vertigine, potiuſque circumferentiam quam centrum verticis obtinebit. Ad id verò quod vult hanc materiam ex qua ſol componitur, licet ſubtiliſſimam, motu vehementiſſimo ſuas circulationes abſolvere, & partes ſecundi elementi in omnem partem impellere, eſt contra ejus principia. Cum enim materia ſubtilis conſtet partibus minoribus quam ſint globuli ſecundi elementi, eos impellere non poſſunt, neque enim corpora minora ullam vim habent in majora. Deinde ſi hæc materia ſubtilis continuo impulſu impetit hos globulos, tantum de ſuo motu deperdit, quantum enim aliis communicat, tantum de ſuo motu amittit. Tertiò motus hic vertiginis tantus non eſt ut in eo poſſit eſſe actio luminis, nam ſolis motus circa centrum ſuum intra 27 dies tantum abſolvitur ut conſtat ex maculis quæ in ipſa ejus ſuperficie eſſe demonſtrantur, quæ tamen hanc periodem habent; & motus vorticis propè Saturnum longè incitatior eſt motu ſolis circa centrum; ergo in eo potius actio luminis eſſe deberet. Quartò motus flammæ, in quo ſecundum hunc authorem poſita erit ejus illuminatio, non erit, circularis circa unum idemque centrum: ergo motus ſolis qui illuminationem efficiet non erit motus ille vertiginis, ſed aliquis alius longè diverſus.

Quintò oſtendo ſolem rotundum eſſe non debere. Vortices iſti non volvuntur in omnem partem

tem

Digitized by Google

tem circa centrum, ſed circa axem, ergo particulæ ſecundi elementi, quæ dicuntur majorem habere vim ad recedendum à parte immota, non tantum recedere debent à centro, ſed etiam, quæ ſunt diſpoſitæ in circulis Eclypticæ parallelis æqualiter aut ferè æqualiter recedere debent, ab axe, ac globuli qui ſunt in plano Eclypticæ recedunt à centro, circuli enim diſtantes hinc inde à medio ſeu Eclyptica 20 gradibus, non ſunt ſenſibiliter minores ipſa Eclyptica. Sed hoc poſito ſpatium quod in medio relinquetur, materiæ ſubtili ſolem componenti non erit rotundum, ſed valdè oblongum, ergo ſol eandem figuram obtinebit.

Sextò ſol non deberet eſſe ſemper ejuſdem magnitudinis? Cum enim materia quæ liquida eſt non a[illegible]etur nec indureſcat cum ſit reducta ad ultimas minutias, & aliunde globuli ſecundi elementi ſæpè frangantur, nulla eſt ratio cur non major ſit copia materiæ ſubtilis, certamque taxet ſolis magnitudinem. Videretur materiam ſubtilem eſſe eam ſolam quæ abraſa eſt ab angulis cuborum, ut fierent globuli, quæ præcisè replet intervalla inter globulos relicta) quod ſi dicatur multos globulos fractos eſſe, quæro cur etiam nunc globuli non frangantur. Majorque extet copia materiæ ſubtilis, & ſol non creſcat, cum dicatur coaleſcere ex ea materia ſubtili, quæ ſuperabundat repletis omnibus intervallis globulorum. Quæro item an omnes globuli ſe tangant & nunquam relinquant majus aut minus intervallum inter ſe? hoc autem negari non poteſt, cum ea ratione explicetur rarefactio Ergo tota materia ſubtilis quæ reſidua eſt repletis intervallis non componit ſolem, ſic enim nulla eſſet poſſibilis rarefactio.

PROPOSITIO XII.

De Cometis.

Hujus propoſitionis doctrina tota in eo poſita eſt ut comparet vortices quos in cœlo cogitat, cum flumine aliquo. Contendit autem corpora levia, ſeu ex materia minus compacta, ita ſe habere ut dum volvuntur ſimul cum flumine, ejiciantur potius ad eas partes in quibus motus non eſt ita velox, ea verò quæ ſunt compactiora potius ferantur in eas partes in quibus motus eſt velocior. Sed in vorticibus circumferentia velocius fertur, quam partes centro propiores, ergo corpora craſſiora ad circumferentiam ferentur, idcóque ab uno vortice facilè ad alium progredientur, tales vult eſſe Cometas. Corpora verò minus ſolida potius ad centrum horum vorticum ferentur, atque adeo ex ſuo vortice nunquam egredientur: Tales vult eſſe Planetas: ita explicat quomodo planetæ qui in hoc vortice in quo verſamur, inventi ſunt ibi conſtanter permaneant, cometæ verò rari ſint prout ſors tulerit ut ab aliis vorticibus in hunc noſtrum venerint. Sed tota hæc doctrina peccat in ſua ſuppoſitione, facitque effectus omninò diverſos ab iis quos obſervamus.

Primò quod corpora majora ad circumferentiam vorticum ferantur; falſum eſt. Cum enim minutioribus corporibus motus multò velocior communicetur quam majoribus, ut ipſe etiam aſſerit, omnis autem motus fit in lineam rectam, plus recedent à centro corpora minutiora, quam majora, & hæc eſt ratio cur in telluris vortice partes craſſiores fiant centro propiores. Secundò ſi hoc ſemel admittatur, nonne planetæ ſunt corpora craſſiora particulis primi aut ſecundi elementi quibus innatant, ergo etiam ipſi planetæ ad circumferentiam ferentur. Tertiò ideo cometæ ab uno in alium vorticem tranſeunt, quia craſſiores ſunt & compactiores quam planetæ, ſed falſum eſt, nam planetæ compactiores ſunt cometis. Ego teſtes advoco oculos ſpectavi enim ſæpiſſimè cometam anni 1664 adhibito etiam teleſcopio, non mihi videbatur nube aliqua compactior, cum tamen planetæ multò ſint compactiores. Confirmatur id ex eò quòd cauda cometarum melius tribui non poſſit quam radiis ſolaribus per ejus corpus trajectis. Deinde non poſſet cometa deſcendere in noſtro vortice ita ut fiat valdè nobis vicinus, ut ex ejus motu manifeſtum redditur: eſto enim poſſit aliquandiu retinere conceptum ab alio vortice impetum, non tamen ita ut infra Martem deſcendat, ſed ſubito rejici deberet ad circumferentiam, ita ut ſi benè conſiderentur omnes cometarum circumſtantiæ vix ulla cum effectibus congruat. Præterea hic noſter vortex cujus centrum eſt ſol, volvitur circa polos Zodiaci, cometæ autem non feruntur in conſequentia, ſed ut plurimum in antecedentia, & per alia plana longè diverſa ab iis in quibus volvuntur Planetæ.

Reliquas verò cometarum circumſtantias ita malè explicat ut nihil pejus. Primò quidem cometam per lineam rectam movet. Primò hoc falſum, nec amplius propugnari poteſt, cum ex ſuo plano exeant, quod non facerent ſi lineam rectam percurrerent. Secundò neque ſecundum ejus principia verum eſt, nam dum cometa ferebatur in uno vortice, etiamſi verſus circumferentiam propulſaretur, circulariter tamen fieret hæc impulſio, prout nempè feruntur partes illius vorticis. Cum ergo ubi attingit limites duorum vorticum æqualiter ab utroque expellatur, non video quomodo poſſit ſuum deſerere, ut alienum ſubeat, ferretur enim per terminos duorum vorticum. Non explicat melius apparentem cometarum incitationem, & retardationem. Certum eſt enim quod cometæ initio & in fine lentius procedant, in medio autem cum majores apparent velocius ferantur, hoc eſt initio & in fine, quaſi ſtationarii ſint & aliquibus tantum minutis in ſuo orbe promoveantur, in medio curſu plures gradus in ſingulos dies percurrant, cujus rei certa ratio non redditur. Annè initio cum eſt noſtrum vorticem ingreſſus, repellatur ad ejus circumferentiam, ex præconcepto autem motu à priore ſcilicèt vortice feratur aliquam tamen retardationem patiatur, ſi hoc ſit, in fine cum expelletur ad circumferentiam incitaretur ejus motus. Deinde motus cometarum explicatio, & figura quam profert videntur innuere ita ferri cometam in noſtro vortice quaſi nihil omnino ab ejus motu pateretur, cum tamen illi ſe accommodare debeat, & obſequi.

Addo quod nulla ratio redditur cur nullus cometa ſemicirculum abſolvit.

Ex quibus evidenter concludo nullam motus cometarum circumſtantiam in hac hypotheſi explicari, nam hypotheſis quæ meliùs illum explicat, ſupponit ejus æquabilitatem, nempè quod temporibus æqualibus aut æquales arcus ſui circuli, aut æqualia ſegmenta ſuæ lineæ percurrat, atque adeò quòd omnis acceleratio aut retardatio

Digitized by Google

motuum cometarum ſit tantum apparens, & non realis, quod eſt uſque adeo verum, ut ex tribus obſervationibus, liceat totum progreſſum concludere. Ridiculus etiam eſt quod nolit fidere Aſtronomorum obſervationibus, aſſerentibus anno 1450 viſum fuiſſe cometam qui lunam tegeret.

PROPOSITIO XIII.

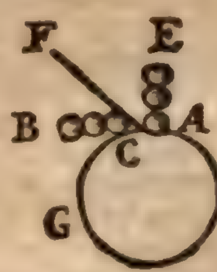
Quæ reprehendi debent in doctrina Vorticum Carthesiana.

Quamvis inter Peripateticos benè multi, intelligentiis directionem ſolam motuum cœleſtium tribuentes, Planetiferum, liquidum,& ad modum vorticis continuò rotari admittant, in quo nempè planetæ cum locum obtineant, quem natura cujuſque & leges æquilibrii exigunt, longè tamen abeunt ab opinione Cartheſiana. Ille enim tot vortices excentricos invehit, quot ſunt ſtellæ, & hoc primum hîc arguo, & contendo ſtellas moveri in eodem vortice in quo Planetæ volvuntur ſed lentius. Volunt item non eſſe motum primò impreſſum qui à Deo continuò producatur, ſed ineſſe ipſi cœlo vim productivam motus quod eſt melius quam ad Deum recurrere. Oſtendo igitur non eſſe tot vortices quot ſtellæ ſunt.

Ideo ſaturnus in eodem vortice circumvolvi in quo cæteri planetæ dicitur à Carthеſio, quod circa eoſdem polos Eclypticæ ejus motus peragatur, aut ab eo non multum aberret, ſed pariter ſtellæ fixæ motum habent lentiorem, licèt circa polos Zodiaci peragatur,vi cujus parallelos Eclypticæ deſcribunt; ergo ſi ſaturnus in eodem eſt vortice quo cæteri planetæ, in eodem etiam ſtellæ circumvolventur. Si enim ſtellæ fixæ eſſent toridem ſoles, & quaſi centra vorticum, immobiles eſſent, nullumque in ordine ad noſtrum ſolem, aut etiam ad tellurem motum haberent, niſi apparentem,qui cum ejus motu annno ſuam periodum abſolveret. Sed ſtellæ fixæ habent præterea motum aliquem quo feruntur in conſequentia; ergo dici debent eſſe in eodem vortice, in quo planetæ: vel tandem aliquo modo explicari ille motus. Videntur autem conſonare reliquæ circumſtantiæ,nempè quod ſicut planetæ à centro remotiores tardius ſuam periodum decurrant, ut inductione patet, ita etiam ſtellæ longius temporis intervallum exigunt, quia remotiores. Hunc motum diſſimulat Cartheſius,ut benè multas effectuum circumſtantias, cum enim affectet à cauſis effectus concludere, ipſi plerumque accidit ut eos longè diverſos faciat ab iis quos obſervamus.

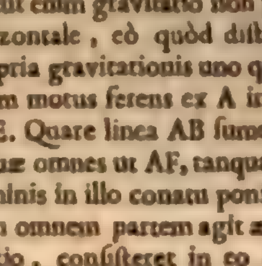
Secundum quod in horum vorticum conſtitutione reprehendendum puto, iſtud eſt. Quod cum probaſſet experientiis nonnullis, quod quotieſcumque corpus aliquod in orbem volvitur partes ejus à centro recedere conentur, idem concludat de omnibus globulis ſecundi elementi, velitque eos recedere à centro per lineam rectam. Contendo autem quod iſte receſſus fieri debeat per tangentes. Nam fundamentum iſtius receſsûs eſt quod omnis motus ex natura ſua in lineam rectam procedat, quare etiam ſi circularis fuerit propter aliquem obicem, ubi deſinit ille obex, ſervat ultimam directionem quam habuit. Conatus igitur omnis partium liquidi eſt ad continuandum motum per lineas tangentes, quamvis autem globuli intra tubum circulariter motum contenti recedant à centro directè, globuli tamen ſecundi elementi non ita continentur à viciniis ut ferantur hoc modo, quia omnes ſimul hoc modo feruntur per lineas tangentes.

Quod verò comparare nititur hunc receſſum, cum gravitatione quæ licèt ferat ad centrum per lineas tamen declives in planis inclinatis exercetur,dico comparationem non procedere.Nam motus cujuſque globuli non eſt directè à centro, ſed tantum obliquè per lineas tangentes, licèt autem determinari poſſit ad alias lineas, non tamen ad eas quæ cum propria linea angulum rectum efficiant. Sit enim globulus A qui habeat motum ex A in C, ſecundum leges motus, quin lineam



rectam peragitur, dico quod vi illius motus nunquam feretur in E. Nam ut eidem comparationi inſiſtamus,ſicut enim gravitatio non peragitur per planum horizontale, eò quòd diſtet à linea directionis propria gravitationis uno quadrante circuli, ita etiam motus ferens ex A in B non feretur ex A in E. Quare linea AB ſumenda eſt quaſi media, reliquæ omnes ut AF, tanquam inclinatæ. Unde vis luminis in illo conatu poni non debet, nam lumen in omnem partem agit æqualiter, ſed ſi luminis actio, conſiſteret in eo conatu quem partes ſecundi elementi habent ad hoc ut recedant à centro, non æqualiter in omnem partem videretur, ſed præcipuus conatus eſſet per tangentes,ideoque quod obliquè ſecundum lineam tangentem videretur, fortius ageret, & quod minus ab ea recederet, melius etiam videretur. Videmus enim motum deorſum per plana inclinata lentiorem eſſe quam dum per lineam verticalem exercetur, nulla autem in luminis actione diverſitas animadvertitur.

Tertiò in compoſitione horum vorticum præterquam quod omnia gratis aſſumuntur, oſtendo multa eſſe pugnantia. Primò quidem impoſſibile eſt ut tres vortices conjungantur, quin duorum motus inter ſe pugnent & ferantur in partes oppoſitas. Nã ſi rota A volvatur per ABC,debebit ſecunda rota ferri per ADE, & tertia per FEG,



ergo motus rotarum ADE, FEG ſibi adverſantur, & quomodocumque iſtos vortices diſponas, in idem inconveniens incurres. Sive enim unius vortex eclyptica attingat alterius vorticis eclypticam, ſive partes ab eclyptica remotiores perinde eſt;ſi enim motus alterutrius non eſt & in eaſdem partes,

partes, & æquè velox, ſemper contrarius eſt, unde ſi eclyptica unius vorticis attingat polum alterius, cum ibi attingat partes quietas, & ipſa velociſſimè moveatur, non poterit ejus motus non retardari, & quies partium polarium interturbari. Quare quomodocumque diſponatur tres vortices impoſſibile eſt ut non ſibi invicem ſint contrarii uniuſque motus velox alteri tardius motæ communicetur.

Non minus contradictoria eſt ratiocinatio etiam quam affert ut probet materiam ſubtilem à centro cujuſque vorticis ad circumferentiam ejus ſeu ad eclypticam delatam, ſi in polos alterius vorticis ibi incurrat, ferri per axem ad ejus centrum, atque hoc modo reparare damna, quæ ex receſſu à centro oriri poſſent. Quia inquit ibi in partibus polaribus minor eſt reſiſtentia eò quod moveantur tardius, aut potius non moveantur, nam ex principiis ejus motus motui non eſt contrarius, ſed potius quieti. Ergo quæ lentius movebuntur aut etiam quieſcent, minuſque facilè è ſuo loco ejicientur, quam quæ citiſſimè circumvolvuntur; ergo reſiſtentia major eſt in partibus polaribus, quam in partibus citiſſimè motis.

Nihil etiam conſequenter dicit circa motum hujus materiæ ſubtilis à polis cujuſcumque vorticis ad ejus centrum, invenio enim ubique manifeſtas contradictiones. Dicit ergo quod hæc materia ſubtilis ſubminiſtretur ab aliis vorticibus quorum eclypticæ vicinæ ſint polis hujus vorticis: quaſi receſſus particularum à centro fieret per lineam rectam, & non per tangentes, quod tamen requireretur ad hoc ut hæc materia ſubtilis ſubiret axem & recta procederet ad centrum. Deinde vult eandem materiam ſubtilem rectà tranſire uſque ad centrum ſolis, immò & ultra, hoc eſt uſque ad circumferentiam oppoſitam, ubi occurrit globulis ſecundi elementi eoſque impellit verſus circumferentiam. Sed quæro utrum materia hæc ſubtilis dum à polis vorticis ad centrum ejus progreditur nullos globulos ſecundi elementi offendat, & eos non propellat verſus centrum; puto quod tantam vim habeat ad urgendum verſus centrum dum ad eum accedit, quantam habet ut oppoſitos impellat ad circumferentiam ubi centrum ſolis prætergreſſa fuerit. Deinde cum ex oppoſitis polis hæ particulæ primi elementi ad centrum veniant, nonne ſibi mutuo in centro occurrent, & motum ſuum elident, aut regredientur eâdem quâ venerant via.

6. In genere contra hos vortices arguo, Quod eorum motus omnino impoſſibilis videatur' nempè ut in eodem ſtatu permaneat. Sic enim conſtituendus eſt ut apparentiis & obſevationibus reſpondeat ordines & centro viciniores minori tempore ſuas circulationes abſolvant, quam ordines remotiores, ſive ſecundum rationem ſuarum diſtantiarum, ſive in alia quacumque ratione, parum intereſt. Sed hoc fieri non poteſt quin inferiores continuò impellant ſuperiores, eiſque tantumdem de ſuo motu communicent, ergo tandem ad aliquam æqualitatem motuum pervenietur, ad eam nempè quæ neceſſaria eſt ut nullus fiat globulorum occurſus ſed quilibet ordines ſuum motum illibatum conſervent: quamdiu enim ordines inferiores incurrent in globulos ſuperiorum ordinum, tamdiu motum ſuum retardabunt. Clarum autem eſt quod fiet iſte occurſus. Cum enim iſti ordines ſint ex globulis compoſiti, qui quantum poſſunt à centro recedant, ſecundum doctrinam hujus authoris, globuli inferiores globulis ſuperioribus non reſpondebunt, ſed inſerentur inter intervalla globulorum; ſed hoc poſitò fieri non poteſt ut ordo inferior CD citius abſol-



vat ſuum circulum; quin globulus inferior qui immediatè ſequebatur ſuperiorem, magis promoveatur, non poteſt autem illum anteire, quin in eum incurrat tantumdemque de ſuo motu amittat; quod diſpendium non reparabitur à globulis ſuperioris ordinis, ſed tantum ab inferioribus; inferiores ergo amittent ſuum motum, & ad æqualitatem revocabunt.

Quæ difficultas ceſſat in aliis hypotheſibus quæ nec cœlum ex globulis componunt ſed ex materia fluida, eique principium motus tribuunt, ita ut difficultates etiam aliquas ſi quæ occurrant facilè ſuperare poſſit.

PROPOSITIO XIV.

De maculis ſolaribus.

Tota macularum ſolarium, & earum quæ circa ſtellas produci poſſunt generatio, pendet ex particulis aliquibus ſtriatis primi elementi, quæ ab utroque polo vorticis ad centrum ejus quaſi per axem progredientes, ubi ad ſolem pervenerunt ſibi invicem adhærent, & à motu ipſius ad circumferentiam ejus propulſantur, ibique aſſiduè circumrotantur, donec vel diſſipentur vel longius expellantur.

Primò arguo generationem iſtarum particularum ſtriatarum, ex eò quòd velit eſſe particulas primi elementi, ſed primum elementum hactenus conſideravit, ut ſummè liquidum, quod autem ſummè liquidum eſt, cum eam quam aliquando habuit figuram non retineat, immò nullam habere poſſit peculiarem ob ſummam fluiditatem, non video quomodo in primo elemento ullæ particulæ ſtriatæ eſſe poſſint. Intelligit autem per particulas ſtriatas, in cochleam ſeu ſpiram efformatas; eo modo quo ſi priſma triangulare in orbem circumvolutum per foramen exiguum tranſmittatur ejus anguli ſeu ſtriæ in orbes ſeu ſpiras abeunt, ita etiam dum particulæ primi elementi inter foramina triangularia, ſeu intervalla globulorum ſecundi elementi tranſmittuntur, eorum figuram induunt. Quæ puto manifeſtam contradictionem involvere, nam primò vel materia primi elementi liquida eſt vel dura, vel partim dura, partim liquida. Si tota liquida eſt, impoſſibile eſt ut in cochleas efformetur, ſed ob liquiditatem continuumque motum liquiditatis nulla erit inter partes illas unio, quæ neceſſaria eſt ut hæc figura peculiaris reſultet. Si diceretur materia primi elementi dura eſſe, non eſſet primum elementum, quod concipi debet tanquam maximè liquidum. Reliquum eſt ut dicantur innatare partibus liquidis primi elementi partes duræ, quæ adhuc non ſunt ſufficienter diviſæ ſeu non ſatis liquidæ. Sed contra; vel illæ partes duræ ſunt minores quam ſint triangularia foramina, quæ inter globulos ſecundi elementi

menti relinquuntur, vel æquales, vel majores, ſi hoc ultimum non poterunt ſubire hæc foramina, ſi æquales, ingreſſæ ſemel egredi non poterunt; hæc enim foramina non ſibi reſpondent è regione, ſed obliquè diſponuntur, & contendo quod triangulare priſma æquale huic foramini triangulari, ſi aliquam longitudinem ſeu altitudinem habeat quæ in ipſo admitti debet, ut ſtriæ efficiantur, egredi non poterit, hoc eſt ab uno foramine triangulari, ad aliud vicinum & obliquè poſitum tranſire; occurrit enim quartus globus ab aliis tribus ſe tangentibus quaſi ſuſtentatus. Quod ut melius concipiatur, tribus globis ſe tangentibus quartus imponatur, ut fiat ex quatuor globis quaſi pyramis, inſeraturque per unum ex his triangularibus foraminibus aliquod corpus durum, & manifeſta erit impoſſibilitas hujus tranſitus.

Quod ſi particulæ duræ quaſi innatantes materiæ ſubtili, & liquidæ ſint multò minores intervallis triangularibus, nullæ fient ſtriæ. Hoc primum contendo non fuiſſe benè conſideratum, & impoſſibile eſſe.

Secundò arguo quod velit hujuſmodi particulas ſtriatas, aut ramenta inveniri præcipuè in ea materia primi elementi, quæ à polis verſus medium cœli ſecundum lineas rectas moventur; ejus enim partes (inquit) quam minimum agitatæ ſufficiunt ad iſtum motum rectum, non autem ad alios magis obliquos qui fiunt in aliis locis. Sed contra quia hæc materia quæ à polis ad centrum fertur eadem eſt, quæ in Eclyptica alterius vorticis continebatur, ſed quæ continebatur in Eclyptica alterius vorticis carebat hujuſmodi ramentis, ergo hæc quæ ſecundum axem procedit ad centrum, caret etiam hujuſmodi ramentis. Ratio autem quam videtur afferre, quod ibi habeat ſolum motum rectum atque adeo non ſit agitata, nullius eſt momenti. Primò falſum eſt habere ſolum motum rectum, cum enim ibi globuli ſecundi elementi tam ſe tangant, quam in aliis locis intervalla inter ipſos vacua, non ſibi invicem reſpondebunt; ergo motus rectus peragi non poteſt ſed neceſſariò intortus & obliquus, immò ſi benè conſideretur textura & diſpoſitio globulorum, nulla ratio afferri poteſt, cur ea materia quæ motum inchoavit ad centrum, non regrediatur cum ſaltem ex parte, immò in decurſu totam, cum qua per unum foramen triangulare ingreditur globulum in medio poſitum offendat, & conſequenter dividatur in tres partes, exeatque per tria alia foramina, eò quòd non ſit potior ratio, cur tota per unum tranſeat. Immò quæ in medium globum incurrit regredi debeat, ſecundum leges reflexionis. Videtur item hic author confundere motum vorticis, & motum in quo liquiditas conſiſtit, motus enim hic ſeparans omnes partes à ſe invicem, non amittitur, etiamſi omnis alius motus ceſſet. Ita videmus in vaſe nullum eſſe motum circularem, aut alium quemlibet, licèt perſeveret ſemper motus liquiditatis, motus enim circularis vorticis, nihil facit ad liquiditatem, cum globuli ſecundi elementi, illum velociſſimum habeant, neque tamen propterea liquiditatem habeant. Poſſet igitur ceſſare illa agitatio communis vorticis & non tamen perire motus liquiditatis, ſunt enim hic motus differentes, qui nec ſe deſtruunt nec ſe juvant.

Tertiò arguo quod nolit diſtinguere has particulas ſtriatas à reliqua materia primi elementi quamdiu inter globulos ſecundi elementi verſantur, quia inquit nullum peculiarem effectum habent, tum quia multas alias non multò minores, nec celerius agitatas in ea contineri arbitramur. Ita ut inter omnium minutiſſimas, & iſtas ſtriatas innumeri ſint aliarum gradus, ut facilè ex inæqualitate viarum quas perlabuntur agnoſci poteſt. Dico ergo totam hanc Aſſertionem contrariam eſſe doctrinæ ſupra poſitæ de liquiditate perfecta, quæ ineſſe debet primo elemento, vi cujus ita ejus particulæ ſint actu diviſæ, ut nullam accipere poſſim quæ non habeat motus diverſos, atque adeo vi talium motuum ſit diviſa in alias minores. Si enim dividatur tantum prout opportunitas tulerit, hoc eſt cum viæ per quas tranſeundum erit fuerint majores, particulæ etiam majores evadant relabitur in opinionem communem ſtatuentem liquiditatis eſſentiam in diviſibilitate facili, & non in actuali diviſione ex motu vario orta. Quod ſi dicatur primum elementum habere varios gradus liquiditatis, ita ut in materia ſummè liquida innatent particulæ duræ, contendo nullam eſſe potiorem rationem, cum hæ inveniantur potius in materia ſubtili quæ à polis advenit, quam in materia ipſa ſolis; ratio eſt quia hæc ramenta quæ tranſeuntia per tot anguſtias in tot globos ſolidos incurrunt potius franguntur, quam ſi in majori copia ejuſdem materiæ ſubtilis innatarent. Quare melius conſervabuntur hæc ramenta in ſole quam dum coguntur tranſire per tot anguſtias, atteruntur enim etiam.

Quartò non ſola materia ſubtilis aut etiam ramenta circumvolvuntur per motum circularem ipſius vorticis, ſed etiam ipſa foramina triangularia, globuli ſecundi elementi, ergo nullæ producentur ſtriæ ad modum ſpirarum, probatur conſequētia. Quotieſcumque generatur cochlea, debet vel foramen firmum eſſe, & corpus quod inſeritur circumvolvi vel foramen circumvolui, & corpus quod inſeritur rectà procedere, ſed ex ſuppoſitione & conſtructione vorticis, tam globuli circumvolvuntur quam materia ſubtilis quæ per intervalla tranſcurrit, ergo non producentur ullæ cocleæ. Quare ex eo nulla poterit afferri ratio cur quæ ab uno polo adveniunt non regrediantur facilè, aut contrariam ineant viam. Nam cum in ipſis globulis ſecundi elemēti nulli canales cochleari excaventur, ſed maneant foramina ſeu intervalla ſemper triangularia perinde erit, quam viam ineant iſtæ particulæ ſtriatæ, cum ſemper ſint congruentia foramina.

Ex his concludo quod ſine ratione dicatur advenire à polis hæc materia ramoſa, cum tam benè aliunde advenire poſſit, unde ex fortuito concurſu ramentorum poſſunt generari maculæ. Quod non melius explicatur toto hoc circuitu, quam ſi dicamus ex aliqua materia denſiori, hoc eſt non æquè liquida, aut agitabili coaleſcere poſſe maculam, cum autem explicari non poſſit in quo poſita ſit denſitas ſecundum principia hujus authoris, ad principia communia recurrendum erit.

Quod ad præciſam generationem iſtarum macularum pertinet. hæc videtur explicari comparatione liquorum igni admotorum qui ubi effervefcunt diverſas particulas diverſæ à reliquis naturæ, ac minus ad motum aptas emittunt in ſpumam ex iis conflatam, quæ ſupra eorum ſuperficiem natat. Ita etiam materia ſolis ex ejus polis versùs Eclypticam ebulliens particulas ſtriatas aliaſque

omnes

omnes quæ facilè motui non obſequuntur ex ſe tanquam ſpumam expellit.

Hic multa expendere licèt, hæc enim comparatio claudicat, cum in liquoribus ebullientibus ſpuma ad ſuperficiem ejiciatur quia levior eſt, in ſole autem & admiſſo ejus motu velociſſimo nihil tale apparet, ideoque nulla videtur eſſe ratio cur hæ materiæ alterius naturæ potius ad circumferentiam protrudantur quam ad centrum. Si enim hæ particulæ ſtriatæ ineptiores ſunt ad motum, quam materia ſubtilis ex qua componi dicitur ſol, potius ad centrum protrudetur, quam ad circumferentiam, ſi verò fuerit capacior motus, ad circumferentiam ibit. Sed ſi hoc ſemel admittatur non apparet quomodo à ſole reſorberi poſſint. Nam exemplum liquorum quæ ſæpè ſuam ſpumam reſorbent non eſt ad rem, cum in hac ſpuma non eædem ſint mutationes quæ in aliis accidunt. Nam ſpuma ut plurimum reſorberi videtur quod partes ſubtiliores avolent, & aër ab iis extricetur, aut quod in ea fiat alia ſubſtantialis mutatio quæ cum ab hoc authore non admittatur, vix divinare poſſumus quid ſit iſtud reſorberi. Niſi quod hæ particulæ ſtriatæ comminuantur, & dividantur, hoc eſt in materiam ſubtilem abeant; quod quomodo fiat non ſatis explicatur, cum nihil occurrat ſolidi, ſed in materia liquidiſſima, & molliſſima hæ particulæ ſtriatæ innatent.

Reliquæ macularum ſolarium circumſtantiæ non melius explicantur. Vult autem in eorum extremitatibus colores iridis pingi, quod in extremitatibus nonnihil in acutum definant, eò modò quo priſma triangulare, unde fiat ut colores Iridis ſimiliter exhibeant. Sed improbabile eſt ita in extremitatibus imminui ut eum angulū efficiant qui ad hoc neceſſarius eſt. Adde quod reſpectu tantum unius loci tales colores exhiberent; videmus enim ſolis radium, per triangulare priſma trajectum in uno tantum loco exhibere colores, quare cum hæ maculæ communiter teleſcopiis majoribus ſpectentur, ſæpè accidit ut ex ipſis oriatur talis coloratio, quæ ut plurimum in confiniis umbræ & lucis apparet.

Probabilitate caret quod maculæ in faculas ideò mutentur, quia materia ſolis ſupra eas aſſurgat, & majore vi inter maculam, & cœlum vicinum fluendo, majorem etiam motum habeat. Primò quia motus tam lentus, quo ſol intra 27 dies circumvolvitur, non eſt is in quo flamma conſiſtit. Cum ſint motus longè celeriores, qui tamen flammam non exhibent, ſed de hoc dicemus inferius. Secundò quod materia ſolis aſſurgat ſupra maculam, videtur eſſe contrarium ſupra poſitis principiis. Si enim macula talis eſt naturæ ut ad circumferentiam ejiciatur, nunquam materia ſolis eam teget, & quamvis eam tegeret hoc eſt macula immergeretur intra ſolis ſuſtantiam, non tamen ſol propterea à ſua figura ſphærica exorbitaret, cum ejus materia ſit ſummè liquida facilèque cedat.

Tertiò etiamſi materia ſolis ſupra maculam aſſurgeret, cum macula non ſit immobilis, ſed ſimul cum ejus materia volvatur, nulla eſt ratio, cur propterea materia ſolis motum habeat incitatiorem. Quare principia communia faciliora ſunt, nempè ut dicatur verè accendi macula eo modo, quo fumus flammam concipit, ſi tamen verum eſt quod macula in faculam mutetur, quod unus aſfirmavit P. Scheyner; ſed dubito an colorationem macularum, pro facula aſſumpſerit, nihil enim tale ab aliis notatum audivi.

Hæc ſcribentem Authorem immatura mors occupans impedivit ne ſuſceptum opus abſolveret. Cujus quantulamcumque hanc partem hìc adſcribendam cenſui, ut ex illa id integrum quale quantumcumque futurum eſſet, eruditus lector ferre poſſet judicium.

FINIS PRIMI TOMI.

UNIVERSIDAD CENTRAL (BIBLIOTECA) LA FACULTAD DE JURISPRUDENCIA

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google